

УДК 621.391.01

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СКАЧКООБРАЗНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

А. А. Мальцев, А. М. Силаев

Рассмотрена задача оптимального обнаружения (различения) сигналов со случайными скачкообразными изменениями параметров в дискретном времени. Получен рекуррентный алгоритм формирования отношения правдоподобия в текущем времени. В качестве примера приведено решение задачи оптимального обнаружения прямоугольного импульсного сигнала со случайным моментом появления, длительностью и амплитудой. Приведены результаты моделирования алгоритма на ЭВМ.

Для широкого круга радиофизических проблем представляет интерес исследование оптимальных методов обнаружения нестационарных случайных сигналов на фоне помех. Задачи оптимального обнаружения сигналов возникают в радиосвязи, радиолокации, гидроакустике, сейсмологии. Проблеме статистического синтеза систем оптимального обнаружения сигналов посвящена обширная литература (см., например, [1-6]). При этом обычно предполагается, что статистические характеристики сигналов, помех и структура наблюдений постоянны во времени или же изменяются по известному закону. Вместе с тем, для многих задач характерно скачкообразное изменение параметров сигналов и помех в заранее неизвестные моменты времени. В этом случае можно рассматривать моменты скачков как неизвестные сопутствующие параметры в задаче обнаружения сигналов и использовать для решения развитые к настоящему времени методы обработки - метод максимального правдоподобия и другие (см., например, [4-6]). Однако при таком подходе в случае сложной структуры сигналов и помех или большом числе скачков на интервале наблюдения возникают серьёзные математические и технические трудности при реализации алгоритмов обработки.

Сократить затраты на вычисления и синтезировать более простые алгоритмы обнаружения сигналов можно с использованием "методов теории условных марковских процессов" [3, 7-9]. В работе авторов [10] с

помощью этих методов была решена задача обнаружения сигналов со случайными скачкообразными изменениями параметров в непрерывном времени. В настоящей работе результаты [10] обобщаются на случай дискретного времени. Получены уравнения алгоритма оптимального обнаружения со вспомогательным оцениванием сигналов на интервалах между скачками. Синтезированный алгоритм иллюстрируется примером обнаружения прямоугольного импульсного сигнала со случайными моментом появления, длительностью и амплитудой на фоне белого гауссова шума.

1. Рассмотрим задачу различения статистических гипотез H_0 и H_1 по наблюдениям векторной последовательности $\{\vec{y}\}_1^T = \{\vec{Y}_k, k = \overline{1, T}\} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_T\}$ в дискретном времени

$$H_0: \quad \vec{y}_k = \vec{s}_0(\vec{x}_k, k) + \vec{\eta}_k, \quad (1)$$

$$H_1: \quad \vec{y}_k = \vec{s}(\vec{x}_k, \vec{\tau}, k) + \vec{\eta}_k,$$

где

$$\vec{s}(\vec{x}_k, \vec{\tau}, k) = \begin{cases} \vec{s}_0(\vec{x}_k, k), & k \leq \tau_1, \\ \vec{s}_n(\vec{x}_k, k), & \tau_n < k \leq \tau_{n+1}, \\ \vec{s}_M(\vec{x}_k, k), & \tau_M < k \end{cases}$$

$$n = \overline{1, M - 1}, \quad k = \overline{1, T}.$$

Здесь предполагается, что при H_1 функция $\vec{s}(\vec{x}_k, \vec{\tau}, k)$ претерпевает скачкообразные изменения в случайные упорядоченные моменты дискретного времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$, образующие вектор неизвестных параметров $\vec{\tau}$; M - число скачков; $\vec{\eta}_k$ - шум наблюдений, статистически независимый с $\vec{x}_k, \vec{\tau}$ с взаимно независимыми значениями (при разных k), описываемый плотностями вероятностей $\rho_{\eta}(\vec{\eta}_k, k)$; $\vec{s}_0(\vec{x}_k, k), \vec{s}_1(\vec{x}_k, k), \dots, \vec{s}_M(\vec{x}_k, k)$ - некоторые заданные функции дискретного времени k и информационного процесса \vec{x}_k .

