ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Том 35, N 11-12 *РАДИОФИЗИКА* *1992*

Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 537.86:519.254

МНОГОМЕРНОЕ ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОВОКУПНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Ф. М. Андреев, М. М. Бендерский, А. В. Статкус

Задача многомерного интервального оценивания совокупности нормальных параметров рассмотрена в работе [1]. В ней обоснован метод, обеспечивающий значительно более высокую точность оценивания, чем традиционный, основанный на распределении Стьюдента. Однако практическое применение рассматриваемого метода существенно затруднено отсутствием, при размерности пространства измерений $k > 3$, удобных представлений для процентных значений распределения Хотеллинга, на которых метод основывается.

Цель сообщения: изложение метода получения асимптотических разложений (АР) для процентных значений распределения Хотеллинга с любой заданной точностью при произвольной размерности пространства измерений.

Функция распределения Хотеллинга имеет вид [2]

$$H(T_q) = \int\limits_0^{T_q} \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\, u^{k-1}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} du, \quad (1)$$

где k – размерность пространства измеречий, $k = 2, 3, \ldots,$ $(n-1)$ – число степеней свободы, $n = 2, 3, \ldots,$ T_q есть $100q$-процентное значение распределения Хотеллинга с $(n-1)$ степенями свободы.

При многомерном доверительном оценивании, основанном на распределении (1), производится сравнение T_q со случайной величиной $T \geq 0$, подчиняющейся распределению (1) и связанной с измеряемыми величинами соотношением

$$T^2 = (n - 1)(\vec{x} - \vec{\mu})^{\mathrm{T}} S^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}),$$

где $\vec{x}$ - вектор выборочных средних оцениваемого вектора $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_k)^{\mathrm{T}}$, S - выборочная корреляционная матрица вектора $\vec{\mu}$ по выборке объема n.

При $T \le T_q$ считается, что измерения соответствуют оцениваемому вектору $\vec{\mu}$ с вероятностью $p = 1 - q$.

Предлагаемый метод включает два этапа. Первый этап - получение АР функции распределения Хотеллинга. Для этого производится разложение в асимптотические степенные ряды по степеням n^{-1} сомножителей, входящих под знак интеграла в выражении (1):

$$h_1(n, k) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n - 1)^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{n - k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \tag{2}$$

$$h_2(n, k, u) = \left(1 + \frac{u^2}{n - 1}\right)^{-n/2} u^{k-1} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Затем осуществляется интегрирование ряда функции $h_2(n, k, u)$ по аргументу u и перемножение полученных асимптотических рядов, что дает АР функции распределения Хотеллинга. При этом линейные операции над асимптотическими рядами, как и перемножение их, выполняются в строгом соответствии с теорией асимптотических методов [3-5]. Бесконечные ряды заменяются конечными, выбор числа членов ряда, учитываемых при вычислении, определяет точность получаемого асимптотического разложения.

Второй этап решения - собственно получение АР для процентных значений распределения Хотеллинга. При известном АР функции распределения Хотеллинга этот этап рассматривается как задача, обратная решаемой на первом этапе. Иначе говоря, по заданному значению функции распределения Хотеллинга

$$H(T_q, n) = 1 - q = p \tag{3}$$

необходимо определить аргумент T_q, который является функцией от q и n. Установлено, что при $n \to \infty$ и $\alpha = n^{-1}$ функция $T_q = T(q, \alpha)$ представляется рядом Маклорена

$$T(q, \alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} T_{\alpha}^{(i)}(q, 0)\, \frac{\alpha^i}{i!}. \tag{4}$$

Производные $T_{\alpha}^{(1)}(q,0)$, входящие в (4), находятся как производные соответствующего порядка неявной функции нескольких переменнных путем последовательного дифференцирования (3).

Реализация метода дает следующие результаты. АР функций $h_1(n,k)$ и $h_2(n,k,u)$ имеют вид

$$h_1(n,k) = \left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{k/2-1}\right)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A(k,i)\,n^{-i}, \tag{5}$$

где коэффициенты $A(k,i)$ равны

$$A(k,0) = 1, \quad A(k,1) = -\,k^2/4, \quad A(k,2) = (3k^4 - 8k^3 - 24k^2 + 8k)/96,$$

$$A(k,3) = -\,(k^6 - 8k^5 - 8k^4 + 72k^3 + 64k^2 - 64k)/384, \tag{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$h_2(n,k,u) = u^{k-1}\, e^{-u^2/2} \sum_{i=0}^{\infty} B(u,i)\,n^{-i}, \tag{7}$$

где коэффициенты $B(u,i)$ равны

$$B(u,0) = 1, \quad B(u,1) = (u^4 - 2u^2)/4, \quad B(u,2) = (3u^8 - 28u^6 + 60u^4 - 48u^2)/96,$$

$$B(u,3) = (u^{12} - 22u^{10} + 140u^8 - 344u^6 + 384u^4 - 192u^2)/384, \tag{8}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Интеграл от $h_2(n,k,u)$ при условии $n \to \infty$ принимает вид

$$\int_0^{T_q} h_2(n,k,u)\,du = \int_0^{T_q} u^{k-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} B(u,i)\,n^{-i}\right] e^{-u^2/2}\,du,$$

т. е. является линейной комбинацией выражений $n^{-i}\int_0^{T_q} u^{m-1} e^{-u^2/2} du.$

