

УДК 537.533.3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ РАЗЛИЧНОЙ ТОЛЩИНЫ В СИЛЬНОТОЧНЫХ КООКСИАЛЬНЫХ ДИОДАХ С МАГНИТНОЙ ИЗОЛЯЦИЕЙ

В. Е. Нечаев

Дан анализ задачи формирования пучка в коаксиальном диоде с трубчатым катодом различной толщины как в неограниченно сильных, так и конечных изолирующих магнитных полях. Развита методика определения основных характеристик пучков на базе инвариантов задачи формирования и предварительного решения задачи транспортировки квазиоднородных по плотности пучков с различным вихрем обобщенного импульса. Найдены необходимые условия, определяющие возможность формирования квазиоднородных пучков, и прослежена эволюция их характеристик с изменением геометрических и электрических параметров системы.

Известны решения задачи формирования релятивистского электронного пучка (РЭП) в коаксиальном диоде с магнитной изоляцией (КДМИ) в неограниченно сильном магнитном поле с тонкостенного трубчатого катода [1] и некоторых других вариантов катодов: двойных коаксиальных [2,3], сплошных [2,4] (с различными радиальными распределениями плотности в пучке), а также в конечном магнитном поле с очень тонкого катода, допускающего применение безвихревых моделей пучка, в частности, бриллюэновской [5,6]*.

В настоящей работе даются решения задачи формирования как в неограниченно сильных, так и в конечных магнитных полях с катодов различной толщины (в том числе и как угодно тонких - в пределе). При этом основное внимание уделяется возможностям формирования квазиоднородных по плотности трубчатых потоков, наиболее привлекательных для практических приложений [8]. Сначала находится приближенное аналитическое решение задачи транспортировки ламинарного РЭП с произвольным вихрем обобщенного импульса, плавно переходящее в пределе нулевого вихря в известное - бриллюэновское. Эта модель затем используется для нахождения характеристик сформированного РЭП (на выходе КДМИ) и подшивается к прикатодной области с помощью инвариантов, среди которых ключевая роль принадлежит сохранению осевого потока импульса частиц и поля от катода до однородного участка канала транспортировки.

Основные особенности формирования сначала анализируются на слаборелятивистской модели, позволяющей выявить качественно все главные закономерности и эволюции решений в наиболее удобной форме, а известный принцип подобия сводит к найденным решениям различные возможные варианты режимов КДМИ. Предлагаемая методика позволяет

*Безвихревые двухпоточные модели в области собственно диода (вокруг катода) и отдельно в канале транспортировки проанализированы ранее в [7].

установить допустимые функции радиального распределения плотности и отсечь невозможные; в частности, однородные по плотности пучки в сильном магнитном поле не могут быть сформированы начиная с некоторой их толщины (с ростом релятивизма эта особенность усугубляется). В заключение приведены примеры расчета формирования РЭП мегазольтной энергии в режимах сильного магнитного поля с катодов различной толщины и безвихревого РЭП с тонкостенного катода вблизи отсечки - при минимальном изолирующем магнитном поле.

1. Общие положения и основные соотношения. При аналитических расчетах статического формирования интенсивных пучков в осесимметричных системах, в том числе типа КДМИ, возможные радиальные распределения плотности электронов и их энергии на участке транспортировки определяются [1-6] с учетом сохранения потока импульса частиц и поля в осевом направлении:

$$\oint \left[N p_z \vec{\beta} + \vec{z}_0 \frac{E^2 + H^2}{2} - E_z \vec{E} - H_z \vec{H} \right] d\vec{S} = 0. \quad (1)$$

Здесь и всюду далее используется удобная (см., например, [7]) система единиц, в которой заряд и масса электрона, а также скорость света равны $e = m = c = 1$. В такой системе единица тока соответствует 17,04 кА, потенциала - 511 кВ; напряженность магнитного поля $1 \text{ см}^{-1/2}$ - 1,704 кЭ. Используются следующие обозначения основных физических величин: $N = 4\pi N_e$, где N_e -

концентрация; $\vec{\beta}$ - скорость электронов, $\vec{p} = \gamma \vec{\beta}$ - их импульс, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ - релятивистский масс-фактор, или энергия электронов; \vec{E} , \vec{H} - электрическое и магнитное поле, $\vec{E} = -\nabla\phi$, ϕ - электростатический потенциал; I - полный ток пучка, \vec{J} - плотность тока; R - внутренний радиус анодной трубы, R_k - внешний радиус катодного цилиндра, δ_k - толщина трубчатого катода; a, b - внутренний и внешний радиусы сформированного пучка, $\delta = b - a$ - толщина пучка, δ_b - толщина электронной втулки вокруг катода.

