

ГОСКОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИИ

РАДИОФИЗИКА

Ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том 34, № 7

Нижний Новгород

июль 1991

СОДЕРЖАНИЕ

Амиранашвили Ш.Г., Буишвили П.П., Угулава А.И. Особенности нелинейного ядерного магнитного резонанса	731
Кукушкин А.В., Оляк М.Р. Флуктуации поляризации излучения космических источников при рассеянии в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме	738
Альперин М.М., Клубис Я.Д. К вопросу о статистических свойствах фазы в когерентном состоянии	748
Попов Г.В., Ярошук И.О. О статистических характеристиках неоднородных волн	761
Соколов С.В. Об оптимальном оценивании дискретно-непрерывных марковских процессов	768
Костерин А.Г., Малахов А.Н., Шолин Д.В. Описание волнового поля распределенного источника в многомодовых волноводах с крупномасштабными неоднородностями	774
Привер П.С. Эффект антиселективности при объемной небрегговской дифракции	784
Авдеев А.Д., Новиков В.В. Асимптотика собственных волн плавнерегулярного плоского анизотропного волновода	790
Коцур А.М., Чумаченко В.П. Решение задачи дифракции электромагнитных волн на многоугольном диэлектрическом цилиндре методом произведения областей	798
Габриэлян Д.Д. Использование представления краевых волн при численном решении задач дифракции на телах сложной формы с импедансными граничными условиями	806
Савинов И.В., Серебряков Г.В. Анализ работы адаптивной антенной решетки при использовании метода пространственного сглаживания с оптимальным взвешиванием	811
Малькин Г.Б. Влияние точности взаимной настройки элементов волоконного кольцевого интерферометра на сдвиг его нуля	817
Карбушев Н.И. Особенности взаимодействия электронного пучка с волнами гофрированного волновода, частично заполненного плазмой	825
Вашковский А.В., Сыровой В.А. О конических бриллюэновских потоках	837

Краткие сообщения и письма в редакцию

Галушко В.Г. О возможности частотно-углового зондирования ионосферы	850
Басс Ф.Г., Ханкина С.И. Излучение заряда, движущегося в одномерной мелкомасштабной случайной среде	853

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ, (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 11,20. Усл. кр.-отт. 11,2. Уч.-изд. л. 13,6.
Тираж 978 экз. Заказ 581. Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

Нижегородская областная типография управления издательств, полиграфии
и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7

УДК 538.69

ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

Ш. Г. Амираншвили, Л. Л. Бушвили, А. У. Угулава

Проводится классификация резонансных режимов при нелинейном ЯМР и устанавливаются пределы осуществимости каждого из них. Исследуется неустойчивое движение намагниченности вблизи сепаратрисы безрелаксационного движения при нелинейном ЯМР и рассмотрены пути стабилизации этой неустойчивости.

Возникновение динамического сдвига частоты прецессии ядерной намагниченности при низких температурах в некоторых магнетиках [1,2] приводит к существенно нелинейному характеру ЯМР. Исследованию движения намагниченности при наличии динамического сдвига частоты посвящено немало как экспериментальных, так и теоретических работ. Однако, принимая во внимание то многообразие типов движения, которое обычно присуще нелинейно-колебательным системам, надо полагать, что исследование нелинейного ЯМР еще не завершено.

Произведем классификацию возможных режимов движения в данной системе. Мы будем придерживаться классификации типов движения в нелинейно-колебательных системах, выдвинутой Волосовым и Моргуновым [3], основанной на наличии разных временных масштабов, характеризующих систему. Согласно этой классификации в многообразии резонансных режимов движения различают следующие: 1) система "застревает" в резонансе в течение большого промежутка времени; 2) система "проскакивает" все возможные резонансы (т.е. в резонансе может находиться в течение бесконечно малого времени); 3) система переходит из одного резонансного состояния в другое, находясь некоторое конечное время в каждом состоянии. Эти три типа резонансных режимов движения поддаются приближенному аналитическому описанию.

Предположим, что на ядерную систему действует периодическая серия РЧ импульсов:

$$\vec{H}_1(t) = 2\hbar e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{T} - n\right), \quad \vec{H}_1 \perp \vec{H}, \quad \omega\tau \gg 1, \quad \tau \ll T, \quad (1)$$

где $2\hbar$ и ω - амплитуда и частота переменного поля в пике импульса, $f(t)$ - функция формы импульса, τ и T - длительность и период следования импульсов соответственно, $H = H_0 + H_{СТВ}$, H_0 - величина постоянного магнитного поля, $H_{СТВ}$ - величина сверхтонкого поля электронов на ядре. Направим ось z вдоль суммарного постоянного поля, а ось x - вдоль поля H_1 . Тогда уравнения движения для ядерной намагниченности \vec{m} во вращающейся с частотой ω вокруг оси z системе координат имеют вид

$$\dot{m}_x = \omega(m_z) m_y - (m_x/T_2),$$

$$\dot{m}_y = -\omega(m_z) m_x + \omega_1(t) m_z - (m_y/T_2), \quad (2)$$

$$\dot{m}_z = -\omega_1(t) m_y - (m_z - m_0)/T_1,$$

$$\omega_1(t) = \eta\gamma H_1(t), \quad \omega(m_z) = \omega_0 - \omega - \omega_p(m_z/m_0),$$

где $\omega_0 = \gamma H$ - несмещенная частота ЯМР, ω_p и m_0 - равновесное значение динамического сдвига частоты и намагниченности соответственно, γ - гиромагнитное отношение ядер, η - коэффициент усиления РЧ поля, T_1 , T_2 - времена продольной и поперечной релаксаций.

Перейдем для удобства исследования уравнений (2) к цилиндрическим координатам по правилу

$$m_x = m_{\perp} \cos \varphi, \quad m_y = m_{\perp} \sin \varphi, \quad m_{\perp} > 0,$$

где m_{\perp} - поперечная компонента намагниченности, φ - фаза вращения в поперечной плоскости. Предположив для простоты форму импульса δ -образной, из (2) получим

$$\dot{m}_z = -\omega_1(\lambda) m_{\perp} \sin \varphi - (m_z - m_0)/T_1,$$

$$\dot{m}_{\perp} = \omega_1(\lambda) m_z \sin \varphi - m_{\perp}/T_2, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = -\omega(m_z) + \omega_1(\lambda) (m_z/m_{\perp}) \cos \varphi, \quad \lambda = \Omega,$$

где

$$\omega_1(\lambda) = 2\pi\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2\pi n) = 2\pi\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\Omega t,$$

$$\omega_1 = \eta\gamma h(\tau/T), \quad \Omega = 2\pi/T, \quad \lambda = \Omega t. \quad (4)$$

Будем считать переменное поле и релаксационные процессы малым возмущением, т. е. ω_1 , $1/T_1$, $1/T_2 \ll 1/T$, ω_p . Тогда по общепринятой терминологии m_z и m_{\perp} можно считать "медленными" амплитудами, а φ и λ - "быстрыми" фазами. Система (3) описывает резонансное взаимодействие двух колебательных подсистем. При этом под внутренним резонансом в системе (3) подразумевается выполнение условий

$$\omega(m_z^{(n)}) \approx n\Omega, \quad (5)$$

где $m_z^{(n)}$ называются резонансными значениями продольной намагниченности.

Введем параметр, играющий важную роль при классификации нелинейно-колебательных процессов, - время пребывания системы в резонансе

$$\tau_2 = \left(\frac{d\omega}{dm_z} \dot{m}_z T_2 \right)^{-1}. \quad (6)$$

Заметим, что τ_2^{-1} есть частотное расстояние, на которое "уползает"

резонансная частота за время T_2 .

Приступим теперь к классификации типов резонансов непосредственно нелинейного ЯМР.

При выполнении первого типа резонанса - "застревания" - время пребывания в резонансе τ_2 является самым "большим" временем системы - $\tau_2 \gg T, T_2, T_1, 1/\omega_p$. При этом автоматически выполняется условие Чирикова [4,5] отсутствия перекрытия резонансов:

$$K \approx \frac{d\omega}{dm_z} \dot{m}_z T^2 \approx \frac{T}{\tau_2} \frac{T}{T_2} \ll 1. \quad (7)$$

При выполнении (7) в системе не возникает динамическая стохастичность. Причем, как было показано в работе [6], при выполнении условий (7) медленные "амплитуды" m_z и m_1 и медленная фаза $\varphi + \lambda t$, образованная из двух "быстрых", остаются вблизи своих стационарных значений в течение большого времени порядка $2\pi/\omega_1$.

В противоположном предельном случае, $K \gg 1, T \ll T_2, T_1$, осуществляется второй тип движения - "проскакивание" резонансов. Это условие практически выполняется за счет большого значения скорости "уползания" резонансной частоты $(d\omega/dm_z)\dot{m}_z$, т.е. при достаточно большой нелинейности в системе. Хотя в этом случае время пребывания системы в резонансе τ_2 мало, изменение резонансной частоты $\omega(m_z)$ даже за такое короткое время так велико, что система может "проскочить" частотное расстояние порядка Ω и попасть в резонанс с другой гармоникой внешнего поля (4). Если $K \gg 1$, как было показано в работах [7,8], при "перескоке" возникает непредсказуемость дальнейшего движения, что приводит к динамической стохастичности движения.

Приступим теперь к описанию третьего типа резонансного движения. Предположим, что наименьшим временем в системе является T_2 и $\omega(m_z)$ (т.е. $T_2 \ll \tau_2, T, T_1, 2\pi/\omega_1$). В этом случае можно воспользоваться принципом подчинения [9], согласно которому быстрые переменные m_1 и φ на временах $t \gg T_2$ выразятся через медленную m_z :

$$m_1^{(n)} = \omega_1 T_2 \sin \varphi^{(n)} m_z^{(n)}, \quad \text{ctg } \varphi^{(n)} = \omega(m_z^{(n)}) T_2. \quad (8)$$

Подставляя эти выражения в уравнение для m_z системы (3), получим

$$\dot{m}_z^{(n)} = -\omega_1^2 m_z^{(n)} \frac{T_2}{1 + \omega^2(m_z^{(n)}) T_2} - \frac{m_z^{(n)} - m_0}{T_1}. \quad (9)$$

Следует отметить, что уравнение (9) для описания нелинейных явлений в ЯМР применялось в ряде работ [10,11]. Мы же здесь указали, что применение этого уравнения справедливо лишь при условии достаточно слабой нелинейности, определяемой условием (8), которому с учетом (9) можно придать вид

$$\omega_p \ll 2\pi/\omega_1^2 T^3. \quad (10)$$

Таким образом, применение уравнения (9) справедливо лишь при выполнении условия (10).

Рассмотрим теперь другое явление, возникающее в нелинейном ЯМР. Для этого пренебрежем в системе (2) релаксационными членами и ограничимся случаем $\omega = \omega_0$. Мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= -\omega_p \frac{m_z}{m_0} m_y, \\ \dot{m}_y &= \omega_p \frac{m_z}{m_0} m_x + \omega_1(t) m_z, \\ \dot{m}_z &= -\omega_1(t) m_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Как известно [12], в случае $\omega_1(t) = \text{const}$ семейство годографов вектора \vec{m} на сферической поверхности радиуса m_0 , описываемое системой (11), характеризуется двумя семействами кривых, топологически отличающихся друг от друга. Эти семейства разделены сепаратрисой, на которой лежит особая точка (рис. 1). При естественных начальных условиях $m_x(0) = m_y(0) = 0$, $m_z(0) = m_0$ условием движения вблизи сепаратрисы является $\omega_p \approx 2\omega_1$. Координаты особой точки $(-m_0; 0; 0)$.

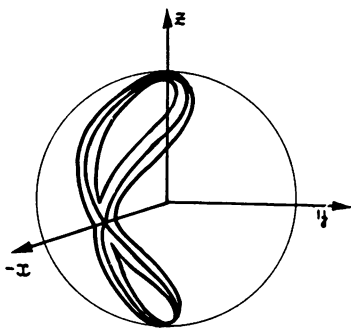


Рис. 1

Кинетические свойства движения намагниченности при нелинейном ЯМР аналогичны свойствам движения математического маятника, неустойчивой точкой которого является верхнее положение. Как известно [13], с помощью быстрых осцилляций точки подвеса можно достичь устойчивости верхнего положения маятника. Ниже будет рассмотрена возможность превращения точки $(-m_0; 0; 0)$ в устойчивую с помощью модуляции переменного поля.

Линеаризуем систему (11) вблизи особой точки:

$$\begin{aligned} \delta \dot{m}_x &= 0, \quad \delta \dot{m}_y = [\omega_1(t) - \omega_p] \delta m_z, \\ \delta \dot{m}_z &= -\omega_1(t) \delta m_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что первое уравнение системы (12), означающее, что вдоль оси x система находится в безразличном равновесии, никак не влияет на (неасимптотическую) устойчивость. Далее, в случае $\omega_1(t) = \text{const}$ исследуемая точка неустойчива при $\omega_p \approx 2\omega_1$. Введем теперь модуляцию

переменного поля, полагая

$$\omega_1(t) = \langle \omega_1 \rangle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{t}{T} - n\right),$$

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} 1 + (\Delta/\langle \omega_1 \rangle), & 0 < p < 1/2 \\ 1 - (\Delta/\langle \omega_1 \rangle), & 1/2 < p < 1. \\ 0, & p < 0, \quad p > 1 \end{cases} \quad (13)$$

Здесь T и Δ есть период и амплитуда модуляции переменного поля, а $\langle \omega_1 \rangle$ есть среднее значение $\omega_1(t)$. Мы предполагаем, что $\Delta > \langle \omega_1 \rangle \approx \omega_p/2$. При дальнейшем анализе будем следовать методике, описанной в монографии [14]. Заметим, что этот анализ сильно упрощается из-за ступенчатого вида функции (13).

Найдем для системы (12) двумерную матрицу отображения за период. Она определяется соотношением

$$\delta m_\alpha(T) = \sum_\beta A_{\alpha\beta} \delta m_\beta(0), \quad \alpha, \beta = y, z.$$

Условием устойчивости исследуемой точки является $|\text{Sp } A| < 2$. После несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \text{Sp } A = & 2 \cos \Omega_1 T/2 \cos \Omega_2 T/2 + \sin \Omega_1 T/2 \sin \Omega_2 T/2 \times \\ & \times \left[\left(\frac{\Delta + \omega_1}{\Delta - \omega_1} \frac{\Delta + \omega_2}{\Delta - \omega_2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\Delta - \omega_1}{\Delta + \omega_1} \frac{\Delta - \omega_2}{\Delta + \omega_2} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Omega_1 = [(\Delta + \omega_1)(\Delta - \omega_2)]^{1/2}$, $\Omega_2 = [(\Delta - \omega_1)(\Delta + \omega_2)]^{1/2}$, $\omega_2 = \omega_p - \omega_1$, и мы пишем ω_1 вместо $\langle \omega_1 \rangle$. В силу условия $\Delta > \omega_1 \approx \omega_2$ частоты Ω_1 и Ω_2 вещественны.

Заметим прежде всего, что если $\omega_1 = \omega_2$, то всегда $\text{Sp } A \geq 2$ и система неустойчива. Пусть теперь есть ненулевая расстройка $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$, но система находится вблизи особой точки: $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$. Положим $\Delta \gg \omega_1, \omega_2$. Тогда (14) приводится к виду

$$\begin{aligned} \text{Sp } A = & 2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2)T/2 + \\ & + \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\Delta} \right)^2 \sin \Omega_1 \frac{T}{2} \sin \Omega_2 \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{\Delta^4}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

В пределе $\Delta \rightarrow \infty$ мы имеем $\text{Sp } A = 2 \cos(\omega_1 - \omega_2)T/2$ и система устойчива всюду кроме резонансных значений

$$(\omega_1 - \omega_2)T = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

При больших, но конечных Δ вокруг каждого из этих значений возникают резонансные островки, внутри которых возможна неустойчивость. Оценим границы этих островков. Для этого полагаем

$$T = 2\pi(\omega_1 - \omega_2)^{-1} + \tau, \quad (17)$$

где $|\tau| \ll |\omega_1 - \omega_2|^{-1}$. Выражение (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Sp } A = & (-1)^k [2 - (\omega_1 - \omega_2)^2 \tau^2 / 4] + \\ & + \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\Delta^2} \sin \Omega_1 \frac{T}{2} \sin \Omega_2 \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что неустойчивость может сохраняться только при выполнении условия

$$|\tau| < 2 \left| \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right| \frac{1}{\Delta}. \quad (18)$$

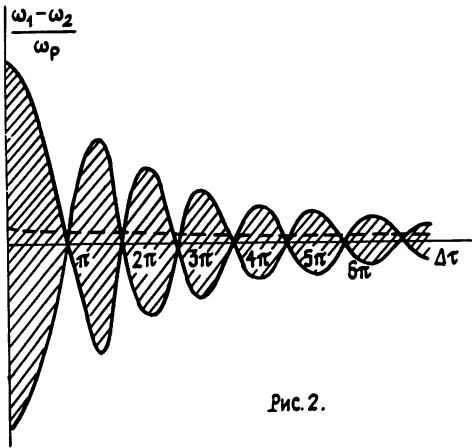


Рис. 2.

Таким образом, существуют резонансные значения (16) периода модуляции переменного поля. Каждое такое значение окружает островок, определяемый соотношениями (17), (18). Внутри островков есть как области неустойчивости, так и области устойчивости, причем они перемежаются друг с другом. Вне системы резонансных островков особая точка становится устойчивой. Проиллюстрируем (см. рис. 2) сказанное на примере островка, отвечающего $k = 0$. Легко видеть, что область, где сохраняется неустойчивость, определяется соотношением

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_p} < 2 \left| \frac{\sin \Delta\tau}{\Delta\tau} \right|.$$

Эта область заштрихована на графике.

Зафиксируем расстройку $\omega_1 - \omega_2 < \omega_p$ (пунктирная линия на графике). Видно, что при $\tau < 1/\Delta$ неустойчивость сохраняется. Далее при $\Delta\tau = \pi$ появляются области устойчивости. Они увеличиваются с ростом n и, наконец, сливаются. При этом мы выходим за границу первого резонансного островка, определяемую соотношением (18), и система становится устойчивой до следующего резонансного значения периода модуляции переменного поля.

Заметим в заключение, что физически более естественной выглядела бы не ступенчатая, а синусоидальная функция (13). Все полученные результаты останутся справедливыми, измениться могут лишь

ЛИТЕРАТУРА

1. Туров Е. А., Петров М. П. Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках. - М.: Наука, 1969.
2. Боровик-Романов А. С., Буньков Ю. М. и др. //УФН. 1984. Т.142. Вып. 4. С. 537.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейно-колебательных систем. - М.: Гос. ун-т, 1971.
4. Заславский Г. М., Чириков Б. В. //УФН. 1971. Т.105. н 1. С. 3.
5. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. - М.: Наука, 1984.
6. Буишвили Л. Л., Кесаев В. И., Угулава А. И. //ФТТ. 1985. Т. 27. н 6. С. 1707.
7. Буишвили Л. Л., Угулава А. И. //ФТТ. 1983. Т. 25. н 8. С. 2370.
8. Кесаев В. И., Угулава А. И. //ФТТ. 1985. Т. 27. н 4. С. 1259.
9. Хакен Г. Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. - М.: Мир, 1985.
10. Куркин М. И. //Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. н 11. С. 675.
11. Luczka J. //Physica. 1983. V. 120 A. P. 219.
12. Угулава А. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. н 6. С. 748.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974.
14. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1989.

Тбилисский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 апреля 1990 г.

PECULIARITIES OF NONLINEAR NUCLEAR
MAGNETIC RESONANCE

*Amiranashvili Sh.G., Buishvili L.L.,
Ugulava A.I.*

Nonlinear NMR resonances are classified and limits of realization of each of them are established. An instable behaviour of magnetization closely to separatrix of nonrelaxation motion of nonlinear NMR is investigated and ways of stabilization of this instability are considered.

УДК 52-77; 537.87; 621.371

ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ РАССЕЯНИИ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Кукушкин, М. Р. Оляжк

Методом Фейнмановских интегралов по траекториям получены выражения для четвертых статистических моментов поляризованного излучения, распространяющегося в случайно-неоднородной плазме. Для случая слабых флуктуаций волнового поля записаны корреляционные функции и дисперсии флуктуаций параметров Стокса. Проанализировано поведение корреляционных функций параметров Стокса в зависимости от поляризации излучения источника и характеристик неоднородной плазмы. Показано, что вследствие разной степени декорреляции амплитуд и фаз каждой из нормальных волн в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме возникают флуктуации круговой поляризации.

Исследование поляризации нетепловых космических источников радиоизлучения дает информацию о физических свойствах этих объектов [1]. В связи с развитием радиоинтерферометрии становится возможным исследование пространственного распределения поляризации источников и, соответственно, структуры магнитных полей и механизмов их генерации. При этом важно оценить влияние среды распространения на пространственную когерентность поляризованного излучения. Переносу поляризованного излучения в магнитоактивной плазме с детерминированными параметрами посвящено огромное число работ (см., например, [2, 3] и приведенную там библиографию). В [4, 5] проанализированы решения уравнений переноса поляризации в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме. Пространственная когерентность поляризованного излучения рассмотрена в [6] для излучения, прошедшего слой магнитоактивной плазмы со статистически-однородными флуктуациями электронной концентрации.

При исследовании структуры источников в низкочастотной области спектра радиоизлучения часто невозможно произвести длительное накопление произведения сигналов в корреляционном интерферометре с сохранением фазовой информации из-за влияния среды распространения [7]. В этой ситуации представляет интерес исследование четвертых моментов поля на разных поляризациях, или флуктуаций Фурье-компонент параметров Стокса. В данной работе получены аналитические выражения для четвертых моментов поля при пространственном разнесении на различных поляризациях в режиме частично насыщенных флуктуаций поля. Исследованы пространственные корреляционные функции ФКС для точечного источника, т. е. флуктуации передаточной функции среды или, иначе, как принято в астрономии, функции рассеяния точки.

1. Пусть на входе в слой случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы задан вектор Стокса $\vec{S}_0(\vec{n}) = \{I_0(\vec{n}), Q_0(\vec{n}), U_0(\vec{n}), V_0(\vec{n})\}$, который характеризует интенсивность и поляризацию излучения источника в направлении единичного вектора \vec{n} . Введем декартову систему

координат и ось z направим из центра источника на центр вектора базы интерферометра, антенны которого расположим в точках с радиусами-векторами $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ в плоскости $z = \text{const}$, $\vec{\rho} = \{x, y\}$.

В соответствии с [8] введем следующие обозначения. Пусть параметр Стокса $I(\vec{n})$ представляет собой распределение полной яркости, т.е. сумму яркостей, измеренных для любых двух взаимно дополнительных поляризаций $V_m + V_c$. Здесь индекс m означает, что поляризация принимаемого излучения соответствует поляризации антенны, индекс c соответствует дополнительной поляризации. Параметры $Q(\vec{n})$ и $U(\vec{n})$ можно представить как разности распределений яркости, измеренных с ортогонально линейно поляризованными антеннами, параметр $V(\vec{n})$ определяет разность между яркостями, измеренными с правой V_{rc} и левой V_{lc} круговыми поляризациями. Тогда

$$I = V_m + V_c, \quad Q = V_0 - V_{\pi/2}, \quad (1)$$

$$U = V_{\pi/4} - V_{3\pi/4}, \quad V = V_{rc} - V_{lc}.$$

Здесь индексы при распределениях яркости V в параметрах Q и U означают позиционные углы линейно поляризованных антенн.

Параметры Стокса (1) характеризуют интенсивность и поляризацию излучения в данном направлении, т.е. поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению наблюдения \vec{n} , отнесенный к единичному телесному углу и единичному интервалу частот. Все четыре параметра Стокса можно объединить в один вектор Стокса $\vec{S} = \{I, Q, U, V\}$. Корреляционный телескоп или интерферометр с базой $\vec{\rho}$ измеряет пространственную фурье-гармонику комбинации параметров Стокса соответствующего распределения яркости источника.

Введем пространственную фурье-компоненту $\vec{S}(\vec{\rho})$ (ФКС) вектора Стокса $\vec{S}(\vec{n})$ соотношением

$$\vec{S}(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{n} \vec{S}(\vec{n}) \exp(ik\vec{n}\vec{\rho}), \quad (2)$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны излучения.

Как и в случае интерферометрии, на одной поляризации по измеренным значениям функции когерентности на различных базах $\vec{\rho}$ и поляризациях возможно путем обратного преобразования Фурье и использования методов восстановления изображений восстановить поляризационное распределение яркости $\vec{S}(\vec{n}) = \{I(\vec{n}), Q(\vec{n}), U(\vec{n}), V(\vec{n})\}$.

Будем предполагать, что монохроматическое излучение с частотой ω распространяется в холодной квазинейтральной космической плазме с флуктуациями электронной концентрации $\delta N(z, \vec{\rho})$, при этом $\langle \delta N \rangle = 0$, $N = \langle N \rangle$ - средняя электронная концентрация, угловыми скобками будем обозначать усреднение по ансамблю реализаций среды. Плазму будем считать замагниченной, вектор детерминированного магнитного поля \vec{H}_0 направлен под углом θ к оси z , и выполняются условия квазипродольного распространения.

Введем корреляционные функции ФКС соотношением

$$\Gamma_{\alpha}(\vec{\rho}, \vec{R}) = \langle S_{\alpha}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) S_{\alpha}^*(\vec{\rho}_1 + \vec{R}, \vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle - \langle S_{\alpha}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \rangle \langle S_{\alpha}^*(\vec{\rho}_1 + \vec{R}, \vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle, \quad (3)$$

где $\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$, \vec{R} - вектор пространственного сдвига, компланарный $\vec{\rho}$, S_{α} - любая из компонент вектора $\vec{S}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \{I(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2), Q(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2), U(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2), V(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)\}$.

Разложим волну с произвольной поляризацией по базису нормальных волн с правой и левой круговой поляризацией:

$$\vec{E} = E^{-} \vec{e}_{-1} + E^{+} \vec{e}_{+1}, \quad (4)$$

где $\vec{e}_{\mp 1} = (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)/\sqrt{2}$ - циклические орты волн с правой (-) и левой (+) круговой поляризацией [3]. Первый из корреляторов в (3) выражается комбинацией четвертых моментов поля. Например, для $\langle I(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) I^*(\vec{\rho}_1 + \vec{R}, \vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle$ следует соотношение

$$\begin{aligned} & \langle I(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) I^*(\vec{\rho}_1 + \vec{R}, \vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle = \left(\frac{c}{8\pi}\right)^2 \times \\ & \times \overline{\langle E^+(\vec{\rho}_1) E^{+*}(\vec{\rho}_2) \cdot E^{+*}(\vec{\rho}_1 + \vec{R}) E^+(\vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle} + \\ & + \overline{\langle E^-(\vec{\rho}_1) E^{-*}(\vec{\rho}_2) \cdot E^{-*}(\vec{\rho}_1 + \vec{R}) E^-(\vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle} + \\ & + \overline{\langle E^+(\vec{\rho}_1) E^{+*}(\vec{\rho}_2) \cdot E^{-*}(\vec{\rho}_1 + \vec{R}) E^-(\vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle} + \\ & + \overline{\langle E^-(\vec{\rho}_1) E^{-*}(\vec{\rho}_2) \cdot E^{+*}(\vec{\rho}_1 + \vec{R}) E^+(\vec{\rho}_2 + \vec{R}) \rangle}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь чертой сверху обозначено временное усреднение за интервал времени $T \gg 2\pi/\omega$.

Остальные параметры в (3) вычисляются аналогичным образом.

2. Рассмотрим методику вычисления четвертых моментов на примере I_{1234}^{\pm} . С использованием представления полей в виде интегралов по траекториям для I_{1234}^{\pm} имеем

$$\begin{aligned} I_{1234}^{\pm} & = \overline{\langle E^{\pm}(\vec{\rho}_1) E^{\pm*}(\vec{\rho}_2) \cdot E^{\pm*}(\vec{\rho}_3) E^{\pm}(\vec{\rho}_4) \rangle} = \\ & = \frac{1}{4} \int d^2\vec{\alpha}_0 \int d^2\vec{\beta}_0 \int d^2\vec{\gamma}_0 \int d^2\vec{\delta}_0 \int d^2\vec{n}_1 \int d^2\vec{n}_2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [I_0(\vec{n}_1) \mp V_0(\vec{n}_1)] [I_0(\vec{n}_2) \mp V_0(\vec{n}_2)] \times \quad (6) \\
& \times \exp[ik_{\pm}\vec{n}_1(\vec{\gamma}_0 + \vec{\delta}_0) - ik_{\pm}\vec{n}_2(\vec{\gamma}_0 - \vec{\delta}_0)] \times \\
& \times \int \cdots \int D\vec{\alpha}(z) D\vec{\beta}(z) D\vec{\gamma}(z) D\vec{\delta}(z) \times \\
& \times \exp\left\{\frac{i}{2}k_{\pm} \int_0^z dz' \left[\frac{d\vec{\alpha}(z')}{dz'} \frac{d\vec{\delta}(z')}{dz'} + \frac{d\vec{\beta}(z')}{dz'} \frac{d\vec{\gamma}(z')}{dz'} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} D_S^{\pm} [\vec{\gamma}(z) + \vec{\delta}(z)] - \frac{1}{2} D_S^{\pm} [\vec{\gamma}(z) - \vec{\delta}(z)] + H^{\pm}[\vec{\beta}(z), \vec{\gamma}(z), \vec{\delta}(z)]\right\},
\end{aligned}$$

где для структурных функций флуктуаций разности фаз вдоль траекторий $\vec{\beta}(z)$, $\vec{\gamma}(z)$, $\vec{\delta}(z)$ следуют выражения

$$\begin{aligned}
D_S^{\pm} [\vec{\gamma}(z) \pm \vec{\delta}(z)] &= \frac{\pi k^4}{k_{\pm}^2} \int_0^z dz' \int d^2\vec{x}_1 \times \\
&\times \phi_{\pm}(0, \vec{x}_1) [1 - \cos(\vec{x}_1(\vec{\gamma}(z') \pm \vec{\delta}(z')))]; \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{\pm}[\vec{\beta}(z), \vec{\gamma}(z), \vec{\delta}(z)] &= \frac{\pi k^4}{k_{\pm}^2} \int_0^z dz' \int d^2\vec{x}_1 \times \\
&\times \phi_{\pm}(0, \vec{x}_1) \exp[i\vec{x}_1\vec{\beta}(z')] [\cos(\vec{x}_1\vec{\delta}(z')) - \cos(\vec{x}_1\vec{\gamma}(z'))]. \quad (8)
\end{aligned}$$

Здесь $\phi_{\pm}(0, \vec{x}_1) = 0,063 \sigma_{\pm}^2 x_1^{-11/3} L_0^{-2/3} \exp[-x_1^2/x_n^2]$ - пространственный спектр флуктуаций, $\sigma_{\pm}^2 \approx [1 \mp (\omega_n/\omega) \cos \theta]^2 (\omega_p/\omega)^4 \sigma_N^2$ - дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости плазмы для волн с круговой поляризацией, $k_{\pm} = k\sqrt{\epsilon^{\pm}}$, σ_N - дисперсия относительных флуктуаций диэлектрической проницаемости плазмы $\sigma_N^2 = \langle \delta N^2 \rangle / N^2$, N , δN - средняя по ансамблю и вариация электронной концентрации соответственно, ω_p , ω_n - плазменная и гиромангнитная частоты соответственно. Индексы \mp соответствуют право- и левополяризованной нормальной волне, $x_1 = |\vec{x}_1|$, \vec{x}_1 - волновой вектор флуктуаций диэлектрической проницаемости плазмы в плоскости, ортогональной оси z , $x_n = 5,92/l_0$, L_0 , l_0 - внешний и внутренний масштабы турбулентных флуктуаций δN .

Рассмотрим случай слабого рассеяния в среде, для которого справедливо неравенство

$$R_C \gg R_p,$$

где R_c - поперечный радиус когерентности (как показано в [6] для право- и левополяризованных волн масштабы когерентности отличаются незначительно), R_F - поперечный размер зоны Френеля (подробное обсуждение см. в [6]). В этом случае существенный вклад в формирование полей в точках наблюдения дают невозмущенные траектории:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_s(z') &= \vec{\alpha}_0 + (\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_0)z'/z, \\ \vec{\beta}_s(z') &= \vec{\beta}_0 + (\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_0)z'/z, \\ \vec{\gamma}_s(z') &= \vec{\gamma}_0 + (\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_0)z'/z, \\ \vec{\delta}_s(z') &= \vec{\delta}_0 + (\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_0)z'/z.\end{aligned}\quad (9)$$

Векторы $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\delta}_0$ связаны с переменными интегрирования $\vec{\rho}'_1, \vec{\rho}'_2, \vec{\rho}'_3, \vec{\rho}'_4$ в плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_0 &= \frac{1}{2}(\vec{\rho}'_1 + \vec{\rho}'_2 + \vec{\rho}'_3 + \vec{\rho}'_4), & \vec{\beta}_0 &= \frac{1}{2}(\vec{\rho}'_1 + \vec{\rho}'_2 - \vec{\rho}'_3 - \vec{\rho}'_4), \\ \vec{\gamma}_0 &= \frac{1}{2}(\vec{\rho}'_1 - \vec{\rho}'_2 + \vec{\rho}'_3 - \vec{\rho}'_4), & \vec{\delta}_0 &= \frac{1}{2}(\vec{\rho}'_1 - \vec{\rho}'_2 - \vec{\rho}'_3 + \vec{\rho}'_4).\end{aligned}$$

Для $\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1, \vec{\gamma}_1, \vec{\delta}_1$ следуют аналогичные соотношения, где $\vec{\rho}'_1, \vec{\rho}'_2, \vec{\rho}'_3, \vec{\rho}'_4$ следует заменить на координаты точек наблюдения $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \vec{\rho}_4$. После интегрирования по траекториям и затем по начальным координатам в плоскости $z = 0$ получим ответ в квадратурах:

$$\begin{aligned}I_{1234}^\pm &= \frac{k_\pm^2}{16\pi^2 z^2} \int d^2\vec{n} \int d^2\vec{v} [I_0(\vec{n} + \vec{v}/2) \mp V_0(\vec{n} + \vec{v}/2)] \times \\ &\times [I_0(\vec{n} - \vec{v}/2) \mp V_0(\vec{n} - \vec{v}/2)] \times \\ &\times \exp[ik_\pm \vec{n}(\vec{\rho}_{12} - \vec{\rho}_{34}) + \frac{i}{2}k_\pm \vec{v}(\vec{\rho}_{12} + \vec{\rho}_{34})] \times \\ &\times \int d^2\vec{\beta} \int d^2\vec{\gamma} \exp\{ik_\pm \vec{v}\vec{\gamma} + i\frac{k_\pm}{2z}\vec{\beta}\vec{\gamma} - \frac{1}{2}D_s^\pm[\vec{\gamma}_s(z) + \frac{1}{2}(\vec{\rho}_{12} - \vec{\rho}_{34})] - \\ &- \frac{1}{2}D_s^\pm[\vec{\gamma}_s(z) - \frac{1}{2}(\vec{\rho}_{12} - \vec{\rho}_{34})] + H^\pm[\vec{\beta}_s(z), \vec{\gamma}_s(z), \frac{1}{2}(\vec{\rho}_{12} - \vec{\rho}_{34})]\},\end{aligned}\quad (10)$$

где $\vec{\rho}_{12} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_{34} = \vec{\rho}_3 - \vec{\rho}_4$. Остальные моменты в (5)

вычисляются аналогично. Более детально это изложено в [6].

3. Выражения для корреляционных функций ФКС в общем случае чрезвычайно громоздки, поэтому рассмотрим здесь ситуацию, когда $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2$ и $\vec{\rho}_3 = \vec{\rho}_4$, $\vec{\rho}_3 - \vec{\rho}_1 = \vec{R}$. Положим также, что источник является точечным. Таким образом, рассмотрим пространственную корреляцию функции рассеяния точки в магнитоактивной плазме. Потребуем выполнения неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lambda z \gg I_0^2, & \quad \text{в) } \frac{\omega_H}{\omega} \ll 1, \\ \text{б) } \lambda z \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega^3} \ll I_0^2, & \quad \text{г) } \frac{\omega_p}{\omega} \ll 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Неравенство (11б) означает, что разность зон Френеля для левополяризованных и правополяризованных волн меньше внутреннего масштаба турбулентности, при этом флуктуации амплитуды нормальных волн скоррелированы, остальные неравенства очевидны. При $V_0^2 \gg (\omega_H/\omega)^2 I_0^2$, где I_0 , V_0 - параметры Стокса на входе в слой статистически-неоднородной плазмы, выражения для корреляционных функций ФКС I и V идентичны и соответственно равны:

1) при $R \ll I_0$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Gamma_I(\vec{R}) \\ \Gamma_V(\vec{R}) \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{c} \sigma_I^2 \\ \sigma_V^2 \end{array} \right\} - 0,82 R^2 \frac{z \omega_p^4}{c^2 \omega^2 I_0^{1/3}} C_N^2 \left\{ \begin{array}{c} I_0^2 \\ V_0^2 \end{array} \right\}, \quad (12)$$

где $C_N^2 = 1,9 \sigma_N^2 L_0^{-2/3}$, c - скорость света, z - толщина неоднородного слоя плазмы, ω - частота излучения;

2) при $I_0 \ll R \ll \sqrt{\lambda z}$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \Gamma_I(\vec{R}) \\ \Gamma_V(\vec{R}) \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{c} \sigma_I^2 \\ \sigma_V^2 \end{array} \right\} - 0,73 R^{5/3} \frac{z \omega_p^4}{c^2 \omega^2} C_N^2 \left\{ \begin{array}{c} I_0^2 \\ V_0^2 \end{array} \right\} \times \\ \times [1 - 0,8 R^{1/3} \frac{\omega^{1/6}}{z^{1/6} c^{1/6}}]; \end{aligned} \quad (13)$$

3) при $R \gg \sqrt{\lambda z}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Gamma_I(\vec{R}) \\ \Gamma_V(\vec{R}) \end{array} \right\} \approx -0,02 R^{-7/3} \frac{z^3 \omega_p^4}{\omega^4} C_N^2 \left\{ \begin{array}{c} I_0^2 \\ V_0^2 \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Здесь для дисперсии флуктуаций параметров I и V следуют выражения

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_I^2 \\ \sigma_V^2 \end{array} \right\} \approx 0,212 \frac{z^{11/6} \omega_p^4}{c^{7/6} \omega^{17/6}} C_N^2 \left\{ \begin{array}{c} I_0^2 \\ V_0^2 \end{array} \right\}. \quad (15)$$

В случае, когда в начальном потоке радиоизлучения источника отсутствует V_0 -компонента, поляризованная по кругу, или ее доля настолько мала, что выполняется неравенство

$$V_0^2 \ll \left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2 I_0^2 \quad (16)$$

вместо (15) для дисперсии и корреляционной функции флуктуаций круговой поляризации следуют соотношения

$$\sigma_V^2 = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \sigma_I^2 \cos^2 \theta; \quad (17)$$

$$\Gamma_V(\vec{R}) = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \Gamma_I(\vec{R}) \cos^2 \theta. \quad (18)$$

Флуктуации круговой поляризации в (17), (18) обусловлены отличием величины амплитудных флуктуаций в право- и левополяризованной волне, так как в единичном акте рассеяния на расстоянии z от случайно-рассеивающей линзы поправки к флуктуациям логарифма амплитуды имеют порядок $\omega_H \omega_p^2 z \delta N / (N I_E \omega^3)$ и противоположный знак в зависимости от направления вращения вектора поляризации в падающей волне.

Сравнивая полученные выражения для корреляционных функций параметров Стокса I и V с выражениями для структурных функций флуктуаций неполяризованной волны, полученными в [9], нетрудно убедиться, что поведение корреляционных функций параметров I и V в зависимости от разнота R идентично корреляционной функции флуктуаций логарифма амплитуды неполяризованного излучения в приближении метода плавных возмущений. Из полученных соотношений следует, что по измеренным корреляционным функциям $\Gamma_I(\vec{R})$ и $\Gamma_V(\vec{R})$ для эталонного точечного источника возможно восстановить параметры пространственного спектра флуктуаций электронной концентрации в плазменном слое. Как видно из (18) и (17), в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме возникает флуктуационная компонента с круговой поляризацией из неполяризованного падающего излучения ($V_0 = 0$). По поведению корреляционной функции параметра V можно судить о величине магнитного поля в среде или о доле поляризованного по кругу излучения V_0 в спектральной интенсивности источника. Очевидно, что эффект возникновения флуктуаций круговой поляризации по порядку величины определяется отношением $(\omega_H/\omega)^2$. Так как частота ω всегда ограничена величиной ω_p , то $\max [\omega_H^2/\omega^2] < \alpha = (\omega_H/\omega_p)^2$. Используя известные значения ω_H , ω_p (например, из [2]), можно оценить величину α . При этом для межзвездной (области $N1$) и межпланетной среды $\alpha \sim 10^{-3}$. Наибольший эффект возможен в земной ионосфере, где величина α может достигать единиц процентов. В солнечной хромосфере $\alpha \sim 1$, в ионосфере Юпитера $\alpha > 1$.

