

УДК 621.385.62.01

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Д. М. Ваврив, С. А. Шарипов

Показано, что в резонансных усилителях с распределенным взаимодействием, устойчивых при воздействии гармонического колебания, может развиваться стохастическая неустойчивость при усилении реального многочастотного сигнала. С помощью текущих показателей Ляпунова аналитически определены необходимые условия возникновения хаоса. Представлены конкретные результаты численного и аналитического исследования устойчивости усилителей оротронного типа.

1. Введение. Одна из серьезных проблем, с которой сталкиваются разработчики резонансных усилителей с распределенным взаимодействием как на основе объемных [1, 2], так и открытых [3] колебательных систем, связана с обеспечением устойчивости их работы. Прежде всего это обусловлено тем, что высокая эффективность взаимодействия пучка с полем в таких приборах реализуется при значениях тока пучка  $I_0$ , близких к величине  $I_{\text{пуск}}$ , при которой происходит возбуждение автоколебаний в резонаторе. При этом оказалось [4], что величина  $I_{\text{пуск}}$  уменьшается при увеличении мощности усиливаемого сигнала  $P_{\text{вх}}$ . Это вызывает особые сложности при обеспечении устойчивости усилителей мощности.

Однако этим не исчерпываются проблемы устойчивости резонансных приборов. Из результатов анализа динамики даже простейшего лампового усилителя [5] следует, что устойчивость усилителей при усилении гармонического сигнала еще не гарантирует их устойчивости при усилении реальных сигналов с конечным числом спектральных составляющих. В последнем случае может наблюдаться стохастическая неустойчивость, приводящая к возникновению на выходе усилителя сплошного шумового спектра.

В данной работе показано, что такой тип неустойчивости может реализоваться и в резонансных усилителях с распределенным взаимодействием. Мы исследовали условия возникновения стохастических колебаний (СК) и их основные свойства на примере анализа усиления

внешнего двухчастотного колебания. В качестве конкретного объекта исследования выбран усилитель оротронного типа [3, 6, 7, 10]. Такие приборы в последнее время интенсивно исследуются и рассматриваются как одна из перспективных разновидностей лазеров на свободных электронах (см., например, [8, 9]).

2. Математическая модель. Пусть на вход усилителя поступает бигармонический сигнал с частотами  $\omega_1, \omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ), разность между которыми значительно меньше собственной частоты резонатора. Такой внешний сигнал можно рассматривать как гармоническое взаимодействие с медленно изменяющимися амплитудой и фазой. Это позволяет достаточно просто обобщить полученные ранее уравнения усилителя с гармоническим внешним воздействием [6, 10] и на исследуемый случай. Полагаем, что усилитель находится вдали от порога возбуждения автоколебаний, а мощность входного сигнала значительно ниже уровня, при котором наблюдается насыщение выходной мощности. Это позволяет ограничиться приближением кубической нелинейности при записи уравнений относительно безразмерной амплитуды  $\mathcal{F}$  и фазы  $\varphi$  колебаний в резонаторе:

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\tau} = -\alpha_0 \mathcal{F} - \alpha_1 \mathcal{F}^3 + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin(\varphi - 2\Omega\tau),$$