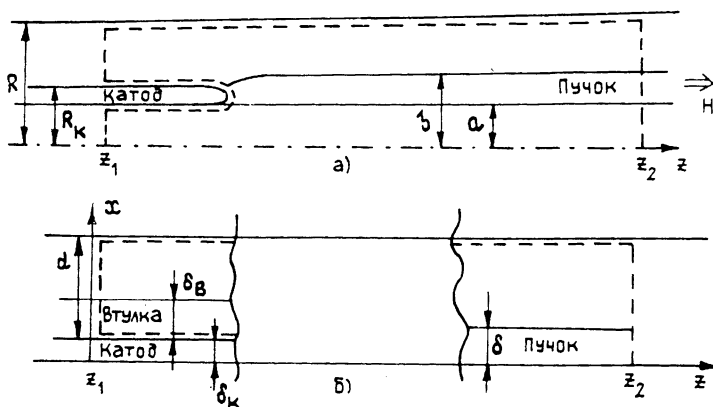


Рис. 1.

Наиболее просто полезная информация из (1) извлекается для простейших конфигураций КДМИ "классического" типа (рис. 1а), на поверхностях которых $E_z = 0$, на эмиттирующем торце катода $\vec{E} = 0$ в

силу ограничения тока полем объемного заряда. Контур интегрирования (1) охватывает, как показано пунктиром на рис. 1, вакуумный объем с электронным потоком, ограничения по z устанавливаются в однородных областях вокруг катода (z_1) и в канале транспортировки (z_2). Вокруг катода, как в магнетронном диоде, может существовать электронная втулка (как показано на рис. 1б - для плоской модели КДМИ), поперечный размер которой управляется внешним магнитным полем.

Согласно (1) поток импульса электронов сформированного пучка определяется разностью давления полей на левой и правой границах области интегрирования (рис. 1)

$$\int_a^b p_z J_z r dr = \int_{z_2}^{z_1(r)} \int_0^R \frac{E_r^2 + H_\theta^2 - H_z^2}{8\pi} r dr, \quad (2)$$

где граница $z_1(r) \equiv z_1$ в вакууме и, кроме того, охватывает поверхность эмиттера с $\vec{E} = 0$. Ранее (2) применялось в [5,6] для расчета формирования РЭП в конечных магнитных полях с очень тонкого катода ($\delta = b - a \rightarrow 0$) на основе однопоточной, бриллюэновской модели безвихревого пучка. Чаше аналогичное выражение использовалось для случая неограниченно сильного магнитного поля [1-4], в этом случае конфигурации H_θ , H_z при $z_1(r)$, z_2 совпадают и с учетом интеграла энергии $\gamma = 1 + \Phi$ (все электроны рождаются на эквипотенциальном катоде с $\Phi_k = 0$) из (2) следует

$$\int_a^b \gamma \beta^2 \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\gamma}{dr} \right) dr = \int_{z_2}^{z_1(r)} \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{d\gamma}{dr} \right)^2 r dr. \quad (3)$$

Отсюда с учетом величины полей $d\gamma/dr$ в вакуумном зазоре при $z_{1,2}$ следует, что на выходе КДМИ могут реализоваться лишь такие монотонно нарастающие распределения энергии $\gamma(r)$, для которых выполняется равенство

$$(\gamma_b - 1)(\gamma_b^2 + \gamma_b - 2\Gamma) = -\gamma_b \ln(R/b) \int_a^b \left(1 + \frac{2}{\gamma^2} \right) \left(\frac{d\gamma}{dr} \right)^2 r dr, \quad (4)$$

где $\gamma_b = \gamma(r=b)$. При заданном анодном напряжении $U = \Gamma - 1$ и отношении радиусов анода и катода R/b ($R_k \rightarrow b$ при $H_z \rightarrow \infty$) распределением $\gamma(r)$ можно управлять в некоторых пределах с помощью изменения профиля торца катода, меняя при этом условия начального ускорения в различных слоях потока [8]. С помощью (4) был получен ряд результатов для формирования сильно замагниченного РЭП: в первую очередь, фундаментальное решение для случая тонкого катода [1], а также для некоторых других конфигураций пучков [2-4].

Ниже дается решение задачи формирования РЭП в КДМИ с трубчатыми катодами различной толщины, при этом профили торцевой поверхности не конкретизируются; они соответствуют различным радиальным распределениям плотности в пучках. С целью получения аналитических решений предварительно строится приближенная теория транспортировки на базе ламинарных моделей произвольно замагниченных РЭП. Плодотворность ламинарных моделей общеизвестна, а оправданием их применения может послужить то обстоятельство, что масштаб неоднородности пучка обычно существенно превосходит ларморовский радиус ($\delta \gg r_L/H$).

2. Ламинарная модель РЭП на участке транспортировки. Ламинарные модели позволяют исследовать интегральные характеристики пучков и сглаженные поперечные распределения концентрации, скоростей и собственных полей. В отличие от традиционного описания пучков в зависимости от условий на катоде, приводящего для интенсивных РЭП к значительным вычислительным и аналитическим трудностям [9], целесообразно задачу ставить "против движения" (как, например, в [10]); сначала найти возможные и интересующие равновесные конфигурации РЭП, а затем поставить им в соответствие условия формирования на катоде с помощью интегралов движения и инвариантов. Такой путь решения для РЭП в произвольном внешнем магнитном поле был намечен в [11].