Будем считать, что информационный векторный процесс \vec{x}_k при фиксированном значении вектора моментов появления скачков $\vec{\tau}$ является марковским и его характеристики, описываемые переходными плотностями

вероятностей, в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ могут скачкообразно изменяться:

$$H_0: P(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}) = \pi_0(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}), \quad (2)$$

$$H_1: P(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}, \vec{\tau}) = \begin{cases} \pi_0(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}), & k \leq \tau_1 \\ \pi_n(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}), & \tau_n < k \leq \tau_{n+1} \\ \pi_M(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}), & \tau_M < k \end{cases}$$

$$n = \overline{1, M - 1}, \quad k = \overline{1, T},$$

где $\pi_j(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1})$ — некоторые заданные условные плотности вероятностей ($j = \overline{0, M}$). Из (2) следует, что при выполнении гипотезы H_1 в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ могут происходить, наряду со скачками в наблюдениях (1), также скачкообразные изменения структуры самого процесса \vec{x}_k .

Следует отметить, что задача различия статистических гипотез H_0 и H_1 при сделанных предположениях (1), (2) является весьма общей. Например, она включает в себя широкий класс задач оптимального обнаружения (различения) пачек шумовых импульсных сигналов в радиофизических измерениях, модулированных сигналов в связных и радиолокационных системах, сигналов со случайно изменяющимися параметрами в задачах технической диагностики и т. п.

Как известно [1-6], для решения задачи различия статистических гипотез H_0 и H_1 по наблюдаемой реализации $\{\vec{y}\}_1^T$ необходимо вычислить отношение правдоподобия

$$\Lambda(k) = P(\{\vec{y}\}_1^k | H_1) / P(\{\vec{y}\}_1^k | H_0) \quad (3)$$

и сравнить его при $k = T$ с порогом h , величина которого определяется заранее, исходя из выбранного критерия оптимальности. Покажем, что при выполнении определенных условий на статистику моментов появления скачков $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ существует рекуррентный алгоритм вычисления отношения правдоподобия (3) непосредственно в текущем времени.

2. Пусть в начальный момент времени $k = 0$ известны априорные вероятности $P(H_0), P(H_1)$ гипотез H_0, H_1 . А начальное значение информационного процесса \vec{x}_0 и вектор параметров $\vec{\tau}$ предположим статистически

независимыми и будем считать, что для них заданы плотность вероятностей $P(\vec{x}_0)$ и априорная совместная вероятность всех моментов скачков $P_{\vec{\tau}}(\vec{\tau})$. При этом предположим, что априорная вероятность $P_{\tau_1}(\tau_1)$ момента появления первого скачка может быть произвольной, а условные вероятности моментов других скачков τ_n удовлетворяют условиям

$$P(\tau_n | \tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \dots, \tau_1) = P(\tau_n | \tau_{n-1}), \quad (4)$$

$$P(\tau_n | \tau_{n-1} < k \leq \tau_n, \tau_{n-1}) = P(\tau_n | \tau_{n-1} < k \leq \tau_n),$$

$$n = \overline{2, M}.$$

Заметим, что условия (4) существенно ограничивают класс рассматриваемых априорных вероятностей $P_{\vec{\tau}}(\vec{\tau})$. Можно показать, что второе условие в (4) выполняется тогда и только тогда, когда функции $P(\tau_n | \tau_{n-1})$ имеют вид геометрических распределений:

$$P(\tau_n | \tau_{n-1}) = \nu_{n-1}(\tau_n) \prod_{k=\tau_{n-1}+1}^{\tau_n-1} [1 - \nu_{n-1}(k)], \quad (5)$$

$$\tau_n > \tau_{n-1}, \quad n = \overline{2, M}$$

с неоднородными в общем случае во времени коэффициентами $\nu_{n-1}(k)$, где $k = \overline{\tau_{n-1} + 1, \tau_n}$. При этом $\nu_{n-1}(k) = P(\tau_n = k | \tau_{n-1} < k \leq \tau_n)$ имеют смысл вероятности появления n -го скачка в момент времени k при условии, что уже произошло $n-1$ скачков. Условия (4) по существу означают, что статистика моментов появления скачков является марковской.

