ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Том 35, N 3,4 РАДИОФИЗИКА 1992

УДК 538.573

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА В СЛУЧАЙНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Ю. В. Тарасов, В. Д. Фрейлихер

Показано, что в среде со случайно-слоистыми неоднородностями нестационарный импульсный сигнал, излучаемый плоским (одномерным) источником, локализуется в ограниченной области пространства за счет интерференции многократно рассеянных полей. Волновой пакет, излучаемый точечным источником в такой среде, каналируется вдоль слоев.

Концепция локализации, давно уже ставшая неотъемлемой частью квантовой теории неупорядоченных конденсированных систем, находит в последнее время все более широкое применение в теории распространения волн в случайных средах [1]. Косвенными "радиофизическими" проявлениями локализации являются, например, экспоненциальное убывание прозрачности случайно стратифицированного слоя с ростом его толщины [2], резко неоднородная пространственная структура собственных мод в слоисто-нерегулярном волноводе [1], возникновение квазистационарных состояний [3] и флуктуационного волновода, каналирующего излучение монохроматического источника вдоль слоев [4, 5].

Ниже показано, что при излучении в безграничной случайно-слоистой среде нестационарного (импульсного) сигнала его энергия локализуется в ограниченной области пространства вблизи источника.

Рассмотрим поле $G(z, z_0; t)$, излучаемое немонохроматическим точечным источником $A(t)e^{-i\omega t}$ в случайно-слоистой среде, которое описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon(z)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(z, z_0; t) = 4\pi\delta(z - z_0)\, A(t)e^{-i\omega t}, \qquad (1)$$

где диэлектрическая функция $\varepsilon(z)$ имеет вид

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + i\gamma + \delta\varepsilon(z), \qquad (2)$$

причем $\delta\varepsilon(z)$ - случайная функция с нулевым средним значением: $\langle\delta\varepsilon(z)\rangle = 0$.

Средняя интенсивность волнового поля $\langle I(z, z_0; t)\rangle = \langle|G(z, z_0; t)|^2\rangle$ может быть записана в виде интеграла

$$\langle I(z, z_0; t)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint dE\, d\Omega\, e^{-i\Omega t}\varphi(E - \omega + \Omega)\, \varphi^*(E - \omega) \times$$

$$\times K(z, z_0; \Omega, E). \qquad (3)$$

Здесь

$$\varphi(E) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\, e^{iEt} dt; \qquad (4)$$

$$K(z, z_0; \Omega, E) = \langle g(z, z_0; E + \Omega)\, g^*(z, z_0; E)\rangle, \qquad (5)$$

а функция g удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{E^2}{c^2}\varepsilon(z)\right) g(z, z_0; E) = 4\pi\delta(z - z_0). \qquad (6)$$

Корреляционная функция (5) подробно исследована в работах [5]. Схема ее вычисления состоит в следующем. Если флуктуации $\delta\varepsilon$ в среднем достаточно малы, так что

$$(kr_c\sigma_\varepsilon)^2 \ll 1 \qquad (7)$$

($k = E/c$; r_c и σ_ε - радиус корреляции и среднеквадратичная дисперсия $\delta\varepsilon$), функцию $\delta\varepsilon(z)$ можно приближенно заменить суммой только "резонансных" гармоник:

$$\delta\varepsilon(z) = \delta\varepsilon_1(z) + \delta\varepsilon_2(z)\, e^{2ikz} + \delta\varepsilon_2^*\, e^{-2ikz}, \qquad (8)$$

$$\delta\varepsilon_1(z) = \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \delta\tilde{\varepsilon}(t)\, e^{itz} dt; \quad \delta\varepsilon_2(z) = \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \delta\tilde{\varepsilon}(t + 2k) e^{itz} dt,$$

$\delta\tilde{\varepsilon}(t)$ - преобразование Фурье функции $\delta\varepsilon(z)$. Величины $\delta\varepsilon_{1,2}(z)$ предполагаются медленно меняющимися на расстояниях $\Delta z \sim k^{-1}$, т.е. $|\Delta k| \ll k$. В то же время, интервал Δk выбирается достаточно большим, чтобы функции $\delta\varepsilon_{1,2}(z)$ существенно изменялись на расстояниях, много меньших тех, на которых меняется огибающая волнового поля G. Это условие совместно с неравенством (7) позволяет считать функции $\delta\varepsilon_{1,2}(z)$ δ-коррелированными гауссовыми процессами:

$$\langle\delta\varepsilon_{1,2}(z)\rangle = \langle\delta\varepsilon_1(z)\ \delta\varepsilon_2(z')\rangle = 0,$$

$$\langle\delta\varepsilon_1(z)\ \delta\varepsilon_1(z')\rangle = D_1\delta(z - z'),$$

$$\langle\delta\varepsilon_2(z)\ \delta\varepsilon_2^*(z')\rangle = D_2\delta(z - z').$$