В квазиплоском приближении ($dr \rightarrow dx$, $rd\theta \rightarrow dy$) с учетом интеграла энергии $\gamma - \Phi = 1$, баланса сил $\nabla\Phi = [\beta\vec{H}]$ и уравнений поля $\text{rot } \vec{H} = -\Delta\Phi \vec{\beta}$ характеристики трубчатого РЭП в однородном канале транспортировки удобно находить из условия силового равновесия слоев заряженной жидкости $[\vec{H} \text{ rot } \vec{H}] = \Delta\gamma\nabla\gamma$, имеющего интеграл

$$H_y^2 + H_z^2 - \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 = \text{const} \equiv H_0^2, \quad (5)$$

и квадратичной формы для $\text{rot } \vec{H}$:

$$\left(\frac{dH_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dH_z}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right). \quad (6)$$

На внутренней поверхности пучка $d\gamma/dx = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H_0$, $\gamma = \gamma_0$ при $x = 0$.

Согласно (5), (6) возможность варьировать равновесные конфигурации предоставляется с помощью какого-либо одного удобного предположения. Так, при однородной осевой скорости $\beta_z = \beta_0$, когда $H_0 = -\beta_0(d\gamma/dx)$, получается поток Бриллюэна:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 \text{ch } H_0 x, & p_z &= \gamma_0 \beta_0 \text{ch } H_0 x, & p_y &= \text{sh } H_0 x, \\ H_z &= H_0 \text{ch } H_0 x, & H_y &= \beta_0 \gamma_0 H_0 \text{sh } H_0 x, \end{aligned} \quad (7)*$$

отличающийся нулевым вихрем обобщенного импульса ($\text{rot } \vec{p} - \vec{H} = 0$). Все электроны такого потока, согласно [12], эмиттируются катодом, поверхность которого не пересекается магнитным полем (т.е. совпадает с магнитной поверхностью).

С трубчатых катодов конечной толщины формируются вихревые пучки, и по мере роста магнитного поля вихрь ($dp_y/dx - H_z$) неограниченно увеличивается. Описать эту ситуацию можно, найдя решение (5), (6) при $\gamma = \gamma_0 \text{ch } kx$ для различных k/H_0 . При не очень сильно изменяющихся γ в пределах трубчатого пучка (как это бывает на практике) такое решение соответствует не сильно нарастающей концентрации ($N \sim d^2\gamma/dx^2$) от внутренней границы $x = 0$ до внешней $x = \delta$, если $k\delta \leq 1$. Точное решение имеет сложную интегральную форму, приведем здесь приближенное - в виде рядов:

$$H_z = H_0 + \frac{k^2}{H_0}(\text{ch } kx - 1) - \frac{k^2}{6H_0} \left(1 - \frac{k^2}{H^2}\right) (\text{ch } kx - 1)^2 + \dots,$$

*Здесь и далее изменен знак H_y для удобства записи.

$$H_y = \gamma_0 \beta_0 k \operatorname{sh} kx + \frac{k}{6\gamma_0 \beta_0} \left(1 - \frac{k^2}{H_0^2}\right) \operatorname{sh}^3 kx + \dots \quad (8)$$

Ряды (8) быстро сходятся, если $k^2 \delta^2 \approx \frac{H_y \delta}{\gamma \beta} \approx \frac{2I\delta}{\beta \gamma b} \ll 1$, что практически всегда выполняется для трубчатых РЭП. Диамagnetизм $\Delta H_z / H_z \approx \frac{2I^2}{b^2 \gamma^2 \beta^2 H^2}$ обычно очень мал. Если не искать дальнейших членов ряда для H_y , то можно указать и более точную формулу:

$$H_y = \gamma_0 \beta_0 k \operatorname{sh} kx + \frac{1}{2\gamma_0 \beta_0} \left(1 - \frac{k^2}{H_0^2}\right) (\operatorname{sh} kx - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} kx). \quad (9)$$

Максимальное значение H_y^{\max} , определяющее полный ток РЭП, следует из (9) для $x = \delta$. Скоростная структура согласно (8), (9) и уравнению поля $\operatorname{rot} \vec{H} = -\Delta \gamma \vec{\beta}$ определяется следующими выражениями:

$$\beta_y \approx \frac{k}{H_0 \gamma_0} \operatorname{th} kx, \quad p_y \approx \frac{k}{H_0} \operatorname{sh} kx, \\ \beta_z = \beta_0 + (1 - k^2/H_0^2) (2\gamma_0^2 \beta_0)^{-1} \operatorname{th}^2 kx. \quad (10)$$

Максимальная поперечная скорость составляет $\beta_y^{\max} \approx \frac{2I}{Hb\gamma^2\beta}$, а расслоение продольных

$$\left(\frac{\Delta \beta_z}{\beta_0}\right)^{\max} \approx \frac{I}{\gamma^3 \beta^3 b} \left(\delta - \frac{2I}{b\gamma\beta H_0^2}\right). \quad (11)$$