$$\mathcal{F} \frac{d\varphi}{d\tau} = -\delta_0 \mathcal{F} + \delta_1 \mathcal{F}^3 + B_1 \cos \varphi + B_2 \cos(\varphi - 2\Omega\tau), \quad (1)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  - безразмерные амплитуды усиливаемого сигнала;  $2\Omega = 2Q(\omega_2 - \omega_1)/\omega_r$ ;  $\omega_r$  и  $Q$  - собственная частота и нагруженная добротность "холодного" резонатора;  $\tau = t\omega_r/2Q$  - медленное время;  $\delta_0 = 2Q(\omega_0 - \omega_1)/\omega_r$ ;  $\omega_0 = \omega_r[1 - G\Phi_0\Psi_2(\Phi_s)/2Q]$  - собственная частота "горячего" резонатора;  $\alpha_0 = 1 - G\Phi_0\Psi_1(\Phi_s) > 0$  - декремент колебаний;  $\alpha_1 = G\Phi_0^3\Psi_3(\Phi_s) > 0$  - параметр нелинейной диссипации;  $\delta_1 = G\Phi_0^3\Psi_4(\Phi_s)$  - параметр неизохронности. Здесь использованы обозначения работы [4], в соответствии с которыми  $G$  - параметр эффективности взаимодействия пучка с полем, пропорциональный величине тока пучка;  $\Phi_0$  - угол пролета частицами пространства взаимодействия. Функции  $\Psi_i(\Phi_s)$  ( $i = 1 - 4$ ) определяют зависимость коэффициентов уравнений (1) от параметра пространственного рассинхронизма  $\Phi_s$ . Для основного типа колебаний в открытом резонаторе без учета влияния поля пространственного заряда пучка эти функции задаются выражениями (см. также [7, 11])

$$\Psi_1(\Phi_s) = \Phi_s^3 \sqrt{2\pi}/32 \exp(-\Phi_s^2 w^2/2),$$

$$\Psi_2(\Phi_s) = \Phi_s(\sqrt{2} w^3/16)R(w\Phi_s/\sqrt{2}) - w^2/32,$$

$$\Psi_{3,4}(\Phi_s) = (1/16\pi w) \int_{-0,5}^{0,5} \exp(-x^2/w^2) (Z_1^2 + Z_2^2) [Z_2 \cos(\Phi_s x + \Phi_s/2) \mp Z_1 \sin(\Phi_s x + \Phi_s/2)] dx.$$

Здесь

$$R(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt,$$

$$\left\{ \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4} \int_{-0,5}^x \exp(-t^2/w^2) (x-t) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} [\Phi_s(t+0,5)] dt,$$

$w$  - безразмерный радиус пятна поля на одном из зеркал резонатора, где нанесена замедляющая структура (дифракционная решетка). Для типичного значения  $w = 1/4$  функции  $\Psi_i$  приведены на рис. 1.

Уравнения (1) применимы для анализа устойчивости колебаний резонансных усилителей и с другими типами колебательных систем при соответствующем задании функций  $\Psi_i$ . Эти уравнения описывают динамику выходных колебаний как в усилителях с предварительной модуляцией пучка (многокаскадных усилителях) (см., например, [10], 4.2), так и в однорезонаторных усилителях отражательного типа [3, 7].

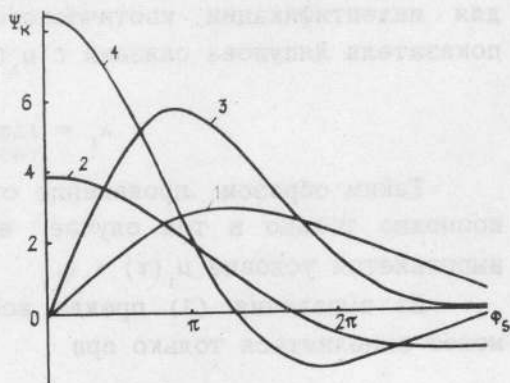


Рис. 1.

В режиме усиления гармонического колебания (например, при  $B_2 = 0$ ) при  $\tau \rightarrow \infty$  решениями уравнения (1) являются только устойчивые постоянные значения  $\mathcal{F} \equiv F$  и  $\varphi \equiv \Phi$ , удовлетворяющие уравнениям

$$((\alpha_0 + \alpha_1 F^2)^2 + (\delta_0 - \delta_1 F^2)^2) F^2 = B_1^2, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = (\alpha_0 + \alpha_1 F^2) / (\delta_0 - \delta_1 F^2).$$

При  $B_1, B_2 \neq 0$  система (1) допускает в общем случае два типа решений: периодические, с периодом, кратным периоду биений входного сигнала, и хаотические колебания, которым соответствует возникновение стохастической неустойчивости усилителя.

