

ГОСКОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ  
ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

Ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том 34, № 6

Нижний Новгород

июнь 1991

СОДЕРЖАНИЕ

Якубов В.П., Яковлев О.И., Ефимов А.И., Ерофеев А.Л. Скорость солнечного ветра по частотным данным двукратного радиопросвещивания околосолнечной плазмы .....	615
Ерухимов Л.М., Шварц М.М. К вопросу об использовании искусственных неоднородностей для возбуждения тепловой параметрической неустойчивости в ионосфере при ее наклонном облучении .....	624
Бахшян Г.Г., Мариносян Г.И., Мосоян К.С. Радиофизические ненкогерентные методы дистанционного зондирования морской поверхности .....	630
Голуб В.Л. Кондратенко А.Н., Олефир В.П. Непотенциальные поверхностные волны в магнитоактивных плазменных структурах .....	639
Буренин А.В. Качественное построение спин-вращательных операторов в теории молекулярных спектров .....	646
Алексеев Б.Ф., Гайфуллин М.Б. Ориентационно-модулированный ЭПР в системах с анизотропным зеемановским и тонким взаимодействиями .....	651
Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы .....	661
Алмаев Р.Х., Суворов А.А. Влияние случайных изменений ослабления излучения на флуктуации интенсивности в области насыщения .....	671
Малахов А.Н. Диффузия через резкие потенциальные барьеры. 2. Временные характеристики диффузии .....	681
Старков А.С. Прямая и обратная задачи рассеяния мод в волноводе с неровной границей .....	694

Краткие сообщения и письма в редакцию

Баранец А.Н., Борисова Т.Д., Бубнов В.А. Влияние терминатора на характеристики ионограмм наклонного зондирования ионосферы на протяженной трассе .....	707
Бронин А.Г., Заботин Н.А. Воздействие искусственной ионосферной турбулентности на поляризацию сигналов вертикального зондирования .....	710
Павкин А.Г. Стохастичность решений уравнения Клейна - Гордона в янг-миллсовском поле .....	713
Конюхов Б.А., Конюхова И.Д. Поларизационные соотношения для поперечных волн в среде с внутренними динамическими тензорными полями .....	715
Геликонов В.М., Кучева М.Н., Малыкин Г.Б. Измерение двулуче-	

преломления ОВС с широкополосным источником излучения ..	717
<b>Гершман А.Б., Ермолаев В.Т.</b> Синтез весового распределения адаптивной антенной решетки с широкими провалами в диаграмме направленности .....	720
<b>Азаренков Н.А., Остриков К.Н.</b> Генерация третьей гармоники поверхностной волны в замедляющей структуре полупроводник-металл .....	724

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**[С. А. АХМАНОВ]**, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Подписано к печати 20.11.91

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
Усл. печ. л. 10, 15. Усл. кр.-отт. 10, 15. Уч.-изд. л. 12, 8.  
Тираж 987 экз. Заказ 4909. Цена 1 р. 80 к.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71.

Отпечатано с готового набора.

Нижегородская областная типография управления издательств, полиграфии и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 621.371.36.029.63

## СКОРОСТЬ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА ПО ЧАСТОТНЫМ ДАННЫМ ДВУКРАТНОГО РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ ОКОЛОСОЛНЕЧНОЙ ПЛАЗМЫ

*В. П. Якубов, О. И. Яковлев, А. И. Ефимов, А. Л. Ерофеев*

Анализируются автокорреляционные функции флюктуаций фазы и частоты в схеме двукратного распространения радиоволн через околосолнечную плазму при работе систем связи в режиме когерентного ответа. Показано, что функция корреляции имеет характерный максимум при временному сдвиге, зависящем от скорости перемещения неоднородностей плазмы и расстояния между лучевой линией и центром Солнца. Обосновывается новый способ определения скорости солнечного ветра. Результаты теоретического анализа сопоставляются с экспериментальными данными, полученными при радиозондировании короны Солнца сигналами аппаратов "Венера-15, -16". Приводятся результаты определения скорости солнечного ветра по данным о флюктуациях фазы или частоты при работе радиосистемы в режиме когерентного ответа. Дан сравнительный анализ результатов определения скорости солнечного ветра различными методами.