Из представленных решений видно, что с уменьшением магнитного поля по мере приближения к бриллюэновским условия ($H_0 \rightarrow k$) исчезает расслоение продольных скоростей (10) и растет диамagnetизм (8) вместе с поперечными скоростями (10). Одно из фундаментальных условий формирования - закон изменения p_y от катода до канала транспортировки

$$p_y = \int_0^x H_z dx - \int_0^{x_K} H_{zK} dx_K \quad (12)$$

- позволяет в соответствии с (8), (10) поставить каждой координате x в пучке координату x_K на катоде. В квазиоднородном магнитном поле ($H_K = H_0$) расширение потока от катода составляет

$$x/x_K = \left(1 - \frac{k^2}{H_0^2}\right)^{-1}. \quad (13)$$

Сильно замагниченный пучок проецирует геометрию эмиттера без изменений. С уменьшением магнитного поля толщина пучка растет как

$$\delta = \delta_K + \frac{2I}{H_0^2 b \gamma \beta}. \quad (14)$$

Отсюда видно, как изменяется толщина трубчатого РЭП по мере изменения магнитного поля (ток и энергия меняются медленно). В предельных ситуациях реализуются "крайние" состояния: при $\delta_k \rightarrow 0$ - близкие к бриллюэновскому с $\delta \gg \delta_k$, а при $H \rightarrow \infty$ - сильно замагниченные с $\delta \rightarrow \delta_k$. Постановку вопроса о состояниях пучка с $H \rightarrow \infty$ и одновременно $\delta_k \rightarrow 0$ следует признать некорректной (процесс формирования существенно зависит от соотношения поперечного размера края эмиттера и ларморовского масштаба).

В силу (14) относительное расслоение продольных скоростей (11) просто выражается через толщину эмиттера δ_k , оно равно $I\delta_k/\gamma^3\beta^3b$. Тот факт, что в расслоение входит именно δ_k , можно объяснить также из несложных физических соображений и выкладок (с учетом поперечных скоростей). При неоднородной плотности в числитель входит $I\delta_k^{\text{эфф}} = 2 \int_0^{\delta_k} I(x)dx$, где $I(x)$ - ток слоя пучка, ограниченного сверху координатой x .

3. Анализ формирования пучков на базе слаборелятивистских моделей. Слаборелятивистские модели, характеризующиеся относительной простотой (связанной, в частности, с возможностью пренебрежения собственными магнитными полями потоков), позволяют качественно проанализировать картину формирования и эволюцию параметров РЭП. Для этого ниже с использованием принципа подобия будут рассмотрены некие универсальные решения, не зависящие конкретно от ускоряющего напряжения U .

За. Случай $H \rightarrow \infty$. Для сильно замагниченного слаборелятивистского пучка основное уравнение формирования (4) приобретает вид

$$\Phi_b(3\Phi_b - 2U) = -3 \ln(R/b) \int_a^b \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 r dr. \quad (15)$$

Удобно описывать формирование при любых напряжениях U , введя нормированный потенциал $\varphi = \Phi/U$ и геометрический фактор g , связанный с распределением потенциала (и концентрации) внутри пучка:

$$g = 3 \ln(R/b) \frac{\int_a^b (d\varphi/dr)^2 r dr}{(1 - \varphi_b)^2} = \frac{3 \int_a^b (d\varphi/dr)^2 r dr}{\ln(R/b) (r(d\varphi/dr))_{r=b}^2}. \quad (16)$$

Тогда потенциал наружной кромки пучка равен

$$\varphi_b = \frac{1 + g \pm \sqrt{1 - g}}{3 + g}. \quad (17)$$

Видно, что формируются только пучки с $g \leq 1$, при $g = 1$ происходит смыкание ветвей высокоэнергетичных и низкоэнергетичных состояний*. Требование $g \ll 1$ существенно ограничивает допустимые распределения плотности в пучке. В частности, сплошные пучки ($a = 0$) с однородной

*В отличие от задач транспортировки, в которых каждому g соответствует непрерывная зависимость $I(\varphi_b)$, а каждому значению тока I два значения φ_b , здесь в задаче формирования каждому g соответствуют только два разных состояния пучка, при этом $I(\varphi_b)$ совпадают только при $g = 1$.

концентрацией согласно (16) не могут быть сформированы, если $\ln(R/b) < 0,75$. Это было показано и в [4], где установлен более общий критерий для релятивистских пучков.

Для квазиплоского аналога цилиндрической конструкции КДМИ (рис. 1б) с помощью преобразований $x = a \ln(r/a)$, $d = a \ln(R/R_k)$ ($R_k = b$ при $H = \infty$) выражения (15), (16) приводятся к виду

$$\varphi_b(3\varphi_b - 2) = -3d \int_0^\delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \equiv -g(1 - \varphi_b)^2; \quad (18)$$

$$g = \frac{3}{d} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=\delta}^{-2} \int_0^\delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx. \quad (19)$$