3. Условия возникновения хаотических колебаний. Для определения областей управляющих параметров, где наблюдаются качественно различные типы движения, проанализируем текущие показатели Ляпунова (ТПЛ) [12] системы (1). ТПЛ вводятся как логарифмические производные от норм произвольных ортогональных векторов в касательном пространстве исследуемой системы. Используя результаты работы [12], выпишем выражение для максимального ТПЛ  $\mu_1(\tau)$  системы уравнений (1):

$$\mu_1(\tau) = -\alpha_0 - 2\alpha_1 \mathcal{F}^2 + \mathcal{F}^2 [\delta_1 \sin 2(\varphi - \gamma) - \alpha_1 \cos 2(\varphi - \gamma)]. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma(\tau)$  - фаза вектора в касательном пространстве, которая находится из решения уравнения

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\delta_0 + 2\delta_1 \mathcal{F}^2 + \alpha_1 \mathcal{F}^2 \sin 2(\gamma - \varphi) + \delta_1 \mathcal{F}^2 \cos 2(\gamma - \varphi). \quad (4)$$

Возможность конструктивного использования ТПЛ для определения условий возникновения хаоса обусловлена тем, что широко используемая для идентификации хаотического движения величина максимального показателя Ляпунова связана с  $\mu_1(\tau)$  следующим соотношением:

$$\lambda_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu_1(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Таким образом, проявление стохастической неустойчивости ( $\lambda_1 > 0$ ) возможно только в том случае, если на конечных интервалах времени выполняется условие  $\mu_1(\tau) > 0$ .

Из выражения (3) прежде всего следует, что условие  $\mu_1(\tau) > 0$  может выполняться только при

$$|\delta_1| > \sqrt{3} \alpha_1. \quad (6)$$

Это соотношение указывает на то, что, во-первых, наличие конечной степени неизохронности колебаний в резонаторе принципиально необходимо для возбуждения СК и, во-вторых, нелинейная диссипация всегда препятствует их возникновению. При выполнении неравенства, обратного (6), возникновение стохастической неустойчивости принципиально невозможно независимо от вида внешнего воздействия и других параметров системы. Непосредственно из выражений (3) - (5) также следует, что для возникновения СК необходимо выполнение наряду с (6) следующих - "фазового" и "амплитудного" - условий. Разность между фазами  $\varphi - \gamma$  должна преимущественно (большую часть времени движения на траектории) стабилизироваться в окрестности значений

$$\varphi - \gamma \approx \mu_s \equiv (1/2) \arctg(-\delta_1/\alpha_1) + (\pi/2)(2n + 1), n = 0, 1, \dots, (7)$$



что соответствует ориентации вектора в касательном пространстве в направлениях его максимального растяжения. "Амплитудное" условие сводится к тому, что при этом максимальные значения амплитуды  $\max\{\mathcal{F}(\tau)\}$  должны превышать вполне определенное критическое значение:

$$\max\{\mathcal{F}(\tau)\} > F_{кр} = \left[ \alpha_0 (\sqrt{\alpha_1^2 + \delta_1^2} - 2\alpha_1)^{-1} \right]^{1/2} \quad (8)$$

Последнее условие позволяет непосредственно получить оценку для минимального значения амплитуды спектральных составляющих усиливаемого сигнала, начиная с которого возможно развитие стохастической неустойчивости. Для этого воспользуемся тем, что при одночастотном воздействии на усилитель, как следует из (2), максимальная амплитуда колебаний не превосходит значение  $B_1/\alpha_0$ . Если амплитуда второй спектральной составляющей относительно небольшая, то и в этом случае для оценки  $\max\{\mathcal{F}(\tau)\}$  допустимо принять указанное значение. Суммируя сказанное, можно выписать следующее условие возникновения хаоса:

$$\max\{B_1, B_2\} \geq B_{кр} = \alpha_0 \left[ \alpha_0 (\sqrt{\alpha_1^2 + \delta_1^2} - 2\alpha_1)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Полученные соотношения (6), (9), как показали систематические численные расчеты, однозначно определяют области параметров системы, в которых при определенных значениях  $\delta_0$  и  $\Omega$  наблюдается возбуждение СК.