В соответствии с представлением (8) для $\delta\varepsilon$ выделим быстро осциллирующие ($\sim \exp(\pm\ ikz)$) множители и в поле g:

$$g(z, z_0;\ E + \Omega) = g_{11}\ e^{ik(z-z_0)} + g_{22}\ e^{-ik(z-z_0)} +$$

$$+ g_{12}\ e^{ik(z+z_0)} + g_{21}\ e^{-ik(z+z_0)}. \tag{9}$$

Система уравнений для медленных амплитуд $g_{ik}(z, z_0;\ E + \Omega)$ в (9) получается из уравнения (6) путем отбрасывания быстро осциллирующих нерезонансных слагаемых. Это можно сделать при выполнении условия

$$kL(E) \gg 1, \qquad L(E) = 4c^2/E^2D_2, \tag{10}$$

означающего, что длина волны гармоники с частотой E мала по сравнению с характерной длиной, связанной с ее рассеянием назад $L(E)$ [5], и позволяющего производить усреднение по быстрым фазам. После этого решение системы уравнений для g_{ik} сводится к решению двух интегральных уравнений:

$$\Phi_1(z_1, z_2) = \theta(z_1 - z_2) - \int_{-\infty}^{z_1} dz'\xi(z') \int_{z'}^{\infty} dz''\ \xi^*(z'')\Phi_1(z'', z_2),$$

$$\Phi_2(z_1, z_2) = \theta(z_2 - z_1) - \int_{z_1}^{\infty} dz'\xi^*(z') \int_{-\infty}^{z'} \xi(z'')\Phi_2(z'', z_2)dz''. \tag{11}$$

Здесь $\xi(z)$ - комплексная случайная функция, связанная с $\delta\varepsilon_{1,2}$ соотношениями

$$\xi(z) = \frac{E}{2c}\ \delta\varepsilon_2(z)\ \exp\left\{-\ 2i \int_0^z dz' \left[\frac{\Omega'}{c} - \eta(z)\right]\right\},$$

$$\eta(z) = \frac{E}{2c}\,\delta\varepsilon_1(z), \qquad \Omega' = \Omega + i\gamma E, \qquad |\Omega'| \ll E.$$

Решить уравнения (11) при произвольных $\xi(z)$ не представляется возможным. Тем не менее, структура этих уравнений такова, что позволяет выразить величины $\Phi_{1,2}$ через функции $\Gamma_{\pm}^{\Omega}(z)$, каждая из которых есть решение задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка [5]. Функции $\Gamma_{\pm}^{\Omega}(z)$ имеют простой физический смысл: при $\Omega = 0$ они описывают плавную часть коэффициента отражения плоской волны, падающей на полупространства $(-\infty, z]$ и $[z, \infty)$ [2].

С учетом того, что $\langle g_{1k} g^{*}_{1m}\rangle = 0$ при $i \neq l$ и $k \neq m$, преобразование Фурье $\tilde{K}(s; \Omega, E)$ корреляционной функции (5) можно представить в виде интеграла

$$\tilde{K}(s; \Omega, E) = \left(\frac{2\pi c}{E}\right)^2 \frac{L(E)}{\beta}\, e^{\beta} \int_{\beta}^{\infty} d\zeta\; e^{-\zeta}(2\zeta - \beta) \times$$

$$\times\,[y(\zeta, s) + y(\zeta, -s)], \qquad \beta = -\,i4c\Omega'/E^2 D_2, \tag{12}$$

где функция $y(\zeta, s)$ является решением дифференциального уравнения

$$\left[-\frac{d}{d\zeta}\,\zeta^2\,\frac{d}{d\zeta} + \zeta\frac{d}{d\zeta}\,\zeta + \beta\,\frac{d}{d\zeta}\,\zeta\left(\frac{d}{d\zeta} - 1\right) + isL(E) - \beta/2\right] y(\zeta, s) =$$

$$= 2 + (2\zeta - \beta)e^{\zeta}\,\mathrm{Ei}(-\zeta), \tag{13}$$

конечным при $\zeta = \beta$ и убывающим при $\zeta \to \infty$ (Ei - интегральная показательная функция).