Эти выражения наиболее удобны для простейших расчетов и оценок. Примеры возможных структур для плоской модели и их точных цилиндрических аналогов, позволяющих переносить результаты с плоской модели на цилиндрическую конструкцию, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Концентрация	$d\varphi/dx$	g	d_{min}/δ	Цилиндрический аналог: N/U
Однородная $N = k^2 U$	$k^2 x$	δ/d	1	$\frac{k^2 a^2}{r^2}$
Нарастающая $N = Uk^{m+1} x^{m-1}$	$k^{m+1} x^m$	$\frac{3\delta}{(2m+1)d}$	$\frac{3}{2m+1}$	$\frac{m(ka)^{m+1}}{r^2} (\ln \frac{r}{a})^{m-1}$
Убывающая $N = Uk^2 ch^{-2} kx$	$kthkx$	$\frac{3(k\delta - thk\delta)}{kdth^2 k\delta}$	$\frac{3(k\delta - thk\delta)}{k\delta th^2 k\delta}$	$\frac{k^2 a^2}{r^2 ch^2 (ka \ln(r/a))}$

Видно, что однородный по плотности пучок может быть сформирован только при $d > \delta$. Пучки с нарастающей к внешнему краю концентрацией формируются при малом зазоре $d < \delta$, и нарастание концентрации тем значительнее, чем меньше d/δ . Пучки с убывающей концентрацией $N(x)$ могут быть сформированы только в случаях значительных зазоров $d > \delta$. Эти закономерности формирования объясняются особенностями экранирования поля у эмиттирующей поверхности катода (очевидно, чем меньше d/δ , тем труднее обеспечить равномерность поля и концентрации вблизи торца катода).

При квазиоднородной концентрации пучка его ток на единицу длины по циклической координате y , совпадающий с собственным полем H_y^{max} , определяется как

$$H_y^{max} = N \int_0^\delta \sqrt{2\Phi_0 + Nx^2} dx = U^{3/2} k \varphi_0 \frac{\text{arcsh}(k\delta/\sqrt{2\Phi_0})}{(\text{sh}\xi \text{ ch}\xi + \xi)}. \quad (20)$$

Удобно рассчитывать величину $H_y^{max} d/U^{3/2}$, зависящую только от δ/d , т. е. подчиняющуюся слабoreлятивистскому принципу подобия. Схема

расчета формирования однородного пучка: по заданной $g = \delta/d$ из (17) определяется потенциал φ_b (при $x = \delta$), затем $k\delta = \sqrt{(1 - \varphi_b)\delta/d}$ (по величине поля между пучком и стенкой), минимальная энергия $\varphi_0 = \varphi_b - \frac{k^2\delta^2}{2}$ (при $x = 0$) и ток (20). Результаты приведены в табл. 2.

Видно, что по мере роста толщины δ/d ток пучка слабо возрастает, а по энергии пучок значительно расслаивается и происходит заметное торможение электронов. Низкоэнергетичная ветвь равновесных состояний (отмеченная *), как известно, неустойчива.

Таблица 2

$g = \delta/d$	φ_b	φ_0	$H_y^{\max} d/U^{3/2}$
0	2/3	2/3	0,385
0,25	0,651	0,607	0,389
0,5	0,631	0,544	0,395
0,75	0,6	0,45	0,400
1	0,5	0,25	0,406
0,75	0,333	0,083	0,376 *
0,5	0,226	0,033	0,327 *
0,25	0,118	0,008	0,244 *
0	0	0	0 *

Для сравнения укажем, что максимальный ток транспортировки тонкого пучка ($\delta \rightarrow 0$) в $\sqrt{2}$ раз превышает сформированный в КДМИ и достигается при $\varphi_b = 1/3$.

3б. Случай $\delta_k \rightarrow 0$. С тонких катодов формируются пучки, близкие

к безвихревым, и для их описания можно пользоваться бриллюэновской моделью. Основное уравнение формирования для этого случая получается из (2) с учетом изменения давления электрического поля вокруг катода (рис. 1б) в бриллюэновской втулке объемного заряда. С использованием главных соотношений для физических величин во втулке и пучке

$$\begin{array}{l}
 z = z_1: \\
 \eta = \delta_B/d, \quad U = \frac{H_{кр}^2 d^2}{2} \quad (\delta_B = d), \\
 U = H^2 d^2 \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right), \\
 \frac{d\phi}{dx} = H^2 x \quad (x \leq \delta_B)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 z = z_2: \\
 U - \phi_0 = H^2 d^2 \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \\
 \frac{d\phi}{dx} = H^2 x \quad (x \leq \delta), \\
 \xi = \delta/d, \quad \beta_z = \sqrt{2\phi_0}
 \end{array}
 \right. \quad (21)$$

из (2) находится поток импульса электронов

$$\beta_z^2 H^2 \delta = \frac{1}{2} \int_{z_2}^{z_1} \int_0^d \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx, \quad (22)$$

а затем однозначная связь толщины пучка с толщиной втулки

$$\xi = \frac{9 - 4\eta - \sqrt{81 - 120\eta + 48\eta^2}}{8} \quad (23)$$

Вблизи критического режима магнитной изоляции ($\eta = \delta_B/d \approx 1$) толщина пучка составляет $\delta \approx \delta_B/4$, в сильном магнитном поле $\delta \approx \delta_B/3$.