Введем вспомогательные статистические гипотезы G_{jk} появления j скачков ($j = \overline{0, M}$) к моменту времени k в моделях сигналов (1), (2). В силу полноты системы гипотез G_{jk} отношение правдоподобия $\Lambda(k)$ можно представить в виде разложения в ряд по числу скачков:

$$\Lambda(k) = \sum_{j=0}^M P_{jpr}(k) \Lambda_j(k), \quad (6)$$

где функции $P_{jpr}(k) \equiv P(G_{jk}) \equiv P(\tau_j < k \leq \tau_{j+1})$ имеют смысл априор-

ных вероятностей появления ровно j скачков к моменту времени k . При этом они могут быть вычислены заранее до проведения наблюдений через априорные вероятности моментов появления отдельных скачков по формулам

$$P_{0pr}(k) = \sum_{\tau_1=k}^{\infty} P_{\tau_1}(\tau_1), P_{Mpr}(k) = \sum_{\tau_M=-\infty}^{k-1} P_{\tau_M}(\tau_M), \quad (7)$$

$$P_{npr}(k) = \sum_{\tau_{n+1}=k}^{\infty} P_{\tau_{n+1}}(\tau_{n+1}) - \sum_{\tau_n=k}^{\infty} P_{\tau_n}(\tau_n),$$

$$n = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, T}.$$

Входящие в (6) функции $\Lambda_j(k) = P(\{\vec{y}\}_1^k | G_{jk}) / P(\{\vec{y}\}_1^k | G_{0k})$ имеют смысл отношений правдоподобия при различении вспомогательных гипотез G_{jk} и G_{0k} (при этом $\Lambda_0(k) = 1$). Пусть $W_j(\vec{x}_k, k) = P(\vec{x}_k | \{\vec{y}\}_1^k, G_{jk})$ — апостериорные плотности вероятностей процесса \vec{x}_k при условии появления j скачков ($j = \overline{0, M}$) к моменту времени k . Используя марковское свойство процесса \vec{x}_k , а также учитывая ограничения (4) на статистику моментов скачков $\vec{\tau}$, для отношений правдоподобия $\Lambda_j(k)$ и плотностей вероятностей $W_j(\vec{x}_k, k)$, следуя работам [10, 11]^{*}, можно получить систему взаимосвязанных рекуррентных уравнений в текущем времени:

$$\Lambda_j(k) = \{\Phi_{jj}(\vec{y}_k, k-1)[1 - \mu_j(k-1)]\Lambda_j(k-1) + \quad (8)$$

$$+ \Phi_{j-1,j}(\vec{y}_k, k-1)\mu_j(k-1)\Lambda_{j-1}(k-1)\}/\Phi_{00}(\vec{y}_k, k-1),$$

$$W_j(\vec{x}_k, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(\vec{y}_k | \vec{x}_k) \pi_j(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}) \{[1 - \mu_j(k-1)]\Lambda_j(k-1)W_j(\vec{x}_{k-1}, k-1) +$$

$$+ \mu_j(k-1)\Lambda_{j-1}(k-1)W_{j-1}(\vec{x}_{k-1}, k-1)\}/[\Phi_{00}(\vec{y}_k, k-1)\Lambda_j(k)],$$

^{*}Заметим, что в работах [10, 11] не были оговорены необходимые ограничения (4) на вид функции $P_{\vec{\tau}}(\vec{\tau})$.

$$j = \overline{0, M}, \quad k = \overline{1, T}, \quad \Lambda_0(k) = 1$$

с начальными условиями

$$\Lambda_j(k) \Big|_{k=0} = 1, \quad W_j(\vec{x}_k, k) \Big|_{k=0} = P(\vec{x}_0), \quad j = \overline{0, M}. \quad (9)$$

