2. Лыгин В.К., Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е.// Электронная техника. Сер. I. Электроника СВЧ. 1987. N 7. С. 36.

3. Молоковский, Сушков. Интенсивные электронные и ионные пучки. - Л.: Энергия, 1991.

Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию 29 мая 1992 г.

УДК 519.655.35

К ВОПРОСУ ОБ ИНВАРИАНТАХ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ

В. А. Трофимов

Как известно, инварианты нелинейного распространения оптического излучения представляют практический интерес как при его численном моделировании (для контроля получаемых результатов и построения разностных схем), так и для анализа с их помощью взаимодействия световых пучков и импульсов с веществом. Поэтому они привлекают к себе внимание исследователей на протяжении многих лет [1 - 6]. В последние годы в связи с развитием оптической аппаратуры для эффективной компрессии импульсов интенсивно исследуются закономерности распространения фемтосекундных импульсов [7 - 9], широко привлекая для этой цели численное моделирование. В настоящей работе записаны некоторые инварианты взаимодействия таких импульсов со средой в случае ее инерционного и безынерционного отклика с учетом дисперсии второго порядка. Данный процесс описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\alpha pA + \gamma\alpha\,\frac{\partial}{\partial t}(pA) = 0,\quad 0 < t < T,\ z > 0, \tag{1}$$

$$\tau\,\frac{\partial p}{\partial t} + p = |A|^2$$

с начальными и граничными условиями

$$A(0,t) = A_0(t),\quad A(z,0) = A(z,T) = p(z,0) = 0. \tag{2}$$

Здесь A - нормированная на максимальное значение комплексная амплитуда импульса, распространяющегося вдоль оси z, которая измеряется в единицах длины дисперсионного расплывания, t - нормированное на длительность импульса время в сопровождающей его системе координат, α - отношение начальной мощности импульса к характерной мощности самовоздействия, γ - коэффициент, характеризующий скорость изменения нелинейной поляризации, τ - отношение времени установления нелинейного отклика к длительности импульса, p - нормированная добавка к показателю преломления невозмущенной среды. Замечу, что связь безразмерных переменных с физическими параметрами можно найти, например, в [9].

Для записи инвариантов введем новую функцию

$$\mathcal{E} = \int_0^t A \exp(i\eta/\gamma)d\eta, \qquad (3)$$

относительно которой уравнения (1 в предположении $\frac{\partial A}{\partial t}\Big|_{t=0,\,T} = 0$ (это требование легко удовлетворить в силу финитности начального распределения комплексной амплитуды) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \left(\frac{2}{\gamma} + \alpha\gamma p\right)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + i\,\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \frac{i}{\gamma^2}\,\mathcal{E} = 0, \qquad (4)$$

$$\tau\,\frac{\partial p}{\partial t} + p = \left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right|^2$$

с граничными условиями $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\Big|_{t=0,\,T} = 0.$

Рассмотрим систему (4) в момент окончания импульса. После домножения первого уравнения (4) на $\mathcal{E}^*$, а сопряженного к нему на $\mathcal{E}$ и учитывая, что при $t = T$ первая и вторая производные по времени от $\mathcal{E}$ равны нулю, получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\,|\mathcal{E}(z,T)|^2 = 0. \qquad (5)$$

Следовательно, имеет место сохраняющаяся в процессе взаимодействия импульса со средой величина

$$I_1 = |\mathcal{E}(z,T)|^2 = \text{const}. \qquad (6)$$

Смысл инварианта I_1 легко понять, рассмотрев начальные распределения вида

$$A_0(t) = |A_0(t)|\exp(-it/\gamma). \qquad (7)$$

Тогда инвариант I_1 означает постоянство интеграла от огибающей амплитуды (а не интенсивности) импульса.