Конкретизируем эти условия применительно к рабочим характеристикам усилителя. Используя определение  $\delta_1$  и  $\alpha_1$ , перепишем неравенство (6) в виде неравенства

$$|\Psi_4(\Phi_s)| > \sqrt{3} \Psi_3(\Phi_s), \quad (10)$$

выполнение которого зависит только от параметра пространственного рассинхронизма (ускоряющего напряжения пучка). Из приведенных на рис. 1 графиков находим, что режим усиления является всегда устойчивым при выборе параметра  $\Phi_s$  из интервала  $-2, 3\pi \leq \Phi_s \leq -0, 4\pi$ . Для рассматриваемых усилителей рабочей зоне по ускоряющему напряжению соответствует следующий диапазон изменения  $\Phi_s$ :  $-1, 5\pi \leq \Phi_s < 0$  [6, 10]. Таким образом, при выборе рабочих значений  $\Phi_s$  из интервала  $-0, 4\pi \leq \Phi_s < 0$  в усилителе возможно возбуждение СК. Отметим, что такие значения  $\Phi_s$  являются оптимальными для многокаскадных усилителей при небольших значениях  $I_0/I_{пуск}$  [10]. Кривая 1 на рисунке соответствует  $10^3\Psi_1$ ; 2 -  $10^3\Psi_2$ ; 3 -  $10^8\Psi_3$ ; 4 -  $10^8\Psi_4$ .

Условие (9), как оказалось, выполняется при вполне определенном виде амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) усилителя при гармоническом входном сигнале. Анализ корней уравнений (2) и их устойчивости показывает, что при этом в фазовом пространстве системы (1) при  $B_2 = 0$  существуют седловые состояния. Это соответствует тому, что АЧХ имеют вид, приведенный на рис. 2. Здесь представлена зависимость  $F(\delta_0)$  для различных значений амплитуды внешнего гармонического сигнала  $B_1$  при характерных для усилителей оротронного типа миллиметрового диапазона длин волн параметрах:  $\phi_0 = 400$ ;  $\omega = 1/4$ ;  $\phi_s = -0, 1\pi$ ;  $I_0/I_{\text{пуск. min}} = 0, 75$ , где  $I_{\text{пуск. min}}$  - минимальная по ускоряющему напряжению величина тока пучка, при которой возбуждаются автоколебания. На рисунке штриховой линией отмечены седловые состояния, которые существуют в определенном диапазоне расстройек  $\delta_0$ , который отмечен как  $\delta_L$  и  $\delta_R$ .

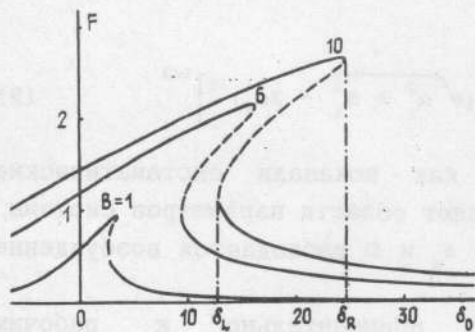


Рис. 2.