Таблица 3

$H/H_{кр} = h$	$\eta = \delta_B/d$	$\xi = \delta/d$	δ/δ_B	φ_b	φ_0	$H_y^{max} d/U^{3/2}$
1	1	0,25	0,25	0,625	0,562	0,530
1,25	0,4	0,128	0,320	0,652	0,626	0,447
1,67	0,2	0,0655	0,328	0,660	0,648	0,414
2,29	0,1	0,0333	0,333	0,663	0,658	0,399
$\rightarrow \infty$	$1/2h^2$	$1/6h^2$	1/3	2/3	2/3	0,385

Результаты расчета формирования по мере роста магнитного поля показаны в табл. 3. Расчет объясняет (см. также [5,6]) известное из экспериментов возрастание тока пучка по мере уменьшения магнитного поля, однако при этом энергия электронов не снижается по сравнению с энергией транспортировки тонкого замагниченного пучка, как в случае утолщения катода (табл. 2), а, наоборот, несколько возрастает, т.е. состояния сформированного пучка располагаются на диаграмме ток - энергия (рис. 2) по другую сторону от названной кривой

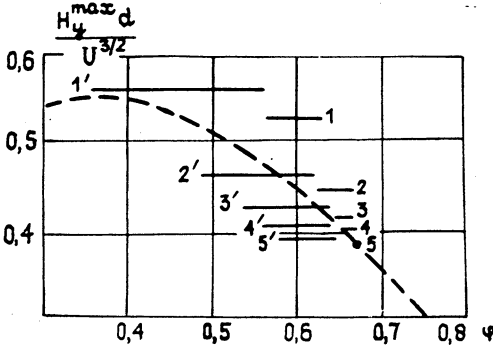


Рис. 2.

транспортировки. Этим состояниям на рис. 2 соответствуют отрезки прямых, пронумерованные от 1 до 5 последовательно для $H/H_{кр} = 1; 1,25; 1,67; 2,29; \infty$ (или $\delta_B/d = 1; 0,4; 0,2; 0,1; 0$).

зв. Общая модель ($\delta \neq 0, H \neq \infty$). В соответствии с (2) потоки импульсов электронов и поля вокруг катода (z_1) и в канале транспортировки (z_2) совпадают:

$$\int_{z_2}^{z_1} \int_0^d \left[\beta_z^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] dx = 0. \quad (24)$$

Отсюда для пучка с плотностью, отличной от бриллюэновской ($\rho = \equiv N/N^2 < 1$), в системе формирования с $\delta_k \neq 0$ (рис. 1б) можно с учетом соответствующих граничных условий получить следующее уравнение формирования:

$$4(\rho\xi)\left(\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) - (3 + \xi_k)(\rho\xi)^2 + \frac{4}{3}(\rho\xi)^3 = \eta^2\left(1 - \frac{2}{3}\eta\right), \quad (25)$$

объединяющее относительные размеры $\xi = \delta/d$, $\xi_k = \delta_k/d$, $\eta = \delta_b/d$. Расчет удобно проводить, задавая толщину катода ξ_k , путем перебора толщины околоскатодной втулки η или магнитного поля (21), что позволяет из (25) определить последовательно $\rho\xi = \xi - \xi_k$ (13), т. е. толщину пучка ξ и его относительную концентрацию ρ . Далее определяются крайние потенциалы

$$\varphi_b = \varphi_0 + \frac{\rho\xi^2}{2\eta - \eta^2} = 1 - \frac{\rho\xi(1 - \rho\xi)}{\eta - \eta^2/2} \quad (26)$$

и собственное магнитное поле (ток) пучка

$$\frac{H_y^{\max} d}{U^{3/2}} = \frac{kd \varphi_0}{\sqrt{1 - \rho}} (\operatorname{sh} \bar{\xi} \operatorname{ch} \bar{\xi} + \bar{\xi}), \quad \operatorname{sh} \bar{\xi} \equiv kd \sqrt{\frac{1 - \rho}{2\varphi_0}}. \quad (27)$$

Такая модель включает в себя разобранные выше случаи $H \rightarrow \infty$ (3а), $\delta_k = 0$ (3б), а также позволяет анализировать критические условия магнитной изоляции. В последнем случае, когда $\eta = 1$, из (25) следует

$$\xi_k = \frac{(\rho\xi - 1)^2 (4\rho\xi - 1)}{3(\rho\xi)^2}. \quad (28)$$

При $\xi_k > \xi_k^{\max} = 0,464$ однородные по плотности пучки в критическом режиме не могут быть получены. Из сравнения с $\xi_k^{\max} = 1$ при $H \rightarrow \infty$ (табл. 1) можно заключить, что по мере ослабления магнитного поля однородные пучки формируются с катодов меньшей толщины, а при фиксированной толщине катода пучки имеют тенденцию уплотняться от центральных слоев к периферии.