Последний интеграл с точностью до коэффициента $\sqrt{2\pi}$ представляется в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{T_q} u^{m-1} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \begin{cases} 2^{l-1}(l-1)!\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - \varphi_0(T_q)\sum\limits_{i=1}^{l}\dfrac{T_q^{2(i-1)}}{2^{i-1}(i-1)!}\right] & \text{при } m = 2l, \\ (2l-1)!!\left[\Phi_0(T_q) - \varphi_0(T_q)\sum\limits_{i=1}^{l}\dfrac{T_q^{2i-1}}{(2i-1)!!}\right] & \text{при } m = 2l+1, \\ l = 1, 2, 3, \ldots & \end{cases} \tag{9}$$

Здесь обозначены

$$\Phi_0(T_q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{T_q} e^{-u^2/2}du, \quad \varphi_0(T_q) = \Phi_0'(T_q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-T_q^2/2}.$$

Последовательными преобразованиями АР функции распределения Хотеллинга приводится к виду

$$H(T_q) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^{k/2-1}(k/2-1)!}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left[\sum\limits_{j=0}^{i} A(k, j)\Omega(k, i-j)\right]n^{-i} & \text{при } k = 2l, \\ \dfrac{2}{(k-2)!!}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left[\sum\limits_{j=0}^{i} A(k, j)\Omega(k, i-j)\right]n^{-i} & \text{при } k = 2l+1, \\ l = 1, 2, 3, \ldots, & \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\Omega(k, i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{T_q} u^{k-1}B(u, i)\, e^{-u^2/2}du.$$

Производные $T_\alpha^{(i)}(q, 0)$ в выражении (4) равны

$$T_\alpha^{(1)} = -H_\alpha^{(1)}/H_T^{(1)}, \quad T_\alpha^{(2)} = -[H_\pi^{(2)}(T_\alpha^{(1)})^2 + 2H_{\alpha T}^{(2)}T_\alpha^{(1)} + H_{\alpha\alpha}^{(2)}]/H_T^{(1)},$$

$$T_\alpha^{(3)} = -[H_{\pi T}^{(3)}(T_\alpha^{(1)})^3 + 3H_\pi^{(2)}T_\alpha^{(2)}T_\alpha^{(1)} + 3H_{\alpha\pi}^{(3)}(T_\alpha^{(1)})^2 + \tag{11}$$

$$+ 3H^{(2)}_{\alpha T} T^{(2)}_{\alpha} + 3H^{(3)}_{\alpha\alpha T} T^{(1)}_{\alpha} + H^{(3)}_{\alpha\alpha\alpha}]/H^{(1)}_{T},$$

где $H^{(1)}_{T} = \frac{\partial}{\partial T} H$, $H^{(1)}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} H$, $H^{(3)}_{\alpha TT} = \frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial T^2} H$ и т. д. На основании выражений (11) с учетом (6),(8),(10) и имея в виду, что $\lim_{n\to\infty} T(q,n) = x_q$, где x_q есть $100q$-процентное значение нормального распределения, может быть получено АР для процентных значений распределения Хотеллинга при произвольной размерности пространства измерений k. В качестве примера для случаев $k = 4$, 6 в табл. 1 и 2 при некоторых значениях q и n приведены процентные значения распределения Хотеллинга с четырьмя верными десятичными знаками. Для этого в выражениях (6),(8),(11) соответствующие функции вычислялись до $i = 4$.

Таблица 1

Процентные значения распределения Хотеллинга $T(q,n)$ при $k = 4$

Число степеней свободы	Уровни вероятности q				
	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
24	1,3650	1,7739	2,5903	2,9104	3,6172
100000	1,2817	1,6452	2,3268	2,5763	3,0906

Таблица 2

Процентные значения распределения Хотеллинга $T(q,n)$ при $k = 6$

Число степеней свободы	Уровни вероятности q				
	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
24	1,4000	1,8206	2,6633	2,9947	3,7293
100000	1,2818	1,6452	2,3269	2,5763	3,0906

В заключение отметим, что отношение объемов доверительных областей, соответствующих рассматриваемому (V_1) и традиционному (V_0) методам [1], равно

$$\frac{V_1}{V_0} = \left[\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)\right]^{-1} \left(\frac{\sqrt{\pi}\, T_q}{2t_q}\right)^k \sqrt{\frac{(n-2)\ldots(n-k)}{(n-1)^{k-1}}}, \qquad (12)$$

где t_q есть $100q$-процентное значение распределения Стьюдента, показывает, что выигрыш рассматриваемого метода в точности растет с увеличением размерности пространства k. В табл. 3 приведены значения отношения (12) при $q = 0,05$ и $k = 3, 4, 6$.

Таблица 3

Отношение V_1/V_0

Число степеней свободы	Размерность пространства измерений k		
	3	4	6
24	0,5296	0,3146	0,0843
100000	0,5236	0,3084	0,0808

ЛИТЕРАТУРА

1. Матушанский Г. У., Нежметдинов Т. К. //Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. N 4. С. 648.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. -М.: Мир, 1975.
3. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. -М.: ИЛ, 1961.
4. Эрдейи А. Асимптотические разложения. -М.: Физматгиз, 1962.
5. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. -М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
3 марта 1992 г.