Формулы (12) и (13) позволяют получить для коррелятора (5) асимптотические выражения при различных значениях параметра β. При $|\beta| \gg 1$ выражение для K имеет следующий вид:

$$K(z, z_0; \Omega, E) = \left(\frac{2\pi c}{E}\right)^2 \exp\{-[L^{-1}(E) - i\Omega'/c]\,|z - z_0|\}. \tag{14}$$

В предельном случае $|\beta| \ll 1$ в главном по этому параметру приближении получим

$$K(z, z_0; \Omega, E) = \frac{i\pi^2 D_2}{2\Omega'} \int_0^{\infty} d\mu\; W(\mu)\, \nu^2(\mu)\, \exp\left[-\nu(\mu)\,\frac{|z - z_0|}{L(E)}\right], \tag{15}$$

$$W(\mu) = \frac{\pi^2}{2}\,\mu\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\,\mathrm{ch}^{-3}\left(\frac{\pi\mu}{2}\right), \qquad \nu(\mu) = \frac{1+\mu^2}{4}.$$

Если диссипативные потери в среде достаточно велики, так, что $\gamma \gg \omega D_2/c$, для вычисления интенсивности (3) следует воспользоваться формулой (14). Полученные при этом зависимости совпадают с решением кинетического уравнения (уравнения переноса излучения) [6].

Когда затухание является слабым ($\gamma \ll \omega D_2/c$), определяющую роль играет интеференция многократно рассеянных полей, и кинетическое уравнение оказывается непригодным. В этом случае для достаточно больших времен $t \gg L(\omega)/c$ при вычислении средней интенсивности следует пользоваться асимптотическим выражением (15). Подставляя его в формулу (3), можно вычислить интеграл по Ω, замкнув контур интегрирования в нижней полуплоскости:

$$\langle I(z, z_0; t)\rangle = \frac{\pi D_2}{4}\int_{-\infty}^{t^*} dt'\; A(t')\int dE\varphi^*(E-\omega)\,\exp\Big[i(E-\omega)t' -$$

$$-\gamma E(t-t')\Big]\int_0^\infty d\mu\; W(\mu)\;\nu^2(\mu)\,\exp\left[-\nu(\mu)\,\frac{|z-z_0|}{L(E)}\right], \qquad (16)$$

$$t^* = t - (1/c)|z - z_0|.$$

В случае узкополосного импульса ($T \gg \omega^{-1}$, T – эффективная длительность импульса) при $t \ll T/\gamma$, $|z - z_0| \ll L(\omega)T\omega$ из (16) получаем следующую формулу для средней интенсивности:

$$\langle I(z, z_0; t)\rangle = \frac{\pi^2 D_2}{2}\int_{-\infty}^{t^*} dt'|A(t')|^2\,\exp[-\gamma\omega(t-t')]\,\times$$

$$\times\int_0^\infty d\mu\; W(\mu)\;\nu^2(\mu)\,\exp\left[-\nu(\mu)\,\frac{|z-z_0|}{L(\omega)}\right]. \qquad (17)$$

В частности, при $t^* \gg T$, $|z - z_0| \gg L(\omega)$ и $\gamma \to 0$ с учетом нормировочного соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,|A(t)|^2 = T/2\pi$$

из формулы (17) находим

$$\langle I(z, z_0; t)\rangle = \pi\left(\frac{\pi}{4}\right)^{7/2} D_2 T \left(\frac{L(\omega)}{|z - z_0|}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{4L(\omega)}\right). \quad (18)$$

Из этого соотношения видно, что при $t \to \infty$ в отсутствие диссипативного затухания волновой пакет, излученный в случайно-слоистой среде, выходит на стационарный режим - пространственное распределение энергии не зависит от времени и экспоненциально спадает по мере удаления от источника. Импульс оказывается "запертым" в ограниченной области пространства с характерным размером $4L(\omega)$, совпадающим с радиусом локализации монохроматической волны на несущей частоте ω.

Полученное решение одномерной задачи может быть обобщено на случай реального точечного источника в трехмерной среде. Основываясь на результатах работ [4, 5], можно утверждать, что импульсный сигнал в бесконечной случайно-слоистой среде будет каналироваться вдоль слоев в так называемом флуктуационном волноводе, который образуется за счет интерференции многократно рассеянных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. //УФН. 1990. Т.160. Вып. 3. С. 240.
2. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. - М.:Наука, 1986. - 255 с.
3. Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33. N 1. С.61.
4. Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 10. С.1210.
5. Тарасов Ю. В., Фрейлихер В. Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 11. С.1387; N 12. С.1512.
6. Фрейлихер В. Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т.14. N 6. С.892.

Институт радиофизики и электроники
АН Украины

Поступила в редакцию
16 июля 1990 г.

LOCALIZATION OF THE PULSED SIGNAL IN RANDOMLY STRATIFIED MEDIA

Yu.V.Tarasov, V.D.Freilikher

A pulsed wave packet emitted by a plane-like source in a randomly stratified medium is shown to be localized within a closed region of space as a result of interference between multiple scattered fields. The wave packet emitted in such a medium by a point-like source indergoes channeling along the layers.