В уравнениях (8) приняты следующие обозначения:

$$\Psi_j(\vec{y}_k | \vec{x}_k) \equiv \rho_\eta[\vec{y}_k - \vec{s}_j(\vec{x}_k, k); k], \quad (10)$$

$$\Phi_{ij}(\vec{y}_k, k-1) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{x}_{k-1} d\vec{x}_k \Psi_j(\vec{y}_k | \vec{x}_k) \pi_j(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}) W_i(\vec{x}_{k-1}, k-1),$$

$$\mu_n(k-1) \equiv 0, \quad \mu_n(k-1) \equiv P_{\tau_n}(k-1) \left[\sum_{\tau_n=-\infty}^{k-1} P_{\tau_n}(\tau_n) \right]^{-1},$$

$$\mu_n(k-1) \equiv P_{\tau_n}(k-1) \left[\sum_{\tau_n=-\infty}^{k-1} P_{\tau_n}(\tau_n) - \sum_{\tau_{n+1}=-\infty}^{k-1} P_{\tau_{n+1}}(\tau_{n+1}) \right]^{-1},$$

$$i, j = \overline{0, M}, \quad n = \overline{1, M-1}.$$

Уравнения (6), (8) с начальными условиями (9) и обозначениями (7), (10) составляют искомый рекуррентный алгоритм вычисления отношения правдоподобия $\Lambda(T)$ для задачи различения гипотез H_0 и H_1 . Согласно уравнениям (8) алгоритм на каждом шаге дискретного времени совместно определяются частные отношения правдоподобия $\Lambda_j(k)$ и вспомогательные плотности вероятностей $W_j(\vec{x}_k, k)$, где $j = \overline{0, M}$. Заметим, что функции $W_j(\vec{x}_k, k)$ могут затем использоваться для оптимального оценивания самого информационного процесса \vec{x}_k [11]. Следовательно, полученный алгоритм одновременно решает задачи оптимальной фильтрации сигналов и оптимального обнаружения скачков их параметров.

С целью упрощения практической реализации синтезированного алгоритма можно перейти от уравнений (8) для апостериорных плотностей вероятностей $W_j(\vec{x}_k, k)$ к более простым уравнениям для

условных оценок $\hat{\vec{x}}_j(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \vec{x}_j W_j(\vec{x}_k, k) d\vec{x}_k$, $j = \overline{0, M}$. При этом точные

уравнения для условных оценок $\hat{\vec{x}}_j(k)$ в рекуррентной форме из соотношений (8) удается получить лишь в некоторых частных случаях. В общем случае можно использовать, например, гауссову аппроксимацию на каждом шаге плотностей вероятностей $W_j(\vec{x}_k, k)$ для построения приближенного алгоритма.

3. В качестве примера рассмотрим алгоритм оптимального обнаружения прямоугольного импульсного сигнала на фоне белого гауссова шума. Будем полагать, что скалярный наблюдаемый процесс y_k задается в дискретном времени уравнениями

$$H_0: \quad y_k = \eta_k \quad (11)$$

$$H_1: \quad y_k = \begin{cases} \eta_k, & k \leq \tau_1, \quad k > \tau_2 \\ A + \eta_k, & \tau_1 < k \leq \tau_2 \end{cases}$$

$$k = \overline{1, T},$$

где A и $\vec{\tau} = \{\tau_1, \tau_2\}$ - взаимонезависимые и статистически независимые с шумом η_k случайные амплитуда импульса и вектор моментов появления скачков; η_k - белый гауссов шум с нулевым средним значением и дисперсией R . Предположим, что априорные вероятности гипотез H_0 и H_1 одинаковы, т.е. $P(H_0) = P(H_1) = 0,5$, априорная плотность вероятностей амплитуды $P(A)$ - гауссова со средним значением A_{pr} и дисперсией D_{pr} , априорная вероятность момента появления импульса распределена равномерно на интервале наблюдения

$$P_{\tau_1}(\tau_1) = \begin{cases} 1/T, & 0 \leq \tau_1 \leq T - 1 \\ 0, & \tau_1 < 0, \quad \tau_1 \geq T \end{cases} \quad (12)$$