Наличие седловых состояний в невозмущенной системе (под которой будем понимать систему (1) при  $B_2 = 0$ ) является принципиально необходимым для возникновения хаоса при наличии периодического возмущения ( $B_2 \neq 0$ ). Это хорошо согласуется с общими условиями возникновения гомоклинической траектории и хаоса в результате пересечения неустойчивого и устойчивого многообразий седлового периодического движения в системах

типа (1) при относительно малой диссипации [13]. Седловые состояния могут существовать только в определенном диапазоне изменения частоты внешнего сигнала (см. рис. 2), что определяет приближенно область значений  $\omega_1, \omega_2$ , где возможно возникновение стохастической неустойчивости усилителя.

4. Результаты численных расчетов. Рассмотрим некоторые характерные результаты численного анализа систем (1) по определению условий возникновения хаоса при усилении двухчастотного колебания с амплитудами  $B_1 = B_2 = 10$  для параметров усилителя, соответствующих рис. 2. На рис. 3 приведена область существования СК\* (заштрихована) на плоскости параметров  $\delta_0, \delta_0 - 2\Omega$ , которые являются нормированными

\* В действительности область хаоса является значительно более сложной и обладает тонкой структурой, которая включает многочисленные окна порядка и подобласти, где одновременно существует несколько притягивающих аттракторов.

частотами усиленного сигнала, отсчитываемыми от собственной частоты резонатора  $\omega_0$ . Горизонтальными штрихпунктирными линиями отмечены границы области существования седловых состояний при одночастотном воздействии. Возникновение СК, как и следовало ожидать, наблюдается в окрестности и внутри этой области. Штриховыми прямыми отмечены линии, соответствующие равным значениям нормированной расстройки между частотами  $\Omega$ . В данном случае в силу равенства  $B_1$  и  $B_2$  приведенная плоскость режимов колебаний является симметричной относительно прямой  $\Omega = 0$ .

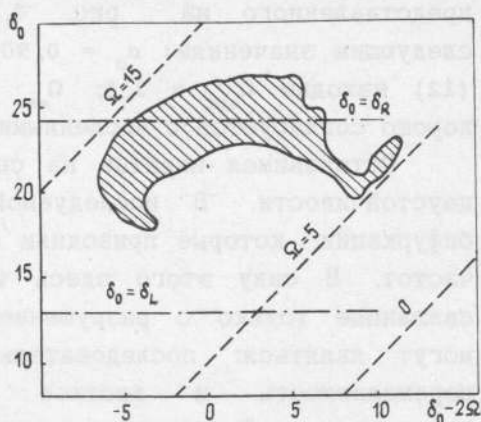


Рис. 3.

является симметричной относительно прямой  $\Omega = 0$ . Хаотические колебания могут существовать только в ограниченном диапазоне изменения  $\Omega$ . Со стороны малых  $\Omega$  возникновение СК ограничено тем, что при этом период изменения внешнего воздействия в системе (1), равный  $\tau_{\text{воз}} = \pi/\Omega$ , становится больше характерного времени релаксации колебаний  $\tau_{\text{рел}} \approx 1/\alpha_0$ . В силу этого при малых  $\Omega$  закон изменения во времени амплитуды и фазы колебаний носит адиабатический характер, и для его определения из (1) можно воспользоваться квазистационарным приближением  $d\mathcal{F}/d\tau = d\gamma/d\tau = 0$ . Для оценки минимального значения  $\Omega_{\text{min}}$ , при котором возможно проявление стохастической неустойчивости, можно исходить из условия  $\tau_{\text{воз}} \leq \tau_{\text{рел}}$ , откуда следует

$$\Omega_{\text{min}} \geq \pi/\alpha_0. \quad (11)$$

При больших  $\Omega$  (больших расстройках между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) возникновение хаоса невозможно в силу того, что одна из спектральных составляющих внешнего воздействия выходит из области нелинейного резонанса (полосы пропускания усилителя) и ее влияние на динамику системы сказывается незначительно. Для оценки ширины нелинейного резонанса при  $B_1 \approx B_2$  можно использовать величину  $\Delta\delta = \delta_R - \delta_L'$  (см. рис. 2), и тогда для верхней границы области хаоса по  $\Omega$  находим

$$\Omega_{\text{max}} \leq \delta_R - \delta_L'. \quad (12)$$

Выражения (11), (12), как показали численные расчеты, могут применяться для аналитической оценки значений  $\Omega$ , где возможно