1. Развитие метода радиопросвещивания с использованием космических аппаратов позволило расширить возможности исследований и получить большой объем данных о солнечном ветре [1]. Проведенные с помощью аппаратов "Венера-15, -16" исследования флюктуаций амплитуды [2, 3], вариаций частоты и фазы [4, 6], уширения спектра [7] и угла рефракции [8] радиоволн дали радиофизическую информацию, позволившую получить новые сведения о солнечном ветре. На базе этих данных было доказано существование на гелиоцентрических расстояниях 10 - 25 радиусов Солнца физически выделенной области, где сильно увеличиваются скорость, кинетическая энергия вещества и изменяются параметры турбулентности плазмы [9-12]. Было установлено также наличие волновых явлений в околосолнечной плазме [13, 16].

Впервые была проведена бистатическая радиолокация Солнца [15]. Использование разнесенного приема при радиопросвещивании околосолнечной плазмы и метода дисперсионного интерферометра позволяет получить ценную дополнительную информацию о солнечном ветре [16-18].

Для понимания механизма ускорения плазмы важно получить достоверную зависимость скорости солнечного ветра  $v$  от гелиоцентрического расстояния  $R$ . Ранее для изучения зависимости  $v(R)$  использовались два метода. Скорость  $v$  определялась по спектрам флюктуаций амплитуды, зарегистрированным в одном пункте, - первый метод [2] - и путем корреляционного анализа флюктуаций частоты при приеме сигналов в двух разнесенных пунктах - второй метод [6]. В работе [6] было показано, что при расстояниях  $R > 13 R_0$ , где  $R_0$  - радиус Солнца, оба метода дают одинаковые результаты, а для  $R < 10 R_0$  эти методы дают отличающиеся значения скорости  $v$ . В публикации [14] утверждается, что в первом методе при  $R < 10 R_0$  на измерения скорости солнечного

ветра оказывают сильное мешающее влияние волны плазмы. При анализе возможностей различных методов определения скорости солнечного ветра, описанных в работах [2, 6, 16-18], без внимания остался вопрос о корреляционной связи между флуктуациями параметров радиоволн в схеме двукратного распространения, реализуемой при работе радиосредств в режиме когерентного ответа. В этом случае вследствие движения наземного пункта и космического аппарата трассы распространения всегда пространственно разнесены между собой, и анализ корреляционной связи между флуктуациями на трассах связи может дать дополнительную информацию о скорости солнечного ветра даже при использовании одного наземного пункта [19]. В связи с этим представляет интерес развитие новых методов определения скорости солнечного ветра.

При радиопросвечивании околосолнечной плазмы сигналами аппаратов "Венера-15, -16" использовался также режим когерентного ответа. При работе в этом режиме радиоволны проходят через плазму по двум путям: сначала по линии Земля - аппарат, а затем по трассе аппарат - Земля. Из-за орбитального движения Земли неоднородности плазмы пересекают эти трассы в разное время, поэтому автокорреляционная функция флуктуаций частоты должна содержать информацию о скорости солнечного ветра. Цель этой работы состоит в анализе автокорреляционной функции флуктуаций фазы и частоты, зарегистрированных в одном пункте, при работе системы связи в режиме когерентного ответа. Мы обоснуем третий метод определения скорости солнечного ветра и найдем этим методом зависимость  $v(R)$ .

## 2. Рассмотрим зависимость времени запаздывания флюктуаций фазы радиоволн от скорости солнечного ветра на радиолинии когерентного ответа, схема которой изображена на рис. 1.

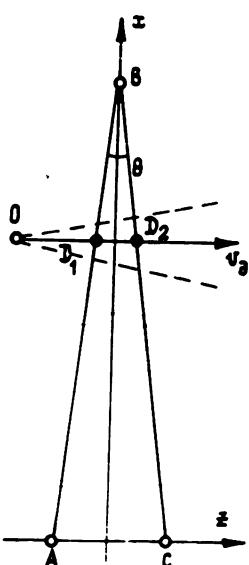


Рис 1

Монохроматический сигнал излучается с Земли (точка А), принимается и ретранслируется космическим аппаратом (точка В) и далее принимается этим же наземным пунктом, который за время распространения радиоволн успевает переместиться вместе с Землей в точку С. Положение центра Солнца на этом рисунке обозначено точкой О. В дальнейшем линию "Земля - аппарат" назовем трассой 1, а "аппарат - Земля" - трассой 2. Точками  $D_1$  и  $D_2$  обозначены участки наибольшего приближения трасс 1 и 2 к Солнцу. С учетом того, что интенсивность флюктуаций электронной концентрации околосолнечной плазмы быстро убывает с увеличением гелиоцентрического расстояния  $R$ , будем считать неоднородности плазмы, вызывающие флюктуации фазы, сосредоточенными в узком слое, границы которого на рис. 1 отмечены штриховыми линиями. Ширина этого слоя равна приблизительно прицельному