а условная априорная вероятность момента окончания импульса пусть имеет вид (5)

$$P(\tau_2 | \tau_1) = \nu_1(\tau_2) [1 - \nu_1(\tau_2 - 1)] [1 - \nu_1(\tau_2 - 2)] \dots [1 - \nu_1(\tau_1 + 1)],$$

где

$$\nu_1(k) \equiv P_{\tau_2}(k) / P_{1pr}(k) = P_{\tau_1}(k - T_C) \left[\sum_{m=k-T_C}^{k-1} P_{\tau_1}(m) \right]^{-1}.$$

Тогда для одномерных априорных вероятностей моментов появления скачков выполняется равенство $P_{\tau_2}(\tau_2) = P_{\tau_1}(\tau_2 - T_c)$ и T_c имеет смысл средней длительности импульсного сигнала. Для такой статистики моментов скачков из (7), (10) получим

$$P_{0pr}(T) = 0, \quad P_{1pr}(T) = T_c/T, \quad P_{2pr}(T) = 1 - T_c/T, \quad (13)$$

$$\mu_1(k-1) = \begin{cases} 1/k, & k = \overline{1, T_c} \\ 1/T_c, & k = \overline{T_c + 1, T} \end{cases}$$

$$\mu_2(k-1) = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, T_c} \\ 1/(k - T_c), & k = \overline{T_c + 1, T} \end{cases}$$

Поскольку импульсный сигнал отличен от нуля только при $\tau_1 < k \leq \tau_2$ и его амплитуда A является случайной постоянной величиной, то из (10) также можно получить выражения

$$\Phi_{00}(y_k, k-1) = \Phi_{12}(y_k, k-1) = \Phi_{22}(y_k, k-1) = \rho_\eta(y_k), \quad (14)$$

$$\Phi_{01}(y_k, k-1) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\eta(y_k - A) W_0(A, k-1) dA$$

$$\Phi_{11}(y_k, k-1) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\eta(y_k - A) W_1(A, k-1) dA$$

Поэтому уравнения алгоритма (6), (8) в рассматриваемом частном примере с учетом (13), (14) принимают вид

$$\Lambda(T) = T_c \Lambda_1(T)/T + (1 - T_c/T) \Lambda_2(T), \quad (15)$$

$$\Lambda_1(k) = \{\Phi_{11}(y_k, k-1) [1 - \mu_1(k)] \Lambda_1(k-1) +$$

$$+ \Phi_{01}(y_k, k-1) \mu_1(k-1)\}/\Phi_{00}(y_k, k-1),$$

$$\Lambda_2(k) = [1 - \mu_2(k-1)] \Lambda_2(k-1) + \mu_2(k-1) \Lambda_1(k-1);$$

(16)

$W_0(A, k) = P(A)$,
 $W_1(A, k) = \beta(k)W_{01}(A, k) + [1 - \beta(k)]W_{11}(A, k)$,

где

$$W_{01}(A, k) = \rho_\eta(y_k - A)P(A)/\Phi_{01}(y_k, k - 1), \quad (17)$$

$$W_{11}(A, k) = \rho_\eta(y_k - A)W_1(A, k - 1)/\Phi_{11}(y_k, k - 1),$$

$$\beta(k) = \mu_1(k - 1)\Phi_{01}(y_k, k - 1)/[\Phi_{00}(y_k, k - 1)\Lambda_1(k)],$$

$$k = \overline{1, T}, \quad \Lambda_1(0) = \Lambda_2(0) = 1, \quad W_1(A, 0) = P(A).$$

Используя гауссовость амплитуды A и шума наблюдений η_k , а также гауссову аппроксимацию $W_1(A, k)$, найдем из (16) приближенные рекуррентные уравнения для математического ожидания $A_1(k)$ и дисперсии $D_1(k)$ плотности вероятностей $W_1(A, k)$:

$$A_1(k) = \beta(k)A_{01}(k) + [1 - \beta(k)]A_{11}(k), \quad (18)$$

$$D_1(k) = \beta(k)D_{01}(k) + [1 - \beta(k)]D_{11}(k) +$$

$$+ \beta(k)[1 - \beta(k)][A_{01}(k) - A_{11}(k)]^2,$$

$$A_{01}(k) = (D_{pr}y_k + RA_{pr})/(D_{pr} + R),$$

$$A_{11}(k) = [D_1(k - 1)y_k + RA_1(k - 1)]/[D_1(k - 1) + R],$$

$$D_{01} = RD_{pr}/(D_{pr} + R),$$

$$D_{11}(k) = RD_1(k - 1)/[D_1(k - 1) + R],$$

$$k = \overline{1, T}, \quad A_1(0) = A_{pr}, \quad D_1(0) = D_{pr},$$

а из (14) получим выражения для вспомогательных функций

$$\Phi_{00}(y_k, k - 1) = \exp[-y_k^2/(2R)](2\pi R)^{-1/2}, \quad (19)$$

$$\Phi_{01}(y_k, k - 1) = \exp[-(y_k - A_{pr})^2/[2(R + D_{pr})]] [2\pi(R + D_{pr})]^{-1/2},$$

$$\Phi_{11}(y_k, k - 1) = \exp[-[y_k - A_1(k - 1)]^2/[2(D_1(k - 1) + R)]] \times \\ \times [2\pi[D_1(k - 1) + R]]^{-1/2}.$$

Система взаимосвязанных рекуррентных уравнений (15), (18) с обозначениями (13), (17), (19) образует алгоритм вычисления отношения правдоподобия $\Lambda(t)$ в задаче обнаружения импульсного сигнала. Оптимальное по критерию идеального наблюдателя решающее правило различения гипотез H_0 , H_1 основано на сравнении значения $\Lambda(t)$ с порогом, равным единице: $h = P(H_0)/P(H_1) = 1$.

4. С целью проверки работоспособности полученного квазиоптимального алгоритма обнаружения случайного импульсного сигнала и оценки его характеристик проводилось статистическое моделирование на ЭВМ. При этом длительность интервала наблюдений задавалась равной $T = 100$ и находилась вероятность полной ошибки обнаружения сигнала $P_{\text{ош опт}}$ (как полусумма вероятностей ложной тревоги и пропуска цели) для различных значений параметров задачи A , $T_1 = \tau_2 - \tau_1$, R . Одновременно вычислялись также вероятности ошибок $P_{\text{ош б}}$, $P_{\text{ош мн}}$, $P_{\text{ош дет}}$ для трех других алгоритмов обработки:

- алгоритма обнаружения, синтезированного в предположении, что амплитуда сигнала и его длительность заранее известны и равны соответственно средней амплитуде A_{pr} и средней длительности импульса T_c , а случайный момент появления τ_1 описывается равномерным распределением вероятности (12); решающее правило при этом имеет вид

$$\frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \exp\left(A_{pr} \sum_{k=\tau_1+1}^{\min[T_c, T]} \frac{Y_k - A_{pr}/2}{R}\right) \begin{cases} > 1; \\ < 1; \end{cases} \quad (20)$$

- алгоритма максимального правдоподобия [5, 6], построенного в предположении, что амплитуда и длительность импульсного сигнала заранее известны и равны соответственно A_{pr} и T_c ; правило принятия решения в этом случае имеет вид

$$\max_{\tau_1} \sum_{k=\tau_1+1}^{\tau_1 + T_C} Y_k > \frac{A_{pr} T_C}{2}, \quad \tau_1 = \overline{0, T - 1}, \quad (21)$$

где порог выбран такой же, как оптимальный порог по критерию идеального наблюдателя для сигнала с известными параметрами;

- алгоритма, построенного для обнаружения детерминированного сигнала, все параметры которого известны и равны соответственно истинному моменту появления импульса τ_1 , его средней длительности T_C и средней амплитуде A_{pr} ; решающее правило для обнаружения такого детерминированного сигнала имеет вид

$$\sum_{k=\tau_1+1}^{\tau_1 + T_C} Y_k > \frac{A_{pr} T_C}{2}. \quad (22)$$

На рис. 1 представлены зависимости вероятностей ошибки обнаружения $P_{\text{ош опт}}$, $P_{\text{ош б}}$, $P_{\text{ош мп}}$, $P_{\text{ош дет}}$ от истинной амплитуды импульсного сигнала A_i , полученные в результате обработки 10 независимых реализаций наблюдаемого процесса y_k . При этом момент появления и длительность импульса, а также дисперсия шума наблюдений были соответственно равны $\tau_1 = 50$, $T_i = \tau_2 - \tau_1 = 10$, $R = 2, 5$. Параметры алгоритмов обнаружения выбирались такими: $A_{pr} = D_{pr} = 1$, $T_C = T_i = 10$.