Следующий инвариант можно получить, домножив первое уравнение системы (4) на $\partial\mathcal{E}^*/\partial t$, а сопряженное к нему уравнение на $\partial\mathcal{E}/\partial t$. Вычтя их друг из друга, проинтегрировав по времени, нетрудно получить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^T \mathcal{E}\,\frac{\partial\mathcal{E}^*}{\partial t}\,dt - \mathcal{E}(z,T)\,\frac{\partial\mathcal{E}^*}{\partial z}\,(z,T) - \frac{i}{\gamma^2}\,|\mathcal{E}(z,T)|^2 = 0. \qquad (8)$$

Выразив затем $\partial\mathcal{E}^*/\partial z$ из уравнения (4) и используя краевые условия, преобразуем (8) к равенству

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^T \mathcal{E}\,\frac{\partial\mathcal{E}^*}{\partial t}\,dt = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^T\int_0^t A\,\exp(i\eta/\gamma)d\eta A^*\,\exp(-it/\gamma)dt = 0. \qquad (9)$$

Следовательно, имеет место инвариант взаимодействия

$$I_2(z) = \int_0^T\int_0^t A(z,\eta)\exp(i\eta/\gamma)d\eta A^*\,\exp(-it/\gamma)dt = \mathrm{const}. \qquad (10)$$

Для полноты анализа запишем инварианты распространения светового импульса в безынерционной среде ($\tau = 0$). В этом случае легко показать, что сохраняется плотность энергии импульса

$$I_3 = \int_0^T |A|^2 dt. \qquad (11)$$

Другой инвариант можно записать, домножив первое уравнение системы (1) на $\partial A^*/\partial t$, а сопряженное к нему уравнение на $\partial A/\partial t$ и вычтя затем их друг из друга. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{2}\int_0^T J dt + \gamma\alpha\int_0^T \frac{\partial|A|^2}{\partial t} J dt = 0, \qquad (12)$$

где для краткости введено обозначение $J = A\,\frac{\partial A^*}{\partial t} - A^*\,\frac{\partial A}{\partial t}$. Перебросив производную во втором слагаемом выражения (12) и воспользовавшись квазиоптическим уравнением (1), можно преобразовать (12) к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial z}\,I_4(z) = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^T (J + i\alpha\gamma|A|^4)dt, \qquad (13)$$

что означает сохранение в процессе взаимодействия инварианта I_4.

В заключение сделаем несколько замечаний. Так, инварианты I_1, I_2 не зависят от вида уравнения относительно p. Некоторые из полученных здесь инвариантов будут также справедливы при учете дисперсии третьего порядка и дифракции пучка. Следует отметить, что записать аналогичный инварианту I_3, имеющему место при распространении длинного импульса в керровской среде ($\gamma = 0$) (см., например, [1]), не удалось.

Для подтверждения эффективности развиваемых нами нелинейных симметричных разностных схем для решения задач лазерной физики [10] проводилось численное моделирование распространения гауссова импульса, фемтосекундной длительности, в безынерционной ($\tau = 0$) среде в случае дефокусирующей и самофокусирующей нелинейности ($|\alpha| = 5$) разных значений параметра γ на трассах $z = 0{,}2$. Инвариант I_3 сохранялся практически точно, а у инварианта I_4 оставались неизменными четыре знака после запятой при расчетах на сетке, содержащей 100 точек по времени и 20 точек по пространству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов: Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980.
2. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Чернега П.И. Препринт ИПМ АН СССР N 52. - М., 1979.
3. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П.//ЖЭТФ. 1975. Т. 68. Вып. 3. С. 834.
4. Гринь Ю.Г., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П.//Квантовая электроника. 1977. Т. 4. N 4. С. 700.
5. Литвак А.Г., Фрайман Г.М.//Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. N 9. С. 1341.
6. Сухоруков А.П., Трофимов В.А.//Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. N 1. С. 12.
7. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. - М.: Наука, 1988.
8. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. - М.: Наука, 1988.
9. Выслоух В.А., Матвеева Т.А.//Квантовая электроника. 1987. Т. 14. N 4. С. 792.
10. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Трофимов В.А. Математическое моделирование в нелинейной оптике. - М.: Гос. ун-т, 1989.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16 марта 1992 г.