расстоянию луча  $OD_1 \approx OD_2 = \rho$  [1]. Угол  $ABC$ , определяющий расстояние между точками  $D_1$  и  $D_2$ , зависит от перпендикулярной к трассам распространения радиоволн компоненты орбитальной скорости движения Земли  $u$ . В области наибольшего приближения трасс распространения к Солнцу проекция этой скорости равна

$$u_1 = u \frac{L_1}{L_1 + L_2},$$

где  $L_1 = BD_1 \approx BD_2$ ,  $L_2 = AD_1 \approx CD_2$ . С течением времени лучевые линии 1 и 2 приближаются к Солнцу со скоростью, которую обозначим  $u_2$ .

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к системе координат, в которой треугольник  $ABC$  неподвижен. При этом необходимо произвести замену скоростей движения Земли и переноса неоднородностей на их эффективные значения  $u_3 = u + u_2$ ;  $v_3 = v + u_2$ . Соответствующую этому схему радиопросвещивания будем называть эквивалентной. Одна и та же выделенная неоднородность плазмы вызывает возмущение фазы волны при работе в режиме когерентного ответа дважды: первый раз в точке  $D_1$  трассы 1, второй раз - в точке  $D_2$  трассы 2. Первое возмущение волны, принятой на космическом аппарате в точке  $B$  и ре-транслированное им в направлении Земли, будет принято наземным пунктом в точке  $C$  с задержкой по времени  $t_1 = 2L_1/c + L_2/c$ . Второе возмущение возникает после того, как выделенная неоднородность пересечет трассу  $BC$ . Это возмущение будет принято на Земле с запаздыванием, равным  $t_2 = L_2/c + \Delta t$ , где  $\Delta t = b_1/v_3$  - время переноса неоднородности из точки  $D_1$  в точку  $D_2$ . Из эквивалентной схемы радиопросвещивания следует, что расстояние между точками  $D_1$  и  $D_2$  равно

$$b_1 = 2 \left( \frac{L_1}{c} + \frac{L_2}{c} \right) \frac{L_1}{L_1 + L_2} u_3 = 2 \frac{L_1}{c} u_3.$$

Следовательно, время прохождения выделенной неоднородностью расстояния  $b_1 = D_1 D_2$  определяется соотношением

$$\Delta t = 2 \frac{L_1}{c} \frac{u + u_2}{v + u_2}. \quad (1)$$

Второе возмущение фазы будет зарегистрировано раньше первого на время  $\tau_0 = t_1 - t_2 = 2L_1/c - \Delta t$ . С учетом (1) получим

$$\tau_0 = 2 \frac{L_1}{c} \frac{v - u}{v + u_2}. \quad (2)$$

В исходной схеме радиопросвещивания разность прицельных расстояний лучей  $b$  первого и второго взаимодействия волны с выделенной неоднородностью находится как произведение скорости переноса неоднородности  $v$  и времени  $\Delta t$ :

$$b = L_1 \theta, \quad (3)$$

где угол  $\theta$ , показанный на рис. 1, равен

$$\theta \approx 2 \frac{v}{c} \frac{u + u_2}{v + u_2}. \quad (4)$$

Из соотношений (2) и (3) видно, что задержка  $\tau_0$  в приходе первичного возмущения фазы относительно ее вторичного возмущения и эквивалентный пространственный разнос  $b$  лучевых линий трасс 1 и 2 определяется в основном скоростью переноса неоднородностей  $v$ . Расчеты, согласно (2), показывают, что для геометрии радиопросвещивания, характерной для случая захода аппаратов "Венера-15, -16" за Солнце, величина  $\tau_0$  меняется в пределах от 100 до 630 с при изменении  $v$  в пределах от 30 до 400 км/с. Значение  $\tau_0$  наиболее чувствительно к изменениям скорости солнечного ветра  $v$ , когда  $v < 200$  км/с. Значение  $b$  при этом

варьируется в пределах 21-24 тыс. км. Наличие запаздывания  $\tau_0$  в приходе первичного и вторичного возмущения радиоволны может быть обнаружено при корреляционной обработке временного ряда фазовых флуктуаций. При измеренных значениях  $\tau_0$  скорость солнечного ветра  $v$ , как следует из (2), определяется с помощью соотношения

$$v = \left( 2 \frac{L_1}{c} u + \tau_0 u_2 \right) \left( 2 \frac{L_1}{c} - \tau_0 \right)^{-1}. \quad (5)$$

Наибольшая точность определения скорости  $v$  может быть достигнута при  $v < 200$  км/с, что согласно ранее проведенным исследованиям [2, 3] имеет место при просвечивании околосолнечной области в диапазоне гелиоцентрических расстояний  $R < 25 R_0$ .

