

О КИНЕМАТИКЕ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ДВОЙНЫХ СЛОЕВ В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Е. В. Работкина, Е. П. Соколов

На основе специальных гидродинамических уравнений дрейфовой конвекции исследуются особенности распространения изобарических разрывов в сложных магнитных полях с замкнутыми силовыми линиями.

В работе [1] было показано, что в ходе самосогласованного дрейфового перемешивания замагниченной плазмы в ней могут возникать специфические разрывы - изобарические двойные слои, в которых полное давление плазмы P остается непрерывным, а плотность n , парциальные давления ионов и электронов P_1, P_e и диэлектрический потенциал ϕ терпят разрывы. Такие изобарические разрывы могут играть существенную роль в процессах переноса тепла и частиц в плазме. Относительная медленность их перемещения ($v_p \sim v_{др} \sim v_T \rho_1 / a$, где a - характерный размер плазмы, v_T - тепловая скорость ионов, ρ_1 - ларморовский радиус ионов; в замагниченной плазме $\rho_1 \ll a$) приводит к появлению вдоль фронта разрыва мощных потоков энергии и частиц, возникающих из-за дрейфа последних в сильном электрическом поле разрыва*.

В отличие от [2-4], где главное внимание было уделено структуре разрыва, в настоящей работе рассматривается вопрос о законах и особенностях перемещения изобарических разрывов в сложных магнитных полях с замкнутыми силовыми линиями. Ниже выводится уравнение, описывающее перемещение разрыва, и приводятся результаты численного моделирования этого движения.

Очертим здесь рамки тех приближений, которые будут использованы ниже. В отличие от газодинамических ударных волн [5] или двойных слоев в незамагниченной плазме [6] в данном случае найти скорость разрыва в общем случае с помощью стандартного метода, т.е. записав локальные законы сохранения, не представляется возможным из-за необходимости учитывать дополнительные неизвестные дрейфовые потоки вдоль фронта разрыва. Поэтому мы здесь ограничимся исследованием изобарических разрывов малой интенсивности, для которых оказывается возможным вычислить продольные потоки в линейном приближении по величине скачка. В работе также существенно используется выражение для электрического потенциала плазмы с развитым дрейфовым движением, полученное в [7] в приближении ведущих центров. Это же приближение мы будем использовать ниже для вычисления потоков тепла и частиц. Параметры плазмы предполагаются постоянными вдоль магнитных линий.

1. Определение скорости движения разрыва. Определение скорости изобарического двойного слоя (дрейфового разрыва) начнем со случая плазмы, находящейся в прямом магнитном поле θ -пинча. Запишем законы

*Скорость электрического дрейфа частиц вдоль разрыва $v \sim c \Delta \phi / B \delta \sim v_{др} \alpha / \delta$, где δ - толщина разрыва. Поэтому за время пересечения разрыва, $t \sim \delta / v_{др}$, частица может существенно сдвинуться вдоль него, $\Delta l \sim vt \sim \alpha$.

сохранения частиц и энергии для небольшого участка пинча длиной dy вытянутого вдоль разрыва (рис. 1). Плоскость (x, y) перпендикулярна магнитному полю, ось x направлена перпендикулярно движению разрыва, ось y - вдоль разрыва.

Для ионов и электронов получим следующие уравнения баланса частиц и энергии:

$$\frac{d}{dt} \int n_{1,e} dS = - (q_{1,e}^1 - q_{1,e}^2) dy - (J_{1,e}(y+dy) - J_{1,e}(y)),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int (P_{1,e} \pm en_{1,e} \varphi) dS = & - (Q_{1,e}^1 - Q_{1,e}^2) dy - \\ & - (I_{1,e}(y+dy) - I_{1,e}(y)) + \int N_{1,e} dS, \end{aligned}$$

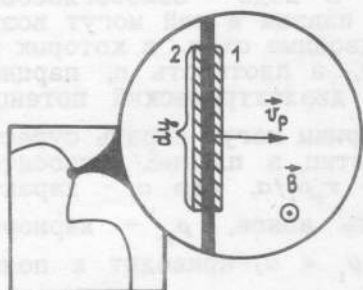


Рис.1.

здесь $q(Q)$ - дрейфовые потоки частиц (энергии) через боковые стороны выделенного участка, $J(I)$ - потоки частиц (энергии) вдоль разрыва, N - мощность электрической силы, индексы 1,2 относятся к областям перед и за разрывом.