Аналогичные вычисления для корреляционных функций $\Gamma_0(\vec{R})$ и $\Gamma_V(\vec{R})$ приводят к выражениям:

$$1) \text{ при } R \ll l_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_Q(\vec{R}) \\ \Gamma_U(\vec{R}) \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{l} \sigma_Q^2 \\ \sigma_U^2 \end{array} \right\} - 0,41 R^2 \frac{z\omega_P^4}{c^2\omega^2 l_0^{1/3}} C_N^2 \times$$

$$\times [1 \pm \exp(-8\gamma_T^2) \cos(4\chi_0 + 2\varphi_F)] (Q_0^2 + U_0^2); \quad (19)$$

2) при $l_0 \ll R \ll \sqrt{\lambda z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_Q(\vec{R}) \\ \Gamma_U(\vec{R}) \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{l} \sigma_Q^2 \\ \sigma_U^2 \end{array} \right\} - 0,365 R^{5/3} \frac{z\omega_P^4}{c^2\omega^2} C_N^2 \left(1 - \right. \quad (20)$$

$$\left. - 0,8 R^{1/3} \frac{\omega^{1/6}}{z^{1/6} c^{1/6}} \right) [1 \pm \exp(-8\gamma_T^2) \cos(4\chi_0 + 2\varphi_F)] (Q_0^2 + U_0^2);$$

3) при $\sqrt{\lambda z} \ll R \ll (\omega/\omega_H)^{6/5} R_c$, $R_c = 1,775 \left(\frac{z\omega_P^4}{c^2\omega^2} C_N^2 \right)^{-3/5}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_Q(\vec{R}) \\ \Gamma_U(\vec{R}) \end{array} \right\} \approx (Q_0^2 + U_0^2) \left\{ \frac{1}{2} \left[1 \pm \exp(-8\gamma_T^2) \cos(4\chi_0 + 2\varphi_F) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2 \exp(-4\gamma_T^2) \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(2\chi_0 + \varphi_F) \\ \sin^2(2\chi_0 + \varphi_F) \end{array} \right\} \right] \right\} - \quad (21)$$

$$- 0,73 R^{5/3} \frac{z\omega_P^4 \omega^2 \cos^2 \theta}{c^2 \omega^4} C_N^2 [1 \mp \exp(-8\gamma_T^2) \cos(4\chi_0 + 2\varphi_F)] \pm$$

$$\pm 0,33 R^{-1/3} \frac{z^2 \omega_P^4 \omega_H \cos \theta}{c \omega^4} C_N^2 \exp(-8\gamma_T^2) \sin(4\chi_0 + 2\varphi_F) -$$

$$- 0,01 R^{-7/3} \frac{z^3 \omega^4}{\omega^4} C_N^2 [1 \pm \exp(-8\gamma_T^2) \cos(4\chi_0 + 2\varphi_F)].$$

В (19), (20) входят величины дисперсии флуктуаций σ_Q^2 и σ_U^2 для которых получены выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_Q^2 \\ \sigma_U^2 \end{array} \right\} \approx \frac{1}{2} (Q_0^2 + U_0^2) \left\{ [1 \pm \exp(-8\gamma_T^2) \cos(4\chi_0 + 2\varphi_F)] \times \right.$$

$$\times \left(1 + 0,212 \frac{z^{11/6} \omega_p^4}{c^{7/6} \omega^{17/6}} C_N^2 \right) - 2 e^{-4\gamma_T^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(2\chi_0 + \varphi_F) \\ \sin^2(2\chi_0 + \varphi_F) \end{array} \right\} \}. \quad (22)$$

При $\gamma_T^2 \ll 1$ вместо (22) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 \\ \sigma_U^2 \end{array} \right\} \approx \left[4\gamma_T^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin^2(2\chi_0 + \varphi_F) \\ \cos^2(2\chi_0 + \varphi_F) \end{array} \right\} + 0,212 \frac{z^{11/6} \omega_p^4}{c^{7/6} \omega^{17/6}} \times \right. \\ \left. \times C_N^2 \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(2\chi_0 + \varphi_F) \\ \sin^2(2\chi_0 + \varphi_F) \end{array} \right\} \right] (Q_0^2 + U_0^2). \quad (23)$$

Входящие в (19) - (23) параметры Q_0 , U_0 , $2\chi_0$ суть параметры Стокса и позиционный угол линейно поляризованного излучения источника, $\varphi_F = \frac{\omega_p^2 \omega_H \cos \theta}{c \omega^2}$ z - угол фарадеевского вращения в плазменном слое,

$$\gamma_T^2 = 0,365 \frac{z \omega_p^4 \omega_H^2 \cos^2 \theta}{c^2 \omega^4} L_0^{5/3} C_N^2$$

- дисперсия флуктуаций разности фаз обыкновенной и необыкновенной волны. Как видно из (23), при $\gamma_T^2 \rightarrow 0$ дисперсия флуктуаций линейной поляризации связана в основном с флуктуациями амплитуды поляризованного излучения (второй член в (23)). Заметим, что в [5], где получены выражения для σ_0^2 и σ_U^2 , рассматривался, с одной стороны, более общий случай, а именно учитывалось влияние релятивистских электронов и флуктуаций магнитного поля на перенос синхротронного излучения. С другой стороны, исследование, проведенное в [5], основано на уравнении переноса и не учитывает дифракционных эффектов, поэтому в выражениях [5] для σ_0^2 и σ_U^2 применительно к нашему случаю присутствует лишь первый член (23), обусловленный дисперсией флуктуаций разности фаз обыкновенной и необыкновенной волны.

В другом предельном случае, при $\gamma_T^2 \gg 1$, дисперсия флуктуаций линейно поляризованной части излучения, как видно из (22), выходит на некий уровень насыщения, величина которого определяется только долей линейной поляризации источника, т.е. $\sigma_0^2 = \sigma_U^2 \rightarrow \frac{1}{2} (Q_0^2 + U_0^2)$. При этом параметры Стокса ("средние"), как показано в [6], экспоненциально малы: $\langle Q \rangle \sim \langle U \rangle \sim e^{-2\gamma_T^2}$, так как интерференция обыкновенной и необыкновенной волны отсутствует. Таким образом, при $\gamma_T^2 \gg 1$, по измерениям четвертых моментов поля можно оценить инвариант $P_1^2 = [\langle Q^2 \rangle + \langle U^2 \rangle] / \langle I^2 \rangle = P_{01}^2 = [Q_0^2 + U_0^2] / I_0^2$, характеризующий степень линейной поляризации источника, однако позиционный угол χ_0 оценить в этом случае не представляется возможным.

определяются в основном флуктуациями разности фаз на базе \vec{R} , т.е. структурной функцией флуктуаций фазы, что позволяет, в принципе, определить показатель степени пространственного спектра флуктуаций δN в области масштабов, превышающих размер зоны Френеля, вплоть до внешнего масштаба турбулентности при $\gamma_T^2 < 1$ ($\Gamma_Q, \Gamma_U \rightarrow 0$ при $R > L_0$).

В другом предельном случае, $\gamma_T^2 > 1$, максимальный масштаб неоднородностей δN , при котором Γ_Q, Γ_U еще отличны от нуля, не превышает $(\omega/\omega_H)^{6/5} R_c$. Таким образом, измерение корреляционных функций $\Gamma_I, \Gamma_Q, \Gamma_U, \Gamma_V(\vec{R})$ позволяет восстановить параметры турбулентной плазмы при известной поляризации источника, т.е. индекс спектра флуктуаций электронной концентрации, величины структурной характеристики C_N^2 и величину магнитного поля H_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М. Магнитные поля галактик. - М.: Наука, 1988.
2. Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме. - М.: Наука, 1977.
3. Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А. Распространение и поляризация излучения в космической среде. - М.: Наука, 1979.
4. Ерухимов Л. М., Кириш П. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. N 12. С. 1783.
5. Spangler S.R. //Astrophys. J. 1982. V.261. P. 310.
6. Кукушкин А. В., Оляк М. Р. Препринт N 41, Радиоастрономический институт АН УССР, Харьков, 1990.
7. Кукушкин А. В. Препринт N 30, Радиоастрономический институт АН УССР, Харьков, 1989. - 33 с.
8. Христиансен У., Хегбом И. Радиотелескопы. - М.: Мир, 1987.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. - М.: Наука, 1967.

Радиоастрономический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
4 мая 1990 г.

FLUCTUATIONS OF THE POLARIZED RADIATION FROM COSMIC SOURCES SCATTERED IN A RANDOM MAGNETOPLASMA

A. V. Kukushkin, M. R. Ol'yak

A series expression for the fourth-order statistical moments of the polarized radiation propagating through a random magnetoplasma is developed using formalism of the Feynman trajectory integrals. Correlation functions and dispersions of fluctuations of Stokes parameters are obtained for the case of weak field fluctuations. The behaviour of correlation functions of Stokes parameters is analyzed depending on the polarization degree of cosmic sources and properties of the inhomogeneous plasma. It is shown that fluctuations of the circular polarization arise in a random magnetoplasma owing to the different degrees of the amplitude and phase decorrelation in normal waves.

УДК 530.145

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФАЗЫ
В КОГЕРЕНТНОМ СОСТОЯНИИ

И. М. Альперин, Я. Д. Клубис

Исследована волновая функция гармонического осциллятора в представлении, где фаза играет роль обобщенной координаты. Такая волновая функция позволяет получить все возможные статистические сведения о фазе θ в когерентном состоянии (моменты всех порядков). Особенно просто вычисляются $\langle \cos \theta \rangle$ и $\langle \sin \theta \rangle$.

При обычных методах исследования одномодового когерентного состояния легко решается вопрос о статистике числа фотонов (распределение Пуассона). Однако статистические свойства фазы, играющие решающую роль в классической интерпретации когерентности, исследованы меньше. В значительной степени это связано с тем, что в квантовой трактовке когерентности возникает довольно тонкий вопрос о выборе оператора фазы, подробно рассмотренный в [1]. Настоящая работа является попыткой расширить информацию о статистических свойствах фазы в когерентном состоянии. При этом мы исходим из того, что в классической механике существует каноническое преобразование, в котором фаза приобретает роль обобщенной координаты [2]. Между тем для квазиклассических систем, к которым принадлежит и гармонический осциллятор, также возможно каноническое преобразование (имеющее уже смысл унитарного преобразования) [3]. Если такое преобразование произвести, то волновая функция Φ будет зависеть только от фазы θ и $|\Phi(\theta)|^2$ даст статистическое распределение фазы.

В рамках классического канонического преобразования переход от старых переменных (q, p) к новым (θ, \mathcal{P}) оказывается возможным в случае существования так называемой образующей функции $f(q, \theta)$, такой, что

$$p = \partial f / \partial q, \quad \mathcal{P} = - \partial f / \partial \theta. \tag{1}$$

Мы положим $\mathcal{P} = H'(q, p) / \omega$. Тогда новый гамильтониан

$$H' = \omega \mathcal{P}. \tag{2}$$

При таком выборе гамильтониана новая координата θ является циклической.

Найдем образующую функцию. Из (1) и (2) следует уравнение для f :

$$\frac{\partial f}{\partial (\theta / \omega)} = - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] \quad (m = 1). \tag{3}$$

Уравнение (3) совпадает с уравнением Гамильтона - Якоби, зависящим от времени - $\partial S / \partial t = H(\partial S / \partial q, q)$, если в последнем время заменить на

θ/ω . Положим $f(\omega q^2/2)f_1(\theta)$. Тогда в соответствии с (3) для f_1 получаем уравнение

$$- \partial f_1 / \partial \theta = f_1^2 + 1. \quad (4)$$

Отсюда $f_1 = - \operatorname{tg} \theta$. Образующая функция, таким образом, есть

$$f = - \frac{\omega q^2}{2} \operatorname{tg} \theta. \quad (5)$$

Из (1) и (5) получаем

$$q = \sqrt{2\mathcal{P}/\omega} \cos \theta, \quad p = - \sqrt{2\mathcal{P}\omega} \sin \theta. \quad (6)$$

Из (6) видно, что $\mathcal{P} \geq 0$.

Перейдем теперь к квантовому рассмотрению канонического преобразования к переменным энергия - фаза (такой переход методом унитарного преобразования подробно рассмотрен в [3]). В этом случае оператор Гамильтона в соответствии с (2) запишется в виде

$$\hat{H}' = \omega \hat{\mathcal{P}}. \quad (7)$$

Оператор $\hat{\mathcal{P}}$ определится соотношением

$$\hat{\mathcal{P}} = - i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (8)$$

Соотношение (8) диктуется инвариантностью соотношений коммутации

$$[\hat{p}, \hat{q}] = [\hat{\mathcal{P}}, \hat{\theta}]. \quad (9)$$

Из (7) и (8) вытекает следующее уравнение Шредингера:

$$- \frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (10)$$

В отличие от обычного представления в нашем случае квазиклассичность проявляется в том, что уравнение Гамильтона - Якоби просто совпадает с уравнением (10).

Найдем стационарные решения уравнения (10):

$$\phi(t, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \omega \mathcal{P} t\right) \phi(\theta), \quad (11)$$

где

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{P} \theta\right), \quad (12)$$

$1/\sqrt{2\pi}$ - нормировочный множитель. Квантование появляется вследствие граничных условий

$$\phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta), \quad (13)$$

так как θ является угловой переменной, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Отсюда получаем

$$\mathcal{P} = n\hbar, \quad E = n\omega\hbar \quad (14)$$

(соответственно классическим выражениям (6) $n \geq 0$). Итак, функции стационарного состояния приобретают вид

$$\phi_n(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-in(\omega t - \theta)). \quad (15)$$

В качестве стационарного решения мы получим волну, распространяющуюся в угловом пространстве (пространстве угловой переменной). Особенности волн заключаются в том, что они распространяются с фазовой скоростью ω и $\lambda_n = 2\pi/n$.

В общем виде любое состояние ϕ выражается как вектор в гильбертовом пространстве

$$\phi = \sum_n \alpha_n \phi_n(t, \theta). \quad (16)$$

Наибольший интерес представляет для нас аналог формул (6). Для этого надо определить действие оператора $\sqrt{\hat{p}}$. Очевидно, что достаточно определить, имея в виду (16), действие такого оператора на функции $\phi_n(\theta)$ (которые мы в дальнейшем будем записывать просто как ϕ_n). Для целых и положительных k имеем, в силу (14),

$$\hat{p}^k \phi_n = (\hat{n} \hbar)^k \phi_n. \quad (17)$$

Будем считать, что (17) справедливо для всех $k > 0$. В частности, для $k = 1/2$ имеем $\sqrt{\hat{p}} \phi_n = \sqrt{\hat{n} \hbar} \phi_n$. Тогда для квантового случая (6) запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{q} \phi_n &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} (\hat{e}^{i\theta} \sqrt{\hat{n}} + \sqrt{\hat{n}} \hat{e}^{-i\theta}) \phi_n, \\ \hat{p} \phi_n &= \frac{1}{2i} \sqrt{2\hbar\omega} (\sqrt{\hat{n}} \hat{e}^{-i\theta} - \hat{e}^{i\theta} \sqrt{\hat{n}}) \phi_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что действие операторов $\hat{e}^{\pm i\theta}$ (имеющих классический смысл поворота фазовой плоскости) на ϕ_n эквивалентно действию операторов повышения и понижения Δ^\pm , $\Delta^\pm \psi_n = \psi_{n\pm 1}$ (ψ_n - произвольные ортонормированные функции):

$$\hat{e}^{\pm i\theta} \phi_n = \phi_{n\pm 1} = \Delta^\pm \phi_n. \quad (19)$$

Таким образом, операторы \hat{q} и \hat{p} могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{q} \phi_n &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} (\Delta^+ \sqrt{\hat{n}} + \sqrt{\hat{n}} \Delta^-) \phi_n, \\ \hat{p} \phi_n &= \frac{1}{2i} \sqrt{2\hbar\omega} (\sqrt{\hat{n}} \Delta^- - \Delta^+ \sqrt{\hat{n}}) \phi_n. \end{aligned} \quad (20)$$

*Такое обобщение требует выполнения двух условий $\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$, $\sum_n |\alpha_n|^2 n < \infty$. Оба эти условия в нашем случае выполняются.

Эти выражения эквивалентны следующим матричным элементам в пространстве Φ_n :

$$q_{n,n+1} = q_{n+1,n}^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(n+1),$$

$$p_{n,n+1} = p_{n+1,n}^* = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(n+1), \quad (21)$$

что совпадает с хорошо известными матричными элементами осциллятора. Из (20) следует выражение для оператора радиуса-вектора фазовой точки:

$$\hat{r}_{\text{фаз}} = \hat{q} + i \frac{\hat{p}}{\omega} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \sqrt{\hat{n}} \Delta^-,$$

$$\hat{r}_{\text{фаз}}^* = \hat{q} - i \frac{\hat{p}}{\omega} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \Delta^+ \sqrt{\hat{n}}. \quad (22)$$

Из (22) видно, что операторы рождения и уничтожения отличаются от $\hat{r}_{\text{фаз}}^*$ и $\hat{r}_{\text{фаз}}$ только постоянным множителем

$$\hat{r}_{\text{фаз}}^* = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \hat{a}^+, \quad \hat{r}_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \hat{a}. \quad (23)$$

Сравним операторное выражение для радиуса-вектора с обычным $r_{\text{фаз.кл}} = \rho e^{-i\theta}$. Естественно, что роль модуля играет $\rho \sim \sqrt{n}$, а роль фазового множителя, определяющего поворот в фазовой плоскости, играет Δ^- . На последнем обстоятельстве остановимся подробнее. При переходе к квантовой механике состояние системы определяется вектором Φ в гильбертовом пространстве, которое является квантовым аналогом фазового пространства. Стационарные состояния $\Phi_n(t, \theta)$ играют роль ортов в этом пространстве. Выражение (19) можно рассматривать как такой поворот гильбертова пространства, при котором орт n переходит в орт $n+1$. Тогда

$$\Delta^+ \Phi(\theta) = \sum_n c_n \Phi_{n+1} \quad (24)$$

описывает произвольный поворот в гильбертовом пространстве.

Переходим к описанию когерентных состояний в новом представлении. Когерентное состояние можно определить как такое состояние, в котором радиус-вектор фазовой точки $\langle r_{\text{фаз}} \rangle$ движется без дисперсии. Для этого достаточно, чтобы

$$\hat{r}_{\text{фаз}} \Phi_{\text{coh}} = r_{\text{фаз.кл}} \Phi_{\text{coh}} \quad (25)$$

Из (25) следует $\langle \hat{r}_{\text{фаз}} \rangle = r_{\text{фаз.кл}}$; $\langle \hat{r}_{\text{фаз}}^2 \rangle = r_{\text{фаз.кл}}^2$. Если $r_{\text{фаз.кл}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \beta$, то для выполнения (25) достаточно выполнения известного соотношения

$$\hat{a} \Phi_{\text{coh}} = \beta \Phi_{\text{coh}} \quad (26)$$

Для нахождения $\Phi_{\text{coh}}(t, \theta)$ в явном виде воспользуемся уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_{\text{coh}}}{\partial t} = \hbar\omega \hat{a}^+ \hat{a} \Phi_{\text{coh}}. \quad (27)$$

(Мы не учитываем несущественной сейчас нулевой энергии.) С учетом (26) получаем

$$i \frac{\partial \Phi_{\text{coh}}}{\partial t} = \omega \hat{a}^+ \beta \Phi_{\text{coh}}. \quad (28)$$

Зависимость от времени в (28) можно перенести либо на \hat{a}^+ , либо на β . Пусть $\beta(t) = \beta_0 e^{-i\omega t}$. Тогда (28) переписывается в виде

$$\frac{\partial \Phi_{\text{coh}}}{\partial t} = \dot{\beta}(t) \hat{a}^+(0) \Phi_{\text{coh}}. \quad (29)$$

Формальное интегрирование (29) дает

$$\Phi_{\text{coh}} = C e^{\beta(t)\hat{a}^+(0)} \Phi_0, \quad (30)$$

где C - нормирующий множитель, и $\Phi_0 = \Phi_0(\theta)$. Разлагая (30) в ряд, найдем

$$\Phi_{\text{coh}} = C \sum_n \frac{\beta_0^n e^{-in\omega t}}{n!} (\hat{a}^+(0))^n \Phi_0 \quad (31)$$

или

$$\Phi_{\text{coh}} = C \sum_n \frac{\beta_0^n e^{-in\omega t}}{\sqrt{n!}} \Phi_n, \quad (32)$$

так как

$$(\hat{a}^+(0))^n \Phi_0 = \sqrt{n!} \Phi_n. \quad (33)$$

Нормируя (32) и учитывая (15), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{coh}} &= \exp\left(-\frac{|\beta_0|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\beta_0^n}{\sqrt{n!}} \Phi_n(t, \theta) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{\exp(-|\beta_0|^2/2) \beta_0^n}{\sqrt{n!}} \exp(-in(\omega t - \theta)). \end{aligned} \quad (34)$$

Мы видим, что (34) есть волновой пакет в прямом смысле этого слова (в отличие от обычного представления). Интенсивности парциальных волн $|\alpha_n|^2$ распределены по Пуассону:

$$|\alpha_n|^2 = \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n}{n!}, \quad \langle n \rangle = \beta_0^* \beta_0. \quad (35)$$

Переходя к статистическим свойствам когерентного состояния, отметим прежде всего, что отсутствие дисперсии у радиуса-вектора фазовой точки не означает отсутствия флуктуации у его модуля и фазы.

Начнем с модуля. Из выражения (22) видно, что $D|r_{\text{фаз}}| = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} D(\sqrt{n})$,

D - дисперсия. Метод вычисления произвольных моментов $\langle n^k \rangle$ ($k < 1$; $k < 0$) для распределения Пуассона приведен в Приложении. Для $\langle n \rangle \gg 1$ имеем $\langle n^{1/2} \rangle \approx \langle n \rangle^{1/2} (1 - 1/2\langle n \rangle)$ и $D(\sqrt{n}) \approx 1$. Поэтому

$$D|r_{\text{фаз}}| \approx \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}, \quad (36)$$

что совпадает с дисперсией координаты в нулевом (вакуумном) состоянии.

Рассмотрим теперь распределение фазы:

$$\rho(\theta) = \Phi_{\text{coh}}^* \Phi_{\text{coh}}. \quad (37)$$

Из (34) имеем

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k e^{ik(\omega t - \theta)} + \text{к. с.} \quad (38)$$

Выражение (38) представляет собой ряд Фурье для плотности: амплитуда k -й гармоники выражается через коэффициенты α_k :

$$\rho_k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k+n}^* \alpha_n. \quad (39)$$

Запишем (38) в виде

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k| \cos k(\theta - \theta_{\text{кл}}). \quad (40)$$

В (40) $\theta_{\text{кл}}$ - классическая фаза: $\theta_{\text{кл}} = \omega t + \varphi_0$, φ_0 - фаза β_0 , $\beta_0 = \sqrt{\langle n \rangle} e^{i\varphi_0}$. В правой части (40) первый член $\rho_0 = 1/2\pi$ описывает равновероятное распределение, соответствующее всем стационарным состояниям, второй член обусловлен интерференцией парциальных волн. Запишем (40) в виде

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k| \cos k(\theta - \theta_{\text{кл}}). \quad (41)$$

Из (41) видно, что отклонение от равномерного распределения имеет максимум при $\theta = \theta_{\text{кл}}$. Острота этого максимума существенно зависит от $\langle n \rangle$. Для ее определения вычислим $|\rho_{\text{кл}}|$ при больших $\langle n \rangle$. Из (39), вспоминая выражение (35) для α , находим

$$|\rho_k| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{n+k/2}}{\sqrt{(n+k)!n!}} e^{-\langle n \rangle}. \quad (42)$$

Вычисление суммы облегчается, если ее записать в виде

$$|\rho_k| = \langle n \rangle^{k/2} \langle ((n+1)(n+2) \dots (n+k))^{-1/2} \rangle. \quad (43)$$

В (43) усреднение проводится по распределению Пуассона. При больших $\langle n \rangle$ (43) можно приблизительно вычислить и выражения (39) и (40) становятся легко обозримыми. В первом приближении для произвольной функции $f(n)$ имеем $\langle f(n) \rangle = f(\langle n \rangle)$. Поэтому

$$\langle (n+1)(n+2)\dots(n+k)^{-1/2} \rangle =$$

$$\langle (n+1)(n+2)\dots(n+k)^{-1/2} \rangle. \quad (44)$$

Из (44) следует для (43)

$$|\rho_k| = \frac{\langle n \rangle^{k/2}}{\{\langle n \rangle\}^{k/2}}. \quad (45)$$

В (45) введено обозначение $\{\langle n \rangle\}^k = (\langle n \rangle + 1)(\langle n \rangle + 2) \dots (\langle n \rangle + k)$. Из (46) вытекает для больших $\langle n \rangle$ и малых k :

$$|\rho_k| \approx 1. \quad (46)$$

Оценим k , при котором (46) еще сохраняет силу. Учитывая, что

$$\langle n \rangle^{-1/2} = \langle n \rangle^{-1/2} \left(1 - \frac{i}{2\langle n \rangle} \right), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (47)$$

имеем из (45)

$$|\rho_k| \approx 1 - \frac{k(k+1)}{4\langle n \rangle}. \quad (48)$$

Из (48) видно, что значения k , для которых $|\rho_k|$ еще отличны от нуля, определяются интервалом $(1, \sqrt{\langle n \rangle})$. Иными словами, дисперсия числа фотонов (точнее, \sqrt{Dn}) определяет номер гармоники, еще вносящей вклад в (40). Если учесть, что каждая последующая гармоника уточняет информацию о фазе (нулевая гармоника не дает никакой информации о фазе), то можно сказать, что увеличение дисперсии повышает информацию о фазе.

Рассмотрим предельный переход

$$\langle n \rangle \rightarrow \infty \quad (Dn \rightarrow \infty). \quad (49)$$

В этом случае на основании (48) $|\rho_k| \rightarrow 1$ при любом k и (40) приобретает вид

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\theta - \theta_{кл}). \quad (50)$$

Учитывая известное соотношение [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n), \quad (51)$$

перепишем (50) в виде

$$\rho(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_{кл} - 2\pi n). \quad (52)$$

Таким образом, предельный переход (49) означает условие перехода к классике. Нелишне подчеркнуть, что существенным здесь является переход $Dn \rightarrow \infty$. (В стационарном состоянии фаза полностью не определена и при $n \rightarrow \infty$.)

Рассмотрим теперь приближенно случай, когда $\langle n \rangle \gg 1$, но конечно. В этом случае мы полагаем

$$|\rho_k| = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq \sqrt{\langle n \rangle} \\ 0, & k > \sqrt{\langle n \rangle} \end{cases}. \quad (53)$$

Суммы в (41) вычисляются элементарно:

$$\sum_{k=1}^N \cos k(\theta - \theta_{кл}) = \frac{\cos(N+1)/2(\theta - \theta_{кл}) \sin(N/2)(\theta - \theta_{кл})}{\sin(\theta - \theta_{кл})/2}, \quad (54)$$

где для краткости $N = \sqrt{\langle n \rangle}$. С учетом (54) для (41) находим

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\sin N(\theta - \theta_{кл})}{\operatorname{tg}(\theta - \theta_{кл})/2} - 2 \sin^2 \frac{N(\theta - \theta_{кл})}{2}. \quad (55)$$

В правой части (55) главную роль играет первый член. По структуре он напоминает результат интерференции в решетке из N щелей [5]. Такая решетка при достаточно большом N дает острый максимум при $\theta \rightarrow \theta_{кл}$, высота которого в $2N$ раз превышает плотность равномерного распределения. Как и в решетке, полуширина пика согласно (55) определяется соотношением

$$\sqrt{\langle n \rangle} \Delta\theta \approx \pi. \quad (56)$$

Выражение (56) имеет вид соотношения $\Delta k \Delta x \sim \pi$ (k - волновой вектор), получающегося при элементарной трактовке волнового пакета. Роль полуширины в пространстве волновых чисел играет \sqrt{Dn} . Качественное объяснение соотношения (56) состоит в том, что увеличение дисперсии влечет и увеличение числа волн, создающих конструктивную интерференцию, обуславливающую информацию о фазе.

Знание функции распределения позволяет найти моменты всех порядков. Найдем предварительно средние значения $\langle \sin \theta \rangle$ и $\langle \cos \theta \rangle$:

$$\langle \sin \theta \rangle = \langle \phi_{\text{coh}} | \sin \theta | \phi_{\text{coh}} \rangle.$$

С помощью выражений (32) и (19) находим

$$\langle \sin \theta \rangle = \frac{\langle \Delta^+ \rangle - \langle \Delta^- \rangle}{2i}, \quad \langle \cos \theta \rangle = \frac{\langle \Delta^+ \rangle + \langle \Delta^- \rangle}{2}. \quad (57)$$

В правой части (57) усреднение проводится в пространстве чисел заполнения:

$$\langle \Delta^\pm(0) \rangle = \sum \alpha_n^* \alpha_{n\pm 1}, \quad \langle \Delta^\pm(t) \rangle = e^{\pm i\omega t} \langle \Delta^\pm(0) \rangle. \quad (58)$$

Таким образом, в пространстве чисел заполнения можно ввести операторы $\sin \theta$ и $\cos \theta$:

$$\sin \theta = \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}. \quad (59)$$

Подставляя значение α_n , находим из (58)

$$\langle \Delta^+(t) \rangle = \langle \Delta^-(t) \rangle^* = \exp(i\theta_{кл} t) \langle n \rangle^{1/2} \langle n+1 \rangle^{-1/2}. \quad (60)$$

При больших $\langle n \rangle$

$$\langle (n+1)^{-1/2} \rangle \approx (\langle n \rangle + 1)^{-1/2}.$$

Тогда из (60) получаем для (57)

$$\langle \sin \theta \rangle = (1 - \frac{1}{2\langle n \rangle}) \sin \theta_{кл}, \quad \langle \cos \theta \rangle = (1 - \frac{1}{2\langle n \rangle}) \cos \theta_{кл}. \quad (61)$$

Соотношения (61) дают основание для определения операторов (59). Соотношения (59) совпадают с соответствующими выражениями в [1,6]. Аналогично определяются средние значения $\langle \sin k\theta \rangle$ и $\langle \cos k\theta \rangle$:

$$\langle \sin k\theta \rangle = \frac{\langle (\Delta^+)^k \rangle - \langle (\Delta^-)^k \rangle}{2i}, \quad (62)$$

$$\langle \cos k\theta \rangle = \frac{\langle (\Delta^+)^k \rangle + \langle (\Delta^-)^k \rangle}{2}, \quad k - \text{целое.}$$

Повторяя предыдущие выкладки, находим

$$\langle (\Delta^\pm)^k \rangle = \frac{\langle n \rangle^{k/2}}{\{ \langle n \rangle \}^{k/2}} \exp(\pm ik\theta_{\text{кл}}); \quad (63)$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \sin k\theta \rangle \\ \langle \cos k\theta \rangle \end{array} \right\} = \frac{\langle n \rangle^{k/2}}{\{ \langle n \rangle \}^{k/2}} \left\{ \begin{array}{l} \sin k\theta_{\text{кл}} \\ \cos k\theta_{\text{кл}} \end{array} \right\}. \quad (64)$$

В (63) и (64) мы обозначили

$$\{ \langle n \rangle \}^k = \langle n \rangle (\langle n \rangle + 1) \cdots (\langle n \rangle + k).$$

Из выражений (63) и (64) видно, что при $k \ll \langle n \rangle$

$$\langle \sin k\theta \rangle \approx \sin k\theta_{\text{кл}}.$$

Однако, вообще говоря, $\langle \sin k\theta \rangle \neq \langle \sin k\theta_{\text{кл}} \rangle$. Среднее значение фазы в когерентном состоянии

$$\langle \theta \rangle = \langle \phi_{\text{coh}} | \theta | \phi_{\text{coh}} \rangle$$

находится при помощи выражений (34) и (35). Получаем

$$\langle \theta \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k \exp(ik\omega t) \quad (0 < \theta < 2\pi). \quad (65)$$

Выражение (65) представляет собой разложение θ в ряд Фурье. Соответствующие амплитуды равны:

$$\theta_0 = \pi, \quad \theta_k = \theta_{-k}^* = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+k}^* \alpha_n \int_0^{2\pi} \theta \exp(-ik\theta) d\theta. \quad (66)$$

Вычисление суммы в (66) дает на основании (58) и (63)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+k}^* \alpha_n = \frac{\langle n \rangle^{k/2}}{\{ \langle n \rangle \}^{k/2}} \exp(ik\varphi_0). \quad (67)$$

После вычисления интеграла найдем окончательно

$$\theta_k = \frac{i}{k} \frac{\langle n \rangle^{k/2}}{\{ \langle n \rangle \}^{k/2}} \exp(ik\varphi_0). \quad (68)$$

Обратившись к (68) и учитывая (64), запишем фурье-разложение в виде

$$\langle \theta \rangle = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \sin k\theta \rangle}{k}. \quad (69)$$

Исследуем выражение (69). Для этого сравним его с известным разложением переменной x ($0 < x < 2\pi$) в ряд Фурье:

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad (70)$$

В выражении (69) роль n -гармоники играет $\langle \sin k\theta \rangle$. Так как при $k \ll \langle n \rangle$ $\langle \sin k\theta \rangle \approx \sin k\theta_{\text{кл}}$ и, согласно (70), с ростом n роль соответствующей гармоники уменьшается, то при достаточно большом $\langle n \rangle$ можно писать приближенно

$$\langle \theta \rangle \approx \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta_{\text{кл}}}{n} = \theta_{\text{кл}}. \quad (71)$$

Обратим внимание на то, что даже среднее значение фазы (момент первого порядка) отличается от классического $\langle \theta \rangle = \theta_{\text{кл}}$ лишь в предельном случае $\langle n \rangle \rightarrow \infty$. В этом случае при любом n будет выполняться равенство

$$\langle \sin n\theta \rangle = \sin n\theta_{\text{кл}}.$$

Физический смысл этого предельного перехода достаточно ясен. В выражении (69) первый член дает среднее значение любого стационарного состояния, в котором все фазы равновероятны (в интервале $(0, 2\pi)$). Все последующие члены (дающие, в сущности, информацию о фазе) интерференционного происхождения и представляют собой результат сложения всех волн с разностью n в числе фотонов. Однако с ростом n в силу неравенства $\langle \sin n\theta \rangle < \sin n\theta_{\text{кл}}$ интерференция перестает быть конструктивной.

Оценим номер фурье-амплитуды, для которой интерференция еще будет эффективной. С этой целью вычислим (68) при $1 < n < \langle n \rangle$. Найдем (с точностью до $1/\langle n \rangle$)

$$\theta_n = -\frac{1}{in} \left(1 - \frac{n(n+1)}{4\langle n \rangle} \right) \exp(in\phi_0). \quad (72)$$

Из выражения (72) видно, что амплитуда уменьшится вдвое по сравнению с классическим случаем ($\langle n \rangle \rightarrow \infty$) при $n \approx \sqrt{\langle n \rangle}$. Таким образом, дисперсия числа фотонов, с оптической точки зрения, определяет "длину" когерентности: увеличение дисперсии числа фотонов увеличивает и число фурье-амплитуд, совпадающих с классическим. Это согласуется с приближенным рассмотрением, когда дисперсия определяла "число" интерферирующих щелей. Приведенные выше соображения дают качественное объяснение связи между дисперсией числа фотонов и фазой. Не представляет труда найти момент произвольного порядка для фазы, а именно

$$\langle \theta^k \rangle = \langle \Phi_{\text{coh}} | \theta^k | \Phi_{\text{coh}} \rangle, \quad k > 1. \quad (73)$$

Выражение (66) переходит в

$$\theta_n^k = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{n+j}^* \alpha_j \int_0^{2\pi} \theta^k e^{-in\theta} d\theta.$$

Так, например, для момента второго порядка имеем

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{4\pi^2}{3} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \sin k\theta \rangle}{k} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cos k\theta \rangle}{k^2}. \quad (74)$$

Выражения (69) и (74) позволяют вычислить дисперсию фазы. Можно также сказать, что эти выражения дают спектральное (дискретное) разложение соответствующих моментов. Дисперсия фурье-компонент определится выражением

$$D\theta_n = \langle \theta_n^2 \rangle - \langle \theta_n \rangle^2.$$

Далее нетрудно найти

$$D\theta_n^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\theta_{n+k}| |\theta_k|}{k(k+n)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\theta_{n-k}| |\theta_k|}{k(k-n)} \right) - \frac{2|\theta_n|}{n^2}$$

и т. д. Простого соотношения между дисперсией фазы и числом фотонов получить не удается, что согласуется с критикой [1] приближенного соотношения $\Delta n \Delta \theta \sim 1$.

В заключение приведем соображения, вносящие, на наш взгляд, некоторую ясность в это соотношение в связи с нашей работой. Как известно, трудности возникают в связи с введенным еще Дираком соотношением

$$\hat{n} = i \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

На первый взгляд, мы пользуемся аналогичным соотношением, так как

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p} = \frac{\hat{H}}{\omega}.$$

В действительности же это не так. Дело в том, что оператор числа фотонов \hat{n} относится уже к новому представлению, в котором роль волновой функции играют коэффициенты α_n в (16). Волновая функция теперь зависит от целочисленной переменной n , так что оператор числа фотонов играет теперь роль координаты (дискретной). Найдем оператор, играющий роль импульса в этом представлении. Для этого напомним, что оператор импульса $\hat{p}_x = (\hbar/i)(\partial/\partial x)$ связан с инфинитезимальным смещением. Если его представить в виде

$$\hat{p}_x \psi = \frac{\hbar}{i} \lim \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x - \Delta x)}{2}, \quad (75)$$

то его дискретный аналог следует записать в виде (с точностью до \hbar)

$$\hat{n} \alpha_n = \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2i} \alpha_n. \quad (76)$$

Поэтому в новом представлении роль импульса играет оператор $\sin^2 \theta$:

$$\hat{n} = \sin^2 \theta.$$

Коммутационное соотношение в этом представлении сохраняется:

$$[\hat{n}, \hat{p}] = 1/i. \quad (77)$$

Дисперсия импульса для когерентного состояния легко вычисляется:

$$\langle \sin^2 \theta \rangle^2 = 1 - \frac{1}{\langle n \rangle}, \quad \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{2 - \langle (\Delta^+)^2 \rangle - \langle (\Delta^-)^2 \rangle}{4},$$

$$\langle (\Delta^+)^2 \rangle = \left(1 - \frac{3}{2\langle n \rangle} \right) \exp(2i\theta_{\text{кл}}), \quad \langle (\Delta^-)^2 \rangle = \left(1 - \frac{3}{2\langle n \rangle} \right) \exp(-2i\theta_{\text{к.л}}),$$

$$D(\sin^2 \theta) = \frac{1}{2\langle n \rangle} \left(\cos^2 \theta_{\text{кл}} + \frac{1}{2} \right). \quad (78)$$

Дисперсия фазового оператора $\sin \hat{\theta}$, вообще говоря, зависит от времени. Минимальная дисперсия приводит к обычному соотношению, согласующемуся с коммутацией:

$$\Delta n \Delta p = 1/2. \quad (79)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем способ приближенного вычисления произвольных моментов $\langle n^k \rangle$ в случае $|k| < 1$ для распределения Пуассона:

$$\langle n^k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (П. 1)$$

Преобразуем (П. 1) к виду

$$\langle n^k \rangle = \langle n \rangle \sum_n n^{k-1} \frac{\langle n \rangle^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (П. 2)$$

Изменив обозначение, найдем

$$\langle n^k \rangle = \langle n \rangle \sum_n (n+1)^{k-1} W_n. \quad (П. 3)$$

Здесь W_n - вероятность для распределения Пуассона. Из (П. 3) вытекает следующая рекуррентная формула для моментов:

$$\langle n^k \rangle = \langle n \rangle \left(\langle n^{k-1} \rangle + k \langle n^{k-2} \rangle + \frac{k(k-1)}{2} \langle n^{k-3} \rangle + \dots \right). \quad (П. 4)$$

Для целых и положительных k (П. 4) позволяет последовательно определять все моменты. Если же $|k| < 1$, то при больших $\langle n \rangle$ ряд быстро сходится и можно применить метод возмущений. Так, в нулевом приближении имеем

$$\langle n^k \rangle = \langle n \rangle \langle n^{k-1} \rangle, \quad (П. 5)$$

откуда

$$\langle n^k \rangle = \langle n \rangle^k. \quad (П. 6)$$

В первом приближении, используя (П. 6), находим

$$\langle n^k \rangle = \langle n \rangle^k = \langle n \rangle^k (1 + k/\langle n \rangle). \quad (П. 7)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Каррузерс П., Ньюто М. // В сб.: Когерентные состояния в квантовой теории. - М.: Мир, 1972. С. 71.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. - М.: Наука, 1973. С. 180.
3. Фок В. А. В кн.: Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. - М.: Физматгиз, 1960. С. 428.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. - М.: Физматгиз, 1962. Т. 1.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука, 1970. С. 440.
6. Лоудон Р. Квантовая теория света. - М.: Мир, 1976. С. 212.

TO THE QUESTION ABOUT STATISTICAL PROPERTIES OF THE PHASE
IN A COHERENT STATE

M. M. Al'perin, Ya. D. Klubis

The wave function of the harmonic oscillator in the presentation where the phase is playing the role of the generalized coordinate is investigated. Such wave function allows one to receive all possible statistical information about the phase θ in the coherent state (the moments of the all orders) $\langle \cos \theta \rangle$ and $\langle \sin \theta \rangle$ are calculated especially simply.

УДК 538.573

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН

Г. В. Попов, И. О. Ярошук

Методом статистического моделирования рассчитаны статистические характеристики неоднородных волн, распространяющихся в случайно-слоистой среде. Показано, что вблизи границы раздела существуют резонансные реализации поля, которые формируют среднее.

Задача о поле точечного излучателя, расположенного вблизи границы раздела однородной и случайно-слоистой сред, представляет значительный научный и практический интерес в связи с возможностью локализации поля и каналирования энергии поля даже в том случае, когда среда является в среднем однородной [1, 2]. Использование метода статистического моделирования позволяет детально исследовать указанную проблему без обращения к приближенным методам.

Конкретизируем рассматриваемую задачу: пусть слоистая случайно-неоднородная среда занимает полупространство $-\infty < L_0 \leq x \leq L$,

и в точке $(x_0, \vec{\rho}_0)$, где $\{\vec{\rho}\}$ - плоскость, перпендикулярная оси x , а $x_0 < L$, помещен точечный источник. Волновое поле внутри среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\vec{\rho}}^2 + k^2[1 + \varepsilon(x) + i\gamma] \right\} G(x, x_0; \vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = \delta(x - x_0) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0), \tag{1a}$$

в котором k - волновое число, ε - описывает флуктуации диэлектрической проницаемости, γ - затухание, $\Delta_{\vec{\rho}}^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Граничные условия к уравнению (1a) следуют из условий непрерывности поля и его производной на границах среды:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, x_0; \vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \Big|_{x=L_0} = -i\sqrt{k^2 + \Delta_{\vec{\rho}}^2} G(L_0, x_0; \vec{\rho} - \vec{\rho}_0); \tag{1б}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, x_0; \vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \Big|_{x=L} = i\sqrt{k^2 + \Delta_{\vec{\rho}}^2} G(L, x_0; \vec{\rho} - \vec{\rho}_0). \tag{1в}$$

Для радиофизики особый интерес представляет условие вида $\partial/\partial x \tilde{G}(x, x_0; \vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \Big|_{x=L} = 0$, которое соответствует, например, отражению от поверхности моря (при условии, что его можно рассматривать как идеальный проводник). Далее такую границу будем называть отражающей, а границу с условием (1в) - пропускающей.

