ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Том 35, N 3,4 РАДИОФИЗИКА 1992

Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 621.391

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПОТОКЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Ю. Н. Зайко

Нелинейные волны плотности заряда (ВПЗ) с учетом релятивистских эффектов исследовались аналитически [1] и численно [2] достаточно подробно. В настоящей работе получены и исследованы уравнения для медленно изменяющихся параметров ВПЗ: амплитуды, частоты и др. Исходная система уравнений в гидродинамическом приближении имеет вид

$$v_t + vv_z = \frac{e}{m}\gamma^{-3}\varphi_z, \quad n_t + (nv)_z = 0, \quad \varphi_{zz} = 4\pi e(n - n_0), \tag{1}$$

где v, n – скорость и плотность частиц с зарядом $-e$ и массой m, φ – потенциал пространственного заряда, $\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}$ – релятивистский фактор, v_0, n_0 – постоянные составляющие v и n. Предполагается, что вдоль оси z направлено бесконечное магнитное поле, что делает задачу одномерной, и что v_0 значительно превышает тепловой разброс скоростей. Решение (1) вида $v(\theta)$, $\theta = kz - \omega t$ может быть приведено к квадратуре $\theta = \pm\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{-2U(\xi)}} + \theta_0$, где $U(\xi)$ дается выражением

$$U(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2}\frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\xi^2\right]^3}{(\xi - 1)^2}\left[\frac{2\xi_0\xi - 2\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\xi^2}} + C_1\right], \tag{2}$$

$\omega_{p0}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$, $\xi = \frac{kv}{\omega}$, $\xi_0 = \frac{kv_0}{\omega}$. **Знаки ± соответствуют медленной и быстрой ВПЗ. Налагая требование, чтобы при $c \to \infty$ исследуемые волны переходили в нерелятивистские плазменные волны [3], получаем выражение для постоянной C_1 с точностью c^0: $C_1 = G - \xi_0^2 + 2\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2$,** где $\sqrt{G}$ имеет смысл амплитуды волны. Члены следующего порядка $\sim c^{-2}$ в C_1 могут быть получены из условия симметричности точек поворота для колебаний потенциала. Дисперсионное уравнение $\oint d\theta = 2\pi$ может быть явно вычислено с точностью до членов c^{-2} с помощью приема, использованного в [4]. Точное дисперсионное уравнение для релятивистских ВПЗ конечной амплитуды с учетом магнитного поля приведено в [1].

Уравнения (1) в нерелятивистском пределе имеют стационарное решение вида (2), которое может быть получено в явном виде [1, 5]. Отклонения от стационарности, вызванные релятивистскими поправками, описываются системой уравнений для медленно меняющихся параметров стационарной волны G, v_0, ω и k, которые могут быть получены методом усреднения Уизема [6]. Усреднение проводится в уравнениях, имеющих вид законов сохранения для (1):

$$\mathcal{H}_t + T_z = env[\gamma^{-3} - 1]\varphi_z,$$
$$\mathcal{P}_t + \mathcal{R}_z = en[\gamma^{-3} - 1]\varphi_z, \tag{3}$$

где $\mathcal{H} = n\dfrac{mv^2}{2} - e(n - n_0)\varphi + \dfrac{1}{8\pi}\varphi_z^2$, $\mathcal{P} = mnv$ – плотности энергии и импульса для нерелятивистского потока, $T = \dfrac{1}{4\pi}\varphi_z\varphi_t + nv\left(\dfrac{mv^2}{2} - e\varphi\right)$ и $\mathcal{R} = mnv^2 - en_0\varphi - \dfrac{1}{8\pi}\varphi_z^2$ – плотности потоков энергии и импульса. Кроме того, к (3) следует добавить закон сохранения числа частиц $n_t + (nv)_z = 0$ и очевидное уравнение $k_t + \omega_z = 0$. После выполнения усреднения по быстрой переменной θ с помощью соотношения $d\theta = \pm\dfrac{\omega}{\omega_{p0}}\times$ $\times\dfrac{(\xi - 1)d\xi}{\sqrt{G - (\xi - \xi_0)^2}}$, получим систему уравнений

$$k_t + \omega_z = 0, \qquad N_t + (v_0N)_z = 0,$$

$$\left[N\left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}G\frac{\omega^2}{k^2}\right)\right]_t + \left[Nv_0\left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}G\frac{\omega^2}{k^2}\right)\right]_z = -\frac{6v_0}{c^2}\frac{\omega}{k}\sqrt{G}(kv_0\omega)\left[v_0^2 + G\frac{\omega^2}{k^2}\right], \tag{4}$$

$$[Nv_0]_t + [Nv_0^2]_z = -\frac{2}{c^2}\frac{\omega}{k}\sqrt{G}(kv_0 - \omega)\left[3v_0^2 + G\frac{\omega^2}{k^2}\right].$$