Вычислим последовательно каждое слагаемое, входящее в эти уравнения. Для скорости изменения полного количества частиц и энергии выделенного участка получим

$$\frac{d}{dt} \int n_{1,e} dS = - \Delta n v_p dy,$$

$$\frac{d}{dt} \int (P_{1,e} \pm en_{1,e} \varphi) dS = - \Delta (P_{1,e} \pm en \varphi) v_p dy,$$

где v_p - нормальная составляющая скорости разрыва, $\Delta f = f^1 - f^2$, здесь было также учтено условие квазинейтральности плазмы $n_1 = n_e = n$.

Боковые потоки частиц и тепла, а также мощность электрической силы вычислим в приближении ларморовских центров:

$$q_{1,e} dy = - \int dm f_{1,e} (\vec{v}_E + \vec{v}_H) [\hbar, d\vec{l}] = - \frac{c}{B} \left(n \frac{d\varphi}{dy} \pm \frac{P_{1,e}}{dy} \right) dy,$$

$$Q_{1,e} dy = - \int (mB) dm f_{1,e} (\vec{v}_E + \vec{v}_H) [\hbar, d\vec{l}] = -$$

$$- \frac{c}{B} \left(P_{1,e} \frac{d\varphi}{dy} \pm 2 \frac{P_{1,e}}{eB} \frac{dB}{dy} \right) dy,$$

$$N_{1,e} = \int (\pm e\vec{E}) (\vec{v}_E + \vec{v}_H) f_{1,e} dm = \frac{cP_{1,e}}{B^2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{dB}{dy}.$$

Здесь $\vec{h} = \vec{B}/B$, m - магнитный момент, $f_{1,e} = \frac{nB}{T_{1,e}} \exp\left(-\frac{mB}{T_{1,e}}\right)$ - локально максвелловская функция распределения ионов и электронов по магнитным моментам, $\vec{v}_E = (c/B) [\vec{h}, \nabla\varphi]$ - скорость электрического дрейфа, $\vec{v}_H = \pm \frac{cm}{eB} [\vec{h}, \nabla B]$ - скорость магнитного дрейфа.

Что касается продольных потоков и полной мощности электрической силы, то для их вычисления необходимо знать распределение плазменных величин в сечении разрыва. В линейном приближении по величине скачка для них можно получить

$$J_{1,e} = \int dx \int (\vec{v}_E + \vec{v}_H)_y f_{1,e} dm = \int dx \left(\frac{cn}{B} \frac{d\varphi}{dx} \pm \frac{cP_{1,e}}{eB^2} \frac{dB}{dx} \right) = \frac{cn}{B} \Delta\varphi$$

и аналогично

$$I_{1,e} = cP_{1,e} \Delta\varphi/B, \quad \int N_{1,e} ds = \frac{cP_{1,e}}{B^2} \Delta\varphi \frac{dB}{dy} dy.$$

Здесь мы учли, что, так как при относительно медленных дрейфовых движениях условие МГД-устойчивости плазмы не нарушается, наряду с полным давлением плазмы на разрыве непрерывна и индукция магнитного поля.

Таким образом, уравнения баланса частиц и энергии выделенного участка пинча можно представить в виде

$$-v_p \Delta n = \frac{c}{B} \Delta \left(n \frac{d\varphi}{dy} \pm \frac{P_{1,e}}{eB} \frac{dB}{dy} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{cn}{B} \Delta\varphi \right); \quad (1)$$

$$-v_p \Delta (P_{1,e} \pm en\varphi) = \frac{c}{B} \Delta \left(P_{1,e} \frac{d\varphi}{dy} \pm 2 \frac{P_{1,e}^2}{enB} \frac{dB}{dy} \right) - \quad (2)$$

$$-c \frac{d}{dy} \left(\frac{P_{1,e}}{B} \Delta\varphi \right) + c \frac{P_{1,e}}{B^2} \Delta\varphi \frac{dB}{dy}.$$

Из четырех переменных $\Delta P_{1,e}$, Δn , $\Delta\varphi$ независимыми являются фактически только две. Во-первых, на разрыве выполняется условие $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_e = 0$, а во-вторых, электрический потенциал плазмы с развитым дрейфовым движением однозначно определяется плазменными параметрами [7]:

$$\varphi = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{d \ln A} \right)^{-1} \frac{P_1 - P_e}{n}, \quad (3)$$

где $A = \int dl/B$ - удельный объем магнитных трубок, γ - адиабатическая постоянная. Это позволяет выписать вторую связь

$$\Delta\varphi = \frac{1}{e} f^{-1} \left(\frac{\Delta P_1 - \Delta P_e}{n} - \frac{P_1 - P_e}{n} \frac{\Delta n}{n} \right),$$

где ради краткости мы ввели обозначение $f = -\left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{d \ln A} \right)$.