Спектральные компоненты волнового поля $G(x, x_0; q)$,

$$G(x, |\vec{\rho} - \vec{\rho}_0|) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dq q J_0(q|\vec{\rho} - \vec{\rho}_0|) G(x, x_0; q),$$

удовлетворяют уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + p^2 + k^2[\varepsilon(x) + i\gamma] \right\} G(x, x_0; q) = \delta(x - x_0) \quad (2a)$$

с краевыми условиями

$$\frac{i}{p} \frac{d}{dx} G(x, x_0; q) \Big|_{x=L_0} = G(L_0, x_0; q); \quad (2б)$$

$$\frac{i}{p} \frac{d}{dx} G(x, x_0; q) \Big|_{x=L} = -G(L, x_0; q). \quad (2в)$$

Здесь p - горизонтальное волновое число ($p = \sqrt{k^2 - q^2}$). Если граница $x = L$ является отражающей, то $(d/dx) \tilde{G}(x, x_0; q) = 0$.

Нас будет интересовать случай, когда источник помещен на границу ($x_0 \rightarrow L$). Нормируем G на амплитуду спектральных компонент в свободном пространстве $g_0(q)$:

$$G(x, L; q) = \hat{G}(x, L; q) g_0(q),$$

где $g_0(q) = 1/2ip$. Для функции \hat{G} имеем следующее уравнение ($\hat{\quad}$ далее опускаем, и так как от q зависимость параметрическая, то вместо $G(x, L; q)$ будем писать $G(x, L)$):

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + p^2 + k^2[\varepsilon(x) + i\gamma] \right\} G(x, L) = 0 \quad (3a)$$

с краевыми условиями в случае пропускающей границы

$$\frac{i}{p} \frac{d}{dx} G(x, L) \Big|_{x=L_0} = G(L_0, L); \quad (3б)$$

$$\frac{i}{p} \frac{d}{dx} G(x, L) \Big|_{x=L} = 2 - G(L, L), \quad (3в)$$

а в случае отражающей границы ($x = L$) волновое поле $\tilde{G}(x, L)$ выражается следующей формулой [3]:

$$\tilde{G}(x, L) = 2G(x, L) / (2 - G(L, L)). \quad (3г)$$

Отметим, что уравнение (3a) с условиями (3б), (3в) при $q < k$ описывает волновое поле внутри неоднородной среды, если на нее справа падает плоская наклонная волна единичной амплитуды $G_0 = \exp[ip(L - x) + iq\vec{\rho}]$. В этом случае p и q - проекции волнового вектора $\vec{k} = (p, q)$, соответственно, на ось x и плоскость $\{\vec{\rho}\}$. Такая задача рассматривалась авторами в работах [4, 5], где исследовалось

поведение моментов коэффициента отражения, интенсивности, плотности потока энергии в зависимости от угла между волновым вектором и нормалью к слою. В настоящей работе будем интересоваться случаем так называемых неоднородных волн ($q > k$), характерной особенностью которых является то, что они экспоненциально затухают в глубь слоя и осциллируют вдоль него. Задача (3а)-(3в) для неоднородных волн принимает вид ($p = i|p|$, далее знак модуля опускаем)

$$\{d^2/dx^2 - p^2 + k^2[\varepsilon(x) + i\gamma]\}G(x, L) = 0; \quad (4a)$$

$$(d/dx)G(x, L)|_{x=L_0} - pG(L_0, L) = 0; \quad (4б)$$

$$(d/dx)G(x, L)|_{x=L} + pG(L, L) = 2p. \quad (4в)$$

Уравнения метода погружения, эквивалентные задаче (4а)-(4в), имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dL} G_L = -2p[G_L - 1] + \frac{k^2}{2p} [\varepsilon(L) + i\gamma]G_L^2, \quad G_{L_0} = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, L) = \left(-p + \frac{k^2}{2p} [\varepsilon(L) + i\gamma]G_L\right)G(x, L), \quad (5)$$

$$G(x, L)|_{L=x} = G(x, x);$$

$$\tilde{G}(x, L) = 2G(x, L)/(2 - G_L), \quad (6)$$

где $G_L = G(L, L)$. В качестве модели среды был выбран гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами $\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$, $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle = 2\sigma^2\delta(x-x')$.

В статистических задачах, описывающих плоские волны, существуют три параметра, имеющих размерность длины: k^{-1} , p^{-1} , D^{-1} , где $D = (k^2\sigma^2 l)/2$ - коэффициент диффузии. Поэтому все параметры и переменные были нормированы на коэффициент диффузии.

Мы использовали кусочно-постоянную аппроксимацию ε , благодаря чему уравнения (5) в каждом слое, где $\varepsilon = \text{const}$, решались аналитически. Усреднение проводилось с использованием свойства эргодичности [6] по одной достаточно длинной реализации. При расчетах были выбраны следующие значения числовых параметров: $\alpha = k/D = 25$, $\beta = k\gamma/D = 0,08$, шаг дискретизации $\Delta h = 0,01$, длина реализации усреднения - 300, q менялось в пределах от α до 1,5 α .

На первом этапе рассчитывалась зависимость средней интенсивности неоднородных волн на границе - $\langle J(0) \rangle$ ($J = GG^*$) от спектрального параметра q . Результаты моделирования для случая пропускающей границы представлены на рис. 1 (кривая 1). Для сравнения приведена интенсивность в случае отсутствия флуктуаций при выбранном β (кривая 2). Из сопоставления решений детерминированной и статистической задач видно, что наличие флуктуаций приводит к качественному изменению поведения средней интенсивности. Наблюдается пик, характерные размеры которого (высота, ширина, период колебаний)

определяются параметрами задачи α и β , а также типом границы. Изменение типа границы с пропускающей на отражающую приводит к увеличению высоты пика в 5-10 раз. Его ширина при этом увеличивается в 1,5-1,7 раза. Высота пика существенно зависит от β . С увеличением затухания от 0,08 до 1 пик становится примерно на порядок ниже и значительно шире (в 1,5-2 раза). При достаточно больших q ($q \geq 1,5\alpha$) $\langle J(0) \rangle$ перестает зависеть от q , причем в этой области для пропускающей границы $\langle J(0) \rangle = 1$, а для отражающей $\langle \tilde{J}(0) \rangle = 4$.

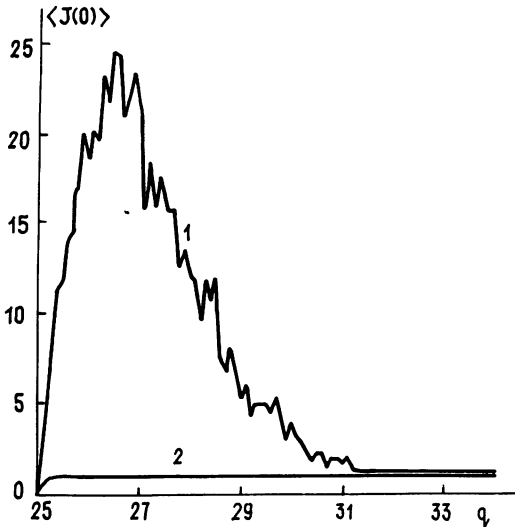


Рис. 1.

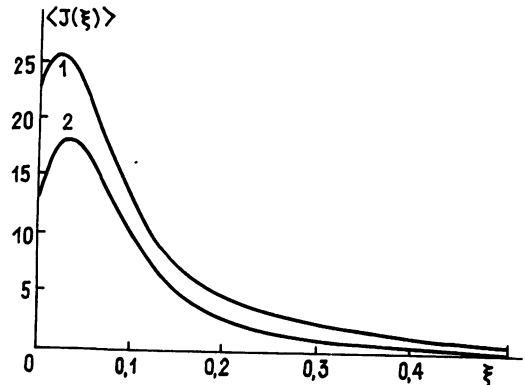


Рис. 2.

До сих пор изложение велось применительно к случаю, когда точка наблюдения располагалась на границе. Теперь будем изучать $\langle J \rangle$ и $\langle \tilde{J} \rangle$ внутри случайной среды. Значения спектрального параметра q выберем в области пика. Результаты моделирования приведены на рис. 2 (кривая 1 - $q/\alpha = 1,04$, кривая 2 - $q/\alpha = 1,12$). Из расчетов установлено, что средняя интенсивность неоднородных волн начиная от границы растет в области, определяемой модулем горизонтального волнового числа, затем достигает максимума, величина которого обратно пропорциональна затуханию, а его положение определяется параметрами q , α , β . Величина максимума зависит от типа границы. Изменение типа границы с пропускающей на отражающую приводит к росту его величины приблизительно на порядок. Существенно меняется в зависимости от типа границы и поведение средней плотности потока энергии неоднородных волн - $\langle S \rangle$:

$$s = \frac{1}{2ip} \left(G \frac{d}{dx} G^* - G^* \frac{d}{dx} G \right).$$

Для пропускающей границы это гладкая быстро затухающая в глубь среды функция. Отражающая граница приводит к сложной резонансной структуре. Это сугубо статистические эффекты; ведь известно, что в случае отсутствия флуктуаций неоднородные волны не переносят энергию в глубь среды. Указанные эффекты имеют место только в ограниченной области изменения q ($q/\alpha \leq 1,5$). Для больших значений q как $\langle J \rangle$, так и $\langle S \rangle$ экспоненциально спадают в глубь среды.

В процессе усреднения исследуемой характеристики поля по

ансамблю реализаций "теряется" много информации. В частности, из анализа средних мы не можем ответить на вопрос о том, какие реализации дают существенный вклад в среднее, а какие нет. Для ответа необходимо изучить поведение волнового поля в отдельных реализациях. На основе уравнений погружения (5) моделировались отдельные реализации волнового поля. Исследовалась плотность потока энергии и интенсивность поля внутри среды. Оказалось, что поведение как J , так и S существенно меняется от реализации к реализации, тем не менее можно выделить три характерных типа. 1) На границе довольно большое значение J и S , а в глубь среды происходит экспоненциальное затухание с небольшими осцилляциями. 2) Начиная от границы имеет место рост J , S и далее резкое спадание. 3) Существует колебательная структура с максимальной амплитудой колебаний вблизи границы. В зависимости от значения спектрального параметра наиболее часто реализуется один из этих трех типов. Доминирует 1), если $q/\alpha \geq 1,5$, 2), когда $q \sim \alpha$, и 3) - в промежуточной области значений q .

Моделирование уравнения Риккати показало, что в реализации неоднородных волн на границе существуют достаточно большие выбросы, амплитуда которых уменьшается с увеличением β , а положение определяется выбранным параметром q и реализацией ϵ . Если $\beta \rightarrow 0$, то полюса решения Риккати становятся вещественными, что приводит к появлению выбросов в реализации поля, так как поле внутри среды связано с решением Риккати через квадратуру.

Для того чтобы детально исследовать появление выбросов, рассмотрим вспомогательную задачу Штурма - Лиувилля:

$$\frac{d^2}{dx^2} u + (\lambda + k^2 \epsilon(x)) u = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} u(L_0) - pu(L_0) = 0, \quad \frac{d}{dx} u(L) + pu(L) = 0.$$

В этой задаче параметр λ (λ - собственное значение) зависит от толщины слоя, т.е. $\lambda = \lambda(L)$. Вспомогательная задача тесно связана с исследуемой. Действительно, полагая в (4) $\gamma = 0$, $\lambda = -p^2$, в граничном условии при $x = L$, заменяя $2p$ на нуль, получим задачу (7). Она описывает так называемые собственные колебания системы, т.е. колебания в отсутствие источников.

Введение источника в систему приводит к возможности появления резонансов. Если при некоторой толщине слоя ($L - L_0$) собственное значение будет близко к квадрату горизонтального волнового числа ($\lambda(L) \rightarrow -p^2$), то в реализации G будет выброс, вообще говоря, бесконечный при отсутствии γ . Назовем такую реализацию G резонансной. Если резонансных реализаций будет достаточно много в ансамбле, по которому проводится усреднение, то ясно, что они и будут определять среднее. Таким образом, нам необходимо знать эволюцию собственных значений задачи (7). Число пересечений эволюционной кривой с уровнем $-p^2$ и даст число резонансных реализаций. Для нахождения системы уравнений, определяющих эволюцию собственного значения, достаточно исследовать только уравнение Риккати для функции G_L . После несложных вычислений получим следующую систему уравнений (для определенности выбрано $h_0 = 0$, $\alpha = 10$, $\Delta h = 0,01$):

$$\frac{d}{dh} f_h = 2p (f_h - f_h^2) - \frac{p^2 + \lambda + 2\alpha\tilde{\varepsilon}(h)}{2p}, \quad f_{h_0} = 1,$$

$$\frac{d}{dh} A_h = -4p(f_h - \frac{1}{2})A_h - \frac{1}{2p}, \quad A_{h_0} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dh} \lambda_h = \frac{p^2 + \lambda_h + 2\alpha\tilde{\varepsilon}(h)}{2pA_h(\lambda_h)}, \quad \lambda_h|_{h \rightarrow 0} = \lambda_0.$$

Здесь введены обозначения: $f_h = G_h^{-1}$, $A_h = \frac{\partial}{\partial \lambda} f_h$, $h_0 = L_0 D$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{k}{2D} \varepsilon$. При получении (8) учитывалось тождество $f_h(\lambda_h) = 0$, где λ_h -

собственное значение задачи (7). Дифференцирование этого соотношения по h и использование уравнения для f_h позволяет получить эволюционное уравнение для функции λ_h (см., например, [3]). В него входит функция A_h , уравнение для которой получается дифференцированием первого из уравнений системы (8) по λ . В первые два уравнения системы λ входит как параметр, что позволяет в каждом слое решить их аналитически. В третье уравнение λ входит уже не как параметр, а как функция. Это уравнение решалось методом Рунге - Кутты четвертого порядка. Начальное условие к нему находилось из решения уравнения

$$\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_0} \Delta h) = 2p\sqrt{\lambda_0} / (\lambda_0 - p^2),$$

которое является решением задачи (7) во вспомогательном слое $[h_0 - \Delta h, h_0]$, в котором отсутствуют флуктуации. На каждом шаге проводилась корректировка λ при помощи итерационной процедуры Ньютона - Рафсона, которая для данной задачи имеет вид $\lambda_{n+1} = \lambda_n - f_h(\lambda_n) / A_h(\lambda_n)$, где n - номер итерации.

Результаты расчетов динамики первого собственного значения представлены на рис. 3 ($q/\lambda =$

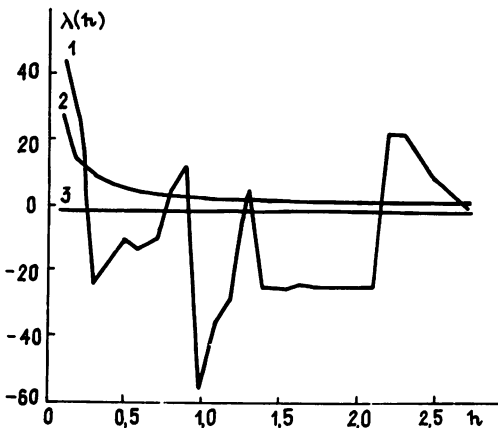


Рис 3.

$= 1, 1$, кривая 1 - флуктуации, кривая 2 - нет флуктуаций, кривая 3 - уровень $-p^2$). Из них видно, что наличие флуктуаций приводит к кардинальному изменению эволюционной кривой, по мере увеличения толщины слоя λ_h становится отрицательным и неоднократно пересекает уровень $-p^2$. Число точек пересечения существенно зависит от величины параметра q . С увеличением q число пересечений, а следовательно, и резонансных реализаций уменьшается и при $q/\alpha \geq 1, 5$ их количество исчезающе мало.

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы: указанные выше эффекты в области неоднородных волн вызваны наличием отрицательной части дискретного спектра, появляющейся лишь в статистической задаче; в области $1 < q/\alpha \leq 1,5$ среднее формируется резонансными реализациями, появляющимися всякий раз, когда квадрат комплексного горизонтального волнового числа является собственным значением вспомогательной задачи Штурма - Лиувилля; число резонансных реализаций в области $q/\alpha \geq 1,5$ исчезающе мало и, следовательно, их вклад в результирующее среднее несуществен.

Авторы выражают благодарность В.И. Кляцкину за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасов Ю.В., Фрейлихер В.Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 11. С. 1387.
2. Тарасов Ю.В., Фрейлихер В.Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 12. С. 1494.
3. Кляцкин В.И. Метод погружения в теории распространения волн. - М.: Наука, 1986.
4. Попов Г.В., Ярошук И.О. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. N 10. С. 1266.
5. Попов Г.В., Ярошук И.О. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 11. С. 1232.
6. Ярошук И.О. // ЖВМФ. 1984. Т. 26. С. 1241.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
24 апреля 1990 г.

ON THE STATISTICAL CHARACTERISTICS OF INHOMOGENEOUS WAVES

G.V. Popov, I.O. Yaroshchuk

Statistical characteristics of inhomogeneous waves propagating through a random stratified medium are calculated by the simulation method. It is shown that resonance realizations of field which forms the average field exist in the vicinity of interface.

УДК 621.37:621.391

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

С. В. Соколов

Приведен вывод уравнения апостериорной плотности вероятности дискретно-непрерывного марковского процесса с помощью подхода, позволяющего избежать использования стохастического дифференциала оценки и рассмотреть нелинейный наблюдатель общего вида с негауссовой помехой.

В основе вывода уравнения апостериорной плотности вероятности (АПВ) условно-марковского Y_t (уравнения Стратоновича), которое является базовым в теории нелинейной оптимальной фильтрации, лежит понятие стохастического дифференциала оценки наблюдаемого процесса. Подобный подход оказывается неработоспособным при формировании АПВ дискретно-непрерывных марковских процессов, а кроме того обеспечивает синтез уравнения АПВ для нелинейного наблюдателя, зашумленного лишь аддитивной гауссовой помехой [1].

В связи с этим в данной работе рассматривается возможность синтеза уравнения АПВ дискретно-непрерывного марковского процесса Y_t , наблюдения Z_t которого описываются нелинейной зависимостью общего вида и зашумлены совершенно случайной (т.е. с независимыми значениями для любого момента времени) помехой W_t , имеющей в общем случае негауссово распределение:

$$Z_t = F(Y, W, t). \tag{1}$$

Плотность априорного распределения $\rho(Y, t)$ процесса Y_t , учитывая его дискретно-непрерывный характер, полагаем заданной известным уравнением Колмогорова - Феллера [2]:

$$\frac{\partial \rho(Y, t)}{\partial t} = -q(Y, t) \rho(Y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s, t) U(s, Y, t) ds - \frac{\partial}{\partial Y} \{a(Y, t) \rho(Y, t)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \{b(Y, t) \rho(Y, t)\}, \tag{2}$$

где $\rho(Y, t_0) = \rho_0$, $q(Y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(Y, s, t) ds$, $U(Y, s, t)$ - интенсивность скачкообразных переходов процесса Y_t из состояния Y в состояние s_1 , где $s < s_1 < s + ds$ за время dt , $a(Y, t)$, $b(Y, t)$ - коэффициенты сноса и диффузии при непрерывном изменении процесса Y .

Предлагаемый ниже подход к выводу уравнения АПВ основан на

однозначной взаимосвязи априорной $\rho(Y, t)$ и апостериорной $\rho(Y, t/Z_\tau, \tau \in [t_0, t]) = \rho_z(Y, t)$ плотностей распределения, определяемой с помощью байесовского подхода. Выводу данной зависимости предположим следующие рассуждения, аналогичные [3] (с. 100, 101).

После измерения вектора Z в моменты времени $t_0, \dots, t - \Delta t, t$ информация о векторе $Y(t + \Delta t)$ содержится в плотности вероятности $\rho(Y, t + \Delta t)$, которая для момента времени $t + \Delta t$ является априорной. (В соответствии с принятыми выше обозначениями АПВ в момент $t + \Delta t$, т.е. $\rho(Y, t + \Delta t/Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t])$, запишем как $\rho_z(Y, t + \Delta t)$.)

На основании теоремы об умножении вероятностей совместная плотность $\rho(Y, Z, t + \Delta t)$ процессов $\{Y(t + \Delta t), Z, t \in [t_0, t + \Delta t]\}$ выражается через плотность вероятности

$$\rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t])$$

и АПВ $\rho_z(Y, t + \Delta t)$:

$$\rho(Y, Z, t + \Delta t) = \rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t]) \rho_z(Y, t + \Delta t). \quad (3)$$

С другой стороны, на основании той же теоремы совместная плотность может быть выражена через априорную плотность $\rho(Y, t + \Delta t)$ и условную плотность $\rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t] / Y, t + \Delta t)$ процесса $Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t]$ при фиксированном состоянии Y в момент времени $t + \Delta t$:

$$\rho(Y, Z, t + \Delta t) = \rho(Y, t + \Delta t) \rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t] / Y, t + \Delta t). \quad (4)$$

Поскольку

$$\rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t]) = \int_Y \rho(Y, t + \Delta t) \rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t] / Y, t + \Delta t) dY =$$

$$\int_Y \rho(Y, Z, t + \Delta t) dY,$$

то, сравнивая правые части выражений (4) и (3), имеем

$$\rho_z(Y, t + \Delta t) \int_Y \rho(Y, t + \Delta t) \rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t] / Y, t + \Delta t) dY =$$

$$= \rho(Y, t + \Delta t) \rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t] / Y, t + \Delta t).$$

Устремляя далее Δt к нулю, получаем

$$\rho_z(Y, t) \int_Y \rho(Y, t) \rho(Z_\tau \in [t_0, t] / Y, t) dY =$$

$$= \rho(Y, t) \rho(Z_\tau \in [t_0, t] / Y, t), \quad (5)$$

что представляет, по существу, вариант формулы Байеса.

Следует отметить, что данное равенство получено при самых общих предположениях о характере процессов Z_t и Y_t . Если же процесс Y_t является марковским, а помеха W_t в сигнале измерения Z_t совершенно случайной, то приведенное соотношение может быть несколько упрощено.

Действительно, плотность $\rho(Z_t, t \in [t_0, t + \Delta t] / Y, t + \Delta t)$ может быть представлена как

$$\rho(Z, t + \Delta t / Y + \Delta t, Z_t, t \in [t_0, t]) \rho(Z_t, t \in [t_0, t] / Y, t + \Delta t),$$

где в силу независимости значений помехи измерений W_t для любых моментов t : $\rho(Z, t + \Delta t / Y, t + \Delta t, Z_t, t \in [t_0, t]) = \rho(Z, t + \Delta t / Y, t + \Delta t)$, а в силу марковости Y_t

$$\rho(Z_t, t \in [t_0, t] / Y, t + \Delta t) = \rho(Z_t, t \in [t_0, t]).$$

В этом случае функция плотности $\rho(Z_t, t \in [t_0, t])$ в обеих частях байесовского равенства сокращается и после предельного перехода по Δt приходим вновь к выражению (5), где уже $\rho(Z_{t \in [t_0, t]} / Y_t) = \rho(Z/Y, t)$,

которая, в свою очередь, легко может быть определена из (1) по известному правилу нахождения плотности распределения нелинейной функции F аргумента W_t с заданным распределением. В дальнейшем, не нарушая общности последующих рассуждений, используем для данной плотности обозначение $\rho(Z_t / Y, t)$.

Из выражения (5) интегрированием его обеих частей по Y определяется равенство интегралов

$$\int_Y \rho(Y, t) \rho(Z_t / Y, t) dY = \left(\int_Y \frac{\rho_z(Y, t)}{\rho(Z_t / Y, t)} dY \right)^{-1},$$

откуда и вытекает связь априорной плотности распределения с апостериорной:

$$\rho(Y, t) = \frac{\rho_z(Y, t) \rho^{-1}(Z_t / Y, t)}{\int_Y \rho_z(Y, t) \rho^{-1}(Z_t / Y, t) dY}.$$

Проведем далее, используя полученное представление функции $\rho(Y, t)$, замену переменных в уравнении (2). Для приведения сформированного таким образом уравнения АПВ к стандартному для уравнений в частных производных виду разделим обе части уравнения на

$$\varphi(z, Y, t) = \frac{\rho^{-1}(Z_t / Y, t)}{\int_Y \rho_z(Y, t) \rho^{-1}(Z_t / Y, t) dY}$$

и учтем, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y} \varphi^{-1} = - \frac{\partial \rho(Z_t / Y, t)}{\partial Y} \rho^{-1}(Z_t / Y, t) = - \frac{\partial \ln \rho(Z_t / Y, t)}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \varphi^{-1} = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \ln \varphi + \left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial Y} \right)^2 = - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \ln \rho(Z_t / Y, t) +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_t / Y, t) \right]^2,$$

а в силу равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^n \rho(x)}{\partial x^n} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} dx$$

для выражения

$$-\frac{\partial}{\partial t} \ln \varphi = \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(Z_\tau / Y, t) + \frac{\partial}{\partial t} \ln \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_z(Y, t)}{\rho(Z_\tau / Y, t)} dY$$

справедливо следующее представление:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \ln \varphi = \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(Z_\tau / Y, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(s, t) F(s, Z, t) ds.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_z(Y, t)}{\rho(Z_\tau / Y, t)} dY &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Y, t) \rho(Z_\tau / Y, t) dY = \\ &= -\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Y, t) \rho(Z_\tau / Y, t) dY \right\}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Y, t) \rho(Z_\tau / Y, t) dY, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Y, t) \rho(Z_\tau / Y, t) dY &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Y, t) \frac{\partial \rho(Z_\tau / Y, t)}{\partial t} dY + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho(Y, t)}{\partial t} \rho(Z_\tau / Y, t) dY &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(Y, t) \rho^{-1}(Z_\tau / Y, t) dY \right)^{-1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_z(Y, t)}{\rho(Z_\tau / Y, t)} \frac{\partial \rho(Z_\tau / Y, t)}{\partial t} dY &+ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Z_\tau / Y, t) \left\{ -q(Y, t) \times \right. \\ \times \rho(Y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s, t) U(s, Y, t) ds &- \frac{\partial}{\partial Y} [a(Y, t) \cdot \rho(Y, t)] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} [b(Y, t) \rho(Y, t)] \Big\} dY &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(Y, t) \rho(Z_\tau / Y, t) dY \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(Y, t) F(Y, Z, t) dY, \end{aligned}$$

функция $F(Y, Z, t)$ определена как

$$\begin{aligned} F(Y, Z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(Z_\tau / Y, t) + \frac{1}{2} b(Y, t) \left(\left[\frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_\tau / Y, t) \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \ln \rho(Z_\tau / Y, t) \Big) + a(Y, t) \frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_\tau / Y, t) - q(Y, t) + \end{aligned}$$

$$+ \rho^{-1}(Z_{\tau} / Y, t) \int_{-\infty}^{\infty} U(s, Y, t) \rho(Z_{\tau} / s, t) ds,$$

где учтено, что в силу равенства $\rho_{-}(Y, t)$, $\left. \frac{\partial \rho_z(Y, t)}{\partial Y} \right|_{Y=\pm\infty} = 0$ при

интегрировании по Y составляющие $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial Y} [\alpha(Y, t) \rho_z(Y, t)] dY$, $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \times$
 $\times [b(Y, t) \rho_z(Y, t)] dY$ равны нулю,

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial Y} [b(Y, t) \rho_z(Y, t) \frac{\partial \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t)}{\partial Y}] dY = \int_{-\infty}^{\infty} b(Y, t) \rho_z(Y, t) \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) dY.$$

После указанной замены переменных дифференциальное уравнение АПВ окончательно принимает вид

$$\frac{\partial \rho_z(Y, t)}{\partial t} = \left[-q(Y, t) - \frac{\partial}{\partial Y} \alpha(Y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} b(Y, t) - \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial Y} b(Y, t) \frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) + \alpha(Y, t) \frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) +$$

$$+ \frac{b(Y, t)}{2} \cdot \left(\left[\frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) \right]^2 - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) \rho_z(Y, t) + \left[\frac{\partial}{\partial Y} b(Y, t) - \alpha(Y, t) - \right.$$

$$- b(Y, t) \frac{\partial}{\partial Y} \ln \rho(Z_{\tau} / Y, t) \left. \right] \frac{\partial}{\partial Y} \rho_z(Y, t) + \frac{1}{2} b(Y, t) \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \rho_z(Y, t) + \rho(Z_{\tau} / Y, t) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(s, t) U(s, Y, t) \rho^{-1}(Z_{\tau} / s, t) ds -$$

$$- \rho_z(Y, t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(s, t) \cdot F(s, Z, t) ds, \quad \rho_z(Y, t_0) = \rho_0.$$

Проанализируем вывод данного уравнения для конкретных наблюдателей, зашумленных помехой W_t , и проиллюстрируем связь полученного уравнения с уравнением Стратоновича. Рассмотрим случай наблюдения случайной константы Y , зашумленной аддитивным гауссовым и аддитивным негауссовым стационарными процессами:

$$Z_t = Y + W_t.$$

В данном примере уравнение априорной плотности имеет вид $\partial \rho(Y, t) / \partial t =$

$= 0$ и, следовательно, коэффициенты $a(Y, t)$, $b(Y, t)$, а также функции $q(Y, t)$ и $U(s, Y, t)$ равны нулю. При гауссовом нормированном распределении W_t функция $\rho(Z_t/Y, t)$, как показывает сравнение (5) с

выражением (4.16) в [4], с. 217, 218, равна $\exp(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t (Z(\tau) - Y) d\tau)$

и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(Z_t/Y, t) = -\frac{1}{2} (Z_t - Y)^2$.

Подставляя данную функцию в полученное уравнение АПВ, имеем

$$\frac{\partial \rho_z(Y, t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} (Z_t - Y)^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (Z_t - Y)^2 \rho_z(Y, t) dY \right] \rho_z(Y, t),$$

что совпадает с уравнением Стратоновича для рассматриваемого случая наблюдения.

Если плотность распределения $\rho_w(W, t)$ процесса W_t негауссова, то уравнение АПВ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_z(Y, t)}{\partial t} = \rho_z(Y, t) & \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho_w(Z_t - Y, t) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(s, t) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho_w(Z_t - s, t) ds \right], \quad \rho_z(Y, t_0) = \rho_0. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что подобный подход без изменения приведенных рассуждений может быть также распространен на случай не-диффузионного характера эволюции непрерывной составляющей процесса Y_t путем учета в (2) кинетических коэффициентов высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. - М.: Радио и связь, 1983. - 320 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977. - 488 с.
3. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
4. Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. - М.: Наука, 1975. - 432 с.

Поступила в редакцию
28 марта 1990 г.

ON THE OPTIMAL EVALUATION OF THE DISCRETE CONTINUOUS MARKOV PROCESSES

S. V. Sokolov

There has been given a conclusion of the a posteriori probability density equation for the discrete continuous Markov process by means of the approach allowing to avoid the use of the stochastic estimation differential and to consider nonlinear observer of the general kind with non-Gaussian interference.

УДК 534.222.1

ОПИСАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА
В МНОГОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДАХ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

А. Г. Костерин, А. Н. Малахов, Д. В. Шолин

Разработан приближенный метод описания волнового поля распределенного источника в многомодовом рефракционном волноводе с крупномасштабными неоднородностями показателя преломления. Метод основан на модовом представлении поля. Влияние неоднородностей учитывается путем введения фаз, рассчитанных вдоль так называемых модовых лучей. Полученные формулы удобны для статистического анализа поля в области ненасыщенных флуктуаций интенсивности.

1. В работе [1] предложен способ приближенного описания скалярных волновых полей в рефракционных многомодовых волноводах с крупномасштабными неоднородностями показателя преломления в случае, когда монохроматический источник является точечным. Этот способ позволяет получить в квадратурах произвольные статистические характеристики амплитуд мод (а значит, и волнового поля), пригодные в области применимости метода геометрической оптики и метода плавных возмущений [2, 3]. Вместе с тем при исследовании полей остронаправленных излучателей, нелинейных (параметрических) антенн, в задачах "конструирования" волновых полей с заданными свойствами и т.п. возникает необходимость описания полей с произвольным начальным модовым составом. Использовать для этих целей найденную в [1] функцию Грина часто бывает нецелесообразно.

Для решения перечисленных задач будет полезен способ описания поля, который излагается в настоящей работе. В его основу положены некоторые конструктивные идеи, развитые в [1, 4]. Основное внимание уделяется рассмотрению двумерной задачи. Обобщение на трехмерный случай проведено в Приложении.

2. В рефракционном волноводе введем декартову систему координат (x, z) так, чтобы ось z совпадала с направлением изменения той части показателя преломления $n(z)$, которая обуславливает волноводный характер распространения волн. Для простоты полагаем, что зависимость $n(z)$ имеет единственный максимум на оси волновода при $z = 0$ ($n(0)=1$). Отклонение квадрата показателя преломления $n^2(x, z)$ от $n^2(z)$ обозначим через $U(x, z)$ ($n^2(x, z) = n^2(z) + U(x, z)$). Распределение поля монохроматического источника частоты ω на оси z зададим функцией $f(z)$. Комплексная амплитуда $V(x, z)$ поля $p(x, z, t) = V(x, z)e^{-i\omega t}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2[n^2(z) + U(x, z)]V = -2f(z)\delta(x), \quad (1)$$

а также условию излучения на бесконечности и требованию $V(x, z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Здесь $k = \omega/c$ - волновое число на оси волновода. Предполагая неоднородности среды крупномасштабными и рассматривая

волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x , решение уравнения (1) будем искать в виде разложения

$$V(x, z) = i \sum_n k_n^{-1} A_n(x) \varphi_n(z) e^{ik_n x}$$

по собственным функциям $\varphi_n(z)$ невозмущенной краевой задачи

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dz^2} + k_n^2 n^2(z) \varphi_n = k_n^2 \varphi_n, \quad (2)$$

$$\varphi_n(z) \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Собственные значения k_n краевой задачи (2) задают проекцию волнового вектора на ось x .

При $x = 0$ амплитуды мод равны

$$A_n(0) = f_n, \quad (3)$$

где

$$f_n = \int dz f(z) \varphi_n(z)$$

- коэффициенты разложения поля источника по собственным функциям $\varphi_n(z)$. Рассеяние на неоднородностях показателя преломления приводит к взаимодействию отдельных мод между собой и, следовательно, к изменению величин $A_n(x)$ вдоль трассы. В малоугловом приближении поведение амплитуд мод $A_n(x)$ описывается системой уравнений

$$\frac{dA_n}{dx} = ik^2 \sum_n k_n^{-1} U_{mn}(x) A_n(x), \quad (4)$$

где матричные элементы задаются соотношениями

$$U_{mn}(x) = \int dz \varphi_m(z) U(x, z) \varphi_n(z) \exp[i(k_n - k_m)x]. \quad (5)$$

Равенство (3) является начальным условием для системы уравнений (4).

Если известны решения $A_n^j(x)$ системы (4) с начальными условиями

$$A_n^j(0) = \delta_{nj}, \quad (6)$$

где δ_{nj} - символ Кронекера, то значения амплитуд мод при произвольном начальном распределении поля $f(z)$ можно получить по формуле

$$A_n(x) = \sum_j f_j A_n^j(x).$$

Поэтому основной задачей настоящей работы является поиск фундаментальной системы решений $A_n^j(x)$.

3. Будем рассматривать решения $A_n^j(x)$ системы (4) как коэффициенты Фурье некоторой функции $H^j(x, s)$:

$$H^j(x, s) = \sum_m A_m^j(x) \exp[i\pi(m - j)s]. \quad (7)$$

Очевидно, амплитуды мод $A_m^j(x)$ связаны с функцией $H^j(x, s)$ обратным преобразованием

$$A_m^j(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ds H^j(x, s) \exp[-i\pi(m - j)s]. \quad (8)$$

На основании (4) новая неизвестная функция $H^j(x, s)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} H^j(x, s) = ik \int_{-1}^1 ds' G(x, s, s') H^j(x, s') \quad (9)$$

с ядром

$$G(x, s, s') = \frac{1}{4} \sum_n F_n(x, s) \exp[i\pi(n - j)(s - s')], \quad (10)$$

где

$$F_n(x, s) = \frac{k}{k_n} \sum_m U_{mn}(x) \exp[i\pi(m - n)s], \quad (11)$$

и с начальным условием

$$H^j(0, s) = 1.$$

Функция $H^j(x, s)$ имеет следующий физический смысл. В отсутствие неоднородностей ($U(x, z) = 0$) поле моды с номером j

$$V_j^0(x, z) = ik_j^{-1} \varphi_j(z) \exp(ik_j x)$$

формально можно представить в виде суперпозиции

$$V_j^0(x, z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ds V_j(x, z, s)$$

полей

$$V_j(x, z, s) = i \sum_m k_m^{-1} \varphi_m(z) \exp[-i\pi(m - j)s] \exp(ik_m x),$$

каждое из которых состоит из полного набора мод с одинаковыми по модулю амплитудами (равными единице) и фазами, изменяющимися с номером m по линейному закону $-\pi(m - j)s$. Параметр s задает скорость изменения фазы. Компоненты поля $V_j(x, z, s)$, характеризуемые фиксированным значением s , будем для краткости называть s -компонентами. При наличии неоднородностей поле $V_j(x, z)$ можно записать в виде

$$V_j(x, z) = \int_{-1}^1 ds H^j(x, s) V_j(x, z, s),$$

и функция $H^j(x, s)$, таким образом, описывает влияние неоднородностей среды на вклад s -компоненты в поле $V_j(x, z)$ (в отсутствие неоднородностей $H^j(x, s) = 1$). Вместе с тем в соответствии с (8) она содержит в себе полную информацию о поведении амплитуд отдельных мод $A_m^j(x)$.

Смысл выполненных преобразований заключается в следующем. В

силу крупномасштабности неоднородностей показателя преломления эффективное взаимодействие при рассеянии будет происходить между s -компонентами поля лишь с близкими значениями параметра s , при этом эти компоненты будут трансформироваться приблизительно одинаково. Математически это означает, что на не слишком длинных трассах ядро $G(x, s, s')$ как функция разности $s - s'$ сосредоточено на некотором малом интервале $\Delta_c s(x) < 1$, а функция $H^j(x, s)$ медленно зависит от параметра s . Поэтому функцию $G(x, s, s')$ в (9) можно рассматривать как выкальвающий множитель и заменить уравнение (9) приближенным

$$\frac{\partial H^j}{\partial x} = ikH^j \int_{-1}^1 ds' G(x, s, s'). \quad (12)$$

Если обозначить через $\Delta_n s(x)$ масштаб изменения по s функции $H^j(x, s)$ на расстоянии x от источника, то условие, при выполнении которого возможен переход к уравнению (12), будет иметь вид

$$\Delta_c s(x) \ll \Delta_n s(x). \quad (13)$$

Ниже мы сформулируем это условие на языке параметров, характеризующих свойства волновода и неоднородностей показателя преломления.

После интегрирования по s' (точного) решение уравнения (12) примет вид

$$H^j(x, s) = \exp[i\beta_j(x, s)], \quad (14)$$

где

$$\beta_j(x, s) = \frac{k}{2} \int_0^x dx' F_j(x, s), \quad (15)$$

а функция $F_j(x', s)$ задана соотношением (11).

Вообще говоря, выражения (8), (11), (14), (15) уже представляют собой приближенное решение поставленной задачи, но они неудобны для практического использования ввиду сложности формулы (11) для функции $F_j(x, s)$. Однако соотношение (11) можно значительно упростить, выполнив приближенное суммирование подобно тому, как это сделано в работах [1,4-6]. В результате выражение для функции $F_j(x, s)$ примет вид

$$F_j(x, s) = -\frac{k}{k_j} \int dz U(x, z) \Delta_j(x, s), \quad (16)$$

где

$$\Delta_j(x, z, s) = \rho_j^{-1}(x, s) \exp\left\{-i\pi\left[\frac{(z - z_j(x, s))^2}{\rho_j^2(x, s)} - \frac{1}{4}\right] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sgn}\left[\theta_j(x, s) \frac{\partial z_j(x, s)}{\partial j}\right]\right\}; \quad (17)$$

$$\rho_j(x, s) = \left[D_j \left| \operatorname{tg} \theta_j(x, s) \frac{\partial z_j(x, s)}{\partial j} \right| \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Здесь $z = z_j(x, s)$ - траектории модового луча, отвечающего моде с номером j , $\partial z_j(x, s) / \partial j = z_{j+1}(x, s) - z_j(x, s)$, $\theta(x, s)$ - угол скольжения модового луча по отношению к плоскости $z = \text{const}$, D_j - длина цикла осцилляций модового луча, $\rho_j(x, s)$ - радиус первой зоны Френеля j -й моды на расстоянии x от источника [1, 4]. Траектория модового луча удовлетворяет закону Снеллиуса $k_j/k = n[z_j(x, s)] \times \cos \theta_j(x, s)$ и, следовательно, имеет те же точки заворота \bar{z}_j и \underline{z}_j , что и j -я мода. При $s = 0$ модовый луч выходит из точки $(x = 0, z = \bar{z}_j)$, в остальных случаях он смещен на расстояние $\Delta x = -sD_j/2$ (см. рис. 1).

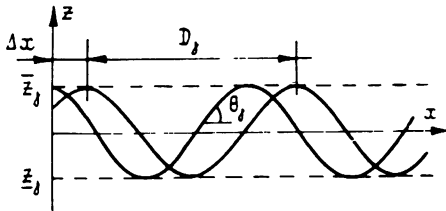


Рис. 1.

Из формулы (16) следует, что основной вклад в значение функции $F_j(x, s)$ дают те неоднородности среды, которые сосредоточены в пределах первой зоны Френеля моды в окрестности точки пересечения плоскости $x = \text{const}$ траекторией модового луча.