Расчет формирования однородного пучка по приведенной здесь схеме для конечных толщин катода при различной степени замагниченности демонстрирует плавную эволюцию области параметров на плоскости "энергия - ток пучка"; для $\xi_k = 0,4$ такая область приведена на рис. 2 (состояния пронумерованы от 1' до 5') в сравнении со случаем формирования бриллюэновского пучка ($\xi_k = 0$, нумерация от 1 до 5). Показана только высокоэнергетичная (устойчивая) ветвь состояний, другая ветвь характеризуется большей плотностью и низкими потенциалами*. Видно, что с увеличением толщины катода область состояний пучка смещается влево по оси энергий, расслоение по энергии увеличивается, ток пучка меняется весьма мало для каждого фиксированного $H/H_{кр}$, но заметно нарастает с приближением к условию отсечки ($H \rightarrow H_{кр}$). Видно, что эволюция областей состояний происходит в окрестности кривой транспортировки тонкого пучка (пунктир), и только состояния слабовихревых потоков с очень тонких катодов, когда $\delta \gg \delta_k$ (14), отходят от этой кривой в сторону больших энергий (см. также табл. 3).

4. Формирование мегавольтных РЭП. Учет релятивизма и собственных магнитных полей пучка не приводит к принципиальным затруднениям, однако делает вычисления значительно более громоздкими,

*Третий корень (25) $\rho\xi > 1$ должен быть отброшен: $\varphi_b < 1$ в (26).

особенно при несильных магнитных полях. Рассмотрим два примера.

4а. Случай $H \rightarrow \infty$. Согласно (8), (9) и граничным условиям имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 \operatorname{ch} kx, & H_y &\approx \gamma_0 \beta_0 k \operatorname{sh} kx + \\ & & &+ \frac{k}{2\gamma_0 \beta_0} (\operatorname{sh} kx - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} kx), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Gamma/\gamma_b - 1 = kd \operatorname{th} k\delta.$$

Пучки с таким распределением потенциала и полей, квазиоднородные при $k\delta < 1$, представляют наибольший практический интерес; реализация близких состояний достигается подбором профиля поверхности [8]. Согласно уравнению формирования (4) для таких РЭП

$$\begin{aligned} (\gamma_b - 1)(\gamma_b^2 + \gamma_b - 2\Gamma) &= -(\Gamma - \gamma_b) \times \\ &\times \left[\frac{\gamma_b^2}{2} \left(1 - \frac{2k\delta}{\operatorname{sh} 2k\delta} \right) + 2 \left(\frac{k\delta}{\operatorname{th} k\delta} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

каждому $k\delta$ соответствуют два положительных корня γ_b (высоко- и низкоэнергетичные состояния). По этим γ_b из (29) последовательно рассчитываются γ_0 , kd , δ/d , $H_y^{\max}d$. Результаты для типичного $\Gamma = 3$ ($U = 1,022$ кВ) показаны в табл. 4. Качественных отличий от слабoreлятивистского случая (табл. 2) нет. Только максимально возможные $\delta/d = 0,6$, а не 1. С ростом релятивизма квазиоднородные РЭП формируются с более тонких или дальше отстоящих от анода катодов. При фиксированных δ/d и заданной форме катода с ростом релятивизма формируются все более неоднородные, уплотненные к периферии РЭП, что согласуется с результатом [2] для сплошных катодов и объясняется все более сильным экранированием внутренних областей торца катода полями объемного заряда по мере роста напряжения на катоде и плотности тока пучка. Для сравнения укажем, что предельному току транспортировки тонкого пучка соответствует $H_y^{\max}d = 1,122$ (на 30% больше сформированного) при $\gamma_b = \gamma_0 = 1,442$.

Таблица 4

δ/d	γ_b	γ_0	$H_y^{\max}d$
0	2	2	0,866
0,215	1,95	1,838	0,888
0,472	1,852	1,588	0,921
0,599	1,701	1,328	0,942
0,462	1,441	1,098	0,912
0,27	1,255	1,028	0,86
0	1	1	0

4б. Случай $\delta_k = 0$. В конечных магнитных полях ограничимся здесь расчетом формирования РЭП в приближении бесконечно тонкого катода, когда все потоки можно считать безвихревыми. Состояние электронной

втулки вокруг катода описывается следующими выражениями:

$$\gamma = \text{ch } Bx, \quad H_y = B \text{ ch } Bx, \quad p_y = \frac{B_z}{B} \text{ sh } Bx, \quad (31)$$

$$E_x = B \text{ sh } Bx, \quad H_z = B_z \text{ ch } Bx, \quad p_z = \frac{B_y}{B} \text{ sh } Bx, \quad B = \sqrt{B_z^2 + B_y^2},$$

где B_y, B_z - составляющие магнитного поля на катоде (под втулкой) при $z = z_1$. В силу импульсного характера собственных полей пучка сохраняется магнитный поток: например, при отсечке, т.е. в критическом режиме магнитной изоляции ($\Gamma = \text{ch } Bd$) это дает $Hd = \frac{B_z}{B} \text{ sh } Bd$, где H - внешнее поле.

Для области транспортировки ($z = z_2$) согласно (7) имеем внутри пучка

$$H_z = H_0 \text{ ch } H_0 x, \quad \gamma = \gamma_0 \text{ ch } H_0 x, \quad p_y = \text{sh } H_0 x, \quad (32)$$

$$H_y = \beta_0 E_x, \quad E_x = \gamma_0 H_0 \text{ sh } H_0 x, \quad p_z = \beta_0 \gamma.$$

С учетом граничных условий выполняются соотношения

$$\Gamma/\gamma_0 = \text{ch } H_0 \delta + (H_0 d - H_0 \delta) \text{ sh } H_0 \delta, \quad (33)$$

$$Hd = \text{sh } H_0 \delta + (H_0 d - H_0 \delta) \text{ ch } H_0 \delta,$$

причем последнее выражает сохранение потока магнитного поля во время импульса (с учетом диамагнетизма РЭП).