Уравнения (4) получены при условии $G < (\xi_0 - 1)^2$, т.е. до опрокидывания волны. Величина $N = \pm \frac{kv_0 - \omega}{\omega_{p0}}$ представляет собой число возмущенных волн на длине невозмущенной волны. После несложных преобразований два последних уравнения из (4) приводятся к виду

$$A_t + v_0 A_z = \mp 8 \frac{v_0}{c^2} \omega_{p0} A^{3/2}, \quad v_{0t} + v_0 v_{0z} = \mp \frac{2}{c^2} \omega_{p0} A^{1/2} [3v_0^2 + A], \quad (5)$$

где $A = G \frac{\omega^2}{k^2}$. Решение (5) может быть получено численно или аналитически, например, когда входящие в них величины не зависят от t:

$$A = \frac{A_0}{(1 \pm z/z_1)^2}, \quad v_0 = \left[\frac{C_2}{(1 \pm z/z_1)^3} - \frac{A_0}{(1 \pm z/z_1)^2}\right]^{1/2}, \quad (6)$$

где $A_0 = A(0)$, $C_2 = v_0^2(0) + A_0$ – постоянная интегрирования, $z_1 = \frac{c^2}{4\sqrt{A_0}\omega_{p0}}$. Учитывая, что согласно уравнениям (5) $\omega_t = 0$, $\xi_0(z) = \frac{v_0(0)}{v_0}[\xi_0(0) - 1] + 1$, получаем, что в соответствии с общими представлениями медленные ВПЗ (+) усиливаются, а быстрые (-) ослабляются. Окончательно находим выражение для амплитуды медленной волны $\sqrt{G} = \sqrt{G_0}\,\Gamma$, где Γ – усиление,

$$\Gamma = \left[\frac{1 + z/z_1}{1 - z/z^*}\right]^{1/2} \left\{\left[1 - \frac{1}{\xi_0(0)}\right] \frac{(1 + z/z_1)^{3/2}}{(1 - z/z^*)^{1/2}} + \frac{1}{\xi_0(0)}\right\}, \quad (7)$$

$$z^* = z_1 \frac{v_0^2(0)}{A_0},$$

и электронного кпд $\eta = [v_0^2(0) - v_0^2]v_0^{-2}(0) = 1 - (1 - z/z^*)(1 + z/z_1)^{-3}$. Эти выражения получены при условии, что в точке z волна не опрокидывается, т.е. $\sqrt{G} < \xi_0(z) - 1$. Поскольку выполняется равенство $\frac{\sqrt{G}}{\xi_0(z) - 1} = \frac{\sqrt{G_0}}{\xi_0(0) - 1} B(z)$, где $B(z)$ имеет вид

$$B(z) = \Gamma(z) \left[(1 + z/z_1)(1 - z/z^*)\right]^{-1/2}, \quad (8)$$

то достаточным условием применимости полученных результатов является

$B(z) < 1$. Анализ показывает, что при $\frac{\sqrt{G_0}}{\xi_0(0) - 1} < 1$ волна не опрокинется, т. е. не наступит обгона для всех $0 < z' < \tilde{z} \ll z_1$ при выполнении условия $\xi_0(0) < 1 + 2\left[1 + \frac{G_0}{\xi_0(0)}\right]^{-1}$ (для медленной волны $\xi_0 > 1$); $\tilde{z}$ можно оценить как наименьший положительный корень уравнения $B(z) = 1$. Наступающее на сильно нелинейной стадии процесса опрокидывание волны, т. е. образование многопотокового состояния, требует для своего описания выхода за рамки использованной здесь одножидкостной гидродинамической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электродинамика плазмы/Под ред. А. И. Ахиезера. - М: Наука, 1974. - 719 с.
2. Михайлов А. В., Гусева Г. И., Завьялов М. А. и др. //Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. N 2. С. 361.
3. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я. //ДАН СССР. 1951. Т. 86. С. 193.
4. Зайко Ю. Н. //Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 1. С. 27.
5. Зайко Ю. Н. //ЖТФ. 1982. Т. 52. N 12. С. 2429.
6. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны: Пер с англ. - М.: Мир, 1977.

Центральный научно-исследовательский институт измерительной аппаратуры

Поступила в редакцию 8 августа 1990 г.