Обсудим полученный результат. Как уже отмечалось выше, функция $H^j(x, s)$ (а следовательно, и $\beta_j(x, s)$) описывает процесс рассеяния на неоднородностях среды $U(x, z)$ моды с номером j в компоненту поля $V_j(x, z, s)$. Нетрудно показать, используя результаты работ [5, 6], что j -я мода в составе каждой s -компоненты поля $V_j(x, z, s)$ складывается в фазе (конструктивно интерферирует) с соседними модами вдоль модового луча $z = z_j(x, s)$. В результате в окрестности модового луча структура поля $V_j(x, z, s)$ оказывается наилучшим образом согласованной со структурой поля j -й моды, поэтому здесь и происходит наиболее эффективное рассеяние j -й моды в компоненту поля $V_j(x, z, s)$. Компоненты поля $V_j(x, z, s)$ со значениями $s' \neq s$ согласованы с полем j -й моды в других областях пространства (вдоль своих модовых лучей $z = z_j(x, s')$), и, следовательно, другие неоднородности определяют их поведение.

Приближенным выражением (16) можно пользоваться, если число мод $\Delta m_j(x)$, конструктивно интерферирующих с j -й модой вдоль модового луча, велико. В работах [7, 8] для величины $\Delta m(x)$ получена следующая оценка:

$$\Delta m_j(x) = D_j^2 / (x | \frac{dD_j}{dj} |). \quad (19)$$

Вместе с тем величина $\Delta m_j(x)$ устанавливает соответствие между размерами зоны Френеля моды и расстоянием $\Delta z_j = \bar{z}_j - \underline{z}_j$ между точками заворота j -й моды [4]:

$$\rho_j(x) = 2 \Delta z_j / \Delta m_j(x). \quad (20)$$

Таким образом, формула (16) применима, если размеры зоны Френеля j -й моды малы по сравнению с расстоянием Δz_j .

Если при этом вплоть до расстояний x от источника размер зоны Френеля j -й моды мал по сравнению с характерным масштабом неоднородностей L_z вдоль оси z , т.е. если выполняется условие

$$\rho_j(x', s) \ll L_z, \quad 0 \leq x' \leq x, \quad (21)$$

то при интегрировании по z в (16) функцию $\Delta_j(x, z, s)$ можно рассматривать как выкальвывающий множитель. Тогда выражение для фазы $\beta_j(x, s)$ принимает простой вид:

$$\beta_j(x, s) = \frac{k^2}{2k_j} \int_0^x dx' U(x', z_j(x', s)). \quad (22)$$

Величина β_j , как нетрудно видеть, представляет собой набег фазы на неоднородностях среды $U(x, z)$ вдоль модового луча $z_j(x', s)$, отвечающего первоначально возбужденной моде с номером j . Отметим, что неравенство (21) является одним из условий применимости формулы (22) и означает, что при расчете вариаций амплитуд мод можно пренебречь дифракционными эффектами, возникающими при рассеянии на неоднородностях среды. Чтобы учесть эти эффекты, необходимо пользоваться формулами (15) - (18).

4. Обсудим условия применимости формул (14), (16), (22), считая неоднородности среды случайными. При анализе различных режимов распространения волн в случайно-неоднородных средах широко используются так называемые параметры Дашена: параметр неоднородности Φ и дифракционный параметр Λ [3, 9]. Параметр Φ характеризует степень неоднородности среды и представляет собой среднеквадратичное значение флуктуаций фаз $\beta_j(x, s)$, рассчитанных

вдоль модовых лучей: $\Phi^2 = \langle |\beta_j(x, s)|^2 \rangle$. Дифракционный параметр определяется соотношением

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \overline{(\rho_j(x, s)/L_z)^2}^x. \quad (23)$$

Черта сверху означает пространственное усреднение вдоль модового луча изменяющихся в пространстве размеров зон Френеля моды ρ_j и масштабов неоднородности L_z . При этом учитывается степень статистической неоднородности среды в каждой точке модового луча. Параметр Λ характеризует влияние масштабов неоднородности на дифракционные эффекты.

Дифракционный параметр Λ можно связать с такими параметрами, как число конструктивно интерферирующих мод $\Delta m(x)$ и число мод $\Delta m_{\text{эфф}}$ эффективно взаимодействующих при рассеянии на неоднородностях. Несложный анализ выражения (5) показывает, что каждая мода эффективно взаимодействует с

$$\Delta m_{\text{эфф}} = D_j \overline{|\text{tg } \theta_j(x)|^{D_j/2}}_{L_z}^{D_j} \quad (24)$$

-модами. Здесь черта над L_z и $\text{tg } \theta_j$ означает усреднение по циклу осцилляций модового луча D_j . Используя (19), (20), (23), (24), получим,

что дифракционный параметр Λ связан с величинами $\Delta m(x)$ и $\Delta m_{\text{эфф}}$ следующим соотношением:

$$\Lambda = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\Delta m_{\text{эфф}}}{\Delta m(x)} \right]^2. \quad (25)$$

Из (25) следует, что дифракционные эффекты при рассеянии можно не учитывать и, следовательно, фазу $\beta_j(x, s)$ рассчитывать по формуле (22) в том случае, если из всех Δm конструктивно интерферирующих мод лишь их малая часть взаимодействует при рассеянии на неоднородностях.

Вначале выразим через параметры Φ и Λ условия применимости (13) формулы (22), справедливой при

$$\Lambda \ll 1. \quad (26)$$

Учитывая выражение (16) для функции $F_n(x, s)$ и ее связь с ядром $G(x, s, s')$ (10), нетрудно получить следующую оценку для интервала $\Delta_c s(x)$, входящего в условие (13):

$$\Delta_c s(x) \approx 2 \left| \frac{\partial z_j}{\partial j} \right| / L_z \approx (\rho_j / L_z)^2 \left(\frac{L_z}{\Delta z_j} \right) = \Lambda \frac{L_z}{\Delta z_j}. \quad (27)$$

Масштаб изменения функции $H^j(x, s)$ оценивается величиной

$$\Delta_H s \approx \left(\frac{\partial \beta_j(x, s)}{\partial s} \right)^{-1} \approx L_z / (\Phi \Delta z_j). \quad (28)$$

Таким образом, формулой (22) можно пользоваться, если наряду с неравенством (26) выполняется еще условие

$$\Lambda \Phi \ll 1. \quad (29)$$

Как известно [2,3], условия, аналогичные (26), (29), определяют область применимости метода геометрической оптики.

При

$$\Lambda \gg 1 \quad (30)$$

необходимо учитывать дифракцию на неоднородностях среды и для расчетов пользоваться формулами (15)-(18). Однако при $\Lambda \gg 1$ масштаб ядра $\Delta_c s \approx 1$ и приближенным уравнением (12) можно пользоваться,

если функция $H^j(x, s)$ мало меняется на интервале $-1 \leq s \leq 1$, т.е. если

$$\Phi \ll 1. \quad (31)$$

Следовательно, условия применимости формул (15)-(18) определены неравенствами (30), (31) и совпадают с условиями применимости метода плавных возмущений [2,3].

5. В качестве примера использования полученных формул обсудим вопрос о числе мод, возбужденных за счет рассеяния на неоднородностях исходной моды с номером j . Ограничимся рассмотрением случая, когда $\Lambda \ll 1$. Число возбужденных мод будем характеризовать величиной $\Delta m_B(x)$, заданной соотношением

$$\Delta m_B^2 = \frac{\sum_m (m-j)^2 \langle |A_m^j|^2 \rangle}{\sum_m \langle |A_m^j|^2 \rangle} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ds \left\langle \left(\frac{\partial \beta_j(x, s)}{\partial s} \right)^2 \right\rangle. \quad (32)$$

Таким образом, квадрат числа возбужденных мод Δm_B^2 равен усредненной по всем значениям s дисперсии скорости изменения фазы $\beta(x, s)$ как функции параметра s . Анализ выражения (32) показывает, что для величины Δm_B справедлива следующая оценка:

$$\Delta m_B \approx \frac{1}{\pi} \Phi(x) \Delta m_{\text{эфф}}, \quad (33)$$

из которой следует, что число возбужденных мод растет с увеличением длины трассы по закону \sqrt{x} .

Ясно, что условия применимости (26), (29) сделанных в работе приближений налагают ограничения на предельно допустимое значение числа возбужденных мод Δm_B^* . Так, в случае, когда дифракцией на неоднородностях можно пренебречь ($\Lambda \ll 1$), число возбужденных мод Δm_B , которое мы можем еще описывать формулами (8), (14), (22), не может превышать величины

$$\Delta m_B^* = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta m_{\text{эфф}}} \Delta m > \Delta m > \Delta m_{\text{эфф}}. \quad (34)$$

Это значит, что число возбужденных мод может быть значительно больше как числа конструктивно интерферирующих мод Δm , так и числа мод $\Delta m_{\text{эфф}}$, с которыми происходит взаимодействие отдельной моды в каждом единичном акте рассеяния.

Оценим число возбужденных мод в случае распространения акустических волн в подводном звуковом канале. Примем, что волновод имеет канонический профиль показателя преломления (профиль Манка), а неоднородности обусловлены внутренними волнами, статистика которых описывается спектром Гарретта - Манка [3]. На частоте 300 Гц ($k = 1,26 \text{ м}^{-1}$) мода с номером $j = 170$ имеет точки заворота на горизонтах $\underline{z} = -2100 \text{ м}$ и $\bar{z} = 900 \text{ м}$. Она эффективно взаимодействует при рассеянии приблизительно с $\Delta m_{\text{эфф}} \approx 6$ модами. Используя найденные в [3] оценки для параметра неоднородности Φ , получим, что число возбужденных мод растет по закону

$$\Delta m_B \approx 0,74 \sqrt{x},$$

где x - длина трассы, выраженная в километрах. Для данной модели волновода условия (26), (29) выполняются вплоть до расстояний 400 - 500 км [3]. На таких трассах число возбужденных мод достигает величины $\Delta m_B = 16$.

6. Итак, в работе предложен способ приближенного описания волнового поля с произвольным начальным модовым составом в волноводе с крупномасштабными неоднородностями. Он основан на модовом представлении поля. Влияние неоднородностей учитывается путем введения фаз, рассчитанных вдоль модовых лучей. Предложенный способ описания поля позволяет использовать хорошо известные выражения для статистических характеристик набегов фаз вдоль геометрических лучей (при $\Lambda \ll 1$) для расчета статистических характеристик амплитуд мод. Полученные формулы справедливы в области ненасыщенных флуктуаций поля.

Приложение

Приведем без подробных пояснений формулы, обобщающие полученный результат на трехмерный случай.

Считаем, что распределение амплитуды поля на оси z совпадает с собственной функцией $\varphi_j(z)$. Ограничиваясь, как и в работе [1], малоугловым приближением, поле в узком спектре углов по отношению к плоскости $y = 0$ представим в виде разложения по собственным функциям $\varphi_n(z)$ и плоским волнам:

$$v(x, y, z) = i \sum_n \int dq A_{n,q}^1(x) \varphi_n(z) k_n^{-1} \exp(iqy + i(k_n - \frac{q^2}{2k_n})x).$$

Величина q задает проекцию волнового вектора на ось y ($|q|/k_n < 1$).

Выше были определены модовые лучи в плоскости (x, z) . В трехмерном случае каждой моде, характеризуемой набором (m, q) , также можно сопоставить модовые лучи, которые теперь лежат в плоскости $y = \frac{q}{k_n} x$. Тогда амплитуды мод $A_{n,q}^j$ задатся следующими соотношениями:

$$A_{n,q}^j(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ds \exp(i\beta_j(x, s, q) - i\pi(m - j)s),$$

где

$$\beta_j(x, s, q) = \frac{k^2}{2k_j} \int_0^x dx' \int dy' U(x', y', z') \Delta_{jq}(x', y', z'; s); \quad (\text{П. 1})$$

$$\Delta_{jq}(x, y, z, s) = \rho_y^{-1}(x) \exp\{-i\pi[(y - \frac{q}{k_j}x)^2/\rho_y^2(x) - \frac{1}{4}]\} \times$$

(П. 2)

$$\times \rho_{jz}^{-1}(x, s) \exp\left\{-i\pi\left[\frac{(z - z_j(x, s))^2}{\rho_{jz}^2(x, s)} - \frac{1}{4}\right] \operatorname{sgn}\left[\theta_j(x, s) \frac{\partial z_j(x, s)}{\partial j}\right]\right\}.$$

$$\rho_y = [2\pi x/k_j]^{1/2},$$

$$\rho_{jz}(x, s) = \left[D_j \left|\operatorname{tg} \theta_j(x, s) \frac{\partial z_j(x, s)}{\partial j}\right|\right]^{1/2}.$$

Величины $\rho_y(x)$ и $\rho_{jz}(x, s)$ задают размеры зон Френеля в направлении осей y и z . Формулы (П. 1), (П. 2), так же как и (12) в двумерном случае, позволяют описывать влияние дифракционных эффектов при рассеянии на неоднородностях среды. Если же выполняется условие

$$\rho_y < L_y, \quad \rho_z < L_z,$$

то влиянием этих эффектов можно пренебречь и для расчета фазы $\beta_j(x, s, q)$ пользоваться формулой

$$\beta_j(x, s, q) = \frac{k^2}{2k_j} \int_0^x dx' U(x', \frac{q}{k_j} x', z_j(x', s)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. //Акуст. журн. 1987. Т.33. N 4. С. 599.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. - М.: Наука, 1978. - 463 с.
3. Распространение звука во флуктуирующем океане /Пер. с англ. /Под ред. С. Флате. - М.: Мир, 1982. - 336 с.
4. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 4. С. 478.
5. Felsen L.B. //J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V.69. N 4. P.352.
6. Kamel A., Felsen L.B. //J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 71. N 5. P. 1445.
7. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. //Акуст. журн. 1987. Т. 33. N 3. С. 416.
8. Вировлянский А. Л., Малахов А. Н., Славинский М. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 7. С. 889.
9. Dashen R. //J. Math. Phys. 1979. V. 20. N 5. P. 894.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 марта 1990 г.

WAVE FIELD DESCRIPTION OF A DISTRIBUTIVE SOURCE IN MULTIMODE WAVEGUIDE WITH LARGE SCALE INHOMOGENEITIES

A. G. Kosterin, A. N. Malakhov, D. V. Sholin

An approximate method of distributive source wave field description in multimode refractive waveguide with large scale inhomogeneities is worked out. The method depends on the mode representation of the field. The influence of inhomogeneities on mode amplitudes is taken into account by means of phases, which are calculated on the inhomogeneities along the so called mode rays. The formulas derived are convenient for statistical analysis of the field in the region of unsaturated intensity fluctuations.

УДК 621.375.8

ЭФФЕКТ АНТИСЕЛЕКТИВНОСТИ ПРИ ОБЪЕМНОЙ
НЕБРЭГГОВСКОЙ ДИФРАКЦИИ

Л. С. Привер

Рассмотрена дифракция в изотропном материале акустооптического элемента при слабом взаимодействии световой и акустических волн. Найдено, что в определенных режимах дифракции в большом диапазоне углов сканирования интенсивность первого максимума плавно возрастает по мере отклонения в обе стороны от центрального положения, заметно отличающегося от угла Брэгга. Эта особенность названа антиселективностью дифракции. Прикладное значение полученных результатов состоит в возможности осуществления широкоапертурного сканирования с большим числом элементов в строке сканирования при пониженных требованиях к расходимости и монохроматичности излучения лазера.

Из литературы [1 - 3] известно, что акустооптические элементы, используемые для сканирования лучей лазера, работают обычно в режиме дифракции Брэгга или в промежуточном случае между режимами Брэгга и Рамана - Ната. Основной задачей при разработке дефлекторов такого типа является преодоление присущей эффекту Брэгга селективности дифракции, т.е. снижения интенсивности дифрагированных лучей по мере их отклонения от угла Брэгга.

Ниже приведено исследование возможности широкоапертурного сканирования в режиме объемной дифракции на изотропном кристалле при небольшой эффективности отклонения лучей в первый максимум, т.е. при слабом взаимодействии световой и звуковой волн. При этом угол дифракции θ_1 сильно отличается от угла Брэгга. Такой режим можно осуществить, в частности, путем помещения акустооптического элемента в полость резонатора лазера с глухими зеркалами и выходом излучения из резонатора с помощью дифракционного отклонения. На рис. 1 схематически показан акустооптический элемент в полости резонатора лазера (1 - глухие зеркала, 2 - активное вещество, 3 - акустооптический элемент, 4 - пьезоизлучатель, 5 - поглотитель энергии). Основная часть излучения проходит через материал элемента без отклонения в виде максимума нулевого порядка и поддерживает режим генерации лазера. Часть излучения выводится наружу, в противоположные стороны, в виде максимума первого порядка. Угол падения лучей θ_0 на элемент, т.е. угол наклона к оси симметрии резонатора, выбран достаточно большим, что обусловлено задачей получения широкого диапазона сканирования, а также необходимостью учета экранирующего действия зеркала резонатора, вблизи которого установлен акустооптический элемент.

При расчете интенсивности дифрагированных лучей будем исходить из известного решения [1] волнового уравнения для плоской электромагнитной волны, падающей на область распространения звука, ограниченную двумя параллельными плоскостями с расстоянием l между ними.

Решение в виде системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dC_p}{dx} = \frac{q_p}{2} [C_{p-1} \exp(j\eta_{p-1}x + \Phi) - C_{p+1} \exp(-j\eta_p x + \Phi)], \quad (1)$$

где $|C_p|^2$ - безразмерная интенсивность p -го дифракционного максимума, физически реализуемого из условий дифракции $\sin\theta_p - \sin\theta_0 = p(\lambda/\Lambda)$, где $q_p = (k_p^2 / k_{px}) (\Delta n/n)$; $\eta_p = k_{px} - k_{p+1,x}$; k_p, k_{px} - волновые векторы и их проекции на ось x , т.е. нормаль к плоскостям, ограничивающим область распространения звука, Λ - длина акустической волны.

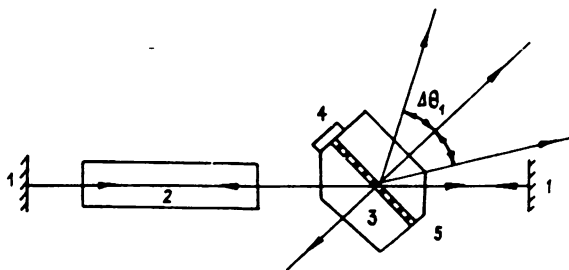


Рис 1

Предположим теперь, что $\nu = \Delta n/n \ll 1$. Из общих соображений, приведенных в [1], с. 52-56, при слабом взаимодействии между световой и звуковой волнами в первом приближении можно учитывать только два дифракционных максимума - нулевой и первый, т.е. система (1) сводится к двум уравнениям. Их решения для $p = 0$ и $p = 1$ хорошо известны и используются в качестве точных решений при дифракции Брэгга. При этом для интенсивности $|C_1|^2$ в первом дифракционном максимуме имеем

$$\frac{J_1}{J_0} = |C_1|^2 = \frac{\nu^2}{\cos^2 \theta_0} \left[\sin^2 \frac{y}{2} \sqrt{(\cos \theta_0 - \cos \theta_1)^2 + \nu^2 / \cos \theta_0 \cos \theta_1} \right] \times$$

$$\times \left[(\cos \theta_0 - \cos \theta_1)^2 + \nu^2 / \cos \theta_0 \cos \theta_1 \right]^{-1/2} \quad (2)$$

(J_1 - интенсивность света, падающего на элемент, $y = kl$, $k = 2\pi/\lambda$).

Выражение (2) в нашем случае является первым приближением. Нам нужно с его помощью найти область минимального изменения $|C_1|^2$ в предельно большом диапазоне изменения угла θ_1 при фиксированном значении угла θ_0 . Для этой цели упростим еще больше выражение (2), отбросив в нем члены с ν^2 , учитывая малость $\nu^2 \approx 10^{-4}$, а также условие $\theta_1 \neq \theta_0$, поскольку рассматриваем небрэгговскую дифракцию.

В этом случае имеем

$$|C_1|^2 = \frac{\nu^2 \sin^2(\gamma/2) (\cos \theta_0 - \cos \theta_1)}{\cos^2 \theta_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta_1)^2}. \quad (3)$$

Рассматривая $C_1 = C_1(\theta_1)$, найдем такое значение центрального угла дифракции θ_1 , вблизи которого изменения знаменателя (3) происходили бы с минимальной скоростью. Из (3) следует, что это будет значение $\theta_1 = 0$, ибо в этом случае знаменатель запишется как $(1 - \cos \theta_0 - \Delta \epsilon_1^2)^2$. Теперь нужно найти такие значения l , при которых, во-первых, при $\theta_1 = 0$ числитель (3) будет равным единице, а, во-вторых, по мере отклонения от нуля скорость изменения числителя будет минимальной. Удовлетворить первому требованию можно, полагая аргумент числителя равным нечетному числу $\pi/2$, т. е.

$$\frac{\kappa l}{2} (1 - \cos \theta_0) = (2s + 1) \frac{\pi}{2}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

В качестве примера положим $\theta_0 = 20,5^\circ$ и оценим из (4) допустимые значения l : $l/\lambda = 7,895; 23,69; 39,48$, а также волновой параметр $q = 1\lambda/\Lambda^2$ [1], который для минимального значения $l \approx 8\lambda$ равен ~ 1 . Таким образом, в данном случае имеем дело с объемной дифракцией, т. е. возможностью с определенной точностью пользоваться выражением (2).

Найдем теперь по выражению (2) угловую зависимость $|C_1(\theta_1)|^2$ при $l_0 \approx 8\lambda$, $l_1 \approx 24\lambda$, $l_2 \approx 40\lambda$ для $\theta_0 = 20,5^\circ$, $\nu = 10^{-2}$. Результаты расчета приведены на графиках (рис. 2, 3). Из рис. 2 видно, что при $s = 0$, т. е. $l \approx 50$ мкм (для $\lambda = 0,63$ мкм) во всем диапазоне изменения угла $|\theta_1| < 20,5^\circ$ не только наблюдается малая скорость изменения $|C_1(\theta_1)|^2$, но даже виден ее парадоксальный характер, а именно симметричное возрастание интенсивности дифрагированных лучей по мере отклонения их в обе стороны от центрального угла $\theta_1 = 0$, что можно назвать эффектом антиселективности.

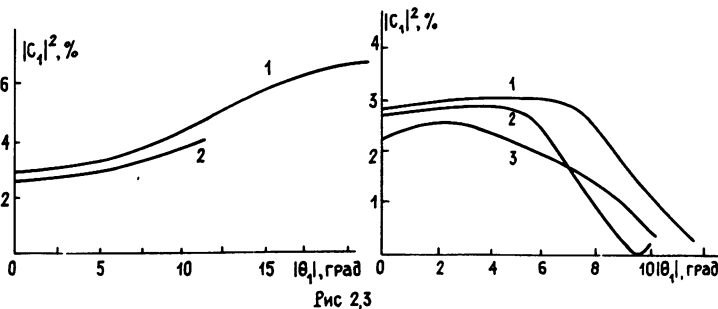


Рис 2,3

Однако, исходя из физических соображений, следует усомниться в полученном результате при углах, близких к $-20,5^\circ$, т. е. при "схлопывании" первого и нулевого дифракционных максимумов и исчезновении периодической структуры в акустооптическом элементе.

При приближении θ_1 к значению $-20,5^\circ$ должно появиться большое количество максимумов высоких порядков и выражение (2) не может быть справедливо для C_1 .

Расчеты по аналитической формуле (2), полученной в результате решений двух дифференциальных уравнений, должны быть уточнены путем обращения к следующему приближению, т.е. к решению задачи для четырех дифракционных максимумов: C_{-1} , C_0 , C_1 , C_2 при начальных условиях $C_{-1}(0) = 0$, $C_0(0) = 1$, $C_1(0) = 0$, $C_2(0) = 0$. Для численного решения системы (1) на ЭВМ воспользуемся методом Рунге - Кутты, полагая $\nu = 10^{-2}$, для двух значений $l_0 \approx 8\lambda$ и $l_1 \approx 24\lambda$. Шаг по y выбран $\Delta y = 4^\circ$. Кроме значений $|C_r|^2$ вычислялась также сумма $\sum_{r=-1}^2 |C_r|^2$,

которая из физических соображений должна быть равна единице и ее отличие свидетельствует о степени накопления ошибок счета на машине, неизбежных при большом количестве шагов.

На рис. 2 приведен график зависимости $|C_1|^2 = f(\theta_1)$ для $l_0 \approx 8\lambda$ и $\nu = 10^{-2}$ (кривая 2), из которого следует, что учет еще двух уравнений не меняет картины "антиселективности" по крайней мере для изменений угла θ_1 в пределах $\pm 12^\circ$. При этом интенсивность $|C_1|^2$ имеет немного меньшее значение, чем это следует из аналитической формулы (2) и составляет $2 + 4\%$ от J_1 (кривая 1); с большой точностью соблюдается также симметрия по отрицательным и положительным значениям θ_1 . Максимальное значение $C_1(0)$ достигается при $y = 2800^\circ$, что соответствует длине взаимодействия $l \approx 8\lambda$, как это было определено с помощью упрощенного аналитического выражения (3). Некоторый уход энергии излучения наблюдается в дифракционный максимум $C_{-1} - \sim 0,25\%$. Во второй дифракционный максимум уходит еще меньше энергии ($\sim 10^{-4}J_1$).

Как упоминалось выше, проводился также контроль по значениям $\sum_{r=-1}^2 |C_r|^2$. При росте y отличие этой величины от единицы возрастает и достигает при $y = 2800^\circ$ около $0,3\%$.

Обратимся теперь к другим допустимым значениям l_1 и l_2 для $s = 1$ и $s = 2$, для которых числитель в (2) равен с достаточной точностью единице при $\theta_1 = 0$. Согласно аналитическому выражению (2) для $\nu = 10^{-2}$, т.е. с учетом только нулевого и первого дифракционных максимумов, получаем кривые угловой зависимости 1 ($l_1 \approx 24\lambda$) и 2 ($l_2 \approx 40\lambda$) на рис. 3. Из графиков видно, что для данных случаев в окрестности $\theta_1 = 0$ имеются участки монотонного возрастания $|C_1|^2$ в пределах до $4 - 6^\circ$ с последующими спадами до нуля в области $9 - 11^\circ$. Счет на ЭВМ для случая $s = 1$, $l_1 \approx 24\lambda$ качественно подтверждает данную картину с учетом четырех уравнений (рис. 3), кривая 3. Таким образом и при больших значениях l (~ 150 и 250 мкм) можно осуществить сканирование в пределах до $\pm 8^\circ$, если допустить по краям диапазона некоторое снижение интенсивности первого дифракционного максимума.

Представляет интерес, какие предельные значения модуляции показателя преломления еще можно считать допустимыми для сохранения явления антиселективности. Машинный счет, сделанный для $\nu = 5 \cdot 10^{-2}$, показал, что при $\gamma = 2000^\circ$, т. е. $l = 5,6\lambda$, при котором $C_1(0)$ достигает максимального значения 25,8 %, сохраняется антиселективный характер дифракции в пределах $\Delta\epsilon_1 = \mp 10^\circ$. При этом по краям диапазона имеет место некоторая асимметрия значений $|C_1|^2$: $|C_1(+10^\circ)|^2 = 41,7\%$ и $|C_1(-10^\circ)|^2 = 30\%$, чего не наблюдалось при $\nu = 10^{-2}$. Однако достаточно высокая эффективность дифракции в первый максимум позволяет ставить акустооптический элемент и вне полости лазера, что особенно важно при использовании полупроводникового лазера в качестве источника света.

Значение $\nu = 10^{-1}$ уже неприемлемо для решения поставленной выше задачи. В результате вместо антиселективности имеет место монотонное увеличение $|C_1|^2$ от 26 % при $\theta_1 = -10^\circ$ до 52 % при $\theta_1 = +10^\circ$.

Технические сложности в реализации небрэгговской дифракции с малой шириной фронта акустической волны (длиной взаимодействия l) заключается в создании пьезоэлектрического возбуждателя плоской акустической волны с фронтом шириной $l = 8\lambda$, его согласования с материалом элемента, в разработке источника питания (свип-генератора) в диапазоне дециметровых волн.

После решения этих достаточно трудных задач можно создать сканирующее устройство с углами сканирования не менее чем $\mp 10^\circ$ внутри материала акустооптического элемента и с учетом показателя преломления его материала $n = 2$ достигнуть амплитуды сканирования $\pm 20^\circ$ при выходе лучей из него. Большой размах сканирования позволяет применять лазер с достаточно большой естественной расходимостью φ_d , и если $N = 2\Delta\theta_1 / \varphi_d = 2000$ элементов в строке сканирования, то $\varphi_d = 0,6'$.

Оценим также и требуемую степень монохроматичности лазера. Из условий дифракции в первый максимум найдем, что $d\theta_1 = (d\lambda/\lambda) \sin \theta_0$. Если взять, например, полупроводниковый лазер с огибающей спектра 0,1 нм при $\lambda = 0,7$ мкм, то $d\theta_1 = 10''$, что существенно меньше, чем найденные выше значения φ_d .

Таким образом, используя эффект антиселективности для сканирования лазерных лучей в широком диапазоне углов, можно добиться следующих технических преимуществ по сравнению с обычно используемыми акустооптическими дефлекторами:

осуществить сканирование с амплитудой $\pm 20^\circ$ и увеличением интенсивности по краям на $\sim 30\%$ с пониженными требованиями к расходимости и монохроматичности лазера;

число разрешаемых элементов в строке сканирования может составлять 2000;

акустооптический элемент можно помещать как внутри полости резонатора, так и снаружи резонатора лазера; в последнем случае эффективность отклонения не превышает 25 + 30 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. - М.: Радио и связь, 1985.
2. Парыгин В. Н., Балакший В. И. Оптическая обработка информации. - М.: Гос. ун-т, 1987.
3. Утида, Ниидзеки //ТИИЭР. 1973. Т.61. С.21.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском университете

Поступила в редакцию
11 марта 1990 г.

ANTISELECTIVE EFFECT DURING VOLUME NON-BREGG DIFFRACTION

L. S. Priver

Diffraction in isotropic medium of an ultrasonic optic element during weak interaction of light and ultrasonic waves has been investigated. It has been found that in certain conditions of diffraction, the first peak intensity is smoothly growing as it deflects in both directions from the central position within the great range of the scanning angles. The central position differs appreciably from the Bragg angle. The applied significance of the results obtained is the possibility to perform a wide aperture scanning with a great number of elements in the scanning line at reduced requirements to divergence and monochromatism of laser radiation.

УДК 621.372.8

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ПЛАВНОНЕРЕГУЛЯРНОГО ПЛОСКОГО АНИЗОТРОПНОГО ВОЛНОВОДА

А. Д. Авдеев, В. В. Новиков

Предлагается обобщение разработанного применительно к подводной акустике метода горизонтальных лучей и вертикальных волн на случай трехмерно-неоднородной анизотропной электродинамической задачи.

1. В настоящее время известен ряд эффективных асимптотических методов исследования двумерных полей в плавнонерегулярных волноводах [1,2]. В значительно меньшей степени разработана теория распространения волн в трехмерно-неоднородных природных волноводах. Одним из немногих применяемых методов нахождения акустических полей в трехмерно-неоднородных океанических волноводах является метод горизонтальных лучей и вертикальных мод [3,4], эквивалентный методу двухмасштабных разложений [5,6]. Эти методы позволяют построить (формальную асимптотику решения по параметру плавности $\epsilon = h/L \ll 1$ (h и L - вертикальный и горизонтальный характерные масштабы изменения параметров волновода), которая в общем случае применима при выполнении условия $\epsilon kh \leq 1$ [6], где k - волновое число.

В данной работе проводится обобщение указанных методов на случай трехмерно-неоднородной анизотропной электродинамической задачи, которое может быть использовано, например, при исследовании распространения сверхдлинных радиоволн в волноводе Земля - ионосфера. Дается схема построения асимптотики собственных волн, являющихся частными решениями однородных уравнений Максвелла и представляющих собой по существу нормальные волны нерегулярного волновода. Асимптотика собственных волн получена в форме, не содержащей секулярные члены в поправках к адиабатическому приближению, возникающие в построениях работ [3-6]. Основным отличием рассматриваемой векторной задачи от акустической является отсутствие полноты системы собственных функций поперечного оператора, определяющего характеристики вертикальных мод.

2. Рассмотрим плоский волновод, ограниченный двумя идеально проводящими плоскостями $z = 0, h$ и заполненный трехмерно-неоднородной средой, магнитные свойства которой совпадают с магнитными свойствами вакуума, а электрические свойства для гармонических во времени полей ($e^{-i\omega t}$) при пренебрежении пространственной дисперсией [7] описываются тензором комплексной относительной диэлектрической проницаемости $\epsilon(x, y, z)$. Имея в виду задачу о распространении низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля - ионосфера, считаем, что верхняя ограничивающая плоскость $z = h$ располагается выше существенной для отражения от ионосферы области [8]. Что касается нижней плоскости $z = 0$, то она соответствует поверхности Земли, если последняя предполагается идеально проводящей, или располагается под ее поверхностью на глубине, превышающей толщину скин-слоя.

Электромагнитные поля вне области расположения источников подчиняются уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = ik\vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -ik\epsilon\vec{E}, \quad (1)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ - волновое число в вакууме, $\vec{H} = z_0 \vec{H}$, $z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ - характеристический импеданс вакуума. Решение уравнений (1) должно удовлетворять граничным условиям $E_x = E_y = 0$ при $z = 0, h$. Предположим, что зависимость ϵ от горизонтальных координат x и y такова, что $\partial^n \epsilon / \partial x^n = O(\epsilon L^{-n})$, $\partial^n \epsilon / \partial y^n = O(\epsilon L^{-n})$, где L - характерный горизонтальный масштаб. Введем параметр плавности $\alpha = h/L$ и будем считать выполненным неравенство $\alpha < 1$. Перейдем к новым горизонтальным координатам $\xi = \alpha x$ и $\eta = \alpha y$ и запишем уравнения (1) в следующей форме:

$$\alpha \Gamma_\xi \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} + \alpha \Gamma_\eta \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} - ikL(\epsilon) \vec{u} = 0, \quad (2)$$

где

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \quad L(\epsilon) = \begin{pmatrix} & & 0 & \frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z} & & 0 \\ & -\epsilon & & -\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & & & \\ -\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & & I & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\Gamma_\xi = \begin{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix} = -\Gamma_\xi^T, \quad \Gamma_\eta = \begin{pmatrix} & & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} = -\Gamma_\eta^T.$$

Здесь I - единичная матрица, индекс "Т" означает транспонирование.

Будем искать частные решения уравнения (2), допускающие формальные асимптотические разложения вида

$$\vec{u}(\xi, \eta, z) = \exp\left(\frac{ik}{\alpha} \tau(\xi, \eta) + \sigma(\xi, \eta)\right) \vec{\lambda}(\xi, \eta, z), \quad (4)$$

$$\sigma(\xi, \eta) = \sum_{i \geq 0} \alpha^i \sigma_i(\xi, \eta), \quad \vec{\lambda}(\xi, \eta, z) = \sum_{i \geq 0} \alpha^i \vec{\lambda}_i(\xi, \eta, z).$$

Подставляя эти выражения в (2), стандартным образом приходим к рекуррентной системе уравнений для коэффициентов разложений:

$$L(\epsilon) \vec{\lambda}_0 - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \Gamma_\xi \vec{\lambda}_0 - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \Gamma_\eta \vec{\lambda}_0 = 0; \quad (5)$$

$$L(\epsilon) \vec{\lambda}_{i+1} - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \Gamma_\xi \vec{\lambda}_{i+1} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \Gamma_\eta \vec{\lambda}_{i+1} =$$

$$= \frac{1}{ik} \left\{ \Gamma_{\xi} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \xi} + \Gamma_{\eta} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \eta} + \sum_{p=0}^1 \left(\frac{\partial \sigma_{1-p}}{\partial \xi} \Gamma_{\xi} \vec{A}_p + \frac{\partial \sigma_{1-p}}{\partial \eta} \Gamma_{\eta} \vec{A}_p \right) \right\}, \quad l \geq 0.$$

Вследствие граничных условий для \vec{E} вектор-функции \vec{A}_1 должны удовлетворять условиям $A_{1,1} = A_{1,2} = 0$ при $z = 0, h$.

3. Исследование данной системы начнем с уравнения (5). Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \lambda \cos \alpha, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \lambda \sin \alpha; \quad (7)$$

$$\Gamma_t = \cos \alpha \Gamma_{\xi} + \sin \alpha \Gamma_{\eta} = -\Gamma_t^T, \quad \Gamma_n = -\sin \alpha \Gamma_{\xi} + \cos \alpha \Gamma_{\eta} = -\Gamma_n^T. \quad (8)$$

В этих обозначениях однородное уравнение (5) принимает вид $L(\varepsilon) \vec{A}_0 = \lambda \Gamma_t \vec{A}_0$. Оно имеет нетривиальные решения только при $\lambda = \lambda_m(\xi, \eta, \alpha)$, являющихся собственными значениями поперечного оператора

$$L(\varepsilon) \vec{\psi}_m = \lambda_m \Gamma_t \vec{\psi}_m, \quad \psi_{m,1} = \psi_{m,2} = 0, \quad z = 0, h. \quad (9)$$

Собственные значения λ_m нумеруем так, чтобы в волноводе с потерями $\text{Im} \lambda_m > 0$ при $m \geq 1$ и $\text{Im} \lambda_m < 0$ при $m \leq -1$. В дальнейшем предполагаем, что спектр задачи (9) простой. Очевидно, что собственные векторы $\vec{\psi}_m$ зависят как от параметров от ξ , η и α , т.е. $\vec{\psi}_m = \vec{\psi}_m(\alpha, \xi, \eta, z)$.

Рассмотрим также "сопряженную" задачу на собственные значения

$$L(\varepsilon^T) \vec{\varphi}_1 = \lambda_1^0 \Gamma_t^T \vec{\varphi}_1, \quad \varphi_{1,1} = \varphi_{1,2} = 0, \quad z = 0, h. \quad (10)$$

Нетрудно показать, что оператор $L(\varepsilon^T)$ является сопряженным к $L(\varepsilon)$ относительно псевдоскалярного произведения

$$[\vec{\psi}, \vec{\varphi}] = \int_0^h \sum_{i=1}^6 \psi_i \varphi_i dz.$$

Из (9) и (10) следует

$$\lambda_m [\Gamma_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_1] = \lambda_1^0 [\Gamma_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_1]. \quad (11)$$

Поэтому, если $[\Gamma_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_1] \neq 0$, то $\lambda_m = \lambda_1^0$, т.е. собственные значения задач (9) и (10) совпадают. Равенство (11), являющееся соотношением ортогональности, запишем в виде

$$[\Gamma_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_1] = \delta_{m1} N_m, \quad (12)$$

где δ_{m1} - символ Кронекера.

Дифференцируя по α задачу (9) и учитывая, что $\partial \Gamma_t / \partial \alpha = \Gamma_n$, легко находим

$$[\Gamma_n \dot{\psi}_n, \dot{\varphi}_n] = -\frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial \lambda_n}{\partial \alpha} N_n. \quad (13)$$

Замечая, что

$$\Gamma_\xi = \cos \alpha \Gamma_\zeta - \sin \alpha \Gamma_n, \quad \Gamma_\eta = \sin \alpha \Gamma_\zeta + \cos \alpha \Gamma_n, \quad (14)$$

из (12) и (13) получаем соотношения

$$[\Gamma_\xi \dot{\psi}_n, \dot{\varphi}_n] = S_\xi^n N_n, \quad [\Gamma_\eta \dot{\psi}_n, \dot{\varphi}_n] = S_\eta^n N_n, \quad (15)$$

в которых

$$S_\varphi^n = \cos \alpha + \frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial \lambda_n}{\partial \alpha} \sin \alpha, \quad S_\eta^n = \sin \alpha - \frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial \lambda_n}{\partial \alpha} \cos \alpha. \quad (16)$$

Используя (15), находим еще одно полезное для дальнейшего соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{N_n}} \left\{ [\Gamma_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\dot{\psi}_n}{\sqrt{N_n}}, \dot{\varphi}_n] + [\Gamma_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\dot{\psi}_n}{\sqrt{N_n}}, \dot{\varphi}_n] \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_\varphi^n}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\eta^n}{\partial \eta} \right) + R_n, \quad (17)$$

где

$$R_n = \frac{1}{2N_n} \left\{ [\Gamma_\xi \frac{\partial \dot{\psi}_n}{\partial \xi}, \dot{\varphi}_n] + [\Gamma_\eta \frac{\partial \dot{\psi}_n}{\partial \eta}, \dot{\varphi}_n] - [\Gamma_\xi \dot{\psi}_n, \frac{\partial \dot{\varphi}_n}{\partial \xi}] - [\Gamma_\eta \dot{\psi}_n, \frac{\partial \dot{\varphi}_n}{\partial \eta}] \right\}.$$

Собственные векторы $\dot{\psi}_n$ и $\dot{\varphi}_n$ определяются с точностью до множителей, зависящих от горизонтальных координат. Один из этих множителей выберем так, чтобы выполнялось равенство $R_n = 0$.

4. Предположим, что решения задач (9) и (10) построены. Положим в (7) $\lambda = \lambda_n(\xi, \eta, \alpha)$ и все величины, отвечающие данному собственному значению, снабдим индексом "n". При этом из (7) следует уравнение для "горизонтального" эйконала n-й собственной волны нерегулярного волновода:

$$\left(\frac{\partial \tau^n}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau^n}{\partial \eta} \right)^2 = \lambda_n^2(\xi, \eta, \alpha^n), \quad \alpha^n = \arctg \left(\frac{\partial \tau^n}{\partial \eta} / \frac{\partial \tau^n}{\partial \xi} \right). \quad (18)$$

Это уравнение при соответствующих начальных условиях может быть решено различными методами [9]. Например, если использовать понятие комплексных лучей [10], то (18) сводится к интегрированию характеристической системы

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= S_\xi^n, & \frac{d\eta}{dt} &= S_\eta^n, & \frac{d\tau^n}{dt} &= \lambda_n, \\ \frac{d\alpha^n}{dt} &= \frac{1}{\lambda_n} \left(-\sin \alpha^n \frac{\partial \lambda_n}{\partial \xi} + \cos \alpha^n \frac{\partial \lambda_n}{\partial \eta} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Видим, что величины S_ξ^n и S_η^n , определенные в (16), являются компонентами вектора, параллельного комплексному лучевому вектору, направление которого при $\partial \lambda_n / \partial \alpha \neq 0$ не совпадает с направлением градиента комплексного эйконала (7).