С другой стороны, как можно проверить, из четырех уравнений (1), (2) только два являются независимыми. В качестве таковых выберем

полусумму ионного и электронного уравнений (1) и разность уравнений (2), а в качестве независимых переменных выберем $X = \Delta\varphi/\varphi f$, $Y = \Delta n/n$. Тогда окончательно получим следующую систему уравнений, описывающих дрейфовый разрыв малой интенсивности:

$$\frac{v_p}{c} X = \frac{\varphi}{B} \left[X \left(\frac{d \ln f/B}{dl} - \frac{3}{2} \frac{d \ln B}{dl} \right) + Y \left(\frac{P^2}{(P_1 - P_0)^2} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{v_p}{c} Y = \frac{\varphi}{B} \left[X \left(\frac{d \ln n/B}{dl} - \frac{f}{2} \frac{d \ln B}{dl} \right) - Y \left(\frac{d \ln \varphi}{dl} + \frac{f}{2} \frac{d \ln B}{dl} \right) \right].$$

Скорость разрыва определяется из условий разрешимости данной системы уравнений и равна

$$v_p = \frac{c\varphi}{eB} \left\{ \pm \left[\left(\frac{d \ln f\varphi/B}{dl} - f \frac{d \ln B}{dl} \right)^2 + \left(\frac{2P^2}{(P_1 - P_0)^2} - 1 \right) \frac{d \ln B}{dl} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(2 \frac{d \ln n/B}{dl} - f \frac{d \ln B}{dl} \right) \right]^{1/2} - \left(\frac{d \ln \varphi/B/f}{dl} + 2f \frac{d \ln B}{dl} \right) \right\}. \quad (5)$$

С учетом выражения (3) для электрического потенциала эта формула определяет скорость дрейфового разрыва через значение плазменных параметров и их производные вдоль разрыва.

Как и следовало ожидать, в рассматриваемом здесь линейном приближении свойства дрейфового разрыва совпадают со свойствами линейных дрейфовых волн [8] - его скорость не зависит от величины разрыва, а скачки различных величин связаны между собой линейными соотношениями [7]. Это позволяет обобщить полученное здесь выражение для скорости дрейфового разрыва в прямом магнитном поле на случай произвольной геометрии магнитного поля: скорость слабого дрейфового разрыва равна скорости линейных дрейфовых волн ($k \rightarrow 0$) [8]. А именно,

$$v_p = (\vec{v}_0 \vec{n}) \pm \sqrt{-\det \mathfrak{F}_*} (\vec{A}, \vec{\mathfrak{F}}_* \vec{A}). \quad (6)$$

Здесь мы приводим выражение для скорости дрейфовых волн по (λ, μ) -плоскости, где λ, μ - магнитные координаты [9], такие, что $[\nabla\lambda, \nabla\mu] = \vec{B}^2$. Для конфигураций с произвольной геометрией магнитного поля эти координаты удобны тем, что позволяют единообразно описывать движение разрыва по каждому поперечному сечению. Фигурирующие в (6) величины имеют следующий вид:

$$\vec{v}_0 = - \sum f_k [\vec{h}, \nabla u_k], \quad \vec{h} - \text{нормаль к } (\lambda, \mu)\text{-плоскости, где}$$

$$\vec{h} = f_0(1, -D, 0) + \Lambda f_0 D(D, 1, 1), \quad f_0 = -\frac{c}{e} f^{-1} \sqrt{T_1 T_0}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{tg} u_1,$$

$$\Lambda = 2\gamma d \ln \left(C A^{-\gamma} \frac{dA}{dC} \right) / d \ln C, \quad C = P A^\gamma, \quad u_1 = \arcsin(T_1 - T_0) / (T_1 + T_0),$$

$$u_2 = \sqrt{\gamma} \ln(nA), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{T_1 T_0} / n^{\gamma-1}).$$

Матрица \mathfrak{F}_* имеет вид

$$\mathfrak{F}_n = f_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+D)^* \end{bmatrix},$$

$A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}$ - производная вдоль фронта разрыва на (λ, μ) -карте.