При формировании сохраняются $H_y^{\text{max}} d$ (осевой ток при z_1 и z_2) и поток импульса (2), что дает для критического режима

$$\Gamma \sqrt{1 - \frac{H^2 d^2}{\Gamma^2 - 1}} \text{ arch } \Gamma = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} H_0 d \text{ sh } H_0 \delta; \quad (34)$$

$$\text{arch}^2 \Gamma \left\{ -1 + 2 \left(1 - \frac{H^2 d^2}{\Gamma^2 - 1} \right) \right\} = -H_0^2 d^2 + 2(\gamma_0^2 - 1) H_0 d \text{ sh } H_0 \delta (\Gamma/\gamma_0). \quad (35)$$

Четыре уравнения (33) - (35) позволяют для КДМИ с заданным напряжением $U = \Gamma - 1$ найти величины $\gamma_0, \delta/d, H_0 d, Hd$, определяющие состояние РЭП. Другие величины легко находятся в соответствии с (31). Например, для диода с $\Gamma = 3$ ($U = 1022$ кВ) получается

$$\begin{array}{lll} Hd = 2,771 & \gamma_0 = 1,778 & Bd = 1,763 \\ H_0 d = 2,681 & \gamma_b = 1,841 & B_z d = 1,727 \\ \delta/d = 0,0995 & H_y^{\text{max}} d = 1,065 & B_y/B_z = 0,204 \end{array}$$

В отличие от слаборелятивистского варианта (табл. 3) сформированный безвихревой РЭП имеет значительно меньшую толщину (в 2,5 раза) и малое расслоение энергий (3,5%); в прикатодной электронной втулке очень велик диамагнетизм, заметен он и в самом пучке (также 3,5%); с ростом магнитного поля и по мере сжатия потоков диамагнетизм в пучке становится незначительным, а в электронной втулке он равен, согласно (31), максимальной γ электронов (для критического режима составляет 300%).

5. **Заключительные замечания.** Здесь дан анализ задачи формирования РЭП в КДМИ при конечных магнитных полях и толщинах трубчатого катода, при этом из решения обратной задачи ("навстречу потоку") найдены основные необходимые условия, определяющие возможность формирования квазиоднородных по плотности пучков. Достаточные условия, связанные в первую очередь с профилированием торцевой эмиттирующей поверхности, могут быть найдены только из конкретных численных моделирований и базируются на известных физических принципах [8]. Из представленных выше решений видно, что и в приближении неограниченно сильного магнитного поля с уменьшением толщины катода, и в приближении бесконечно тонкого катода с ростом магнитного поля состояния пучка асимптотически стремятся к найденному впервые в [1].

Когда настоящая работа была завершена и в основной части написана, появилась попытка опровержения отмеченного решения [1], предпринятая на основе модели с бесконечно тонким катодом и неограниченным магнитным полем [13]. Однако на фоне многократного подтверждения фундаментального результата [1], основанного на корректной модели с тонким (но не бесконечно) катодом как в различных - по методам измерения энергии электронов - экспериментах, так и при многократных численных моделированиях, результат [13] представляется, по крайней мере, нуждающимся в строгой проверке.

Автор признателен Н. Ф. Ковалеву и Ш. Е. Цимрингу за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федосов А. И., Литвинов Е. А. и др. // Изв. вузов. Физика. 1977. N 10. С. 134.
2. Нечаев В. Е. // Физика плазмы. 1979. Т. 5. N 3. С. 706.
3. Нечаев В. Е., Солуянов Е. И., Фукс М. И. // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. N 2. С. 113.
4. Беломытцев С. Я., Литвинов Е. А. и др. // Физика плазмы. 1981. Т. 7. N 1. С. 86.
5. Фукс М. И. // ЖТФ. 1982. Т. 52. N 4. С. 675.
6. Нечаев В. Е. // Тезисы докл. IV Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. - Томск: ИСЭ СО АН СССР, 1982. Ч. 1. С. 241.
7. Воронин В. С., Лебедев А. Н. // ЖТФ. 1973. Т. 43. N 12. С. 2591.
8. Гром Ю. Д., Нечаев В. Е. и др. // Тезисы докл. IV Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. - Томск: ИСЭ СО АН СССР, 1982. Ч. 1. С. 163.
9. Reizer M. // Phys. of Fluids. 1977. V. 20. N 3. P. 477.
10. Данилов В. Н. // ПМТФ. 1968. N 1. С. 3.
11. Нечаев В. Е. // Тезисы докл. V Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. - Томск: ИСЭ СО АН СССР, 1984. Ч. 1. С. 171.
12. Gabor D. // Proc. IRE. 1945. V. 11. N 11. P. 792.
13. Шафер В. Ю. // Краткие сообщения по физике ФИАН. 1989. N 6. С. 37.