В одномерно-нерегулярном волноводе $\partial \varepsilon / \partial \eta = 0$ и $\partial \lambda_n / \partial \eta = 0$, и из (19) следует обобщенный закон Снелиуса

$$\lambda_n(\xi, \alpha^n(\xi)) \sin \alpha^n(\xi) = \Lambda_n = \text{const},$$

позволяющий найти $\alpha^n(\xi)$. В этом случае уравнение (18) легко интегрируется методом разделения переменных.

После того как комплексный угол $\alpha^n(\xi, \eta)$ найден, во всех участвующих в построениях величинах полагаем $\alpha = \alpha^n(\xi, \eta)$.

Таким образом, однородное уравнение (5) через задачу на собственные значения (9) позволяет получить уравнение (18), из которого находятся эйконал $\tau^n(\xi, \eta)$ и комплексный угол $\alpha^n(\xi, \eta)$. Решение (5), определяемое с точностью до множителя, зависящего от горизонтальных координат, возьмем в виде

$$\vec{A}_0^n(\xi, \eta, z) = \frac{1}{\sqrt{N_n(\xi, \eta)}} \psi_n(\alpha^n(\xi, \eta), \xi, \eta, z). \quad (20)$$

5. Обратимся теперь к уравнениям (6), которые при $\lambda = \lambda_n$ запишем так:

$$(L(\varepsilon) - \lambda_n \Gamma_t) \vec{A}_{l+1}^n = \vec{F}_l^n, \quad l \geq 0. \quad (21)$$

Условиями разрешимости этих неоднородных уравнений являются равенства

$$[\vec{F}_l^n, \vec{\phi}_n] = 0, \quad l \geq 0, \quad (22)$$

приводящие к уравнениям для σ_1^n :

$$S_\xi^n \frac{\partial \sigma_1^n}{\partial \xi} + S_\eta^n \frac{\partial \sigma_1^n}{\partial \eta} + \frac{1}{\sqrt{N_n}} \left\{ \left[\Gamma_\xi \frac{\partial \vec{A}_1^n}{\partial \xi}, \vec{\phi}_n \right] + \left[\Gamma_\eta \frac{\partial \vec{A}_1^n}{\partial \eta}, \vec{\phi}_n \right] + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^l \left(\frac{\partial \sigma_{1-p}^n}{\partial \xi} \left[\Gamma_\xi \vec{A}_p^n, \vec{\phi}_n \right] + \frac{\partial \sigma_{1-p}^n}{\partial \eta} \left[\Gamma_\eta \vec{A}_p^n, \vec{\phi}_n \right] \right) \right\} = 0. \quad (23)$$

При написании (23) использованы соотношения (20) и (15). Для $l = 0$ сумма в уравнении (23) отсутствует, и оно с учетом равенств (20) и (17) ($R_n = 0$) записывается следующим образом:

$$S_\xi^n \frac{\partial \sigma_0^n}{\partial \xi} + S_\eta^n \frac{\partial \sigma_0^n}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_\xi^n}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\eta^n}{\partial \eta} \right) = 0.$$

В случае одномерно-нерегулярного волновода отсюда находим

$$\exp(\sigma_0^n(\xi)) = c_n / \sqrt{S_\xi^n(\xi)}.$$

Решение уравнения (21) может быть разложено по собственным

векторам $\vec{\psi}_m$ задачи (9), если вектор \vec{F}_1^n представим в виде ряда

$$\vec{F}_1^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\Gamma_t \vec{F}_1^n, \vec{\psi}_m] N_m^{-1} \vec{\psi}_m. \quad (24)$$

Но из (3) и (8) следует, что матрица Γ_t - вырожденная. Поэтому существуют векторы $\vec{F} \neq 0$, для которых $\Gamma_t \vec{F} = 0$. Такие векторы не могут быть представлены в виде ряда (24), так как их коэффициенты Фурье равны нулю. Таким образом, система собственных векторов $\vec{\psi}_m$ не является полной.

Чтобы обойти связанную с данным обстоятельством трудность, введем в рассмотрение ортогональные проекторы P_0 и P_1 , обладающие следующими свойствами:

$$P_0 \Gamma_t = \Gamma_t P_0 = 0, \quad P_1 \Gamma_t = \Gamma_t P_1 = \Gamma_t,$$

$$P_0 = P_0^T = P_0^2, \quad P_1 = P_1^T = P_1^2, \quad P_0 + P_1 = I.$$

Легко показать, что $\Gamma_t^3 = -\Gamma_t$, поэтому $P_1 = -\Gamma_t^2$, $P_0 = I + \Gamma_t^2$. Нетрудно видеть, что проектор P_0 выделяет компоненты векторов, параллельные градиенту эйконала, а проектор P_1 - ортогональные ему.

Решение уравнения (21) будем искать в виде

$$\vec{\lambda}_{1+1}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{1+1,m}^n \vec{\psi}_m + \vec{B}_{1+1}^n, \quad (25)$$

где вектор \vec{B}_{1+1}^n таков, что $P_0 \vec{B}_{1+1}^n = \vec{B}_{1+1}^n$. Подставляя (25) в (21) и проектируя получающиеся уравнения в подпространства, соответствующие P_0 и P_1 , получаем

$$P_0 L(\varepsilon) P_0 \vec{B}_{1+1}^n = P_0 \vec{F}_1^n; \quad (26)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\lambda_m - \lambda_n) \alpha_{1+1,m}^n \Gamma_t \vec{\psi}_m = P_1 \vec{F}_1^n - P_1 L(\varepsilon) P_0 \vec{B}_{1+1}^n. \quad (27)$$

Легко проверить, что

$$P_0 L(\varepsilon) P_0 = E P_0 = P_0 E,$$

$$\text{где } E = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{tt} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha^n + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) \sin \alpha^n \times$$

$\times \cos \alpha^n + \varepsilon_{yy} \sin^2 \alpha^n$. Поэтому из уравнения (26) следует $\vec{B}_{1+1}^n =$

$= E^{-1} P_0 \dot{F}_1^n = P_0 E^{-1} \dot{F}_1^n$. При нахождении коэффициентов разложений $\alpha_{1+1,m}^n$ из (27) используем следующее равенство:

$$[P_1 L(\varepsilon) P_0 \dot{B}_{1+1}^n, \dot{\varphi}_m] = - [\Gamma_t \dot{F}_1^n, \dot{\varphi}_m],$$

которое вытекает из соотношения $P_1 = I - P_0$, легко проверяемого тождества $[L(\varepsilon) P_0 \dot{B}_{1+1}^n, \dot{\varphi}_m] = 0$ ($-\infty < m < \infty$) и уравнения (26).

В результате получаем общее решение уравнения (21) в виде

$$\dot{A}_{1+1}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[\dot{F}_1^n, \dot{\varphi}_m]}{(\lambda_m - \lambda_n) N_m} \dot{\psi}_m + E^{-1} P_0 \dot{F}_1^n + \alpha_{1+1,n}^n \dot{\psi}_n. \quad (28)$$

Последнее слагаемое в (28) является решением однородного уравнения (21). При этом коэффициент $\alpha_{1+1,n}^n = [\Gamma_t \dot{A}_{1+1}^n, \dot{\varphi}_n] N_n^{-1}$ не определен. Для выделения единственного решения мы накладываем дополнительное условие

$$[\Gamma_t \dot{A}_1^n, \dot{\varphi}_n] = 0, \quad l \geq 1. \quad (29)$$

Отметим, что из (28) и уравнения (21) следует теорема разложения

$$\dot{A} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\Gamma_t \dot{A}, \dot{\varphi}_m] N_m^{-1} \dot{\psi}_m + E^{-1} P_0 L(\varepsilon) \dot{A}$$

по собственным векторам поперечного оператора (9). Таким образом, система $\dot{\psi}_m$ полна в пространстве вектор-функций \dot{A} , таких, что $P_0 L(\varepsilon) \dot{A} = 0$.

6. Вместо условия (29) можно положить $\sigma_1^n = 0$, $l \geq 1$. Тогда коэффициент $\alpha_{1,m}^n = c_1^n N_n^{1/2}$ будет определяться из условия (22) разрешимости уравнения (21), которое приводится к виду

$$S_\xi^n \frac{\partial c_1^n}{\partial \xi} + S_\eta^n \frac{\partial c_1^n}{\partial \eta} + \frac{1}{\sqrt{N_n}} \left\{ [\Gamma_\xi \frac{\partial \dot{A}_{01}^n}{\partial \xi}, \dot{\varphi}_n] + [\Gamma_\eta \frac{\partial \dot{A}_{01}^n}{\partial \eta}, \dot{\varphi}_n] + \right. \\ \left. + \left(-\sin \alpha^n \frac{\partial \sigma_0^n}{\partial \xi} + \cos \alpha^n \frac{\partial \sigma_0^n}{\partial \eta} \right) [\Gamma_n \dot{A}_{01}^n, \dot{\varphi}_n] \right\} = 0. \quad (30)$$

Здесь \dot{A}_{01}^n - часть решения \dot{A}_1^n , определенная первыми двумя слагаемыми в (28). Нахождение c_1^n , $l \geq 1$, из (30) в силу системы характеристик (19) сводится к интегрированию вдоль луча. Поэтому $\alpha_{1,n}^n$ и, следовательно, \dot{A}_1^n , $l \geq 1$, в общем случае содержат секулярные члены. Аналогичной особенностью обладают

решения, построенные в работах [3-6].

В представлении (4) секулярные члены, возникающие при интегрировании уравнения (23), оказываются в показателе экспоненты и могут быть интерпретированы как дополнительный интегральный набег фазы, обусловленный нерегулярностью волновода [1,2]. По индукции можно показать, что $\partial \sigma_1^n / \partial \xi$ и $\partial \sigma_1^n / \partial \eta$, а следовательно, и H_1^n не содержат секулярные члены. Таким образом, при

использовании представления (4) несколько ослабляются ограничения на расстояния, на которых применима формальная асимптотика по параметру плавности $\varepsilon \ll 1$.

На выяснении ограничений на волновое число k , при которых применима асимптотика (4), здесь не останавливаемся, так как ясно, что они не менее жесткие, чем в скалярных задачах [6]. Метод двухмасштабных разложений, несмотря на наличие волнового числа в знаменателях правых частей уравнений (6), в общем случае является низкочастотным. Это связано с тем, что используемая в нем форма решения не учитывает такие особенности поля собственной (нормальной) волны нерегулярного волновода, как искривление фазового фронта и искажение аргумента поперечной собственной функции, подробно исследованные в случае скалярных двумерных задач [1,2].

В заключение отметим, что с помощью полного набора собственных волн при соответствующем их обобщении в окрестностях каустик может быть представлено поле точечного источника [3-6].

Авторы благодарят В. В. Кириллова за полезные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков В. А., Попов А. В. В кн.: Прямые и обратные задачи теории дифракции. - М.: ИРЭ, 1979. С. 167.
2. Авдеев А. Д., Буслаев В. С., Попов А. В. В кн.: Распространение волн в слоистых средах. - Казань, 1988. С. 6.
3. Weinberg N., Burridge R. // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. N 1. P. 63.
4. Барридж Р., Вейнберг Г. В кн.: Распространение волн и подводная акустика. - М.: Мир, 1980. С. 76.
5. Булдырев В. С., Буслаев В. С. // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. 1981. Т. 117. С. 39.
6. Булдырев В. С., Буслаев В. С. Препринт ИРЭ АН СССР N 45(417). - М., 1984.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1967.
8. Рыбачек С. Т. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. N 9. С. 1300.
9. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. - М.: Наука, 1980.
10. Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. N 9. С. 1283.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
26 апреля 1990 г.

EIGENWAVES ASYMPTOTIC FOR THE PLANE ANISOTROPIC
SMOOTHLY IRREGULAR WAVEGUIDE

A. D. Avdeev, V. V. Novikov

An extension is proposed for the method of horizontal rays and vertical modes developed in underwater acoustics to include the three-dimensional inhomogeneous anisotropic case of electrodynamic problem.

УДК 537.874.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МНОГОУГОЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ МЕТОДОМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ

А. М. Коцур, В. П. Чумаченко

Разработан метод решения задачи дифракции электромагнитных волн E - и H -поляризации на диэлектрическом теле многоугольного поперечного сечения. В каждой из областей, образованных границами раздела сред, поле ищется в виде суммы функций, относящихся к отдельным звеньям контура и представляемых рядами по функциям Матье. Обсуждаются результаты, полученные при решении модельных задач. Показана возможность использования треугольной диэлектрической призмы в качестве замедляющей линзы.

1. В работах [1-3] и др. развит метод, позволяющий в резонансном диапазоне частот алгоритмизировать решение задач дифракции волн на двумерных проводящих кусочно-линейных объектах и получивший название метода произведения областей (ПО). Разработаны эффективные вычислительные алгоритмы, предназначенные для исследования электродинамических характеристик многоугольных цилиндрических поверхностей и их систем, E - и H -плоскостных волноводных трансформаторов, волноводов сложной формы, плоскостных многоугольных излучающих структур.

Это позволило на единой методологической основе решить ряд задач электродинамики, имеющих важное прикладное значение и тесно связанных с проблемами физики и техники СВЧ. Обеспечение включения в сферу применений метода ПО многоугольных объектов, содержащих диэлектрики, существенно расширит его использование для изучения волновых явлений в сложных электродинамических системах. В настоящей работе на основе метода ПО решена задача дифракции E - и H -поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом цилиндре с произвольным многоугольным контуром поперечного сечения.

Отметим, что в настоящее время основными методами решения подобных задач являются методы интегральных уравнений [4-7]. Широки возможности обладает метод вторичных источников [8]. Обзор физических задач, связанных с диэлектрическими структурами, и методов их решения содержится в [9].

2. Пусть на однородный диэлектрический цилиндр, контур поперечного сечения которого представляет собой многоугольник (рис. 1а), падает волна E - или H -поляризации. Введем для каждого i -го звена контура систему прямоугольных (x_i, y_i) и эллиптических (ξ_i, η_i) координат, связанных соотношениями

$$x_i = f_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i, \quad y_i = f_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (i)$$

где f_i - половина длины звена, N - число звеньев ломаной. Обозначим искомую продольную компоненту поля во внутренней области через u_i , а

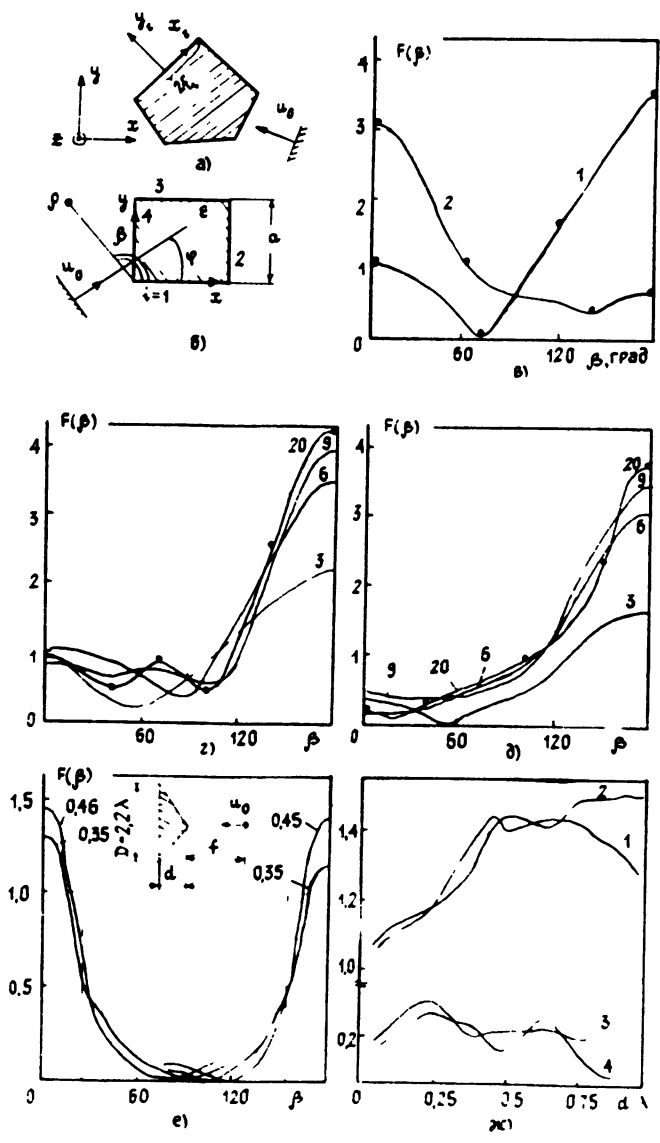


Рис 1

через u_{II}^s - поле, рассеянное цилиндром во внешней области. Полное поле во внешней области определяется как

$$u_{II} = u_{II}^s + u_0, \quad (2)$$

где u_0 - первичное поле. Задача сводится к отысканию функций u_I, u_{II}^s , удовлетворяющих однородным уравнениям Гельмгольца в своих областях определения, условиям сопряжения

$$u_I|_{y_1=0} = u_{II}|_{y_1=0}, \quad p \frac{\partial u_I}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0} = \frac{\partial u_{II}}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

условиям на ребре и условию излучения. Здесь $p = \epsilon_{II}/\epsilon_I$ для H -волн и $p = 1$ для E -волн, $\epsilon_I, \epsilon_{II}$ - относительные диэлектрические проницаемости сред. Следуя методу ПО, представим искомые величины в виде суммы функций, которые определены вне соответствующих звеньев контура и удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условию излучения

$$u_I = \sum_{i=1}^N u_i^I, \quad u_{II}^* = \sum_{i=1}^N u_i^{II}. \quad (4)$$

Каждая из областей I, II ограничена замкнутым контуром, что позволяет [2] представить функции-слагаемые в виде разложений по четным функциям Матье:

$$u_i^M = \sum_{n=0}^{\infty} {}^M D_n^i \frac{Me_n^{(2)}(\xi_i, q_i^M)}{Me_n^{(2)}(0, q_i^M)} ce_n(\eta_i, q_i^M), \quad M = I, II, \quad (5)$$

где $q_i^M = (\pi f_1 \sqrt{\epsilon^M} / \lambda)^2$, λ - длина волны в свободном пространстве, $Me_n^{(2)}$ - присоединенные функции Матье [10]. Относительно коэффициентов разложения ${}^M D_n^i$ будем предполагать, что они принадлежат пространству последовательностей \tilde{I}^1 с нормой

$$\sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} |{}^I D_n^i| \sqrt{n} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} |{}^{II} D_n^i| \sqrt{n} < +\infty.$$

Можно показать, что это условие обеспечивает конечность энергии поля в любой ограниченной области пространства и, следовательно, обеспечивает выполнение условия на ребре. Удовлетворяя условиям сопряжения (3) и воспользовавшись условием ортогональности функций Матье [10], придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов разложения ${}^I D_n^i, {}^{II} D_n^i$:

$$\begin{aligned} & {}^I D_m^i + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} {}^I D_n^j {}^{II} a_{mn}^{ij} + \sum_{n=0}^{\infty} {}^{II} D_n^i {}^I a_{mn}^{ii} + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{II} D_n^j \times \\ & \quad \times {}^{II} a_{mn}^{ij} = {}^I C_m^i \quad (6) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} {}^I D_n^i {}^{II} a_{mn}^{ii} + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} {}^I D_n^j {}^{II} a_{mn}^{ij} + {}^{II} D_m^i + \\ & + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{II} D_n^j {}^{II} a_{mn}^{ij} = {}^{II} C_m^i \quad (i, j = 1, \dots, N, m = 0, \dots, \infty), \end{aligned}$$

где

$${}^I a_{mn}^{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_j, q_j^I)}{Me_n^{(2)}(0, q_j^I)} ce_n(\eta_j, q_j^I) \right] \Big|_{y_i=0} \times$$

$$\times ce_m(\eta_1, q_j^I) d\eta_1,$$

$$I^{II} \alpha_{mn}^{II} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi ce_n(\eta_1, q_1^{II}) ce_m(\eta_1, q_1^I) d\eta_1,$$

$$I^{II} \alpha_{mn}^{IJ} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_j, q_j^{II})}{Me_n^{(2)}(0, q_j^{II})} ce_n(\eta_j, q_j^{II}) \right] \Big|_{y_1=0} \times \\ \times ce_m(\eta_1, q_1^I) d\eta_1,$$

$$I C_m^I = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0|_{y_1=0} ce_m(\eta_1, q_1^I) d\eta_1,$$

$$II I \alpha_{mn}^{II} = \frac{2p}{\pi} \frac{Me_m^{(2)}(0, q_1^{II})}{Me_m^{(2)'}(0, q_1^{II})} \frac{Me_n^{(2)'}(0, q_1^I)}{Me_n^{(2)}(0, q_1^I)} \times \\ \times \int_0^\pi ce_n(\eta_1, q_1^I) ce_m(\eta_1, q_1^{II}) d\eta_1, \quad (7)$$

$$II I \alpha_{mn}^{IJ} = -\frac{2p}{\pi} \frac{Me_m^{(2)}(0, q_1^{II})}{Me_m^{(2)'}(0, q_1^{II})} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_j, q_j^I)}{Me_n^{(2)}(0, q_j^I)} \times \right. \\ \left. \times ce_n(\eta_j, q_j^I) \right] \Big|_{y_1=0} ce_m(\eta_1, q_1^{II}) f_1 \sin\eta_1 d\eta_1,$$

$$II II \alpha_{mn}^{IJ} = \frac{Me_m^{(2)}(0, q_1^{II})}{Me_m^{(2)'}(0, q_1^{II})} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_j, q_j^{II})}{Me_n^{(2)}(0, q_j^{II})} ce_n(\eta_j, q_j^{II}) \right] \Big|_{y_1=0} \times \\ \times ce_m(\eta_1, q_1^{II}) f_1 \sin\eta_1 d\eta_1,$$

$$II C_m^I = -\frac{2}{\pi} \frac{Me_m^{(2)}(0, q_1^{II})}{Me_m^{(2)'}(0, q_1^{II})} \int_0^\pi \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0} \times \\ \times ce_m(\eta_1, q_1^{II}) f_1 \sin\eta_1 d\eta_1.$$

При выводе формул (6), (7) необходимо иметь в виду, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_{y_1 = \pm 0} = \pm \frac{1}{f_1 |\sin \eta_1|} \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

а изменению переменной x_1 от $-f_1$ до f_1 соответствуют при $y_1 = \pm 0$ интервалы изменений $\eta_1 (\pm \pi; 0)$. Отметим, что

$$ce_n(\eta_1, q_1^M) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \cos(m\eta_1), \quad M = I, II$$

и имеют место соотношения $I \quad II \quad a_{mn}^{II} \rightarrow -\delta_{mn}, \quad II \quad I \quad a_{mn}^{II} \rightarrow p\delta_{mn}$ при

$m, n \rightarrow \infty$, где δ_{mn} - символ Кронекера. Именно близость матриц $(I \quad II \quad a_{mn}^{II})$, $(II \quad I \quad a_{mn}^{II})$ к диагональному виду является одним из основных факторов, обеспечивающих хорошую обусловленность СЛАУ (6). После замены переменных вида $A_n^i = I D_n^i - II D_n^i, \quad B_n^i = p I D_n^i + II D_n^i$ СЛАУ несложно переписать в виде стандартной формы записи систем второго рода. Опираясь на асимптотические оценки интегралов, приведенные в [3], можно установить, что эта система обладает вполне непрерывным в \tilde{I}^1 матричным оператором и разрешима методом редукции.

3. Алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ, предназначенной для расчета в резонансном диапазоне частот характеристик рассеяния одного или нескольких диэлектрических цилиндров с произвольным многоугольным контуром поперечного сечения при дифракции волн E - и H -поляризации. С учетом ортогональности тригонометрических функций вычисление величин $I \quad II \quad a_{mn}^{II}, \quad II \quad I \quad a_{mn}^{II}$ сводится к суммированию произведений коэффициентов Фурье-разложений функций ce_n [10]. Другие интегралы, определяющие элементы матрицы СЛАУ, близки к интегралам, появляющимся при решении методом ПО задач дифракции на проводящих структурах, и их значения находятся при помощи тех же алгоритмов.

Перейдем к обсуждению численных результатов, полученных при решении модельных задач дифракции. Обозначим M_1^k - число слагаемых после усечения в разложении функции u_1^k , относящейся к i -му звену контура в k -й среде, $F(\beta)$ - диаграмма направленности рассеянного поля, вычисляемая при условии падения плоской волны единичной амплитуды по формуле

$$F(\beta) = \lim_{M \rightarrow \infty} u_{II}^s / \sqrt{2/\pi k \rho}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (8)$$

где (ρ, β) - полярная система координат с полюсом в точке $(0, 0)$.

В табл. 1 приведены результаты численного исследования сходимости метода в случае дифракции плоской E - и H -поляризованной волны единичной амплитуды на цилиндре квадратного сечения ($\epsilon = 4, \quad a/\lambda = 0, 407$), показанного на рис. 1б (направление падения волны соответствует $\varphi = 0$). Точки, в которых вычислялись значения поля, расположены в таблице в порядке их приближения к границе раздела сред, координаты точек нормированы на длину волны. Зависимости величины поля в точке от параметра M^* (количество членов, учитываемых в разложениях (5)) приведены до тех значений, начиная с которых они с точностью до приведенного числа цифр не изменяются. Как видно из таблицы, с

ростом n° решение быстро стабилизируется, причем скорость стабилизации тем выше, чем дальше от границы раздела сред расположена точка наблюдения.

Таблица 1

n°	$F(180^{\circ})$	$x = 0,6$ $y = 0,2$	$x = 0,2$ $y = 0,2$	$x = -1 \cdot 10^{-6}$ $y = 0,2$	$x = 1 \cdot 10^{-6}$ $y = 0,2$	Поляризация
2	2,937	1,489	0,775	1,353	1,558	E
3	2,969	1,483	0,722	1,144	1,098	
4	2,999	1,368	0,802	1,516	1,636	
5	2,998	1,406	0,791	1,469	1,466	
6	3,001	1,404	0,799	1,489	1,487	
7	-	-	-	1,488	1,489	
8	-	-	-	1,488	1,488	
2	2,697	0,994	2,025	1,680	2,134	
3	2,555	1,059	2,312	1,672	1,647	
4	2,540	1,014	2,174	1,901	1,944	
5	2,558	1,010	2,167	1,902	1,897	
6	-	1,006	2,166	1,905	1,902	
7	-	-	-	1,906	1,906	

В окрестностях ребер поперечные компоненты поля должны иметь особенности вида $r^{\nu-1}$, где r - расстояние от ребра. В случае прямого угла (в предположении, что характер сингулярности соответствует характеру поведения статического поля в окрестности ребра) $\nu = (2/\pi) \times \arccos(\epsilon - 1)/(2(\epsilon + 1))$ [11]. Особенности поля у ребра определяют поведение коэффициентов разложения ${}^M D_n^1$ при больших значениях n . Пользуясь методикой работы [1], можно установить, что

$${}^M D_n^1 = O(1/n^{2+\chi}), \quad \chi = 2\nu - 1, \quad M = I, II. \quad (9)$$

На рис. 2а, б начиная со значения $n = 1$ в логарифмическом масштабе приведены коэффициенты ${}^I D_n^1$ при $\epsilon = 4$ ($\nu = 0,806$) для случаев E-и H-поляризации соответственно. Угол падения первичного поля $\varphi = 0$. Штриховой линией проведены прямые, тангенс угла наклона которых равен минус $(2 + \chi)$ (статическая оценка поведения поля у ребра). Видно, что зависимости старших коэффициентов разложения от n близки к (9).

Таким образом, метод позволяет получить с достаточной для практики точностью оценки всех характеристик поля. На рис. 1в приведены рассчитанные диаграммы направленности поля, рассеянного цилиндром квадратного сечения (рис. 1б) с $\epsilon = 2,434$, $a/\lambda = 0,557$ при падении плоской волны E-поляризации (угол падения $\varphi = 0$) и H-поляризации (угол падения $\varphi = 180^{\circ}$) (кривые 1 и 2 соответственно). Точками отмечены результаты решения этой задачи методом интегральных уравнений при наличии скруглений углов дугами малого радиуса. Данные заимствованы с учетом отличия в определении $F(\beta)$ из работы [5]. Сравнение результатов показывает, что полученное решение хорошо согласуется

ся с известным.

На рис. 1г, д приведены диаграммы направленности вторичного поля

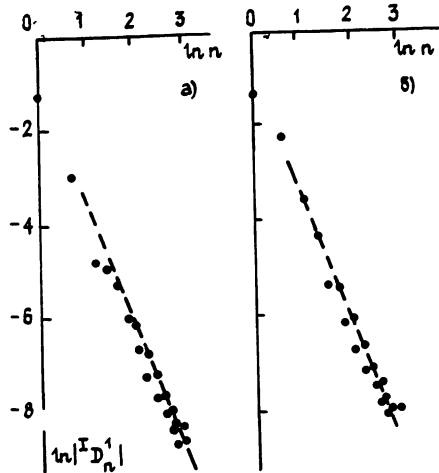


Рис 2.

при дифракции плоской волны на правильном N -угольном цилиндре, вписанном в круговой цилиндр постоянного радиуса $R/\lambda = 0,35$. Волна падает в направлении $\varphi = 0$, $\varepsilon = 2,434$, индекс кривой соответствует значению N . Рисунок 1г соответствует случаю E -поляризации, рис. 1д - случаю H -поляризации. Точками отмечены результаты решения задачи для кругового цилиндра с радиусом $R/\lambda = 0,35$ [5]. С ростом N зависимости $F(\beta)$ быстро сближаются с предельным случаем. Это свидетельствует о том, что при расчете характеристик рассеяния гладких диэлектрических структур сложного профиля успешно может быть использовано их кусочно-линейное приближение.

4. На рис. 1е приведены результаты исследования фокусирующих свойств треугольной диэлектрической призмы ($\varepsilon = 2,434$) небольших волновых размеров. Объект облучается цилиндрической волной ($u_0 = H_0^{(2)} \times (kr_{ист})$, $H_0^{(2)}$ - функция Ганкеля, $r_{ист}$ - расстояние до источника) в секторе $\pm 23^\circ$ от направления $\varphi = 0$ при падении волны E -поляризации и от направления $\varphi = 180^\circ$ при падении волны H -поляризации. Диаграммы направленности источника поля приведены на рис. 1е пунктирными линиями. Источник поля находится на расстоянии $f = 2,2\lambda$ от призмы (см. рис. 1е). Параметром семейств кривых является значение толщины призмы d/λ .

На рис. 1ж показаны значения максимума диаграммы направленности полного поля в случае E - и H -поляризации $F(180^\circ)$ (кривые 1 и 2) и значения диаграммы $F(0)$ (отраженное поле) (кривые 3 и 4 соответственно) как функции параметра d/λ . Значение $d/\lambda = 0,39$ является расчетным для линзы с гиперболическим профилем преломляющей поверхности исходя из соотношений геометрической оптики [12]. Видно, что для линзы малых волновых размеров геометрическое приближение может быть использовано лишь для определения области значений геометрических параметров структуры, при которых можно ожидать наличие фокусирующего эффекта. Как видно, фокусирующие свойства рассматриваемой структуры не имеют резонансного характера и сохраняются в широком диапазоне частот.

Время решения задачи дифракции по разработанному алгоритму (расчет диаграмм направленности поля и значений поля в любой точке пространства) определяется волновыми размерами объекта и количеством учитываемых в разложениях (5) членов. Для объекта небольших волновых размеров (цилиндр квадратного сечения ($\varepsilon = 2,4$) с длиной контура поперечного сечения 2λ) время решения задачи на ЭВМ ЕС-1046 составляет 35 секунд. При этом обеспечивается получение четырех правильных значащих цифр в значении диаграммы направленности.

В заключение отметим, что область приложений разработанного алгоритма легко может быть расширена на случай диэлектрических многоугольных структур с частично металлизированными границами раздела сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чумаченко В. П. //Радиотехника и электроника. 1988. Т.33. N 8. С.1600.
2. Засовенко В. Г., Чумаченко В. П. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. N 744-В88. Деп. от 27 января 1988 г.
3. Чумаченко В. П. //ДАН УССР. 1989. Сер. А. N 7. С.73.
4. Захаров Е. В., Котик И. П., Сивов А. Н. //В сб.: Вычислительные методы и программирование. - М.: Гос. ун-т, 1969. Вып. 3. С.177.
5. Солодухов В. В., Васильев Е. Н. //В сб.: Вычислительные методы и программирование. - М.: Гос. ун-т, 1973. Вып. 20. С.144.
6. Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. Численные методы в задачах дифракции. - М.: Гос. ун-т, 1987.
7. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. - Киев: Наукова думка, 1986.
8. Заридзе Р. С., Хатиашвили Д. Ш. Исследование резонансных свойств некоторых открытых систем. - Тбилиси: Гос. ун-т, 1984.
9. Нефедов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. - М.: Наука, 1979.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1967.
11. Бобровников М. С., Замараева В. П. //Изв. вузов. Физика. 1973. N 9. С.50.
12. Зелкин Е. Г., Петрова Р. А. Линзовые антенны. - М.: Сов. радио, 1974.

Запорожский машиностроительный институт

Поступила в редакцию
21 марта 1990 г.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY A MULTIANGLE DIELECTRIC CYLINDER USING THE METHOD OF REGIONS PRODUCT

A. M. Kotsur, V. P. Chumachenko

A method is developed for solution of the problem of diffraction of E - and H -polarization waves by a dielectric cylindrical body with multiangle cross-section. In every region, formed by media boundaries, the field is considered to be a sum of functions, which are related to individual sections of the circuit and presented by rows of Mathieu's functions. The results of model problem solutions are discussed. The possibility is shown to use a triangular dielectric prism as a decelerating lens.

УДК 621.396.677.494

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КРАЕВЫХ ВОЛН ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. Д. Габриэльян

Получено представление плотности поверхностного тока для импедансных тел больших электрических размеров с ребрами. Данное представление позволяет значительно сократить объем вычислений и обеспечить точность расчетов.

Метод интегральных уравнений [1] находит широкое применение при решении задач дифракции на телах сложной формы. Однако его использование для тел больших электрических размеров связано со значительными вычислительными затратами, что обусловлено видом аппроксимации плотности поверхностного тока, например, в виде множества сплайн-функций на равномерной сетке с шагом Δ типа полочек [2]. Одним из путей снижения объема вычислений для тел с ребрами является использование аппроксимации плотности поверхностного тока на основе метода краевых волн (МКВ) [3]. Для случая идеально проводящих тел такое представление получено в [4-6].

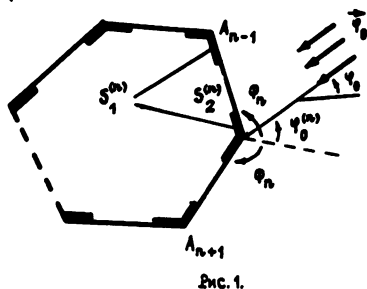
В настоящей работе рассматривается вид аппроксимации плотности поверхностного тока, позволяющий для тел больших электрических размеров с импедансными граничными условиями, сечением которых является произвольный многоугольник, значительно сократить объем вычислений при обеспечении точности расчетов.

Рассмотрим произвольный N -угольник, возбуждаемый H -поляризованной волной, приходящей с направления φ_0 на грани $A_n A_{n+1}$ (n -й грани) которого задан поверхностный импеданс Z_n (рис. 1.). Считаем, что зависимость всех величин от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, который в дальнейшем опущен. Для аппроксимации плотности поверхностного тока в области S_1 , вблизи особых точек тела (ребер многоугольника), используем множество сплайн-функций на равномерной сетке с шагом Δ типа полочек, а вдали от них - в области S_2 - вид функции определяется на основе МКВ соотношениями

$$K(r) = \begin{cases} \sum_{m=1}^N B_m^{(n)} P(r - r_m), & r \in S_1^{(n)} \\ j_0^{(n)} + j_1^{(n)}, & r \in S_2^{(n)}, \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $P(r - r_m)$ - множество сплайн-функций на равномерной сетке с шагом Δ типа полочек; $B_m^{(n)}$ - неизвестные коэффициенты разложения; $j_0^{(n)}$ - равномерная (вычисляемая в приближении физической оптики) и

$j_1^{(n)}$ - неравномерная (являющаяся суммой токов при падении волны на двухгранные углы с вершинами A_n и A_{n+1}) части поверхностного тока, соответственно, на грани $A_n A_{n+1}$; области $S_1^{(n)} = S_1 \cap A_n A_{n+1}$, $S_2^{(n)} = S_2 \cap A_n A_{n+1}$ показаны на рис. 1.



Использование решения задачи дифракции плоской волны на клине с импедансными гранями [7] и известных соотношений между напряженностью магнитного поля и плотностью поверхностного тока позволяет получить следующие выражения для представления $j_0^{(n)}$, $j_1^{(n)}$:

$$j_0^{(n)} = \sum_p u_p^{(n)}, \quad (2)$$

где

$$u_n^{(p)} = \begin{cases} (-1)^p \{ \psi[(-1)^p \varphi_0^{(n)} + 2p\phi_n] / \psi(\varphi_0^{(n)}) \} \exp[-ikr \cos((-1)^{p+1} \varphi_0^{(n)} + 2p\phi_n)] & \text{при } |-2p\phi_n - (-1)^p [gd(\text{Im}\varphi_0^{(n)} + \text{Re}\varphi_0^{(n)})]| < \pi \\ 0 & \text{при } |-2p\phi_n - (-1)^p [gd(\text{Im}\varphi_0^{(n)} + \text{Re}\varphi_0^{(n)})]| > \pi \end{cases},$$

$(p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$

$$j_1^{(n)} = A_0^{(n)} \exp(ikr) / \sqrt{kr} + A_0^{(n)'} \exp(ik\rho) / \sqrt{k\rho} + v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + v_3^{(n)}, \quad (3a)$$

где

$$v_1^{(n)} = \begin{cases} A_1^{(n)} \exp(ikr) + A_1^{(n)'} \exp(ik\rho) & \text{при } \sqrt{2kr} \cos((\vec{\tau}^{(n)}, \vec{\phi}_0) / 2) \approx 0 \\ 0 & \text{при } \sqrt{2kr} \cos((\vec{\tau}^{(n)}, \vec{\phi}_0) / 2) \gg 1 \end{cases}; \quad (3б)$$

$$v_2^{(n)} = \begin{cases} A_2^{(n)} \exp(ikr \cos \theta_n) + A_2^{(n)'} \exp(ikr \cos \theta_n) & \text{при } gd(\text{Im} \theta_n) + \text{Re} \theta_n < 0 \\ 0 & \text{при } gd(\text{Im} \theta_n) + \text{Re} \theta_n > 0 \end{cases}; \quad (3в)$$

$$v_s^{(n)} = \begin{cases} A_3^{(n)} \exp[ikr \cos(2\phi_n + \theta_{n-1})] + A_3^{(n)'} \exp[ikr \cos(2\phi_n + \theta_{n+1})] \\ \text{при } 2\phi_{n-1, n+1} < -gd(\text{Im } \theta_{n-1, n+1}) - \text{Re } \theta_{n-1, n+1} \\ 0 \quad \text{при } 2\phi_{n-1, n+1} > -gd(\text{Im } \theta_{n-1, n+1}) - \text{Re } \theta_{n-1, n+1} \end{cases} \quad (3г)$$

В соотношениях (2), (3а) $2\phi_n$ - внешний угол между гранями $A_n A_{n+1}$ до вершин A_n и A_{n+1} соответственно; $\sin \theta_n = Z_n/Z_0$, Z_0 - волновое сопротивление внешнего пространства; $\psi(\cdot)$ - функция Малюжинца; $\vec{\psi}_0$ - единичный вектор, определяющий направление падения плоской волны, $\vec{\tau}^{(n)}$ - единичный вектор, касательный $A_n A_{n+1}$; $gd x = \arccos(1/\text{ch } x)$.

Коэффициенты $A_1^{(n)}$ и $A_1^{(n)'}$ ($i = \overline{0, 3}$) при членах, описывающих дифракцию на ребрах A_n и A_{n+1} соответственно, предполагаются неизвестными.

Необходимо отметить, что размер области $S_1^{(n)}$ выбирается таким образом, чтобы в области $S_2^{(n)}$ выполнялись условия $r, \rho > 10 \delta$, где δ - толщина скин-слоя. При этом в области $S_2^{(n)}$ справедливы импедансные граничные условия и, следовательно, представление $j_0^{(n)}$, $j_1^{(n)}$ в виде (2), (3а). Подстановка соотношений (1) - (3а) в интегральное уравнение, к которому может быть сведено решение граничной задачи [1], и последующее решение одним из известных численных методов позволяет определить неизвестные коэффициенты разложения $B_m^{(n)}$, $A_1^{(n)}$, $A_1^{(n)'}$ ($i = \overline{0, 3}$). В данной статье использовался метод коллокаций. В области $S_1^{(n)}$ равномерно расположены с шагом Δ ($\Delta = 0,1\lambda$) M точек коллокаций ($M = 5$). В области $S_2^{(n)}$ число последних равно числу членов, используемых в представлении $j_1^{(n)}$. Выбор последних определяется условием (3б) - (3г). На рис. 2 - 5 приведены результаты расчета поверхностного тока при дифракции плоской волны на теле с постоянным импедансом, сечением которого является квадрат со стороной $4,8\lambda$ для значений поверхностного импеданса $\sin \theta = 0,25, 0,25i, -0,25$ и $-0,25i$ соответственно.

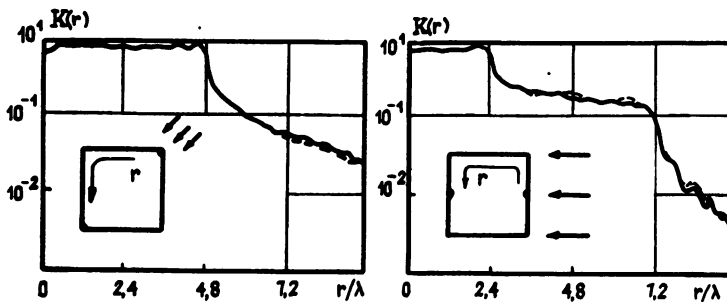


Рис. 2,3

Сплошная кривая соответствует результатам, полученным на основе аппроксимации плотности поверхностного тока в виде множества сплайн-функций на равномерной сетке с шагом Δ типа полочек, пунктирная – предлагаемой в работе. Для случая возбуждения тела, показанного на рис. 2 в соответствии с условиями (3б) – (3г) в представлении $j_1^{(n)}$, достаточно использовать только члены вида $\exp(ikr)/\sqrt{kr}$ и $\exp(ik\rho)/\sqrt{k\rho}$, при этом достигается хорошее совпадение результатов, полученных при различных видах аппроксимации. При касательном падении волны независимо от значения поверхностного импеданса, как и в случае идеально проводящих тел, происходит возбуждение поверхностной волны на гранях, по отношению к которым направление распространения падающего поля является касательным. Для описания указанной волны используются члены вида v_1 , что позволяет добиться близкого совпадения результатов. При значениях поверхностного импеданса $-0,25$ выполняются условия возбуждения поверхностных волн, описываемых с использованием членов v_2 . При чисто мнимых и отрицательных значениях поверхностного импеданса происходит возбуждение поверхностных волн и их прохождение с грани на грань. В этом случае в представлении используются члены v_2 и v_3 . Необходимо отметить, что члены v_1 , v_2 и v_3 отличаются как по условиям возникновения, так и по всей структуре.