Отметим, что созданный искусственно дрейфовый разрыв не всегда может существовать. Он будет экспоненциально расти, если подкоренное выражение в (6) отрицательно. Как можно проверить, это может происходить при определенных ориентациях фронта разрыва, когда он находится в неустойчивых областях, т.е. в тех областях плазмы, где

$$(\vec{q}, \mathfrak{F}\vec{q}) \geq 0,$$

здесь

$$\vec{q} = ([v_{u_2}, v_{u_3}], [v_{u_3}, v_{u_1}], [v_{u_1}, v_{u_2}]), \quad [vf, vg] = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial g}{\partial \lambda}.$$

Проведенное ниже численное моделирование движения разрыва показывает, что, хотя свободно распространяющийся разрыв может заходить в неустойчивые области, он сохраняет такую ориентацию, которая гарантирует его устойчивость.

2. Численное моделирование. Будем описывать положение разрыва на (λ, μ) -плоскости, задавая его как линию, на которой некоторая функция $S(\lambda, \mu, t)$ обращается в нуль. Тогда функция $S(\lambda, \mu, t)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_p |VS| = 0.$$

Используя выражение (6) для скорости дрейфового разрыва и учитывая, что $A_1 = [\vec{h}, VS] v_{u_1} / |VS|$, представим это уравнение в виде

$$(-\det \mathfrak{F}_n) [VS, v_{u_1}] \mathfrak{F}_{ik}^{-1} [VS, v_{u_k}] - \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \sum f_k [\vec{h}, v_{u_k}] \right)^2 = 0.$$

Записанное в таком виде уравнение движения разрыва фактически является уравнением Гамильтона - Якоби для частицы с гамильтонианом

$$H = (-\det \mathfrak{F}_n) [\vec{p}_1, v_{u_1}] \mathfrak{F}_{ik}^{-1} [\vec{p}_1, v_{u_k}] - (p_3 - \sum f_k [\vec{h}, v_{u_k}]), \quad (7)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ - импульс частицы, $\vec{p}_1 = (p_1, p_2, 0)$.

Такая запись уравнений движения позволяет достаточно просто, "поточечно", исследовать движение разрыва численными методами. Для этого достаточно на первоначальном фронте разрыва расположить частицы, а затем сдвигать их согласно уравнениям Гамильтона, подсчитывая одновременно значение "действия" S для каждой частицы.

*Для аксиально-симметричного θ -пинча, $B = B(\rho)$, в качестве магнитных координат можно выбрать функции $\lambda = fx$, $\mu = fy$, где $f^2 \rho^2 = 2 \int_0^\rho B(\rho_1) \rho_1 d\rho_1$.

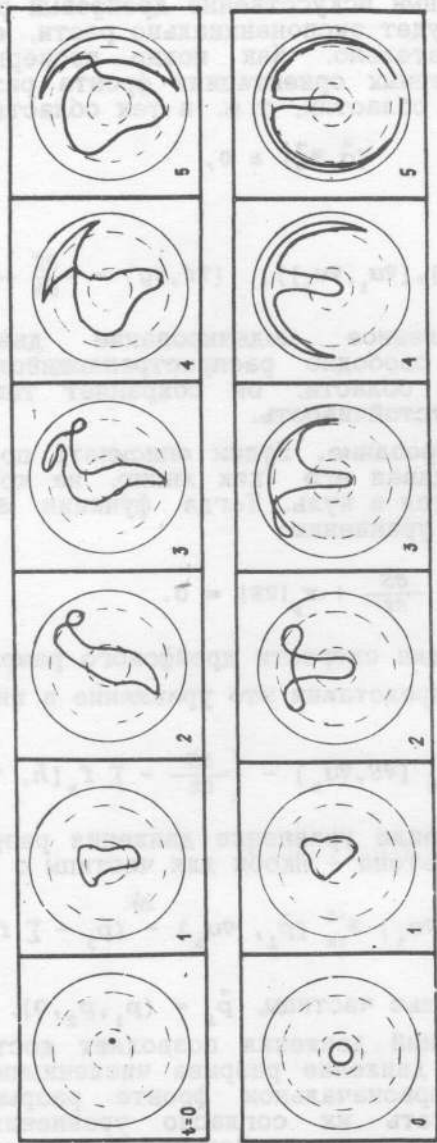


Рис. 2.