возникновение стохастической неустойчивости. Например, для случая, представленного на рис. 3, параметры усилителя соответствуют следующим значениям:  $\alpha_0 = 0,90$ ;  $\delta_R = 24$ ;  $\delta_L = 13$ . Тогда из (11) и (12) находим  $\Omega_{\min} \approx 3,5$ ;  $\Omega_{\max} \approx 11$ , что, как следует из рис. 3, хорошо согласуется с численными данными.

Остановимся вкратце на сценариях возникновения стохастической неустойчивости. В исследуемой диссипативной системе невозможны бифуркации, которые приводили бы к возникновению новых независимых частот. В силу этого здесь могут наблюдаться переходы к хаосу, связанные только с разрушением периодических колебаний, которыми могут являться: последовательность бифуркаций удвоения периода, перемежаемость и жесткое возникновение СК, сопровождаемое гистерезисом. Все указанные сценарии развития хаотических колебаний реализуются и в системе (1).

Для иллюстрации на рис. 4 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма режимов для случая, соответствующего рис. 3, когда одна из частот внешнего воздействия фиксирована ( $\delta_0 - 2\Omega = 2$ ), а другая - адиабатически изменяется. Точками отмечены значения амплитуды  $F(nT)$ , вычисленные для каждого значения  $\delta_0$  в сечении Пуанкаре через период  $T = 2\pi/\Omega$  ( $n$  - целое число). Для сравнения здесь приведена АЧХ усилителя при одночастотном воздействии ( $B_2 = 0$ ). Проследим переход к хаосу со стороны больших значений  $\delta_0$ . Для этого обратимся также к фазовым портретам для характерных типов движения, представленным на рис. 5 в координатах  $u = \mathcal{F} \cos(\varphi + \Omega\tau)$ ,  $v = \mathcal{F} \sin(\varphi + \Omega\tau)$ . Вдали от области резонанса в системе существует периодическое движение с периодом  $\pi/\Omega$  и фазовый портрет системы при рассматриваемых параметрах является симметричным по отношению к преобразованию координат  $u \rightarrow -u$ ;  $v \rightarrow -v$  (см. рис. 5а).

При  $\delta = \delta_1$  (см. рис. 4) происходит бифуркация потери симметрии

аттрактора системы, что также сопровождается увеличением периода колебаний до  $2\pi/\Omega$ . Типичный для этого случая фазовый портрет представлен на рис. 5б. Потеря симметрии движения, как известно [14, 15], является необходимым условием для реализации перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний. Первая бифуркация удвоения периода происходит при  $\delta_0 =$

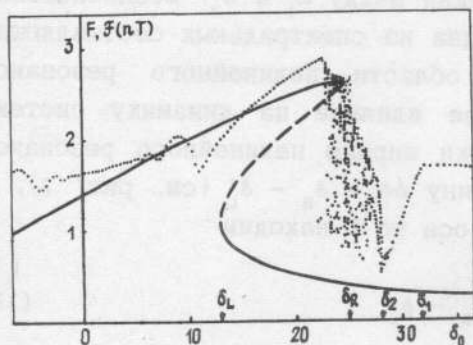


Рис. 4.



$= \delta_2$  (см. рис. 4). На рис. 5в изображен соответствующий аттрактор системы при  $\delta_0 < \delta_2$ . При дальнейшем уменьшении  $\delta_0$  и подходе к границе области существования седловых состояний невозмущенной системы и наблюдается переход к режиму хаотических колебаний (см. рис. 5г). Смена колебательных режимов на другой границе области хаоса (меньшие значения  $\delta_0$ ) осуществляется через перемежаемость между СК и периодическими колебаниями с периодом  $\pi/\Omega$ .