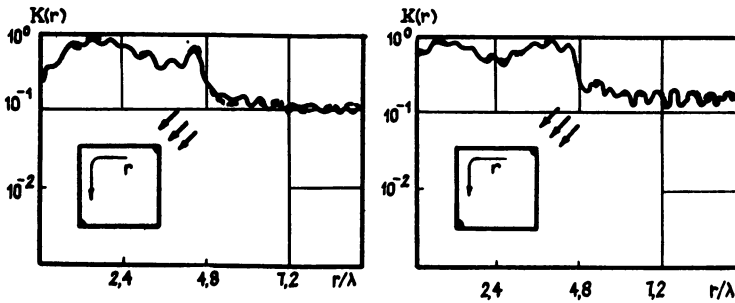


Рис. 4.5.

Предлагаемая в работе аппроксимация плотности поверхностного тока позволяет при данных размерах тела в зависимости от значения поверхностного импеданса сократить объем вычислений в 6 – 10 раз, при этом достигаемый выигрыш возрастает при увеличении размеров тела.

Таким образом, в работе предложена аппроксимация плотности поверхностного тока, позволяющая при решении задачи дифракции на многоугольнике больших электрических размеров существенно сократить объем вычислительных затрат при обеспечении точности расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. Численные методы в задачах дифракции. – М.: Гос. ун-т, 1987.
2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционные методы. – М.: Наука, 1981. С. 97.
3. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. – М.: Сов. радио, 1962.
4. Burnside W.D., Yu C.L., Marfetta R.I. //IEEE Trans. 1975. V. AP-23. N 3. P.551.

5. Тарасенко О. М., Габриэльян Д. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 8. С. 1015.
6. Габриэльян Д. Д., Тарасенко О. М., Шацкий В. В. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. N 6. С. 1159.
7. Малюжинец Г. Д. // ДАН СССР. 1958. Т. 121. N 3. С. 436.

Поступила в редакцию
19 марта 1990 г.,
после переработки
20 сентября 1990 г.

APPLICATION OF WEDGE WAVES TO NUMERICAL SOLUTION
OF PROBLEMS OF DIFFRACTION ON COMPLEX SHAPE BODIES
WITH IMPEDANCE FACES

D. D. Gabriel'yan

The representation of current density for complex shape bodies with impedance faces is presented. This representation permits one to decrease computations and provides a high accuracy of the results.

УДК 621.396.67

АНАЛИЗ РАБОТЫ АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ПРОСТРАНСТВЕННОГО СГЛАЖИВАНИЯ С ОПТИМАЛЬНЫМ ВЗВЕШИВАНИЕМ

И. В. Савинов, Г. В. Серебряков

Для повышения эффективности обработки сигналов в условиях коррелированных помех предложено использовать метод пространственного сглаживания с оптимальным взвешиванием. Показано, что использование этого метода приводит к улучшению характеристик адаптивных антенн. Приведены результаты численного моделирования.

1. В большинстве работ, посвященных теории адаптивных антенных решеток (ААР) [1-3], использовалось предположение о некоррелированности полезного и помеховых сигналов. В то же время, в задачах локации и оценивания пространственного спектра в средах с многолучевым распространением полезный и помеховый сигналы будут коррелированы. Как известно [4-6], наличие корреляции приводит к резкому ухудшению качества работы ААР, связанному с эффектом компенсации полезного сигнала помехой. В связи с этим получили развитие различные методы декорреляции помехи и полезного сигнала. Одним из широко используемых методов декорреляции является метод пространственного сглаживания, основанный на пространственном усреднении корреляционной матрицы принимаемого сигнала [6-10]. Целью настоящей работы является дальнейшее развитие этого метода, позволяющее повысить эффективность пространственной обработки сигналов при наличии коррелированных помех.

2. Рассмотрим N - элементную линейную эквидистантную ААР с линейными ограничениями, на которую с нормали падает узкополосный полезный сигнал, а с угла θ_1 по отношению к нормали - помеховый, коррелированный с полезным. Пренебрегая запаздыванием комплексных амплитуд на апертуре антенной решетки, запишем вектор принимаемого сигнала

$$\vec{X}(t) = a_0(t)\vec{S}_0 + a_1(t)\vec{S}_1 + \vec{\eta}(t), \tag{1}$$

где $\vec{\eta}(t)$ - вектор собственных шумов приемных элементов, $a_0(t)$, $a_1(t)$ - комплексные амплитуды полезного сигнала и помехи, \vec{S}_0 , \vec{S}_1 - векторы-фазоры полезного и помехового сигналов. В случае, когда полезный и помеховый сигналы представляют собой плоские волны, векторы-фазоры будут равны $\vec{S}_0^T = \{1, \dots, 1\}$, $\vec{S}_1^T = \{1, \exp(ju_1), \exp[j(N-1)u_1]\}$, где $u_1 = (2\pi/\lambda)d \sin \theta_1$, λ - длина волны, d - межэлементное расстояние. Ковариационная матрица принимаемого сигнала имеет вид

$$R_{xx} = \langle \vec{X}(t)\vec{X}^*(t) \rangle = \sigma_{\eta}^2 I + \sigma_0^2 \vec{S}_0 \vec{S}_0^* + \sigma_1^2 \vec{S}_1 \vec{S}_1^* +$$

$$+ |r| \sigma_0 \sigma_1 \{ \dot{S}_0 \dot{S}_1^* \exp(j\varphi_0) + \dot{S}_1 \dot{S}_0^* \exp(-j\varphi_0) \}, \quad (2)$$

где σ_η^2 , σ_0^2 , σ_1^2 - мощности собственного шума, сигнала, помехи, $|r|$ - модуль коэффициента корреляции между полезным сигналом и помехой, φ_0 - фаза коэффициента корреляции, равная постоянному фазовому сдвигу между $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$ в начале координат. Выберем для простоты начало координат в геометрическом центре антенны. Записав явное выражение для обратной корреляционной матрицы R_{xx} , можно определить основные характеристики ААР [9]. В частности, если мощная помеха приходит в боковой лепесток стационарной диаграммы направленности (ДН), то значение садаптированной ДН в направлении на помеху дается выражением [9]

$$|G(u_1)| = |r|^2 \frac{\nu_0}{\nu_1} = |r|^2 q^2, \quad (3)$$

а величина выходного отношения сигнал/шум (ОСШ) равна

$$\rho = N \nu_0 \frac{(1 - |r|^2)^2}{(1 - |r|^2) |r|^2 N \nu_0 + (1 + |r|^2 q^2)}, \quad (4)$$

где $\nu_0 = \sigma_0^2 / \sigma_\eta^2$, $\nu_1 = \sigma_1^2 / \sigma_\eta^2$ - относительные мощности полезного и помехового сигналов. Из (4) видно, что увеличение модуля коэффициента корреляции $|r|$ приводит к уменьшению выходного ОСШ и при $|r| \rightarrow 1$ эффективность работы ААР очень низка ($\rho \rightarrow 0$). Один из способов повышения качества работы в этих условиях основан на переключении M -элементной подапертуры вдоль линии апертуры M -элементной антенны. При этом дополнительные фазовые сдвиги для сигналов, приходящих с разных направлений отличных от нормали, будут разными в каждый момент времени. Тогда M -мерный вектор принимаемого сигнала l -й подапертуры запишется в виде

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \alpha_0(t) \dot{S}_0 + \alpha_1(t) \exp(j\phi_1) \dot{S}_1 + \dot{\eta}(t),$$

где ϕ_1 - дополнительный фазовый сдвиг. Ковариационная матрица (размерности $M \times M$) l -й подрешетки запишется следующим образом:

$$R_1 = \langle \dot{\tilde{X}}_1(t) \dot{\tilde{X}}_1^*(t) \rangle = \sigma_\eta^2 I + \sigma_0^2 \dot{S}_0 \dot{S}_0^* + \sigma_1^2 \dot{S}_1 \dot{S}_1^* + |r| \sigma_0 \sigma_1 \{ \dot{S}_0 \dot{S}_1^* \exp[-j(\varphi_0 + \phi_1)] + \dot{S}_1 \dot{S}_0^* \exp[j(\varphi_0 + \phi_1)] \}.$$

Предположим, что корреляционная матрица l -й подрешетки берется со своим весом v_l ($l = 1, K$, $K = N - M + 1$). Отметим, что все v_l

положительны, при этом выполняется условие нормировки $\sum_{l=1}^K v_l = 1$ или, в векторной форме,

$$\dot{V}^T \dot{E} = 1, \quad (5)$$

где $\dot{V}^T = \{v_1, \dots, v_K\}$, $\dot{E}^T = \{1, \dots, 1\}$. Сглаженная корреляционная матрица, образованная как среднее от корреляционных матриц подрешеток, будет иметь вид

$$\tilde{R}_{xx} = \sum_{i=1}^K v_i R_i. \quad (6)$$

Записав матрицу \tilde{R}_{xx} в явном виде и сравнив с (2), нетрудно видеть, что коэффициент корреляции между полезным сигналом и помехой будет равен [9,11]

$$\tilde{r} = r \sum_{i=1}^K v_i \exp\{j(1 - \frac{K+1}{2})u_i\},$$

или, в векторной форме,

$$\tilde{r} = r \tilde{V}^* \tilde{S}_1. \quad (7)$$

Отметим, что размерность вектора \tilde{S}_1 в (7) равна K . В случае, когда корреляционные матрицы всех подрешеток входят с равными весами, вектор \tilde{V} имеет вид

$$\tilde{V}^T = \frac{1}{K} \{1, \dots, 1\},$$

а коэффициент корреляции будет равен

$$\tilde{r} = r \sin K(u_1/2) [K \sin(u_1/2)]^{-1}. \quad (8)$$

Именно этот случай и соответствует классическому методу пространственного сглаживания, предложенному в [6-8,10]. Из (7) следует, что вид зависимости \tilde{r} от угла прихода помехи u_1 определяется выбором коэффициентов v_i . Определим оптимальный вектор \tilde{V}_{opt} , минимизирующий квадрат коэффициента корреляции между полезным и помеховым сигналами (мы рассматриваем $|\tilde{r}|^2$, поскольку величина \tilde{r} в общем случае комплексная) при условии (5). Заметим, что $|\tilde{r}|^2$ дается выражением $|\tilde{r}|^2 = |r|^2 \tilde{V}^* \tilde{S}_1 \tilde{S}_1^* \tilde{V}$. Тогда, используя метод множителей Лагранжа [1,3], нетрудно получить для

$$\tilde{V}_{opt} = D^{-1} \tilde{E} (\tilde{E}^T D^{-1} \tilde{E})^{-1}, \quad (9)$$

где $D = \tilde{S}_1 \tilde{S}_1^*$. Поскольку D имеет диадную форму, то обратная матрица D^{-1} не существует. Поэтому добавим в диагональные элементы матрицы D малый шум η^2 . Тогда матрица D имеет вид $D = \tilde{S}_1 \tilde{S}_1^* + \eta^2 I$, а обратная матрица D^{-1} определяется выражением

$$DD^{-1} = \frac{1}{\eta^2} \left(I - \frac{1}{\eta^2 + K} \tilde{S}_1 \tilde{S}_1^* \right).$$

Из (9) нетрудно получить для \tilde{V}_{opt} (предварительно положив $\eta^2 = 0$)

$$\vec{V}_{\text{opt}} = \frac{1}{K(1-\alpha^2)} \left(\vec{E} - \alpha \vec{S}_1 \right), \quad (10)$$

где $\alpha = \frac{1}{K} \vec{E}^T \vec{S}_1 = \frac{\sin K(u_1/2)}{K \sin(u_1/2)}$. Легко видеть, что \vec{V}_{opt} удовлетворяет условию (5). Значение для коэффициента корреляции примет вид

$$\tilde{r} = r \vec{V}_{\text{opt}}^* \vec{S}_1 = 0. \quad (11)$$

Выражение (11) справедливо для любого угла прихода помехи u_1 , за исключением случая $u_1 = 0$ ($\alpha = 1$), и любого $K \geq 2$. Таким образом, оптимальное распределение коэффициентов обеспечивает полную декорреляцию полезного сигнала и помехи независимо от угла прихода помехи и размеров подапертуры.

3. Несмотря на то, что оптимальное решение (9) существует, оно мало пригодно для практических целей, поскольку требует знания угла прихода помехового сигнала (матрица \mathbb{D}). Поэтому заменим в (8) априори неизвестную матрицу \mathbb{D} на известную матрицу R_{xx} (размерности

$K \times K$). Тогда выражение для вектора \vec{V} примет вид

$$\vec{V} = R_{xx}^{-1} \vec{E} (\vec{E}^T R_{xx}^{-1} \vec{E})^{-1}. \quad (12)$$

Рассмотрим для простоты случай полностью коррелированных сигналов ($|r| = 1$). Тогда обратная корреляционная матрица (размерности $K \times K$) R_{xx}^{-1} примет вид [4] ($\varphi_0 = 0$)

$$R_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \left[I - \frac{1}{1+K(\nu_0 + \nu_1) + 2K\sqrt{\nu_0\nu_1} \alpha} (\nu_0 \vec{S}_0 \vec{S}_0^* + \sqrt{\nu_0\nu_1} \times \right. \\ \left. \times (\vec{S}_0 \vec{S}_1^* + \vec{S}_1 \vec{S}_0^*) + \nu_1 \vec{S}_1 \vec{S}_1^* \right]. \quad (13)$$

Для \vec{V} из (12), используя (13), получим

$$\vec{V} = \frac{1}{K[1 + K\nu_1(1-\alpha^2)]} [(1 + K\nu_1(1 + \alpha q)) \vec{E} - K\nu_1(\alpha + q) \vec{S}_1]. \quad (14)$$

Заметим, что выражение (14) имеет смысл лишь при условии $q \leq 1$, лишь тогда компоненты вектора \vec{V} имеют положительные действительные части. При условии мощной помехи ($K\nu_1 \gg 1$) и слабого сигнала ($q \ll 1$) нетрудно видеть, что полученное решение (14) практически совпадает с оптимальным распределением (10). Значение для коэффициента корреляции примет вид

$$|\tilde{r}| = \frac{(\alpha/K\nu_1) - q(1 - \alpha^2)}{(1/K\nu_1) + (1 - \alpha^2)}. \quad (15)$$

На рис. 1 приведены зависимости коэффициента корреляции $|\tilde{r}|$ от угла прихода помехи u_1 для случая $K = 3$, $K\nu_1 \approx 20$ дБ и разных отношениях сигнал/помеха (кривая 1 соответствует случаю $q = 1$, кривая 2 - $q = 0,1$, кривая 3 - $q = 0,01$). Для сравнения на этом же рисунке приведена зависимость коэффициента корреляции от угла

прихода помехи для случая использования метода пространственного сглаживания (8) (кривая 4). Из рисунка видно, что при $q = 1$ зависимость $|\tilde{r}|^2$ от u_1 имеет наряду с достаточно узким главным лепестком очень высокий боковой. При малых q (кривые 2, 3) главный лепесток зависимости \tilde{r} от u_1 спадает медленнее, однако уровень бокового лепестка по сравнению с методом обычного пространственного сглаживания (кривая 4) гораздо ниже.

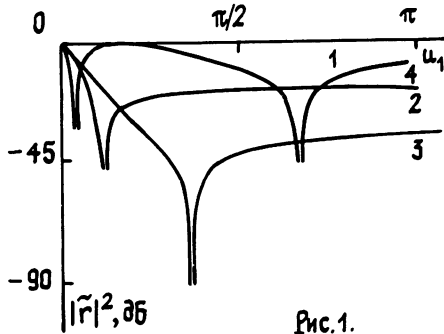


Рис.1.

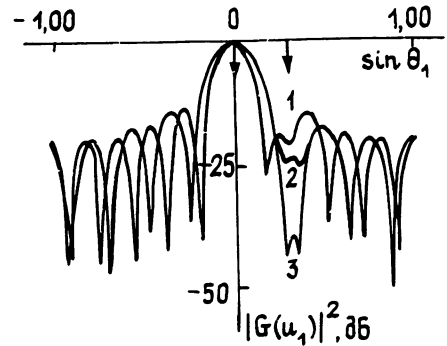


Рис.2.

4. Для иллюстрации полученных выражений рассмотрим результаты численного моделирования 11-элементной эквидистантной ААР с ограничениями, на которую по нормали падает полезный квазисинусоидальный сигнал, а с угла 18° - помеховый, такой же частоты. На рис. 2 приведены установившиеся значения диаграммы направленности решетки для различных методов обработки, при этом отношение сигнал/помеха равнялось $q = -10$ дБ. Кривая 1 соответствует использованию ААР без пространственного усреднения ($K = 1$), кривая 2 соответствует методу пространственного сглаживания ($K = 3$), кривая 3 - методу пространственного сглаживания с оптимальным взвешиванием ($K = 3$). Значения ДН в направлении на помеху соответствуют теоретическим (3). Из рис. 2 видно, что использование метода, предложенного выше, приводит к повышению эффективности пространственной обработки сигналов при наличии мощных по сравнению с полезным сигналом коррелированных помех. Отметим, что такая ситуация характерна, например, для сред, содержащих пассивные отражатели с большой эффективной площадью.

В заключение авторы благодарят А. Б. Гершмана за обсуждение результатов работы и полезные замечания, а также А. А. Мальцева и А. Г. Костерина за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. - М.: Радио и связь, 1986.
2. Гейбриел У. //ТИИЭР. 1976. Т. 64. N 2. С. 239.
3. Пистолькорс А. А. //Радиотехника. 1980. Т. 35. N 12. С. 8.
4. Мальцев А. А., Савинов И. В., Серебряков Г. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 2. С. 193.
5. Cantoni A., Godara L. C. //JASA. 1980. V. 67. N 4. P. 1247.
6. Shan T., Kailath T. //IEEE Trans. 1985. V. ASSP-33. N 3. P. 527.
7. Гейбриел У. //ТИИЭР. 1980. Т. 68. N 6. С. 19.
8. Reddy V. U. et al. //IEEE Trans. 1987. V. ASSP-35. N 7. P. 927.

9. Мальцев А. А., Серебряков Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 4. С. 453.
10. Коробко О. В., Таурогинский Б. И. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. N 7. С. 1403.
11. Такао К., Kikuma N. // IEEE Trans. 1987. V. AP-35. N 12. P.1389.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 апреля 1990 г.

THE PERFORMANCE ANALYSIS OF ADAPTIVE ANTENNA ARRAY USING SPATIAL
SMOOTHING METHOD WITH OPTIMAL WEIGHTING

I. V. Savinov, G. V. Serebryakov

The spatial smoothing method with optimal weighting is suggested for raising the signal processing efficiency under the conditions of correlated interference. This method is shown to result in improving adaptive antenna characteristics. The computer simulation results are presented.

УДК 621.373; 535.8

ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ВЗАИМНОЙ НАСТРОЙКИ ЭЛЕМЕНТОВ ВОЛОКОННОГО КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА НА СДВИГ ЕГО НУЛЯ

Г. Б. Малыкин

Рассмотрено влияние точности взаимной настройки элементов волоконного кольцевого интерферометра (ВКИ) - лазера, поляризатора и собственных осей двулучепреломления ОВС. Показано, что сдвиг нуля в ВКИ состоит из двух частей, постоянной и переменной, связанной с изменением температуры. Обе эти части зависят от состояния поляризации излучения на входе поляризатора, коэффициента экстинкции поляризатора и ориентации собственных осей ОВС относительно поляризатора. Переменная часть сдвига нуля зависит, кроме того, от величины двулучепреломления и h -параметра ОВС, а также от ширины спектра источника излучения. Сделаны численные оценки сдвига нуля в ВКИ.

Поляризационная невязанность в волоконном кольцевом интерферометре (ВКИ) определяет начальную разность фаз при наличии поляризатора с конечным коэффициентом экстинкции, связанную с различием в последовательных изменениях поляризационных характеристик излучения, распространяющегося во встречных направлениях. Изменение поляризационных характеристик излучения определяется поляризационными характеристиками одномодового волоконного световода (ОВС) - двулучепреломлением, коэффициентом связи ортогональных линейно поляризованных собственных мод ОВС (h - параметром) и взаимным положением собственных осей ОВС относительно оси пропускания поляризатора, а также состоянием поляризации излучения источника света.

Изучение этого вопроса проводилось в ряде работ [1-5], однако, на наш взгляд, недостаточно полно, без численных оценок влияния взаимного расположения отдельных элементов ВКИ на начальный сдвиг фазы. Наиболее интересные результаты получены в [5], где на основе статистического подхода в предположении, что усреднения по ансамблю и по времени (при изменении температуры) совпадают, приводится зависимость постоянной, т.е. не зависящей от времени части сдвига фазы нуля в ВКИ - φ_0 - от углов между собственными осями концов ОВС в кольцевой части ВКИ и направлением пропускания поляризатора - α_1 и α_2 . Там же приводится выражение для дисперсии величины

температурного дрейфа сдвига фазы нуля $\sqrt{\langle \Delta\varphi^2 \rangle}$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, обусловленного связью ортогональных линейно поляризованных мод. В [3] на основе временного подхода с применением матрицы Джонса ОВС в приближении модели точечной связи выводится выражение для сдвига фазы в ВКИ, на наш взгляд, неверное.

В данной работе дается вывод выражения для сдвига нуля φ_0 и его

дрейфа $\Delta\varphi$ для произвольных значений углов α_1 и α_2 . Поскольку связь ортогональных мод в ОВС приводит к тому, что собственные моды ОВС становятся слабоэллиптичными [6], то векторы Джонса таких мод в декартовой системе координат будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-a} \\ \sqrt{a} e^{i\gamma} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{1-a} e^{-i\gamma} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a = hl \ll 1$, l - длина ОВС, γ - разность фаз между x - и y -компонентой электрического поля. Поскольку связь ортогональных линейно поляризованных мод на случайных неоднородностях в ОВС носит статистический характер, то для ее полного описания, на наш взгляд, недостаточно одного h -параметра, который характеризует амплитуду случайной связи, необходима еще и фазовая характеристика - γ . Иными словами, эта связь характеризуется комплексной величиной $\sqrt{hl} e^{i\gamma}$, в которой модуль определяется h -параметром, а аргумент - величиной γ . Если за некоторое время температура ОВС меняется так, что изменение двулучепреломления $\Delta\beta l \gg 1$ (где $\beta = 2\pi \Delta n/\lambda$, Δn - разность показателей преломления в медленной и быстрой осях ОВС, λ - длина волны излучения), то изменение $\gamma \sim \Delta\gamma \gg 2\pi$.

Заметим здесь, что если в ВКИ (схема ВКИ включает источник излучения, первый светоделитель, поляризатор, второй светоделитель на входе волоконного кольца и фотоприемник, установленный в первом светоделителе, так что излучение, падающее на фотоприемник, дважды проходит поляризатор) используется широкополосный источник излучения, а ОВС обладает сильным двулучепреломлением, так что выполняется условие $L \gg l_{\text{деп}}$ (где L - длина волокна в кольце ВКИ,

$l_{\text{деп}} = \lambda^2/\Delta\lambda \Delta n$ - длина деполаризации, $\Delta\lambda$ - ширина спектра источника излучения), то, как показано в [5], на сдвиг фазы в ВКИ оказывает влияние лишь та часть излучения, которая "перекачалась" из основной моды в ортогональную на начальных участках волокна в кольце длиной $l_{\text{деп}}$. Остальное же "перекачавшееся" по всей длине волокна излучение в интерференции на выходе ВКИ не участвует. Поскольку нас интересует сдвиг нуля в интерферометрической картине, то в (1) следует положить $a = hl_{\text{деп}}$.

Запишем вид матриц Джонса элементов ВКИ:

1) $|B| =$

$$= \begin{vmatrix} (1-a)e^{i\delta/2} + ae^{-i\delta/2} & \sqrt{(1-a)a}(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})e^{-i\gamma} \\ \sqrt{(1-a)a}(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})e^{i\gamma} & ae^{i\delta/2} + (1-a)e^{-i\delta/2} \end{vmatrix}$$

- матрица Джонса ОВС с собственным вектором (1) ($\delta = \beta \cdot l$ - разность фаз между излучением, прошедшим медленную и быструю оси ОВС).

2) $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix}$ - матрица Джонса поляризатора (ε - коэффициент

экстинкции по амплитуде).

$$3) T(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad - \text{ матрица поворота одного из}$$

концов волокна на угол α .

$$4) |\lambda/2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad - \text{ матрица полуволновой пластинки.}$$

Введение полуволновой пластинки отражает тот факт, что волокно в кольце изогнуто, так что правая система координат собственных осей ОВС (см. рис. 1а, где X, Y, X', Y' - направления собственных осей концов ОВС, Π - направление пропускания поляризатора, $\alpha_{1,2}$ - углы между собственной осью ОВС $X(X')$ и Π) на конце 1 меняется на левую в конце 2. Вследствие этого угол α между разрешенным направлением поляризатора и собственной осью ОВС X на конце 1 волокна отсчитывается против часовой стрелки, а на условно развернутом конце 2 по часовой стрелке. Запишем выражения для векторов Джонса электрических полей встречных волн на выходе ВКИ, бегущих против часовой стрелки (+) и по часовой стрелке (-) в декартовой системе координат, связанной с осью пропускания поляризатора:

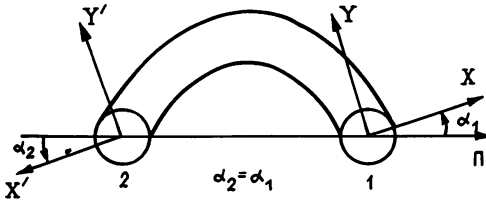
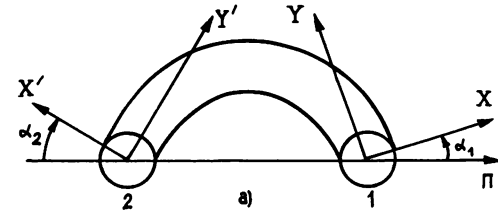


Рис 1

$$\begin{vmatrix} E_x^+ \\ E_y^+ \end{vmatrix} = |\Pi| |\lambda/2| |T(-\alpha_2)| |V|^+ |T(\alpha_1)| |\Pi| \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix}; \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} E_x^- \\ E_y^- \end{vmatrix} = |\Pi| |T(-\alpha_1)| |V|^- |T(\alpha_2)| |\lambda/2| |\Pi| \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \end{vmatrix} e^{i\psi}$ - вектор Джонса излучения источника света,

$|V|^+ = |V|$, $|V|^-$ связана с $|V|^+$ соотношением $V_{11}^+ = V_{11}^-$ вследствие теоремы взаимности [7]. Матрицы остальных элементов ВКИ диагональны и при транспонировании не меняются.

Отметим здесь, что матрицы поворота $T(\pm\alpha_{1,2})$, стоящие вокруг матрицы ОВС $|V|^+$, различны, поскольку углы разворота осей ОВС относительно поляризатора α_1 и α_2 в общем случае не совпадают. Правильность такого подхода можно показать, переходя в систему координат, связанную с волокном.

Запишем выражение для сдвига фазы в ВКИ $\varphi = \text{arctg} \left(\frac{\text{Im } E_x^+ E_x^{-*}}{\text{Re } E_x^+ E_x^{-*}} \right)$.

В выражении для $E_x^+ E_x^{-*}$ содержатся члены порядка ε , $\varepsilon\sqrt{a}$, $\varepsilon^2\sqrt{a}$, εa , $\varepsilon a^{3/2}$. Опуская члены порядка ε^2 и a , $a^{3/2}$, поскольку ε , $a \ll 1$, оставляем члены порядка ε и $\varepsilon\sqrt{a}$. Кроме того, в этом выражении учитываются только те взаимные произведения слагаемых E_x^+ и E_x^{-*} , которые между собой когерентны, т.е. прошли равные оптические пути, с точностью до $l_{\text{деп}}$ во встречных волнах, поскольку лишь они создают интерференционную картину. Произведением $E_y^+ E_y^{-*}$ также пренебрегаем, поскольку все его члены пропорциональны ε^2 , ε^3 , ε^4 .

Перейдем от вектора Джонса излучения источника к соответствующему нормированному вектору Стокса:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\omega \cos 2\beta \\ \cos 2\omega \sin 2\beta \\ \sin 2\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{A_x^2 + A_y^2} \begin{pmatrix} A_x^2 + A_y^2 \\ A_x^2 - A_y^2 \\ 2A_x A_y \cos \psi \\ 2A_x A_y \sin \psi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где ω - эллиптичность ($\text{tg}|\omega| = b/a$ - отношение малой и большой оси эллипса поляризации источника излучения), β - угол между осью пропускания поляризатора и большой осью эллипса поляризации источника. Тогда

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{1 + S_1} \times \quad (5)$$

$$\times \frac{\sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) S_3 + 4\sqrt{h l_{\text{деп}}} [\cos 2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \gamma S_3 + \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \gamma S_2]}{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Нетрудно видеть, что выражение для φ содержит две части: первая, обозначим ее φ_0 , не зависит от h , $l_{\text{деп}}$ и γ и определяется только наличием в излучении круговой составляющей вектора Стокса S_3 , вторая, обозначим ее $\Delta\varphi$, зависит от этих параметров и определяется наличием как круговой составляющей излучения S_3 , так и линейной составляющей под углом 45° к оси пропускания поляризатора S_2 . При изменении температуры волокна, как было сказано выше, меняется γ , а следовательно, $\Delta\varphi$. Если $\Delta\gamma \gg 2\pi$, то максимальное значение $\Delta\varphi \sim \Delta\varphi_{\text{max}}$ определяет наибольшие отклонения φ от его среднего значения φ_0 : $\varphi = \varphi_0 \pm \Delta\varphi_{\text{max}}$, где

$$\varphi_0 = \frac{\varepsilon}{1 + S_1} \frac{\sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) S_3}{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}; \quad (6)$$

$$\Delta\varphi_{\text{max}} = \frac{\varepsilon}{1 + S_1} \frac{4\sqrt{h l_{\text{деп}}} \sqrt{\cos^2 2(\alpha_1 + \alpha_2) S_3^2 + \cos^2 2(\alpha_1 - \alpha_2) S_2^2}}{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) видно, что как величина φ_0 , так и $\Delta\varphi_{\max}$ зависят от состояния поляризации источника излучения (φ_0 от S_1 и S_3 , а $\Delta\varphi_{\max}$ - от S_1, S_2, S_3), а следовательно, от его ориентации относительно поляризатора, коэффициента экстинкции поляризатора ϵ и углов разворота осей ОВС относительно поляризатора - α_1 и α_2 . Величина $\Delta\varphi_{\max}$ кроме того зависит от h -параметра ОВС и его лучепреломления, а также ширины спектра источника излучения, поскольку двумя последними величинами определяется значение $l_{\text{деп}}$.

В работе [5] переменная часть сдвига нуля определяется статистически, в предположении, что имеется ансамбль отрезков волокна со случайным распределением неоднородностей, рассеяние на которых приводит к появлению связи ортогональных линейно поляризованных мод. Отметим, что выражение (6) для φ_0 полностью совпадает с соответствующим выражением [5], а если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то выражение (7) для $\Delta\varphi_{\max}$ с точностью до коэффициента 4 почти

совпадает с выражением для дисперсии $\sqrt{\langle\varphi^2\rangle}$ из [5]. Отличие в четыре раза объясняется тем, что $\Delta\varphi_{\max}$ - максимальное отклонение сдвига нуля от его среднего значения φ_0 практически составляет три-четыре дисперсии величины φ , что следует из интеграла вероятности. Исходя из вышесказанного, можно считать совпадение результатов при временном и статистическом [5] подходах вполне удовлетворительным, при этом временной подход позволяет получить зависимость $\Delta\varphi_{\max}(\alpha_1, \alpha_2)$.

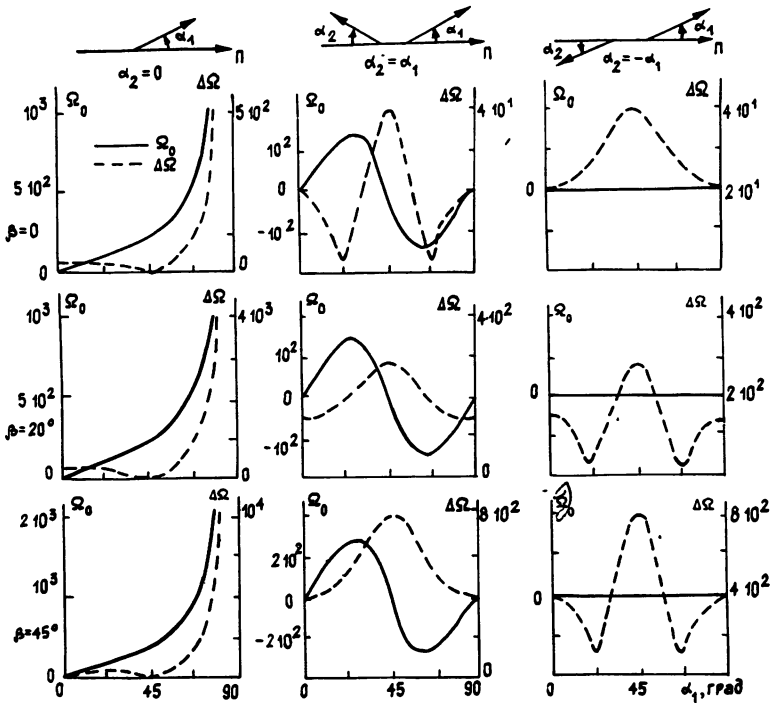


Рис. 2

На рис. 2 представлена серия зависимостей Ω_0 - среднего значения сдвига нуля в ВКИ, выраженная в град/ч ($\Omega = 2 \cdot 10^5 \frac{\phi \lambda c}{2\pi L D}$, где c - скорость света, D - диаметр катушки ОВС), и максимального отклонения от среднего значения $\Delta\Omega$ от разворотов концов ОВС α_1 и α_2 относительно оси пропускания поляризатора для ВКИ со следующими параметрами: $L = 200$ м, $\Delta h = 2 \cdot 10^{-4}$, $h = 2 \cdot 10^{-3}$, $D = 0,1$ м, $\lambda = 0,8$ мкм, $\Delta\lambda = 3$ нм ($I_{\text{деп}} = 1,2$ м), $\epsilon = 10^{-2}$. Круговая составляющая в источнике излучения - полупроводниковом многочастотном лазере - $S_3 = 0,1$.

Здесь представлены три ситуации: 1) $\alpha_2 = 0$, меняется α_1 . При этом при $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ$ Ω_0 , $\Delta\Omega$ неограниченно возрастает, поскольку пропускание системы стремится к нулю. 2) $\alpha_1 - \alpha_2$ - при этом Ω_0 и $\Delta\Omega$ периодически меняются в зависимости от изменения α_1 , α_2 , но возрастают существенно меньше, чем в случае 1). 3) $\alpha_2 = -\alpha_1$ - этот случай наиболее интересен, он соответствует правильной ориентации осей ОВС в делителе на входе кольца относительно друг друга (см. рис. 1б). В этом случае даже при несовпадении осей ОВС с разрешенным направлением поляризатора $\Omega_0 = 0$.

Другим параметром в серии зависимостей рис. 2 является угол β между большой осью эллипса поляризации источника и разрешенным направлением поляризатора, от которого зависят величины S_1 и S_2 в выражениях (6), (7). По мере роста β растет Ω_0 (за исключением ситуации 3), когда $\alpha_2 = -\alpha_1$) и $\Delta\Omega$ при тех же значениях α_1 , α_2 .

При практической реализации цельноволоконного ВКИ кольцо выполняется обычно из ОВС с сильным двулучепреломлением, иногда из так называемого ОВС "ленточного типа" [8, 9], обладающего малым h -параметром и позволяющим укладывать его на каркас без "перекручивания", волоконный же поляризатор значительно проще изготовить из ОВС круглого сечения со слабым двулучепреломлением. При сварке поляризатора и входного делителя кольца может возникнуть несовпадение разрешенного направления поляризатора и собственных осей двулучепреломляющего ОВС. Поэтому очень важно при изготовлении делителя на входе кольца как можно точнее совместить оси двулучепреломляющего волокна в делителе на входе кольца, при этом ϕ_0 будет порядка $\epsilon \Delta\alpha / (1 + S_1)$, где $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Важно также правильно сориентировать источник излучения относительно поляризатора. При $\beta \approx 0$ пропускание по интенсивности максимальное.

Отметим здесь, что если между источником излучения и поляризатором установить волоконный деполаризатор, то Ω_0 и $\Delta\Omega$ можно существенно уменьшить, так как параметры Стокса деполаризованного излучения равны нулю. Как показано в [10], предельная степень деполаризации излучения в волоконном деполаризаторе составляет примерно $\sqrt{hI_{\text{деп}}}$, следовательно, в пределе при длине деполаризатора много больше $I_{\text{деп}}$ можно уменьшить Ω_0 и $\Delta\Omega$ в $(2\sqrt{hI_{\text{деп}}})^{-1}$ раз, поскольку, как видно из выражений (6), (7), члены в числителе убывают $1/\sqrt{hI_{\text{деп}}}$ раз, но и в знаменателе выражение $1 + S_1$ стремится к единице. Для рассматриваемого ВКИ уменьшение сдвига и дрейфа нуля

может быть почти в 10 раз.

Интенсивность интерференционного сигнала на выходе ВКИ зависит от углов разворота собственных осей ОВС относительно поляризатора и в случае 50-процентных светоделителей без учета потерь в волокне определяется из соотношения (интенсивность излучения источника излучения принимаем за единицу):

$$I \approx \frac{1 + S_1}{16} [\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad (8)$$

при условии $\varepsilon \ll 1$, $hL \ll 1$.

Все предыдущие вычисления проводились в предположении, что оба светоделителя в схеме ВКИ (см. рис. 1) изотропны. Реальные светоделители всегда обладают некоторым линейным дихроизмом. Очевидно, что поскольку первый светоделитель стоит до поляризатора, то влияние его дихроизма мало. Дихроизм второго светоделителя может привести к появлению в поляризации излучения на входе кольца второй составляющей вектора Стокса S_2 в случае, если оси анизотропии второго светоделителя не совпадают с осями поляризатора. Это означает, что может измениться переменная часть сдвига нуля $\Delta\varphi_{\max}$, поскольку, как было показано выше, постоянная часть сдвига нуля φ_0 определяется только круговой составляющей вектора Стокса S_3 . Оценки показывают, что если линейный дихроизм второго светоделителя не превышает 1 - 2%, то увеличение $\Delta\varphi_{\max}$ не превысит три-пять раз, в случае наиболее неблагоприятного расположения осей анизотропии светоделителя относительно осей поляризатора - под 45° , для ВКИ с параметрами, указанными выше.

В заключение автор выражает благодарность И. А. Андроновой за постановку задачи и обсуждение результатов работы, В. Н. Листвину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kinter E. // Opt. Lett. 1981. V.6. N 3. P. 154.
2. Pavlath G.A., Shaw H.J. // Appl. Opt. 1982. V.21. N 10. P.1752.
3. Burns W.K., Moeller R.P. // J. Lightwave Techn. 1984. V.LT-2. N 4. P.430.
4. Moeller R.P., Burns W.K., Frigo N.J. // J. Lightwave Techn. 1989. V.7. N 2. P.262.
5. Козел С. М., Листвин В. Н. и др. // Опт. и спектр. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1295.
6. Козел С. М., Креопалов В. И. и др. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. N 1. С. 173.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Гостехиздат, 1957.
8. Stolen R.H., Pleibel W., Simpson J.R. // J. Lightwave Techn. 1984. V.LT-2. N 5. P. 639.

9. Арутюнян З. Э., Грудинин А. Б. и др. //Тезисы док. 1 Всесоюзной конф. Волоконно-оптические системы передачи. - М.: 1988. с.7.
10. Залогин А. Н., Козел С. Н., Листвин В. Н. //Изв. вузов. Радио-физика. 1986. Т. 29. С. 243.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
11 апреля 1990 г.

THE INFLUENCE OF THE ACCURACY OF THE RECIPROCAL TUNING
OF A FIBRE-OPTICS INTERFEROMETER ON THE DRIFT OF ITS ZERO

G. B. Malykin

The influence of the accuracy of the reciprocal tuning of the elements of the fibre-optics interferometer (FOI)-laser, the polarizer and eigen axes of single-mode fibre (SMF) birefringence is considered. It is shown that the zero drift in the SMI consists of two parts: a constant one and a variable one, the latter being caused by the temperature variation. Both these parts depend on the state of radiation polarization at the inlet of the polarizer, on the coefficient of the polarizer extinction and the orientation of SMF eigen axes with respect to the polarizer. The variable part of the zero drift depends also on the birefringence and h -parameter of SMF, as well as on the width of the radiation source spectrum. The zero drift in FOI is numerically estimated.

УДК 533.951

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ВОЛНАМИ
ГОФРИРОВАННОГО ВОЛНОВОДА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ПЛАЗМОЙ

Н. И. Карбушев

Показано, что при частичном по поперечному сечению заполнении волновода замагниченной плазмой возможно одновременное существование медленных и быстрых волн E -типа на одной и той же частоте, меньшей плазменной. В случае пространственно периодической гофрировки стенки волновода они могут связываться друг с другом, образуя в некоторой области частот новые волны, обладающие гибридными свойствами. Взаимодействие электронного пучка с гибридными волнами отличается от взаимодействия как с медленной плазменной волной в волноводе с гладкими стенками, так и с волной вакуумного гофрированного волновода. В частности, когда связанными оказываются две попутные волны, инкременты гибридных волн имеют величины порядка инкремента медленной плазменной волн в гладком волноводе, но несколько меньше его.