Основным препятствием для исследования движения реального дрейфового разрыва при этом является то, что нам не известны какие-либо точные функции $u_1(\lambda, \mu, t)$, соответствующие реальному самосогласованному дрейфовому перемешиванию. Поэтому мы ограничимся лишь исследованием движения разрыва в "застывших" конфигурациях с распределениями $u_1(\lambda, \mu)$, не зависящими от времени.

В этом случае задача частично упрощается, так как зависимость функции $S(\lambda, \mu, t)$ от времени можно выбрать в виде $S = -t + s(\lambda, \mu)$. Уравнение движения для "укороченного действия" при этом примет вид

$$(-\det \mathcal{F}_s) [\nabla s, \nabla u_1] \mathcal{F}_{1k}^{-1} [\nabla s, \nabla u_k] - (1 + \sum f_k [\vec{h}, \nabla u_k])^2 = 0. \quad (8)$$

Оно соответствует частице, движущейся в сложных электрических и магнитных полях, с переменным тензором масс.

Типичная эволюция дрейфовых разрывов изображена на рис. 2. Распределение плазменных величин, соответствующее этим случаям, имеет вид

$$u_1 = \epsilon \cos \varphi \sin \theta, \quad u_2 = u_2^0 + \epsilon \sin \varphi \sin \theta, \quad u_3 = u_3^0 + \epsilon \cos \theta, \quad (9)$$

здесь $\theta = \pi \sqrt{\pi(\lambda^2 + \mu^2) / \Phi}$, $\varphi = \arctg \mu / \lambda$, время измеряется в единицах

$\tau = e\Phi \left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{d \ln A} \right)$, где Φ - полный магнитный поток конфигурации. Малость изменяющихся частей функций u_1 ($\epsilon \ll 1$) позволила при численном эксперименте считать элементы вектора f и матрицы \mathcal{F}_s постоянными.

В этих двух случаях, как и при других распределениях плазменных величин, движению дрейфовых разрывов присущи следующие особенности: разрыв может заходить в неустойчивую область (для распределений (9) это область $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$), с течением времени разрыв стремится к некоторому предельному положению вблизи границы плазмы, в процессе эволюции может происходить пересечение различных частей разрыва, что ставит вопрос о нелинейной теории взаимодействия разрывов.

В заключение отметим, что, как указывалось выше, при заходе в неустойчивую область разрыв сохраняет ориентацию, гарантирующую его устойчивость. Это следует из того, что каждая "расчетная частица" сохраняет при своем движении постоянное значение гамильтониана $H = 0$, что согласно (8) гарантирует положительность первого слагаемого (8), являющегося подкоренным выражением в формуле (6).

Авторы благодарны А. М. Дыхне и Ю. А. Дрейзину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дрейзин Ю. А., Соколов Е. П. // Физика плазмы. 1982. Т. 8. N 3. С. 565.
2. Гуревич А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 8. N 4. С. 193.
3. Дмитриев А. П., Рожанский В. А., Цендин Л. Д. // УФН. 1985. Т. 146. N 2. С. 237.
4. Липеровский В. А., Пудовкин М. И. Аномальное сопротивление и двойные слои в магнитосферной плазме. - М.: Наука, 1983. - 375 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 733 с.
6. Hershkowitz N. // Space Sci. Rev. 1985. V. 41. N 3-4. P. 351.
7. Дрейзин Ю. А., Соколов Е. П. // Физика плазмы. 1981. Т. 7. N 5. С. 1152.

8. Соколов Е. П. //Физика плазмы. 1992. Т.17. N 2. С.464.
9. Northrop T.G., Teller E.//Phys.Rev. 1960. V.117. N 1. P.215.

Запорожский машиностроительный
институт

Поступила в редакцию
19 февраля 1991 г.

KINEMATICS OF ISOBAROUS DOUBLE LAYERS IN MAGNETIZED PLASMA

E.V.Rabotkina, E.P. Sokolov

The propagation of isobarous double layers in complex magnetic fields with closed lines of force is investigated. The special hydrodynamic system of equations for drift convection is used.