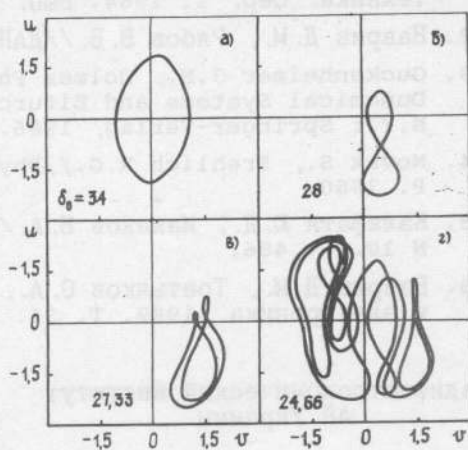


Рис. 5.

В заключение отметим, что в реальной физической системе (усилителе) периодическим решениям укороченной системы уравнений (1) соответствуют квазипериодические движения с двумя независимыми частотами  $\omega_1, \omega_2$ . В силу этого в экспериментах будет наблюдаться разрушение двумерных инвариантных торов в соответствии с указанными сценариями. Исходя из полученных результатов следует отметить, что основные закономерности их разрушения совпадают с теми, которые наблюдались в нелинейном колебательном контуре с квазипериодическим возбуждением [16].

Авторы признательны В. Б. Рябову за плодотворные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chodorov M., Kulke V. // IEEE Trans. 1966. V. ED-13. N 4. P. 439.
2. Бороденко В. Г., Малькова Н. Я., Победоносцев А. С. // Электронная техника. Сер. 1. 1968. Вып. 6. С. 3.
3. Корниенко В. К., Мирошниченко В. С. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. N 3. С. 93.
4. Ваврив Д. М. // Электронная техника. Сер. 1. 1986. Вып. 5. С. 3.
5. Белогорцев А. Б., Ваврив Д. М., Калугин Б. А., Третьяков О. А. // Радиотехника. 1988. N 5. С. 33.
6. Ваврив Д. М. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. N 7. С. 1391.
7. Ваврив Д. М., Третьяков О. А., Шарапов С. А. // Электронная техника. Сер. 1. 1988. Вып. 4. С. 10.
8. Marshall T. C. Free Electron Lasers. - N.Y.: Macmillan, 1985.
9. Garate E., Cherry R., Fisher A., Phillips P. // J. Appl. Phys. 1988. V. 62. N 12. P. 6618.
10. Ваврив Д. М., Третьяков О. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. N 2. С. 238; 1985. Т. 28. N 1. С. 107.

11. Ваврив Д. М., Романцов Ю. А., Третьяков О. А. //Электронная техника. Сер. 1. 1984. Вып. 10. С. 3.
12. Ваврив Д. М., Рябов В. Б. //ДАН УССР. 1990. N 2. С. 50.
13. Guckenheimer J.M., Holmes Ph. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. - N.Y.: Springer-Verlag, 1986.
14. Novak S., Frehlich R.G. //Phys. Rev. A. 1982. V. 26. N 6. P. 3660.
15. Калафати Ю. Д., Малахов Б. А. //Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 37. N 10. С. 486.
16. Ваврив Д. М., Третьяков О. А., Чернышов И. Ю. //Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. N 8. С. 1698.

Радиоастрономический институт  
АН Украины

Поступила в редакцию  
15 августа 1990 г.

TO THE THEORY OF STABILITY IN THE RESONANT EXTENDED  
INTERACTION AMPLIFIERS

*D. M. Vavriv, S. A. Sharapov*

It is shown, that a chaotic stability in the resonant extended interaction amplifiers, which is absent in the harmonical input signal, can develop with the real multi-frequency signal. The conditions of chaos onset is defined analytically by using the current Lyapunov exponents. Explicit results of the numeral and analytical investigation of stability of the orotron type amplifiers is presented.