Исследование взаимодействия электронных пучков с плазменными волнами в волноводах представляет интерес в целях генерирования и усиления электромагнитных колебаний и коллективного ускорения заряженных частиц [1, 2]. Дисперсионные свойства плазменных волн и характер их взаимодействия с электронными пучками существенно определяются электродинамическими условиями на боковых границах. В частности, если граница является пространственно периодической, то плазменные волны могут связываться с замедленными электромагнитными волнами и трансформироваться в них [3]. Для подачи в плазму усиливаемой внешней волны часто используются различные замедляющие устройства, например, в виде спирали [4]. При этом замедленная электромагнитная волна трансформируется в плазменную волну. Нарбатываемая электронным пучком в остаточном газе плазма нередко встречается в электронных СВЧ приборах с замедляющими системами, влияя на их работу [5, 6].

В работах [7-9] исследовалось взаимодействие электронного пучка с плазмой в круглом волноводе с узкими периодическими щелями. В них было показано, что при этом проявляется ряд особенностей, которые связаны с излучением плазменных волн в свободное пространство в виде поперечных электромагнитных волн с определенной поляризацией. В настоящей работе рассматривается взаимодействие электронного пучка с медленной волной цилиндра, помещенного в металлический волновод с гофрированными стенками, в условиях, когда она может быть связанной с быстрой волноводной волной. Радиусы плазмы и пучка совпадают друг с другом и равны r_p , а радиус волновода описывается формулой

$$R(z) = R_0(1 + h \cos Kz), \quad (1)$$

где R_0 - средний радиус, hR_0 - глубина (амплитуда) гофрировки, $2\pi/K$ - период гофрировки, z - продольная координата вдоль оси волновода.

Вся система помещена в сильное внешнее продольное магнитное поле, замагничивающее движение электронов как пучка, так и плазмы.

1. Дисперсионное соотношение

Ограничимся рассмотрением азимутально симметричных волн E -типа в линейном приближении. Продольная составляющая электрического поля E_z на частоте ω подчиняется уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \hat{\epsilon} \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z = 0, \quad (2)$$

которое следует из уравнений Максвелла и в котором $\hat{\epsilon} = \epsilon_p - \omega_b^2(\omega + iu \partial/\partial z)^{-2}$, $\epsilon_p = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ - диэлектрическая проницаемость плазмы, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_p/m$ и $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b/m\gamma^3$ - квадраты ленгмюровских частот плазмы и пучка, n_p и n_b - плотности их электронов, u - скорость электронного пучка, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ - их релятивистский фактор, e и m - заряд и масса электрона, c - скорость света, r - радиальная координата. Для радиальной составляющей электрического поля справедливо операторное представление

$$R_r = \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r \partial z}. \quad (3)$$

На границе плазменно-пучкового цилиндра $r = r_p$ и на стенке волновода (1) электрическое поле волн подчиняется очевидным граничным условиям

$$\{E_z\}_{r=r_p} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\}_{r=r_p} = 0, \quad (4)$$

$$E_z - E_r hKR_0 \sin Kz = 0, \quad r = R(z),$$

где фигурные скобки означают скачок заключенной в них величины при переходе через границу, а последнее из условий (4) соответствует равенству нулю тангенциальной составляющей электрического поля на металлической поверхности.

Вследствие периодичности по z последнего из граничных условий (4) решение уравнения (2) следует искать в виде суперпозиции пространственных гармоник [10, 11], волновые векторы которых отличаются на величины, кратные K . Если полагать гофрировку стенки волновода слабой ($h \ll 1$) и ограничиваться членами, содержащими величину h в степени не выше первой, то достаточно рассматривать лишь две соседние пространственные гармоники. Тогда можно записать, что

$$E_z = e^{-i\omega t} \left[E_1(r) e^{ik_1 z} + E_2(r) e^{ik_2 z} \right], \quad (5)$$

где $k_1 - k_2 = K$.

Наибольший интерес представляет случай, когда $\omega < \omega_p$ и фазовая скорость медленной пространственной гармоники меньше скорости света ($k_1 > \omega/c$), а быстрой - больше скорости света ($k_2 < \omega/c$). При этом электронный пучок может находиться в синхронизме только с медленной пространственной гармоникой, и достаточно учитывать взаимодействие

пучка только с ней.

Решая уравнение (2) в таком случае с учетом первых двух граничных условий (4), находим

$$E_1(r < r_p) = E_1^0 J(\alpha r \sqrt{-\epsilon}),$$

$$E_1(r > r_p) = -E_1^0 \alpha r_p [\sqrt{-\epsilon} J_1(\alpha r_p \sqrt{-\epsilon}) \mathfrak{F}_0(\alpha r, \alpha r_p) - J_0(\alpha r \sqrt{-\epsilon}) \mathfrak{F}_1(\alpha r, \alpha r_p)], \quad (6)$$

$$E_2(r < r_p) = E_2^0 I_0(k_1 r \sqrt{-\epsilon_p}), \quad E_2(r > r_p) =$$

$$= -E_2^0 (\pi/2) k_1 r_p [\sqrt{-\epsilon_p} I_1(k_1 r_p \sqrt{-\epsilon_p}) F_0(k_1 r, k_1 r_p) + I_0(k_1 r_p \sqrt{-\epsilon_p}) F_1(k_1 r, k_1 r_p)].$$

Здесь E_1^0, E_2^0 - амплитуды пространственных гармоник, $\epsilon = \epsilon_p - \omega_b^2(\omega - k_1 u)^{-2}$, $\epsilon_p < 0$, $\alpha = \sqrt{k_1^2 - \omega^2/c^2}$, $k_1 = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_2^2}$, функции \mathfrak{F}_1 и F_1 равны

$$\mathfrak{F}_0(x, y) = I_0(x)K_0(y) - I_0(y)K_0(x),$$

$$\mathfrak{F}_1(x, y) = I_0(x)K_1(y) + I_1(y)K_0(x),$$

$$F_0(x, y) = J_0(x)N_0(y) - J_0(y)N_0(x),$$

$$F_1(x, y) = J_0(x)N_1(y) - J_1(y)N_0(x),$$

J_l, N_l, I_l, K_l - функции Бесселя l -го порядка, $l = 0, 1$.

Третье из граничных условий (4) с той же точностью до членов, содержащих величину h в первой степени, с учетом (3) и (5) приводит к системе двух уравнений

$$E_1(R_0) + \frac{h}{2} R_0 \left(1 - \frac{k_2 K}{k_1^2} \right) \frac{dE_2}{dr}(R_0) = 0,$$

$$E_2(R_0) + \frac{h}{2} R_0 \left(1 - \frac{k_1 K}{\alpha^2} \right) \frac{dE_1}{dr}(R_0), \quad (7)$$

позволяющей выразить амплитуды $E_{1,2}^0$ друг через друга, а также найти дисперсионное соотношение

$$D_1(\omega, k_1) D_2(\omega, k_2) = \frac{h^2 (\alpha^2 - k_1 K)^2}{\pi^2 \alpha^3 k_1^3 r_p^2} \times$$

$$\times \frac{J_0(\alpha r_p \sqrt{-\varepsilon}) I_0(k_{\perp} r_p \sqrt{-\varepsilon_p})}{\mathcal{F}_0(\alpha R_0, \alpha r_p) F_0(k_{\perp} R_0, k_{\perp} r_p)}, \quad (8)$$

в котором функции D_1 и D_2 равны

$$\begin{aligned} D_1(\omega, k_1) &= -\sqrt{-\varepsilon} J_0(\alpha r_p \sqrt{-\varepsilon}) \mathcal{F}_0(\alpha R_0, \alpha r_p) - \\ &\quad - J_0(\alpha r_p \sqrt{-\varepsilon}) \mathcal{F}_1(\alpha R_0, \alpha r_p), \\ D_2(\omega, k_2) &= \sqrt{-\varepsilon_p} I_1(k_{\perp} r_p \sqrt{-\varepsilon_p}) F_0(k_{\perp} R_0, k_{\perp} r_p) + \\ &\quad + I_0(k_{\perp} r_p \sqrt{-\varepsilon_p}) F_1(k_{\perp} R_0, k_{\perp} r_p). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Дисперсионные свойства волн

Рассмотрим вначале дисперсионные свойства волн исследуемой системы в отсутствие электронного пучка, полагая $\omega_b^2 = 0$.

В отсутствие гофрировки стенки волновода ($h = 0$) дисперсионное соотношение (8) распадается на два независимых:

$$D_1(\omega, k_1), \quad D_2(\omega, k_2) = 0. \quad (10)$$

Первое из них описывает хорошо известную медленную объемную волну плазменного цилиндра [12, 13]. Частота плазменной волны всегда меньше плазменной частоты ($\omega < \omega_p$), ее фазовая скорость меньше скорости света, а амплитуда электрического поля спадает по мере удаления от поверхности плазмы в направлении стенки волновода. Второе из соотношений (10) описывает быструю волноводную волну с фазовой скоростью, большей скорости света. Эта волна существует и в отсутствие плазмы, а при $\omega < \omega_p$ амплитуда ее электрического поля спадает по мере удаления от поверхности плазменного цилиндра в направлении к его оси. Она имеет продолжение в области высоких частот $\omega < \omega_p$ и далеко не всегда существует в области низких частот $\omega < \omega_p$. Последнее возможно лишь в том случае, когда на частоте $\omega = \omega_p$ ($\varepsilon_p = 0$) имеется решение второго из уравнений (10), соответствующее действительному значению волнового вектора k_2 . Для этого необходимо выполнение неравенства

$$\omega_p^2 (R_0 - r_p)^2 > \alpha_1^2 c^2, \quad (11)$$

где величина α_1 представляет собой корень уравнения

$$F_1\left(\frac{\alpha_1}{1 - r_p/R_0}, \frac{\alpha_1}{R_0/r_p - 1}\right) = 0. \quad (12)$$

Как известно из литературы [14], минимальное значение α_1 находится в интервале

$$(r_p/R_0 \rightarrow 1) \quad \pi/2 \leq \alpha_1 \leq \mu_{01} \approx 2,4 \quad (r_p/R_0 \rightarrow 0). \quad (13)$$

Дисперсионные кривые медленной и быстрой волн, описываемые соотношениями (10), качественно представлены на рис. 1.

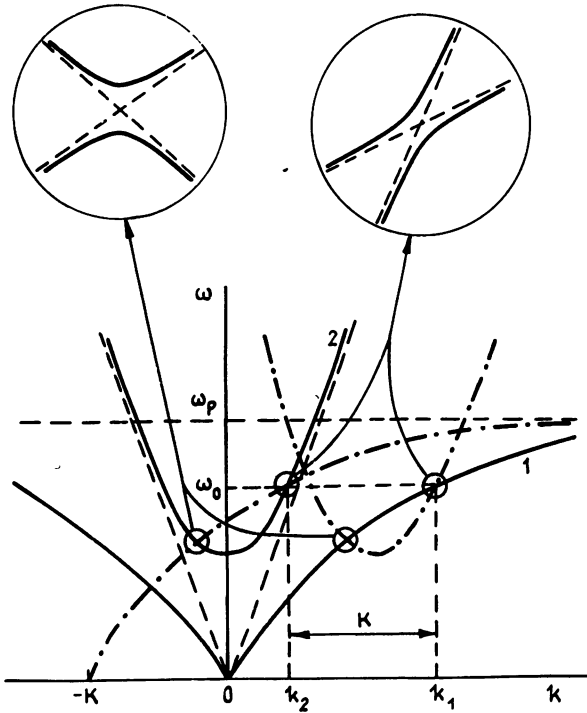


Рис. 1

Дисперсионные кривые медленной (1), быстрой (2) волн волновода с плазмой и их искажение при гофрировке стенки волновода с образованием гибридных волн. Штрихпунктирными линиями изображены дисперсионные кривые пространственных гармоник волн.

Следует отметить, что дисперсионные свойства обеих волн (медленной и быстрой) фактически можно описать, решая только одно любое из соотношений (10), если в них допустить существование фазовых скоростей как меньших, так и больших скорости света. В этом смысле дисперсионные соотношения (10) эквивалентны друг другу.

При наличии гофрировки стенки волновода ($h \neq 0$) соотношение (8) описывает дисперсионные свойства медленной и быстрой волн, имеющих пространственные гармоники. По сравнению со случаем волновода с гладкими стенками искажение дисперсионных характеристик оказывается наиболее существенным ($\sim h$) в окрестности значения частоты ω_0 , соответствующей одновременному обращению в нуль функций D_1 и D_2 в левой части (8)*, т. е. $D_1(\omega_0, k_1(\omega_0)) = D_2(\omega_0, k_1(\omega_0) - K) = 0$. В

*Искажение дисперсионных характеристик пропорционально h также в окрестностях значений $k=K/2$, где возникает так называемый π -вид колебаний и образуются полосы непрозрачности с нулевыми групповыми скоростями волн. Но такими ситуациями мы не будем интересоваться.

таких условиях медленная и быстрая волны совпадают с пространственными гармониками друг друга и оказываются связанными. Вне указанной окрестности происходит значительно меньшее искажение дисперсионных характеристик волн, пропорциональное малой величине h^2 , и им будем пренебрегать. По этой причине правая часть соотношения (8) записана для окрестности частоты ω_0 , где она имеет более простой вид.

Обозначая $k_0 = k_1(\omega_0)$ и полагая величины $\omega - \omega_0$ и $k_1 - k_0$ малыми, разложим по ним функции D_1 и D_2 в левой части (8) в ряд. Тогда находим, что связь медленной и быстрой волн описывается соотношением

$$\begin{aligned} [(k_1 - k_0) - (\omega - \omega_0)/v_1][(k_1 - k_0) - (\omega - \omega_0)/v_2] &= \pm (\Delta k)^2 = \\ &= \frac{h^2 (\varepsilon_0^2 - k_0 K)^2}{4k_0 (k_0 - K)} \left[1 + \varepsilon_0^2 r_p^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \mathcal{F}_0^2(\varepsilon_0 R_0, \varepsilon_0 r_p) \right]^{-1} \times \\ &\times \left[1 - \frac{\pi^2}{4} k_{10}^2 r_p^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} F_0^2(k_{10} R_0, k_{10} r_p) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где групповые скорости v_1, v_2 равны

$$\begin{aligned} v_1 = - \frac{\partial D_1}{\partial k_1} \left(\frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{-1} &= k_0 \left\{ \frac{\omega_0}{c^2} - \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0^4 r_p^2}{\omega_0^3 \varepsilon_p} [\mathcal{F}_1^2(\varepsilon_0 R_0, \varepsilon_0 r_p) - \right. \\ &\left. - \varepsilon_p^0 \mathcal{F}_0^2(\varepsilon_0 R_0, \varepsilon_0 r_p)] \left[1 + \varepsilon_0^2 r_p^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \mathcal{F}_0^2(\varepsilon_0 R_0, \varepsilon_0 r_p) \right]^{-1} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} v_2 = - \frac{\partial D_2}{\partial k_2} \left(\frac{\partial D_2}{\partial \omega} \right)^{-1} &= (k_0 - K) \left\{ \frac{\omega_0}{c^2} - \frac{\pi^2 \omega_p^2 k_{10}^4 r_p^2}{4 \omega_0^3 \varepsilon_p} [F_1^2(k_{10} R_0, k_{10} r_p) + \right. \\ &+ \varepsilon_p^0 F_0^2(k_{10} R_0, k_{10} r_p)] \left[1 - \frac{\pi^2}{4} k_{10}^2 r_p^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \right. \\ &\left. \left. \times F_0^2(k_{10} R_0, k_{10} r_p) \right] \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

а величины ε_0, k_{10} и ε_p^0 определяются в точке ω_0, k_0 . Знак групповой скорости медленной волны v_1 совпадает со знаком волнового вектора k_0 , знак же групповой скорости быстрой волны v_2 определяется знаком волнового вектора $k_2 = k_0 - K$. Знак правой части уравнения (14) совпадает со знаком произведения $v_1 v_2$. Далее будем полагать $k_0 > 0$, поэтому $v_1 > 0$.

Соотношение (14) в общем случае представляет собой уравнение гиперболы с асимптотами $k_1 - k_0 = (\omega - \omega_0)/v_{1,2}$. Его решение имеет

ВИД

$$k_1 - k_0 = (\omega - \omega_0) \frac{v_1 + v_2}{2v_1 v_2} \pm \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{v_1 - v_2}{2v_1 v_2} \right)^2 \pm (\Delta k)^2}. \quad (16)$$

При точном равенстве $\omega = \omega_0$ из (16) находим

$$k_1 = k_0 \pm \Delta k \begin{cases} 1 & \text{при } v_1 v_2 > 0 \\ i & \text{при } v_1 v_2 < 0 \end{cases}. \quad (17)$$

Первое из решений (17) соответствует возникновению связи между двумя волнами (медленной и быстрой), распространяющимися попутно, а второе - возникновению запрещенной зоны (полосы непрозрачности), когда связь осуществляется между встречными волнами. Величина связи оказывается существенной в области частот, удовлетворяющей неравенству

$$|\omega - \omega_0| < \Delta k \frac{2|v_1 v_2|}{|v_1 - v_2|}. \quad (18)$$

В этой области медленная и быстрая волны вследствие связи образуют новые волны, обладающие гибридными свойствами [15]. При выполнении обратного (18) сильного неравенства волны можно считать независимыми. Таким образом, в окрестностях четырех точек, соответствующих пересечениям дисперсионных кривых медленной и быстрой волн с дисперсионными кривыми их пространственных гармоник, происходит расщепление кривых, качественно представленное на рис. 1.

Из теории связанных волн [3, 5] следует, что связь между двумя встречными волнами приводит к их взаимной трансформации с затуханием амплитуд при распространении в волноводе по закону $\sim \text{ch}(-\Delta k|z|)$ на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. к образованию полосы непрозрачности. В то же время в случае связи между двумя попутными волнами трансформация приводит к периодическим биениям их амплитуд по длине. На частоте $\omega = \omega_0$ достигается полная трансформация волн, когда их амплитуды пропорциональны $|\cos(\Delta kz)|$ или $|\sin(\Delta kz)|$. При этом длина трансформации, на которой одна из волн полностью перекачивается в другую, равна $\pi/2\Delta k$.

Представляет интерес частный предельный случай

$$R_0 \gg r_p, \quad \omega_p r_p \ll c, \quad \alpha r_p \ll 1, \\ k_{\perp} r_p \ll 1, \quad k_{\perp} r_p \sqrt{-\epsilon_p} \ll 1, \quad (19)$$

возможный при нерелятивистской фазовой скорости медленной волны $\omega/k_1 \ll c$. Тогда имеем $k_{\perp} R_0 \approx \mu_{01}$, $\alpha r_p \sqrt{-\epsilon_p} \approx \mu_{01}$, $v_1 \approx (\omega_p^2 - \omega_0^2)/\omega_0 k_0$, $v_2 \approx (k_0 - K)c^2/\omega_0$, а выражение (14) для Δk приводится к виду

$$\Delta k \approx h \frac{\omega_0}{\omega_p} \sqrt{\frac{R_0}{r_p}} \sqrt{k_0 |k_0 - K| \exp[-k_0(R_0 - r_p)]}. \quad (20)$$

3. Взаимодействие электронного пучка с волнами

В отсутствие гофрировки волновода дисперсионное соотношение (8)

определяет взаимодействие электронного пучка с медленной плазменной волной. Черенковский синхронизм волны с пучком возможен только при достаточно большой плотности плазмы, удовлетворяющей неравенству [13]

$$\omega_p r_p > \gamma u \begin{cases} \mu_{01}, & R_0 \approx r_p \\ 2/\sqrt{1 + 2\ln(R_0/r_p)}, & R_0 \geq r_p \end{cases}. \quad (21)$$

Максимальный пространственный инкремент, определяющий усиление плазменной волны пучком, равен [12, 13]

$$|\operatorname{Im} k|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\alpha_p}{u} (\omega \omega_p^2)^{1/3}, \quad (22)$$

где для коэффициента α_p справедливо выражение [13]

$$\alpha_p^3 = \frac{1}{2|\epsilon_p|} \left(\frac{\omega r_p}{\gamma^2 u} \right)^2 \left[\mathfrak{F}_1^2 \left(\frac{\omega R_0}{\gamma u}, \frac{\omega r_p}{\gamma u} \right) + |\epsilon_p| \mathfrak{F}_0^2 \left(\frac{\omega R_0}{\gamma u}, \frac{\omega r_p}{\gamma u} \right) \right] \times \\ \times \left[1 + \left(\frac{\omega r_p}{\gamma u} \right)^2 (1 + |\epsilon_p|) \mathfrak{F}_0^2 \left(\frac{\omega R_0}{\gamma u}, \frac{\omega r_p}{\gamma u} \right) \right]^{-1}. \quad (23)$$

С другой стороны, если плотность плазмы мала, так что неравенство (21) не выполняется и синхронизм пучка с медленной волной невозможен, то дисперсионное соотношение (8) определяет взаимодействие с быстрой волноводной волной через посредство ее замедленной пространственной гармоники [10, 11]. Однако инкремент в данном случае оказывается малым по сравнению с (22), поскольку содержит малую величину h в положительной степени [11].

Наиболее существенные особенности во взаимодействии электронного пучка с волнами при наличии связи между ними возникают в области частот (18). В этом случае в предположении $\omega_b^2 \ll |\omega - k_1 u|^2$ дисперсионное соотношение (8) приводится к виду

$$\left(\delta k + \delta \omega \frac{v_1 - u}{uv_1} + \frac{\Delta}{u} + \frac{\alpha_p^3 \omega \omega_b^2}{\delta k^2 u^3} \right) \times \\ \times \left(\delta k + \delta \omega \frac{v_p - u}{uv_2} + \frac{\Delta}{u} \right) = \pm (\Delta k)^2, \quad (24)$$

где $\delta k = k_1 - \omega/u$, $\delta \omega = \omega - \omega_0$, $\Delta = \omega_0 - k_0 u$. В пределе $\omega_b^2 \rightarrow 0$ соотношение (24) переходит в (14).

В условиях выполнения неравенства

$$\alpha_p (\omega_0 \omega_b^2)^{1/3} \gg \Delta k u \quad (25)$$

максимальный пространственный инкремент близок по величине к (22). Связь волн приводит лишь к незначительному его изменению. Так, при $\delta \omega = 0$, $\Delta = 0$ из (24) следует, что

$$|\operatorname{Im} k| \approx \frac{\sqrt{3}}{u} (\omega_0 \omega_b^2)^{1/3} \left[1 \mp \frac{(\Delta k u)^2}{3\alpha_p^2 (\omega_0 \omega_b^2)^{2/3}} \right]. \quad (26)$$

В условиях, противоположных (25), из (24) находим, что максимальный инкремент при фиксированной величине Δ и $v_1 v_2 > 0$ достигается на двух частотах, определяемых соотношением

$$\delta\omega \frac{(u - v_1)(u - v_2)}{v_1 v_2} = - \left(1 - \frac{u}{2} \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \right) \pm \pm u \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \right)^2 + (\Delta k)^2 \frac{(u - v_1)(u - v_2)}{v_1 v_2}}. \quad (27)$$

Эти частоты соответствуют точкам пересечения пучковой прямой $\omega = k_1 u$ с дисперсионными кривыми гибридных волн, искаженными связью по сравнению с кривыми "старых" медленной и быстрой волн. Для самих же инкрементов получаем выражение

$$|\text{Im } k| = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \frac{\alpha_p}{u} (\omega_0 \omega_b^2)^{1/3} \times \left\{ 1 \pm \left[1 + \left(\frac{\Delta k}{\delta\omega} \frac{2v_1 v_2}{v_1 - v_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}^{1/3}. \quad (28)$$

Зависимость пространственных инкрементов гибридных волн (28) от величины $|\delta\omega|$ качественно представлена на рис. 2. С ростом $|\delta\omega|$ больший из инкрементов (28) увеличивается и переходит в (22) в пределе $|\delta\omega| \rightarrow \infty$. Меньший же из инкрементов (28) при $|\delta\omega| \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Более точное вычисление показывает, что меньший инкремент пропорционален малой величине h в положительной степени. В случае $\delta\omega = 0$ оба инкремента (28) равны друг другу и составляют

$$|\text{Im } k| = |\text{Im } k|_{\text{max}} / 2^{1/3}, \text{ где } |\text{Im } k|_{\text{max}} \text{ определяется формулой (22).}$$

В случае связи медленной волны с встречной быстрой волной, когда $v_1 v_2 < 0$, групповые скорости гибридных волн на границах интервала (18) обращаются в нуль. При этом в условиях, противоположных (25), взаимодействие электронного пучка с гибридными волнами в линейном приближении исследуется аналогично тому, как это делалось, например, в работе [16]. Пересечению пучковой прямой $\omega = k_1 u$ с дисперсионными кривыми гибридных волн в точках с нулевой групповой скоростью соответствуют значения

Рис. 2

Зависимости инкрементов гибридных волн от частоты в окрестности точки ω_0 при наличии электронного пучка в волноводе с плазмой. Величина $(\text{Im } k)_{\text{max}}$ определяется соотношением (22).

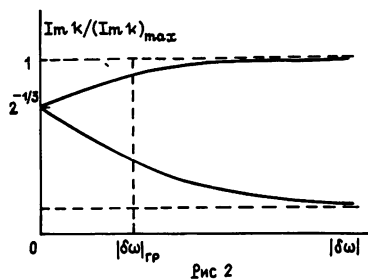


Рис 2

$$\delta\omega = \pm \frac{2v_1 v_2}{v_1 - v_2} \Delta k, \quad \Delta = \mp \frac{\Delta k u}{v_1 - v_2} \left(2 \frac{v_1 v_2}{u} - v_1 - v_2 \right). \quad (29)$$

Тогда поправка δk к волновому вектору оказывается порядка

$$|\delta k| \sim (\alpha_p^3 \omega_0 \Delta k / u^3)^{1/4} \sqrt{\omega_b}$$

и значительно превышает по величине инкремент плазменно-пучковой неустойчивости $|\text{Im } k|_{\text{max}}$.

Согласно полученным результатам взаимодействие электронного пучка с волнами в волноводе с плазмой и гофрированными стенками может существенно отличаться от взаимодействия как с плазменной волной в гладком волноводе, так и с волной вакуумного гофрированного волновода. При этом в некоторой области частот медленная и быстрая волны системы в отсутствие пучка оказываются связанными друг с другом и образуют новые волны с гибридными свойствами. Одновременное существование на одной и той же частоте медленной и быстрой волн Е-типа, в принципе, возможно в плазменной системе любой поперечной конфигурации. Необходимо только, чтобы плазма заполняла поперечное сечение волновода частично.

Связанные волны, приводящие к образованию гибридных волн, могут возникать в волноводах с пространственно периодическими стенками любой конфигурации, например, в дифрагмированном волноводе [17]. Аналогичная картина имеет место также при заполнении плазмой спиральной замедляющей системы [5, 6] или замедляющей системы в виде цепочки связанных резонаторов [18], в волноводе с гладкими стенками, поперечное сечение которого частично заполнено плазмой с пространственно периодической плотностью.

Одной из важных особенностей взаимодействия электронного пучка со связанными волнами является то обстоятельство, что большой инкремент плазменно-пучковой неустойчивости "переносится" также и на быструю волну, увеличивая коэффициент ее усиления. Такое усиление носит название супергетеродинного. Оно, в частности, следует из соотношения волновых векторов $k_2 = k_1 - K$ ($\text{Im } k_2 = \text{Im } k_1$). Эффект переноса большого инкремента полностью аналогичен рассмотренному в работе [19] для случая двух попутных волн, слабо связанных друг с другом параметрически, одна из которых является плазменной волной, усиливаемой электронным пучком. В условиях сильной связи, противоположных (25), возрастание усиления быстрой волны происходит на длине $L > |\text{Im } k|_{\text{max}}^{-1}$. В случае же слабой связи волн, когда выполнено неравенство (25), супергетеродинное усиление проявляется лишь на длине $L > \pi/2\Delta k \gg |\text{Im } k|_{\text{max}}^{-1}$. На меньшей длине связь не успевает привести к трансформации волн. Если связанными оказываются две попутные волны, то их коэффициенты усиления всегда конечны по величине. В случае же связи встречных волн коэффициенты усиления при достаточно большой длине могут обращаться в бесконечность, что указывает на возможность генерации колебаний, обусловленную наличием внутренней обратной связи в системе. Для осуществления генерации попутных связанных волн необходимо создавать внешнюю обратную связь, например, отражая волны на обоих концах волновода.

Частичное заполнение плазмой различных замедляющих структур было предложено использовать в работах [20, 21] для создания электронных СВЧ приборов гибридного типа, обладающих большими преимуществами по сравнению с традиционными чисто плазменными и вакуумными. В них возможно достижение повышенных значений коэффициента усиления и электронного КПД, а также эффективного ввода и вывода энергии волн из объема плазмы.

Отметим, что одним из объяснений наблюдавшегося в экспериментах [22-24] повышения КПД генерации СВЧ колебаний в карсиноне в несколько раз при его заполнении плазмой может быть образование волн гибридного типа с нулевой групповой скоростью в случае связи

ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я. Б. // Физика плазмы. 1985. Т.11. N 11. С.1398.
2. Коллективные методы ускорения и пучково-плазменные взаимодействия. //Сб. науч. трудов. - М.: Радиотехнический ин-т АН СССР, 1982.
3. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. //УФН. 1973. Т.109. N 2. С.225.
4. Бернашевский Г. А., Богданов Е. В. и др. Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ. - М.: Сов. радио, 1965.
5. Силин Р. А., Сазонов В. А. Замедляющие системы. - М.: Сов. радио, 1966.
6. Булгаков Б. М., Шестопапов В. П. и др. //ЖТФ. 1960. Т.30. N 7. С.840.
7. Гестерина Г. Н., Кобелев В. Н., Шестопапов В. П. //ЖТФ. 1977. Т.47. N 4. С.806.
8. Антонов А. Н., Гестрина Г. Н. и др. //ЖТФ. 1983. Т.53. N 10. С.1932.
9. Гестрина Г. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 12. С.1502.
10. Ковалев Н. Ф. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1978. N 3. С.102.
11. Белов Н. Е., Карбушев Н. И. и др. //Физика плазмы. 1983. Т.9. N 4. С.785.
12. Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С. и др. Физика сильноточных релятивистских пучков. - М.: Атомиздат, 1980.
13. Карбушев Н. И. //ЖТФ. 1986. т.56. N 8. С.1631.
14. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1977.
15. Карбушев Н. И. //Тезисы докл. 12-го Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. - М.: ИТЭФ, 1990. С.81.
16. Галстян Е. А., Герасимов С. В., Карбушев Н. И. //Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. N 5. С.1061.
17. Лопухин В. М., Никольский В. С. //Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1989. Т.30. N 5. С.20.
18. Канавец В. И., Карбушев Н. И. и др. //Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. N 12. С.2574.
19. Гольцова Ю. К., Рабинович М. И., Реутов В. П. // Физика плазмы. 1975. Т.1. N 4. С.594.
20. Batskikh G.I., Gureyev K.G. et al. //Abstr. 8-th Int. Conf. on High Power Particle Beams.- Novosibirsk: Inst. of Nucl. Phys. 1990. P.X05.
21. Файнберг Я. Б., Блюх Ю. П. и др. Препринт ХФТИ N 90-49. Харьков, 1990.
22. Minami K., Lou W.R., Destler W.W. et al. //Appl. Phys. Lett. 1988. V.53. N 7. P.559.
23. Carmel Y., Minami K., Kehs R.A. et al. //Phys. Rev. Lett. 1989. V.62. N 20. P.2389.
24. Carmel Y., Minami K., Lou W.R. et al. //IEEE Trans. on Plasma Sci. 1990. V.18. N 3. P.497.

Московский радиотехнический
институт АН СССР

Поступила в редакцию
20 июля 1989 г.,
после переработки
26 марта 1991 г.

FEATURES OF THE INTERACTION OF AN ELECTRON BEAM WITH THE WAVES
OF THE CORRUGATED WAVEGUIDE PARTLY FILLED BY PLASMA

N. I. Karbushev

It is shown, that the existense of two waves of *E*-type (slow and fast) at the same frequency less than the plasma frequency can occure in the system, consisting of the circular waveguide partly filled by magnetized plasma. When the wall of the waveguide is corrugated they can connect each other, constructing a new waves with hybrid properties in a certain range of frequencies. The interac- tion of an electron beam with the hybrid waves differs from that with the slow plasma wave in the smooth wall waveguide and with the wave of the vacuum corrugated waveguide. In particular, when two wa- ves travelling in the same direction are connected, the increments of the hybrid waves have the values of the same order but some less than the increment of a slow plasma wave in the smooth waveguide.

УДК 621.385.6.032.26

О КОНИЧЕСКИХ БРИЛЛЮЭНОВСКИХ ПОТОКАХ

А. В. Вашковский, В. А. Сыровой

Исследованы нерелятивистские и релятивистские потоки с круговыми конусами в качестве эквипотенциалей и траекториями в виде спиралей, "навитых" на эти поверхности. Рассмотрен диодный вариант при выполнении условий полного пространственного заряда на эмиттере и вариант транспортировки пучка в коническом канале со специальным неоднородным магнитным полем. Построенные точные решения могут быть использованы в качестве эталонов при тестировании программ траекторного анализа, в том числе в случае релятивистских потоков с высокой компрессией.

Введение. В литературе хорошо известны [1] одномерные бриллюэновские решения в декартовых x, y, z или цилиндрических R, ψ, z координатах, в том числе и при релятивистских скоростях [2]. Упомянутые решения, зависящие от x или R , используются либо для описания закритического режима магнетрона (диодный вариант), либо при изучении вопроса о транспортировке уже сформированного пучка в канале с проводящими эквипотенциальными стенками (вариант транспортировки).

Наряду с потоками [1,2] возможно существование конических бриллюэновских течений, которые, однако, перестают описываться одномерными решениями. Плотность пространственного заряда и напряженность магнитного поля для них в сферических координатах r, θ, ψ зависят от двух переменных r, θ [3,4]:

$$\vec{v} = \vec{v}(\theta), \quad \varphi = \varphi(\theta), \quad \rho = \frac{1}{r^2} \sigma(\theta), \quad \vec{H} = \frac{1}{r} \vec{K}(\theta). \quad (1)$$

Все последующие соотношения приводятся в безразмерных переменных (символы с чертой), определяемых следующими формулами для случая, когда исходные уравнения берутся в системе СИ:

$$\bar{r} = \frac{r}{L}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V}, \quad \bar{\varphi} = -\frac{\eta}{V^2} \varphi, \quad \bar{H} = \frac{\eta L \mu_0}{V} H, \\ \bar{\rho} = \frac{\eta L^2}{V^2 \epsilon_0} \rho, \quad \bar{J} = \frac{\eta L^2}{V^3 \epsilon_0} J, \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad \eta = \frac{e}{m}. \quad (2)$$

Здесь r, v, H, J - модули радиуса-вектора и векторов скорости, напряженности магнитного поля и плотности тока соответственно; φ, ρ - скалярный потенциал и плотность пространственного заряда; ϵ_0, μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума; η - удельный заряд частицы ($\eta < 0$ для электрона); c - скорость света; L, V - характерные масштабы длины и скорости. В релятивистском случае $V = c$. Символ безразмерной величины - черта - в дальнейшем для краткости опускается.

Подстановка (1) в уравнения релятивистского пучка

$$(\vec{v}\nabla) \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} = \nabla\varphi + \vec{v} \times \vec{H},$$

$$\Delta\varphi = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \rho\vec{v}$$

или в уравнения для нерелятивистских течений

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \nabla\varphi + \vec{v} \times \vec{H}, \quad \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0,$$

$$\Delta\varphi = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно зависящих от θ функций. Для нерелятивистских скоростей эти уравнения выписаны в [3].

Система, описывающая конические течения, оказывается недоопределенной, как и в случае одномерных потоков, что позволяет в качестве v_r взять произвольную функцию θ . Такого рода решения определяют вихревые пучки.

Параметры потенциального моноэнергетического нерелятивистского потока задаются выражениями [3]:

$$v_r = H_{03} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + v_{r0}, \quad v_\psi = K_\theta = H_{01} \operatorname{ctg} \theta + \frac{H_{02}}{\sin \theta},$$

$$\sigma = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{H_{01}^2 + H_{02}^2}{\sin^2 \theta} (1 + \cos^2 \theta) + 4H_{01}H_{02} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} + H_{03}^2 \right], \quad (3)$$

$$2\varphi = v_r^2 + v_\psi^2, \quad K_r = H_{01}, \quad K_\psi = \frac{H_{02}}{\sin \theta}, \quad H_{01}, H_{02}, H_{03}, v_{r0} = \text{const.}$$

В [5] исследован частный случай магнитного поля из (3), для которого

$$H_{01} = -H_{02} = H_0, \quad H_{03} = 0,$$

$$H_r = \frac{H_0}{r}, \quad H_\theta = -\frac{H_0}{r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad H_\psi = 0, \quad (4)$$

что позволяет изучать сплошные конические пучки. Дальнейшее рассмотрение в [5] основывалось на предположении о независимости радиальной плотности тока от θ , что привело к приближенному решению, справедливому при малых углах сходимости.

В работе [6] конические бриллюэновские потоки исследовались экспериментально.

В [4] отмечено, что при строгом учете собственного магнитного поля решение вида (1) может описывать только бриллюэновские потоки с $v_\theta = 0$. там же приведено аналитическое решение для релятивистского

течения вида (1) с единственной отличной от нуля компонентой скорости v_r :

$$v_r = - \frac{1 - b^2 (\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^{2a}}{1 + b^2 (\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^{2a}}, \quad \varphi + 1 = \frac{1 - b^2 (\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^{2a}}{2b (\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^a},$$

$$H_\psi = \frac{a}{r \sin \theta} (\varphi + 1), \quad \rho = \left(\frac{a}{r \sin \theta} \right)^2 (\varphi + 1), \quad (5)$$

$$v_\psi = H_r = H_\theta = 0, \quad a, b = \text{const},$$

повторенное в [7].

Ниже исследованы конические бриллюэновские потоки как в диодном варианте, так и в варианте транспортировки. В релятивистском случае изучены характеристики более общих по сравнению с (5) потоков, для которых $v_\psi \neq 0$ и которые не могут быть описаны элементарными функциями.

Точные решения для релятивистских конических пучков дополняют весьма небогатый набор эталонных задач, которые можно использовать для тестирования программ траекторного анализа. К настоящему времени этот набор сводился к одномерным решениям [2,7] в цилиндрических и декартовых координатах и двумерному течению с прямолинейными траекториями [8].

1. Нерелятивистские потоки

Диодный вариант. Потребуем, чтобы на конусе $\theta = \theta_0$ для решения (3) выполнялись условия полного пространственного заряда. Обращение в нуль компонент скорости при $\theta = \theta_0$ приводит к следующей специализации констант H_{02} и v_{r0} в (3)

$$H_{02} = -H_{01} \cos \theta_0, \quad v_{r0} = -H_{03} \xi_0, \quad \xi = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

$$v_\psi = K_\theta = H_{01} (\cos \theta - \cos \theta_0) / \sin \theta, \quad v_r = H_{03} (\xi - \xi_0)$$

и обеспечивает одновременно выполнение равенства $\varphi'(\theta_0) = 0$ в силу вытекающего из интеграла энергии соотношения $\varphi' = v_r v_r' + v_\psi v_\psi'$. Выражение для σ из (3) приобретает вид

$$\sigma = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[H_{01}^2 \frac{(\cos \theta - \cos \theta_0)^2 + (1 - \cos \theta_0 \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + H_{03}^2 \right],$$

$$\sigma(\theta_0) = H_{01}^2 + \frac{H_{03}^2}{\sin^2 \theta_0}.$$

В диоде, образованном двумя конусами $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_\alpha$, частицы движутся по спиральным траекториям, навитым на конусы-эквипотенциали в соответствии с (6). Явные уравнения этих кривых определяются формулами

$$\frac{v_r}{v_\psi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d \ln r}{d\psi}, \quad \frac{d \ln r}{d\psi} = a(\theta),$$

$$a(\theta) = \frac{H_{03}(\xi - \xi_0) \sin^2 \theta}{H_{01}(\cos \theta - \cos \theta_0)}, \quad r = r_0 e^{a(\theta)\psi}. \quad (7)$$

Здесь r_0 - радиус, который частица имела в начальный момент $\psi = 0$. При положительном азимутальном поле $H_{03} > 0$ для внутреннего эмиттера $\theta_\alpha > \theta_0$ получаем расходящийся поток с $v_r > 0$, для внешнего эмиттера $\theta_\alpha < \theta_0$ - сходящееся течение с $v_r < 0$.

Вариант транспортировки, сплошной пучок. При рассмотрении сплошного потока, полностью заполняющего конический дрейфовый канал, примем дополнительно упрощающие предположения [5] относительно радиальной скорости $v_r = \text{const}$ и компонент напряженности магнитного поля. Эти предположения приближают ситуацию к случаю цилиндрического бриллюэновского потока и выражаются формулами (4). Подчеркнем то обстоятельство, что продольное магнитное поле не является однородным и не может существовать без поперечной компоненты H_θ . Параметры потока на основании формул (3) определяются выражениями

$$v_\psi = -H_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad 2\varphi = v_r^2 + H_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}, \quad 2\varphi_0 = v_r^2,$$

$$\sigma = \frac{H_0^2}{2} \cos^{-4} \frac{\theta}{2}, \quad J = \rho v_r = \frac{\sigma v_r}{r^2} = \frac{H_0^2 v_r}{2r^2} \cos^{-4} \frac{\theta}{2}.$$

Полный поток, протекающий в коническом канале $0 \leq \theta \leq \theta_\alpha$, равен

$$I = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\theta_\alpha} \sigma v_r \sin \theta d\theta = 2\pi H_0^2 v_r \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (8)$$

Используя интеграл энергии при $\theta = \theta_\alpha$, перепишем выражение (8) следующим образом:

$$v_r = \left(2\varphi_\alpha - H_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_\alpha}{2} \right)^{1/2}, \quad I(x) = \frac{\pi}{2} x^2 \left(2\varphi_\alpha - \frac{1}{4} x^2 \right)^{1/2},$$

$$I = I(x), \quad x = 2H_0 \operatorname{tg} \frac{\theta_\alpha}{2}. \quad (9)$$

Здесь удобно привести для сравнения записанные в переменных (2) формулы для цилиндрического бриллюэновского пучка (индекс В) при

полном заполнении канала радиуса a в однородном магнитном поле H_z :

$$I = I(x), \quad x = aH_z,$$

$$I_{B \max} = \pi \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \varphi_a^{3/2}, \quad P_{B \max} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \pi. \quad (10)$$

Здесь $I_{B \max}$ и $P_{B \max}$ - максимальные значения полного тока и первеанса, соответствующие условию $dI/dx = 0$, наступающему при $x^2 = 16/3\varphi_a$.