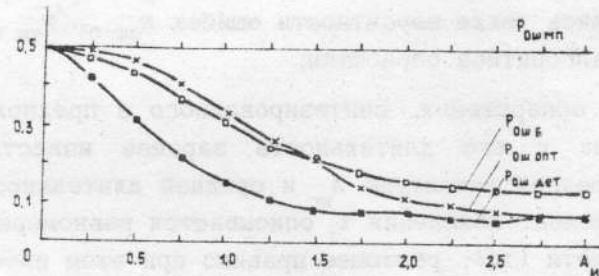


Рис. 1.

На рис. 2 приведены зависимости вероятностей ошибок обнаружения от длительности импульсного сигнала $T_i = \tau_2 - \tau_1$ при $A_i = A_{pr} = D_{pr} = 1$; $R = 2, 5$; $T_C = 10$; $\tau_1 = 50$. Как видно из рисунков, при несовпадении реальной амплитуды или длительности сигнала A_i , T_i с априорно ожидаемыми A_{pr} , T_C исследуемый квазиоптимальный алгоритм приводит к меньшей вероятности ошибки обнаружения $P_{\text{ош опт}}$, чем

алгоритм (20). Выигрыш в точности обнаружения достигается за счет способности квазиоптимального алгоритма подстраиваться под истинные значения амплитуды и длительности импульсного сигнала. При больших значениях истинной амплитуды или истинной длительности сигнала, когда отношение сигнал/шум велико, $E_i^2 = A_i^2 T_i / R \gg 1$, основной вклад в вероятность полной ошибки обнаружения вносит вероятность ложной тревоги, которая вычисляется при отсутствии сигнала в наблюдаемой реализации y_k . Поэтому, как видно из рис. 1 и 2, при $A_i \geq 2,5$ или $T_i \geq 30$ вероятности $P_{\text{ош опт}}$, $P_{\text{ош б}}$, $P_{\text{ош мп}}$, $P_{\text{ош дет}}$ выходят на постоянные уровни, определяемые вероятностями ложных тревог для рассматриваемых алгоритмов.