Приведем также ток и первеанс цилиндрического пучка, вырезанного из плоского лэнгмюровского диода, с диаметром, равным расстоянию между электродами (характерный масштаб L в формулах (2)), т.е. с радиусом $a = 1/2$ и $\varphi = \varphi_a$ при $x = 1$; отметим соответствующие величины индексом L :

$$I_L = \frac{\sqrt{2}}{9} \pi \varphi_a^{3/2}, \quad P_L = \frac{\sqrt{2}}{9} \pi. \quad (11)$$

Формула (9) приводит для конического пучка к тем же значениям (10) для максимального тока и первеанса, что и в случае цилиндрического потока:

$$I_{\max} = I_{B \max}. \quad (12)$$

Немонотонный закон изменения функции $I(x)$ приводит при $I < I_{\max}$ к двум возможным режимам потока: "быстрый" пучок с меньшим значением H_0 и "медленный" пучок с большим H_0 . Аналогичные факты хорошо известны в теории цилиндрических бриллюэновских потоков. Аналогом формул, связывающих радиус пучка a , ток I , потенциал на оси φ_0 и значение H_z , в случае конических течений будут

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_a}{2} = \frac{I}{2\sqrt{2} \pi \sqrt{\varphi_0}} \frac{1}{H_0^2},$$

$$H_0^2 = \frac{I}{2\sqrt{2} \pi \sqrt{\varphi_0}} \operatorname{tg}^{-2} \frac{\theta_a}{2}.$$

Вариант транспортировки, кольцевой пучок. Кольцевой конический пучок (рис. 1а) может быть частью $\theta_b \leq \theta \leq \theta_a$ только что рассмотренного течения с магнитным полем H_θ из (4), растущим к периферии потока. Рассмотрим другой вариант, когда H_θ меняется в противоположном направлении:

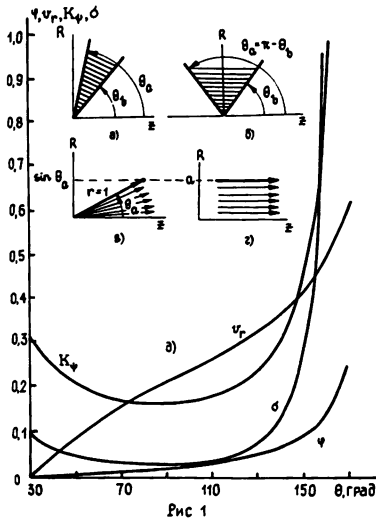


Рис 1

$$H_{02} = H_{03} = 0, \quad v_r = \text{const}, \quad (13)$$

$$H_r = \frac{H_0}{r}, \quad H_\theta = \frac{H_0}{r} \text{ctg } \theta, \quad H_\psi = 0.$$

В этом случае для параметров потока получаем следующие выражения, используя формулы (3), причем в правую часть интеграла энергии введена постоянная H_0^2 :

$$v_\psi = H_0 \text{ctg } \theta, \quad 2\varphi = v_r^2 + v_\psi^2 + H_0^2 = v_r^2 + \frac{H_0^2}{\sin^2 \theta},$$

$$\sigma = H_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta}, \quad J = \rho v_r = \frac{\sigma v_r}{r^2} = \frac{H_0^2 v_r}{r^2} \frac{2 - \sin^2 \theta}{\sin^4 \theta}, \quad (14)$$

$$I = 2\pi H_0^2 v_r \left(\frac{\cos \theta_b}{\sin^2 \theta_b} - \frac{\cos \theta_a}{\sin^2 \theta_a} \right).$$

Использование интеграла энергии при $\theta = \theta_b$ позволяет выразить полный ток I через функцию $I(x)$, в которую входит более высокий потенциал $\varphi_b > \varphi_a$ внутренней стенки:

$$I = \left(\cos \theta_b - \frac{\sin^2 \theta_b}{\sin^2 \theta_a} \cos \theta_a \right) I(x), \quad x = \frac{2H_0}{\sin \theta_b}. \quad (15)$$

В результате максимальный ток в кольцевом коническом канале равен

$$I_{\text{max}} = \left(\cos \theta_b - \frac{\sin^2 \theta_b}{\sin^2 \theta_a} \cos \theta_a \right) I_{B \text{ max}}, \quad (16)$$

где $I_{B \text{ max}}$ определен в (10). Из (16) видно, что I_{max} превышает бриллюэновское значение в симметричном относительно оси R канале $\theta_a = \pi - \theta_b$ с достаточно большим углом раствора при $\theta_b < 60^\circ$ (рис. 16, область потока заштрихована):

$$I_{\text{max}} = 2 \cos \theta_b I_{B \text{ max}}. \quad (17)$$

Разность $\varphi_b - \varphi_a$, приложенная к стенкам канала, связана с потенциалом внутреннего конуса $\varphi_b > \varphi_a$, продольной скоростью v_r и геометрией канала соотношением

$$2(\varphi_b - \varphi_a) = \frac{H_0^2}{\sin^2 \theta_b} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_a}{\sin^2 \theta_b} \right) = (2\varphi_b - v_r^2) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_a}{\sin^2 \theta_b} \right).$$

Заметим, что формула (12) или условие $I_{\max} > I_{B \max}$ в (17) не означают эквивалентности или принципиальных преимуществ конических бриллюэновских потоков перед цилиндрическими.

Определенное представление о соответствии сплошного конического потока (9) и решения (10) дают рис. 1в, г. Если взять конический пучок с раствором θ_a и цилиндрический пучок, радиусы R которых при $r = 1$ совпадают, $R = a = \sin \theta_a$, то при одинаковых токе $I_{B \max}$, потенциале φ_a и продольной скорости $v_r = v_z$ из равенства переменной x , определенной формулами (9), (10), следует, что напряженность радиального магнитного поля в точке сравнения должна быть меньше, чем соответствующее значение H_z :

$$x = aH_z = H_z \sin \theta_a = 2H_0 \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2}, \quad H_0 = H_z \cos^2 \frac{\theta_a}{2}.$$

Меньше H_z будет и модуль напряженности магнитного поля для конического потока:

$$(H_r^2 + H_\theta^2)_{r=1}^{1/2} = H_0 / \cos \frac{\theta_a}{2} = H_z \cos \frac{\theta_a}{2}.$$

При этом не следует забывать, что $H_r, H_\theta \rightarrow \infty$, как $1/r$ при $r \rightarrow 0$.

2. Релятивистские потоки

Система обыкновенных дифференциальных уравнений. Подстановка (1) в уравнения релятивистского пучка приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$v_\theta = 0, \quad \operatorname{ctg} \theta \frac{v_\psi^2}{(1 - v^2)^{1/2}} + \varphi' + v_\psi K_r - v_r K_\psi = 0,$$

$$\frac{v_\psi}{(1 - v^2)^{1/2}} = K_\theta,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \varphi')' = \sigma, \quad \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta K_\psi)' = \sigma v_r, \quad (18)$$

$$-K_r' = \sigma v_\psi, \quad K_r + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta K_\theta)' = 0.$$

Она включает шесть уравнений относительно семи искомых функций $v_r, v_\psi, K_r, K_\theta, K_\psi, \varphi, \sigma$. Второе и последнее соотношения из (18) представляют собой θ - и r -компоненты условия потенциальности потока

$\text{rot } \vec{P} = 0$, $\vec{P} = \vec{v}/(1 - v^2)^{1/2} + \vec{\lambda}$, где $\vec{\lambda}$ - векторный потенциал. При произвольном задании одной из функций, например v_r , замыкающем систему, приходим к вихревому немоноэнергетическому течению:

$$(\text{rot } \vec{P})_\psi = \frac{1}{r} \left[- \left(\frac{v_r}{(1 - v^2)^{1/2}} \right)' + K_\psi \right],$$

$$\left(\varphi - \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}} \right)' = v_r (\text{rot } \vec{P})_\psi. \quad (19)$$

Будем в дальнейшем интересоваться моноэнергетическими пучками, дополняя уравнения (18) интегралом энергии в форме

$$\varphi + 1 = 1 / \sqrt{1 - v^2}, \quad v^2 = v_r^2 + v_\psi^2. \quad (20)$$

В силу (19) моноэнергетичность при $v_r \neq 0$ означает и потенциальность течения.

Диодный вариант. Условия полного пространственного заряда на конусе $\theta = \theta_0$ для решения (5) будут выполнены, если при $\theta = \theta_0$ потенциал φ и скорость v_r обращаются в нуль. В результате при $\theta = \theta_0$ имеем

$$b^2 = \text{ctg}^2 \alpha \frac{\theta_0}{2}, \quad H_\psi = \frac{\alpha}{r \sin \theta_0}, \quad \rho = \left(\frac{\alpha}{r \sin \theta_0} \right)^2. \quad (21)$$

Таким образом, константа α может быть выражена через азимутальное магнитное поле или плотность пространственного заряда при $r = 1$:

$$\alpha^2 = \sigma_0 \sin^2 \theta_0. \quad (22)$$

Параметры потока из (5) принимают вид

$$v_r = - \frac{1 - (\text{tg}(\theta/2)/\text{tg}(\theta_0/2))^{2\alpha}}{1 + (\text{tg}(\theta/2)/\text{tg}(\theta_0/2))^{2\alpha}},$$

$$\varphi + 1 = \frac{1 + (\text{tg}(\theta/2)/\text{tg}(\theta_0/2))^{2\alpha}}{2(\text{tg}(\theta/2)/\text{tg}(\theta_0/2))^\alpha}, \quad (23)$$

$$H_\psi = \frac{\sqrt{\sigma_0} \sin \theta_0}{r \sin \theta} (\varphi + 1), \quad \rho = \frac{\sigma_0 \sin^2 \theta_0}{r^2 \sin^2 \theta} (\varphi + 1).$$

При $\theta > \theta_0$, $\alpha > 0$ скорость v_r положительна, а пучок - расходящийся. Заметим, однако, что исходные уравнения не изменяются,

если одновременно изменить знак у v_r , K_ψ . Поэтому выражения с плюсом для v_r и минусом для H_ψ в (23) будут определять сходящийся поток. При $a = b = 1$ формулы (23) особенно просты:

$$v_r = \mp \cos \theta, \quad \varphi + 1 = \frac{1}{\sin \theta},$$

$$H_\psi = \pm \frac{1}{r \sin^2 \theta}, \quad \rho = \frac{1}{r^2 \sin^3 \theta}.$$

Они описывают конический диод, эмиттером для которого является раскрывшийся в плоскость конус $\theta = \pi/2$. Из соотношений (21) следует, что для реализации построенного решения на эмиттере должно существовать отличное от нуля азимутальное магнитное поле. Рис. 1д иллюстрирует зависимость от θ функций в (23) при $\sigma_0 = 0, 1$ и $\theta_0 = 30^\circ$.

Система (18), (20) численно интегрировалась для случая, когда траектории на конусах вырождаются в окружности ($v_r=0$) и при $v_r, v_\psi \neq 0$. Результаты приведены на рис. 2а, б для $\sigma_0 = 0, 1$ и $\theta_0 = 30^\circ$. Сравнивая поведение одинаковых величин на рис. 1д - 2а, б, можно отметить, что в качественном отношении они ведут себя одинаково. Что касается количественных отличий, то обращает на себя внимание гораздо более быстрый рост v_ψ на рис. 2а по сравнению с v_r на рис. 1д. Рис. 3а соответствует общему случаю $v_r, v_\psi \neq 0$ при большей плотности пространственного заряда: $\sigma_0 = 0, 5$, $\theta_0 = 30^\circ$. Немонотонность кривых для K_ψ и σ выражена здесь более энергично; опережение в темпе роста v_r по сравнению с v_ψ при больших θ привело к уменьшению v_ψ . На рис. 3а изображена также функция $\alpha(\theta) = d \ln r / d\psi$, введенная в (7), которая входит в уравнение траектории.

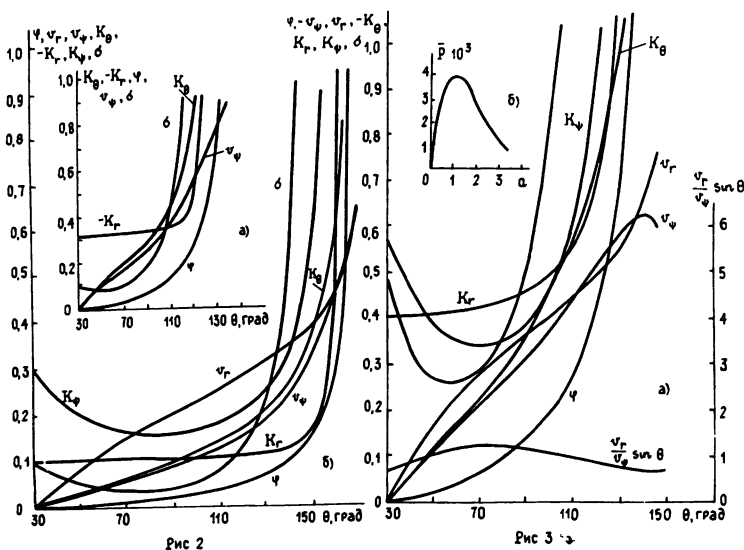


Рис. 3а соответствует общему случаю $v_r, v_\psi \neq 0$ при большей плотности

пространственного заряда: $\sigma_0 = 0,5$, $\theta_0 = 30^\circ$. Немонотонность кривых для K_ψ и σ выражена здесь более энергично; опережение в темпе роста v_r по сравнению с v_ψ при больших θ привело к уменьшению v_ψ . На рис. 3а изображена также функция $\alpha(\theta) = d \ln r/d\psi$, введенная в (7), которая входит в уравнение траектории.

Вариант транспортировки. Рассмотрим решение (5) в варианте транспортировки релятивистского пучка в кольцевом коническом канале $\theta_b \leq \theta \leq \theta_a$. Сплошной конический пучок не может быть реализован из-за стремления скорости при $\theta \rightarrow 0$ к скорости света, а потенциала и напряженности магнитного поля - к бесконечности. Следует отметить, что для этого случая отсутствует продольное магнитное поле, так что это решение не является релятивистским аналогом задачи (13)-(17).

Пусть потенциал внутренней стенки конического канала $\theta = \theta_b$ равен φ_b . Выражение для φ , записанное на этой поверхности, представляет собой квадратное уравнение относительно b , решая которое имеем

$$b = \operatorname{tg}^{-\alpha} \frac{\theta_b}{2} B(\varphi_b), \quad B(\varphi_b) = \varphi_b + 1 \pm \sqrt{\varphi_b(\varphi_b + 2)}. \quad (24)$$

Связь, аналогичная (22), позволяет выразить постоянную α через $\sigma_b = \sigma(\theta_b)$:

$$\alpha^2 = \sigma_b \sin^2 \theta_b. \quad (25)$$

Параметры потока с учетом (24), (25) определяются формулами

$$v_r = \mp \frac{1 - B^2(\operatorname{tg}(\theta/2)/\operatorname{tg}(\theta_b/2))^{2\alpha}}{1 + B^2(\operatorname{tg}(\theta/2)/\operatorname{tg}(\theta_b/2))^{2\alpha}},$$

$$\varphi + 1 = \frac{1 + B^2(\operatorname{tg}(\theta/2)/\operatorname{tg}(\theta_b/2))^{2\alpha}}{2B(\operatorname{tg}(\theta/2)/\operatorname{tg}(\theta_b/2))^\alpha},$$

$$H_\psi = \pm \frac{\sqrt{\sigma_b} \sin \theta_b}{r \sin \theta} (\varphi + 1), \quad \rho = \frac{\sigma_b \sin^2 \theta_b}{r^2 \sin^2 \theta} (\varphi + 1). \quad (26)$$

Для полного тока I (в правой части формулы для v_r берется минус) получаем

$$I = 2\pi \int_{\theta_b}^{\theta_a} \sigma v_r \sin \theta \, d\theta = -2\pi\alpha^2 \int_{\theta_b}^{\theta_a} \frac{1 - b^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}(\theta/2)}{1 + b^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}(\theta/2)} \frac{d\theta}{\sin \theta} =$$

$$= 2\pi a \left[\ln \frac{1 + b^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}(\theta_a/2)}{1 + b^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}(\theta_b/2)} - a \ln \frac{\operatorname{tg}(\theta_a/2)}{\operatorname{tg}(\theta_b/2)} \right] = \quad (27)$$

$$= 2\pi a \left[\ln \frac{1 + B^2 T^{2\alpha}}{1 + B^2} - a \ln T \right], \quad T = \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2} / \operatorname{tg} \frac{\theta_b}{2} > 1.$$

Здесь через T обозначено отношение тангенсов, характеризующее геометрию канала.

Двузначность функции $B(\varphi_b)$ приводит к существованию двух режимов при фиксированных θ_b , θ_a , заданных значениях потенциала φ_b и плотности σ_b на внутренней стенке. Чтобы убедиться в этом, запишем выражения для $v_{rb} = v_r(\theta_b)$, $v_{ra} = v_r(\theta_a)$ при знаке минус в правой части v_r , тока I и потенциала φ_a :

$$v_{rb} = - \frac{1 - B^2}{1 + B^2}, \quad v_{ra} = \frac{1 - B^2 T^{2\alpha}}{1 + B^2 T^{2\alpha}}, \quad \varphi_a + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{ra}^2}},$$

$$\frac{I}{2\pi a} = \ln \frac{1 + B^2 T^{2\alpha}}{1 + B^2} - a \ln T, \quad \varphi_a = \frac{(1 - B T^a)^2}{2 B T^a}. \quad (28)$$

Подставляя B из (24) в (28), имеем

$$v_{rb} = \pm \frac{\sqrt{\varphi_b(\varphi_b + 2)}}{\varphi_b + 1}, \quad B = (\varphi_b + 1)(1 + v_{rb}),$$

$$v_{ra} = - \frac{1 - (\varphi_b + 1)^2(1 + v_{rb})^2 T^{2\alpha}}{1 + (\varphi_b + 1)^2(1 + v_{rb})^2 T^{2\alpha}}.$$

Рассмотрим численный пример $\theta_a = 90^\circ$, $\theta_b = 60^\circ$, $\alpha = 1$, $\varphi_b + 1 = \sqrt{5} \approx 2,236$. При этом

$$v_{rb} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm 0,894, \quad T = \sqrt{3},$$

$$v_{ra} = \begin{cases} (26 + 12\sqrt{5}) / (28 + 12\sqrt{5}) = 0,964 \\ (26 - 12\sqrt{5}) / (28 - 12\sqrt{5}) = -0,706 \end{cases}, \quad (29)$$

$$\frac{I}{2\pi} = \begin{cases} \ln \frac{14 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{3}(5 + 2\sqrt{5})} = 0,514 \\ \ln \frac{14 - 6\sqrt{5}}{\sqrt{3}(5 - 2\sqrt{5})} = -0,449 \end{cases}, \quad \varphi_{\alpha} + 1 = \begin{cases} 3,736 \\ 1,413 \end{cases}.$$

Если учесть, что в (28) был использован знак минус у v_r , то при плюсе в правой части будут получены v_{rb} , v_{ra} , отличающиеся от (29) знаком. Таким образом, кроме расходящегося потока с $v_{ra} = 0,964$, $v_{rb} = 0,894$ возможен режим со сходящимся пучком при тех же значениях скоростей на стенках канала; кроме сходящегося потока с $v_{ra} = -0,706$, $v_{rb} = -0,894$ - соответствующее расходящееся течение. При совпадении параметров потока на внутренней стенке канала $\theta = \theta_b$ эти течения отличаются профилем скорости $v_r(\theta)$, значениями v_{ra} и φ_{α} .

Полный ток I на основании (28) монотонно возрастает при увеличении α : при $\alpha = 0$ он равен нулю, а при больших α , когда $B^2 T^{2\alpha} \gg 1$, меняется как $(2\pi \ln T)\alpha^2$. Потенциал φ_{α} при $\alpha \rightarrow \infty$ ведет себя как $(B/2)T^{\alpha}$, т.е. растет быстрее, чем I . Отсюда следует, что первеанс $P = I/\varphi_{\alpha}^{3/2}$, равный нулю при $\alpha = 0$ и стремящийся к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$, должен иметь максимум:

$$\bar{P} = \frac{P}{4\pi B\sqrt{2B}} = \alpha \ln \left[\frac{1 + B^2 T^{2\alpha}}{(1 + B^2)T^{\alpha}} \right] \left[\frac{(1 - BT^{\alpha})^2}{T^{\alpha}} \right]^{-3/2}. \quad (30)$$

На рис. 3б представлена зависимость $\bar{P}(\alpha)$ для $T = \sqrt{3}$, $B = 4$ ($\varphi_b \approx 1,125$). Максимальное значение $\bar{P}_{\max} \approx 4,083 \cdot 10^{-3}$ достигается при $\alpha = 1,1$. Интересно сравнить это значение с величиной $P_{B \max}$ из (10) и P_L из (11). Выше уже отмечалось, что исследуемое течение осуществляется без внешнего продольного магнитного поля. Понятно поэтому, что максимальный первеанс P_{\max} , вычисляемый на основании (30), оказался ближе к первеансу лэнгмюровского диода, чем к первеансу цилиндрического бриллюэновского пучка:

$$\frac{P_{B \max}}{P_{\max}} = \frac{8\sqrt{2}\pi/(3\sqrt{3})}{8\sqrt{2}\pi \cdot 4\bar{P}_{\max}} \approx 12, \quad \frac{P_{\max}}{P_L} = \frac{\pi\sqrt{2} \cdot 32\bar{P}_{\max}}{\pi\sqrt{2}/9} \approx 1,175.$$

Подробно исследованы свойства двумерных потоков с круговыми конусами в качестве эквипотенциальных поверхностей и пространственными спиральными траекториями, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В релятивистском случае строго учитывается собственное магнитное поле пучка.

Конические бриллюэновские потоки пополняют собой парк эталонных задач, формирование которого необходимо для физического тестирования современных программ траекторного анализа, предназначенных для расчета структуры пучка, в том числе релятивистских потоков с

высокой компрессией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У. Формирование электронных пучков. - М.: Мир, 1970.
2. De Pasch D.C., Ulrich P.V.//J.Electr.Contr.1961.V.10.N 2.P.139.
3. Сыровой В. А. //ПМТФ. 1965. N 6. С.3.
4. Сыровой В. А. //ПМТФ. 1963. N 3. С.26.
5. Hines M.E.//Proc.IRE. 1952. V.40. N 1. P.61.
6. Логинова Т. Ф. //Радиотехника и электроника. 1961.Т.6.N 9.С.15.
7. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. - М.: Мир, 1984.
8. Данилов В. Н. //ПМТФ. 1968. N 1. С.3.

Всесоюзный электротехнический
институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
6 марта 1990 г.

TO THE CONICAL BRILLOUIN ELECTRON FLOW

A. V. Vashkovskij, V. A. Syrovovj

The non-relativistic and relativistic flow with circular cones as equipotentials and space-spirals as trajectories are considered. The space-charge-limited diode solution and the regime of beam transportation in conical canal with special non-homogeneous magnetic field are investigated.

Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 621.371:550.388.2

О ВОЗМОЖНОСТИ ЧАСТОТНО-УГЛОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ

В. Г. Галушко

В интенсивно развиваемых в последнее время методах НЗ и ВНЗ диагностики ионосферы решение обратных задач восстановления профиля электронной концентрации основано на измерении частотных зависимостей времени группового запаздывания $\tau_g(f)$ сигналов. Появление фазированных антенных решеток (ФАР), имеющих диаграммы направленности шириной $\approx 1^\circ$ [1], позволяет измерять углы прихода (УП) сигналов с высокой точностью. Это обстоятельство может быть использовано для диагностики ионосферы по измерениям УП на наклонных радиотрассах на нескольких частотах (частотно-угловое зондирование). Рассмотрим решение такой задачи в следующей постановке.

Пусть на трассе длиной D осуществляется зондирование плоскостойкой изотропной ионосферы монохроматическими сигналами на M частотах f_1 ($f_1 < f_2 < \dots < f_M$). Предположим, что профиль электронной концентрации $N_e(z)$ начинается с некоторой высоты z_0 . Тогда для каждой частоты f_1 в рамках геометрической оптики можно записать интегральное уравнение:

$$D(\theta_1, f_1) = 2z_0 \operatorname{tg}\theta_1 + 2 \sin\theta_1 \int_{z_0}^{z_{n_1}} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z, f_1) - \sin^2\theta_1}} = D, \quad (1)$$

где θ_1 - угол прихода сигнала i -й частоты (измеряемый параметр); z_{n_1} - высота отражения, определяемая из условия $n^2(z, f_1) = \sin^2\theta_1$; $n(z, f_1)$ - коэффициент преломления среды распространения; $\omega_1 = 2\pi f_1$. Для решения уравнений типа (1) обычно используют разбиение искомого профиля $N_e(z)$ на ряд сегментов, в пределах которых $N_e(z)$ описывается неким модельным представлением [2]. Таким образом, обратная задача сводится к нахождению корней системы алгебраических уравнений для параметров каждого сегмента и затем построению общего решения. При измерении УП $N_e(z_{n_1})$ находятся из условия полного

внутреннего отражения. Сложность заключается в вычислении истинных высот отражения z_{n_1} . Будем полагать, что каждому значению f_1 соответствует единственный угол θ_1 , а профиль $N_0(z)$ - монотонный. Разобьем $N_0(z)$ на M сегментов (по числу зондирующих частот) и на интервалах $\{z_0, z_{n_2}\}$, $\{z_{n_1}, z_{n_{1+1}}\}$ воспользуемся линейной аппроксимацией $N_0(z)$. Выполнив в (1) интегрирование на интервале $\{z_0, z_{n_2}\}$ для первых двух частот и решив полученную систему двух уравнений относительно z_0 и z_{n_2} , запишем

$$z_0 = \frac{D}{2} \frac{f_1^2 \sin 2\theta_1 - f_2^2 \sin 2\theta_2}{f_1^2 \operatorname{tg} \theta_2 \sin 2\theta_1 - f_2^2 \operatorname{tg} \theta_1 \sin 2\theta_2}; \quad (2)$$

$$z_{n_2} = \frac{f_2^2 \cos^2 \theta_2}{\alpha_1} + z_0, \quad (3)$$

где α_1 характеризует наклон $N_0(z)$ на участке $\{z_0, z_{n_2}\}$:

$$\alpha_1 = \frac{D}{2} \frac{f_1^2 \operatorname{tg} \theta_2 \sin 2\theta_1 - f_2^2 \operatorname{tg} \theta_1 \sin 2\theta_2}{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}.$$

Очевидно, что высоты отражения сигналов остальных частот определяются выражением

$$z_{n_i} = \frac{f_i^2 \cos^2 \theta_i - f_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{i-1}}{\alpha_{i-1}} + z_{n_{i-1}}, \quad (4)$$

где $i = 3, 4, \dots, M$.

Вычисление α_{i-1} не вызывает затруднений. После выполнения интегрирования в (1) для всех частот и сегментов $N_0(z)$ и обобщения полученных результатов, запишем

$$\alpha_{i-1} = 4f_1 \sin \theta_1 \sqrt{f_1^2 \cos^2 \theta_1 - f_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{i-1}} / (D - 2z_0 \operatorname{tg} \theta_1 - 4f_1 \sin \theta_1 \left[\frac{1}{\alpha_1} (f_1 \cos \theta_1 - \sqrt{f_1^2 \cos^2 \theta_1 - f_2^2 \cos^2 \theta_2}) + \sum_{k=2}^{i-2} \theta_k \right]). \quad (5)$$

Здесь

$$Q_k = \frac{1}{\alpha_k} (\sqrt{f_1^2 \cos^2 \theta_1 - f_k^2 \cos^2 \theta_k} - \sqrt{f_1^2 \cos^2 \theta_1 - f_{k+1}^2 \cos^2 \theta_{k+1}}) \times$$

$$\times \theta(i - 2 - k),$$

$\theta(x)$ - тета-функция, т.е. $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$. Таким образом, все необходимые для построения $N_e(z)$ профиля (в случае кусочно-линейной аппроксимации) величины найдены.

Для проверки работоспособности предложенного метода было проведено численное моделирование. Профиль $N_e(z)$ задавался параболой с параметрами: полутолщина слоя $y_m = 100$ км, высота начала $z_0 = 200$ км, критическая частота $f_{кр} = 8$ МГц. Для дистанции $D = 640$ км рассчитывались углы прихода сигналов на 10 частотах от 1 до 10 МГц с шагом $\Delta f = 1$ МГц с дальнейшей обработкой в соответствии с предложенным алгоритмом.

На рис. 1 приведены результаты выполненного моделирования, сплошной линией изображен исходный профиль $f_{пл}(z)$, а пунктирной - восстановленный. Видно, что $f_{пл}(z)$

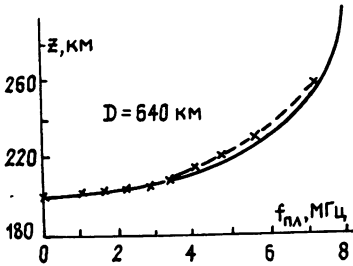


Рис 1

определяется с довольно высокой точностью (максимальная погрешность наблюдается в верхней части $f_{пл}(z)$ -профиля и составляет единицы процентов). Следует отметить, что построить $f_{пл}(z)$ до высоты максимума слоя z_m не удается (максимальное значение $z \approx 260$ км). Объясняется это тем, что максимально наблюдаемая частота (в нашем случае 10 МГц) недостаточно близка к максимально применимой (МПЧ).

Увеличить диапазон восстановления $f_{пл}(z)$ в принципе можно, уменьшив Δf при приближении к МПЧ. Но, поскольку вблизи МПЧ глубина проникновения волны в ионосферный слой сильно зависит от зондирующей частоты, в реальных условиях достичь значения z_m весьма сложно. Этот недостаток, однако, не является принципиальным. Устранить его, по-видимому, можно, применяя в качестве аппроксимирующих функций сегментов параболы. Действительно, отражение сигналов, частота которых близка к МПЧ, происходит в окрестности максимума $N_e(z)$, где вполне оправданно использование полиномов второй степени [3]. Тогда полученная на последнем этапе парабола будет описывать $f_{пл}(z)$ -профиль вблизи его экстремума.

Учитывая, что реально УП измеряются с конечной точностью, исследовали устойчивость предложенного алгоритма к "шумам" входных параметров. Для этого значения углов θ_1 задавались в виде $\theta_1 = \bar{\theta}_1 + \delta\theta_1$, где $\bar{\theta}_1$ - величины, полученные при решении прямой задачи для заданного профиля $N_e(z)$; $\delta\theta_1$ - случайная добавка, равномерно распределенная в интервале $\Delta\theta$. Проведенный анализ показал, что при $\Delta\theta = [-1^\circ, 1^\circ]$ погрешность алгоритма существенно не меняется.

Таким образом, показана возможность восстановления $N_e(z)$ по измерениям частотной зависимости УП сигналов. Отметим, что работа не охватывает весь круг проблем, связанных, например, с немонотонностью

$N_e(z)$ -профиля, влиянием магнитного поля Земли и т. д. Тем не менее, исследование более сложных случаев представляется перспективным, так как разработка и использование метода частотно-углового зондирования ионосферы с добавлением традиционных НЗ методов могут дать дополнительную информацию об ионосфере.

Автор признателен Ю. М. Ямпольскому за обсуждение постановочной части задачи и полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брауде С. Я., Мень А. В., Содин Л. Г. // В сб.: Антенны. - М.: Связь, 1978. Вып. 26. С. 3.
2. Крашенинников И. В., Лобачевский Л. А., Лянной Б. Е. и др. // Геомагнетизм и аэрномия. 1988. Т. 23. № 5. С. 727.
3. Лянной Б. Е., Носова Г. Н. // В сб.: Исследование условий распространения радиоволн. - М.: ИЗМИРАН, 1983. С. 88.

Радиоастрономический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
9 января 1991 г.

УДК 621.371.25

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ОДНОМЕРНОЙ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

Хорошо известно, что при равномерном движении заряженной частицы через электрически неоднородную среду происходит излучение электромагнитного поля. Излучение связано с изменением соотношения между фазовой скоростью электромагнитной волны и скоростью частицы и может наблюдаться при относительно малых скоростях.

Для явлений, имеющих место при прохождении корпускулярных потоков через солнечную корону, ионосферу и т. п., представляет интерес исследование излучения заряженной частицы в среде с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью. Хотя этому вопросу посвящена обширная литература (например, [1-3]), во всех известных работах рассматривались среды, в которых флуктуации диэлектрической проницаемости малы. Это допущение далеко не всегда выполняется на практике. В одномерных средах, когда диэлектрическая проницаемость

является функцией одной координаты и радиус корреляции ее флуктуаций мал по сравнению с характерной длиной волны (мелкомасштабные неоднородности), можно определить потери энергии заряженной частицы на излучение при произвольных соотношениях между средней и случайной составляющими диэлектрической проницаемости. Одномерные среды по своим электродинамическим свойствам в этом случае эквивалентны одноосным кристаллам, тензор эффективной диэлектрической проницаемости которых имеет следующие компоненты [4, 5]:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \bar{\epsilon}, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{\text{эфф}}$$

$$\epsilon_{\text{эфф}}^{-1} = \bar{\epsilon}^{-1} = \int \frac{F(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon - i\pi F(0). \quad (1)$$

Здесь среда одномерна в направлении z ; черта над ϵ означает усреднение по ансамблю реализаций диэлектрической проницаемости; $F(\epsilon)$ - функция распределения диэлектрической проницаемости. Заметим, что если диэлектрическая проницаемость распределена по Гауссу [6]

$$F(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi\delta\epsilon^2)} \exp\left[-\frac{(\bar{\epsilon} - \epsilon)^2}{2\delta\epsilon^2}\right],$$

то

$$\epsilon_{\text{эфф}}^{-1} = \frac{1}{2\pi\delta\epsilon^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{z - y} dy - i\pi e^{-z^2} \right),$$

где $z = \frac{\bar{\epsilon}}{(2\delta\epsilon^2)^{1/2}}$. Для больших флуктуаций диэлектрической

проницаемости ($z \ll 1$) $\epsilon_{\text{эфф}}^{-1} = \frac{\bar{\epsilon}}{\delta\epsilon^2} - i\pi \frac{1}{(2\delta\epsilon^2)^{1/2}}$ и мнимая часть

значительно больше действительной; при малых флуктуациях диэлектрической проницаемости ($z \gg 1$)

$$\epsilon_{\text{эфф}}^{-1} = \frac{1}{\bar{\epsilon}} \left(1 + \frac{\delta\epsilon^2}{\bar{\epsilon}^2} \right) - i \left(\frac{\pi}{2\delta\epsilon^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\bar{\epsilon}^2}{\delta\epsilon^2}\right],$$

т. е. мнимая часть $\epsilon_{\text{эфф}}^{-1}$ экспоненциально мала.

Зная тензор эффективной диэлектрической проницаемости и учитывая, что при движении заряда со скоростью \vec{v}_0 возникает поле,

возбуждаемое распределением плотности и тока заряда ($\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{v}_0 t)$,

$\vec{j} = e\vec{v}_0\delta(\vec{r} - \vec{v}_0 t)$, можно определить потери энергии частицы на излучение. Интенсивность потерь энергии частицы с элемента пути $d\vec{l}$ в интервале частот $d\omega$ выражается через фурье-компоненты электрического поля $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ и равна

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\vec{l}d\omega} &= \text{Re} \frac{e}{v_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} (\vec{E}_{\vec{k}, \omega} \vec{v}_0) e^{i(\vec{k}\vec{v}_0 - \omega)t} = \\ &= \text{Re} \frac{ie^2}{2\pi^2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{(\vec{k}\vec{v}_0) v_{o1} v_{o2} A_{j1}}{|\alpha_{ij}|}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $|\alpha_{ij}| = |k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}|$, Λ_{ij} - минор α_{ij} элемента определителя $|\alpha_{ij}|$.

Если частица движется вдоль оси кристалла ($v_0 \parallel Oz$), то (2) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 W}{dld\omega} = \text{Re} \frac{ie^2}{2\pi^2 \omega} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{\omega^2 \bar{\epsilon}/c^2 - \omega^2/v_0^2}{(k_x^2 + k_y^2) \bar{\epsilon} - (\omega^2 \bar{\epsilon}/c^2 - \omega^2/v_0^2) \epsilon_{\text{эфф}}}. \quad (3)$$

При движении частицы поперек оси симметрии (например, $v_0 \parallel Ox$)

$$\frac{d^2 W}{dld\omega} = \text{Re} \frac{ie^2}{2\pi^2 c^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_y dk_z \times \quad (4)$$

$$\times \frac{\left(\frac{\omega^2}{v_0^2} + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon} \right) \left(\frac{\omega^2}{v_0^2} + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\text{эфф}} \right) - k_y^2 k_z^2}{\frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon} - \frac{\omega^2}{v_0^2} - k_y^2 - k_z^2 \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{v_0^2} + k_y^2 \right) \bar{\epsilon} + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon} \right) \epsilon_{\text{эфф}} \right]}.$$

При выполнении интегрирования в (3) и (4) удобно перейти к полярным координатам (k_1, φ) .

Из формулы (3) следует, что при относительно больших скоростях заряженной частицы $\left(\frac{v_0}{c} \bar{\epsilon}^{1/2} > 1 \right)$ потери энергии связаны с черенковским излучением только необыкновенной волны и равны*

$$\frac{d^2 W}{dld\omega} = - \frac{e^2 \omega}{v_0^2 \bar{\epsilon}} \left(\frac{v_0^2}{c^2} \bar{\epsilon} - 1 \right). \quad (5)$$

Если условия черенковского излучения не выполняются $\left(\frac{v_0}{c} \bar{\epsilon}^{1/2} < 1 \right)$, то единственной причиной излучения являются флуктуации диэлектрической проницаемости. По сути, имеет место переходное излучение на отдельных случайных неоднородностях диэлектрической проницаемости. Этот эффект описывается мнимой частью $\epsilon_{\text{эфф}}$, и интенсивность потерь энергии частицы на излучение определяется выражением

$$\frac{d^2 W}{dld\omega} = - \frac{e^2 \omega}{\pi v_0^2} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \bar{\epsilon} \right) \frac{\epsilon'_{\text{эфф}}}{\epsilon_{\text{эфф}}}, \quad (6)$$

$$\epsilon_{\text{эфф}} = \epsilon'_{\text{эфф}} + i\epsilon''_{\text{эфф}}, \quad \epsilon''_{\text{эфф}} = \frac{\int \frac{F(\epsilon) d\epsilon}{\epsilon}}{\left(\int \frac{F(\epsilon) d\epsilon}{\epsilon} \right)^2 + \pi^2 F(0)^2},$$

*Теория излучения Вавилова - Черенкова в одноосных кристаллах была впервые развита Гинзбургом [7], а затем в работах [8,9] и др.

$$\varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi} = \frac{\pi f(0)}{\left(\int \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon\right)^2 + \pi^2 F(0)^2}$$

В случае движения заряда поперек оси симметрии происходит черенковское излучение как обыкновенной, так и необыкновенной волн, если между фазовыми скоростями этих волн и скоростью заряда выполняются следующие соотношения: в обыкновенной волне $\frac{v_0}{c} \bar{\varepsilon}^{-1/2} > 1$, в необыкновенной - $\frac{v_0}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi}} > 1$,

$$\frac{d^2(W^{(0)} + W^{(H)})}{dl d\omega} = - \frac{e^2 \omega}{v_0^2} \frac{\left(\frac{v_0^2}{c^2} \bar{\varepsilon}^{-1/2} \varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi}{}^{1/2} - 1\right)}{\bar{\varepsilon}^{-1/2} \varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi}{}^{1/2}} \quad (7)$$

Потери энергии, обусловленные флуктуациями диэлектрической проницаемости, равны

$$\frac{d^2W}{dl d\omega} = - \frac{e^2 \omega}{2\pi v_0^2} \frac{\varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi}}{\bar{\varepsilon}(\varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi})^{3/2}} \ln \left| \frac{k_{\text{imax}} v_0}{\omega(1 - v_0^2 c^{-2} \varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi})^{1/2}} \right|, \quad (8)$$

где $\frac{v_0}{c} \bar{\varepsilon}^{-1/2} < 1$, $\frac{v_0}{c} \varepsilon'_{\text{Э}\Phi\Phi}{}^{1/2} < 1$, k_{imax} - максимальное значение волнового вектора, при котором еще применима макроскопическая электродинамика.

Аналогичные соотношения могут быть выписаны для интенсивности излучения заряда в мелкослойной одномерной периодической среде (период L много меньше характерной длины волны), тензор диэлектрической проницаемости которой имеет компоненты

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(z) dz, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\text{Э}\Phi\Phi}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\text{Э}\Phi\Phi}^{-1} = \bar{\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{L} \int \frac{dz}{\varepsilon(z)} - \frac{i\pi}{L} \frac{1}{\sum_n \left| \frac{d\varepsilon}{dz} \right|_{z=z_n}},$$

z_n - корни уравнения $\varepsilon(z) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Яковенко В. М. // УФН. 1965. Т. 86. Вып. 2. С. 189.
2. Рыков Ю. А., Тамойкин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 3. С. 356.
3. Капица С. П. // ЖЭТФ. 1960. Т. 3. № 5. С. 1367.
4. Басс Ф. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 6. С. 1015.
5. Рыков Ю. А. Автореферат диссертации. Горький, 1980.
6. Басс Ф. Г., Притула Г. М. Препринт ИРЭ АН УССР. № 320. 1986.
7. Гинзбург В. Л. // ЖЭТФ. 1953. Т. 23. С. 507.
8. Коломенский А. А. // ДАН СССР. 1952. Т. 86. С. 1097.
9. Каганов М. И. // ЖТФ. 1953. Т. 23. С. 507.