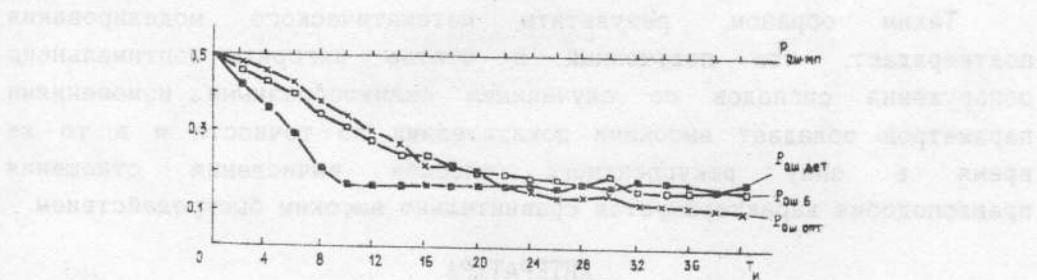


Рис. 2

С помощью моделирования на ЭВМ исследовались также зависимости средних вероятностей ошибок обнаружения для различных алгоритмов от соотношения сигнал/шум $E_i = (A_i^2 T_i / R)^{1/2}$ и от длительности импульса T_i при $A_i = A_{\text{пр}} = 1$, $D_{\text{пр}} = 0$, $\tau_1 = 50$, $T_c = T_i$. Заметим, что уравнения алгоритма (15), (17)–(19) при $D_{\text{пр}} = 0$ становятся точными и существенно упрощаются, так как $A_1(k) = A_{\text{пр}}$, $D_1(k) = 0$. Полученные в результате усреднения по 10^4 реализациям значения вероятностей ошибок обнаружения $P_{\text{ош опт}}$, $P_{\text{ош б}}$, $P_{\text{ош мп}}$ даны в табл. 1. Здесь же приведены теоретические значения вероятности ошибки $P_{\text{ош дет}}$ для алгоритма обнаружения детерминированного сигнала с полностью известными параметрами (22). Из таблицы видно, что при выбранных значениях параметров оптимальный алгоритм приводит к заметно меньшей вероятности ошибки $P_{\text{ош опт}} < P_{\text{ош мп}}$, чем обнаружитель максимального правдоподобия (21). А при малых отношениях сигнал/шум $E_i \leq 2$ исследуемый оптимальный алгоритм обнаружения имеет практически такую же вероятность ошибки $P_{\text{ош опт}} \approx P_{\text{ош б}}$, что и байесовский алгоритм (20).

оптимальный для сигналов с известной длительностью.

Таблица 1

$E_{\text{И}}$	$T_{\text{и}}$	$P_{\text{ош опт}}$			$P_{\text{ош Б}}$			$P_{\text{ош мп}}$			$P_{\text{ошдет}}$
		5	10	20	5	10	20	5	10	20	
1	0, 450	0, 428	0, 403	0, 448	0, 427	0, 400	0, 500	0, 500	0, 494	0, 309	
2	0, 357	0, 324	0, 283	0, 351	0, 316	0, 273	0, 500	0, 491	0, 448	0, 159	
3	0, 228	0, 195	0, 163	0, 221	0, 185	0, 154	0, 480	0, 426	0, 320	0, 067	
4	0, 117	0, 098	0, 082	0, 102	0, 085	0, 069	0, 350	0, 263	0, 168	0, 023	
5	0, 061	0, 051	0, 043	0, 037	0, 031	0, 027	0, 159	0, 106	0, 064	0, 006	
6	0, 034	0, 031	0, 026	0, 010	0, 010	0, 010	0, 046	0, 028	0, 017	0, 001	

Таким образом, результаты математического моделирования подтверждают, что полученный в статье алгоритм оптимального обнаружения сигналов со случайными скачкообразными изменениями параметров обладает высокими показателями по точности и в то же время в силу рекуррентного способа вычисления отношения правдоподобия характеризуется сравнительно высоким быстродействием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов В. М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации/Под ред. Г. П. Тартаковского. - М.: Сов. радио, 1963. Т. 1.
2. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. - М.: Сов. радио, 1977.
3. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. -М.: Сов. радио, 1978.
4. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. -М.: Радио и связь, 1983.
5. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов/Под ред. П. А. Бакута. -М.: Радио и связь, 1984.
6. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. -М.: Радио и связь, 1986.
7. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. -М.: Гос. ун-т, 1966.
8. Липнер Р. Ш., Ширяев В. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). -М.: Наука, 1974.
9. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. -М.: Сов. радио, 1975.
10. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 6. С. 1241.

11. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1985.
Т. 26. № 2. С. 184.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 июня 1991 г.

THE OPTIMAL DETECTION OF JUMP-LIKE CHANGES
OF SIGNAL PARAMETERS IN DISCRETE TIME

A. A. Mal'tsev, A. M. Silaev

The optimal detection problem of signals with jump-like parameter changes is solved in discrete time. The recursive algorithm is derived to calculate the likelihood ratio in real time. As an example, the optimal detection algorithm is considered for the impulse rectangular signal with a random appearance time, duration and amplitude. Computer simulation results are given.

Оптимальная задача обнаружения сигналов с прыжко-подобными изменениями параметров решена в дискретное время. Рекурсивный алгоритм вычисления соотношения вероятностей для определения времени появления, длительности и амплитуды импульсного прямоугольного сигнала с заданными характеристиками приведен. Результаты численных экспериментов подтверждают правильность предложенного алгоритма.