Соотношения (1)-(5) получены для случаев приближения лучевой линии радиопросвечивания к Солнцу, что соответствует участку захода аппарата за Солнце. В случае удаления лучевой линии от Солнца в соотношениях (1)-(5) достаточно заменить величину  $v$  на  $-v$ . Здесь при просвечивании области  $R < 25 R_0$  корреляционная задержка  $\tau_0$  возрастает по сравнению с аналогичной ситуацией для участка сближения радиолинии с Солнцем. Типичные значения расстояния  $b$  составляют 28 - 35 тыс. км, а задержка  $\tau_0$  превышает 800 с.

3. Проанализируем корреляционную функцию флуктуаций фазы и частоты радиоволн при работе систем связи в режиме когерентного ответа в экспериментах радиопросвечивания околосолнечной плазмы. Заметим, что при этом нельзя ограничиваться лишь участком флуктуаций электронной концентрации в малой окрестности точки наибольшего приближения радиолуча к Солнцу. Как следует из (2), задержка  $\tau_0$  пропорциональна расстоянию от выделяемой неоднородности плазмы до космического аппарата  $L_1$ . Неоднородности, удаленные на разные расстояния  $L_1$ , будут давать различные временные задержки  $\tau_0$ , а значит, максимум автокорреляционной функции флуктуаций фазы будет размываться. Положение информационного максимума согласно (2) может быть найдено с неопределенностью

$$\Delta\tau = \frac{2\Delta L}{c} \frac{v - u}{v + u_2},$$

где  $\Delta L$  - эффективная ширина рассеивающей области,  $\Delta L \approx \rho$ . Если характерный масштаб корреляции флуктуаций фазы волны  $\tau_s = 1/v$ , определяемый размером неоднородностей  $l$ , меньше  $\Delta\tau$ , то ширина корреляционного максимума увеличится в  $\Delta\tau/\tau_s$  раз. Кроме того, уменьшится коэффициент корреляции при задержке  $\tau = \tau_0$ . В случае широкого спектра пространственных масштабов неоднородностей среды это означает усреднение действия плазменных неоднородностей. Если  $T$  - время усреднения отсчетов фазы, то при значениях произведения  $vT = l$ , больших, чем внутренний масштаб турбулентности  $l_{in}$ , можно записать  $\tau_s \approx T$ . Расчеты показывают, что в диапазоне прицельных расстояний  $\rho = (4 - 30) \cdot R_0$  уширение корреляционного максимума существенно при  $T \leq 20$  с. Поэтому при использовании времени усреднения  $T \geq 10$  с, как это имеет место в нашем случае, необходимо учитывать усредняющее действие конечной толщины плазменного слоя (фазового экрана).

Представим величину флуктуаций фазы волны  $s(t)$  как аддитивную сумму вкладов флуктуаций, накопленных на трассах  $AB$  и  $BC$ , введем систему координат  $x, y, z$ , показанную на рис. 1. В приближении геометрической оптики флуктуаций фазы на этих трассах равны

$$s_1(t) = \alpha \int_0^L N(x_1, y, z_1, t_1) dx_1, \quad s_2(t) = \alpha \int_0^L N(x_1, y, z_2, t_2) dx_1.$$

Здесь  $N(x, y, z, t)$  - флуктуационная часть концентрации плазмы,  $x_1$  - координата, отсчитываемая вдоль трассы распространения радиоволн от наземного пункта,  $y$  и  $z$  - координаты, перпендикулярные к трассе распространения,  $z_1 = -(L - x_1)\theta/2$ ,  $z_2 = (L - x_1)\theta/2$ ,  $t_1 = t - (2L - x_1)/c$ ,  $t_2 = t - x_1/c$ ,  $L = L_1 + L_2$ ,  $\alpha = -8,08 \cdot 10^7 \pi \lambda / c^2$ , если  $N$  измеряется в  $\text{см}^{-3}$ , длина волны  $\lambda$  - в сантиметрах, скорость света  $c$  - в  $\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ .

В рамках гипотезы "замороженности" неоднородностей, полагая пространственные неоднородности плазмы локально статистически однородными, можно записать, что при усреднении по ансамблю реализаций

$$\begin{aligned} & \langle N(x_1, y, z_1, t_1) N(x_2, y, z_2, t_2) \rangle = \\ & = \sigma_N^2 \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha_x, \alpha_z) \exp(i\alpha_x(x_1 - x_2) + i\alpha_z(z_1 - z_2 - \\ & - v(t_1 - t_2))) d\alpha_x d\alpha_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_x$ ,  $\alpha_z$  - проекции волнового числа на координатные оси,  $\Phi(\alpha_x, \alpha_z) = \Phi(\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_z^2})$  - нормированный пространственный спектр флуктуаций электронной концентрации,  $\sigma_N^2(x)$  - изменяющаяся вдоль трассы радиопросвечивания дисперсия флуктуаций концентрации  $N$ . Для временной автокорреляционной функции флуктуаций фазы имеем

$$B_s(\tau) = \langle s(t_1 + \tau) s(t_1) \rangle = B_{11}(\tau) + B_{12}(\tau) + B_{21}(\tau) + B_{22}(\tau).$$

Здесь  $B_{12}(\tau) = b_{21}(-\tau)$  представляет собой взаимную корреляционную функцию флуктуаций фазы  $s_1(t_1 + \tau)$  и  $s_2(t_1)$ , а  $B_{11}(\tau) = B_{22}(\tau)$  соответствуют автокорреляционным функциям для  $s_1$  и  $s_2$ . Функция  $B_{12}(\tau)$  соотношением Винера - Хинчина связана со взаимным энергетическим спектром флуктуаций фазы  $W_s(\omega)$ , который с учетом (6) имеет вид

$$W_s(\omega) = W_0(\omega) Q(\omega = \omega\tau/L_1) \exp(-i\omega\tau_0), \quad (7)$$

где

$$Q(\omega) = q(\omega)/q(0), \quad q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x) \sigma_N^2(x) dx,$$

и

$$W_0(\omega) = 2\pi\alpha^2 \Phi(\omega/v) q(0)/v$$

- энергетический спектр флуктуаций фазы в приближении геометрической оптики при однократном распространении радиоволн по трассам  $AB$  или

ВС. Из (7) для  $B_{21}(\tau)$  можно записать

$$B_{21}(\tau) = B_1(\tau - \tau_0), \quad (8)$$

$$B_1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega\tau) W_0(\omega) Q(\omega\tau/L_1) d\omega.$$

Функция  $B_{11}(\tau) = B_0(\tau)$  получается из (8) при  $\tau_0 = 0$ . С учетом сказанного функция корреляции  $B_s(\tau)$  представляется как

$$B_s(\tau) = 2B_0(\tau) + B_1(\tau - \tau_0) + B_1(\tau + \tau_0). \quad (9)$$

Из (9) следует, что автокорреляционная функция флюктуаций фазы должна иметь один центральный при  $\tau = 0$  и два симметричных побочных максимума при  $\tau = \pm \tau_0$ . Полученные результаты относятся к флюктуациям фазы и обобщаются для частоты  $f = (1/2\pi)(ds/dt)$  путем преобразования

$$B_f(\tau) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 B_s(\tau)}{d\tau^2}.$$

В данной работе для анализа были отобраны результаты регистрации частоты дециметровых радиоволн с 10-секундным интервалом усреднения. Измерения в режиме когерентного ответа выполнялись последовательно – сначала в восточном наземном пункте, затем после окончания измерений в нем – в западном пункте, удаленном от первого на расстояние около 7 тыс. км. Наземные приемно-передающие комплекты, антенные устройства и системы регистрации были для обоих пунктов полностью независимыми. Для кросскорреляционного анализа использовались материалы измерений, полученные в 11 сеансах восточного пункта и 13 сеансах западного наземного пункта. Длительность непрерывной регистрации составляла 18 – 30 минут в каждом сеансе.

Обработка данных проводилась с помощью корреляционного анализа в соответствии с методикой, изложенной в разд. 2 и 3. Сначала путем аппроксимации исходных данных с помощью полиномов Чебышева выделялась флюктуационная часть изменения частоты  $f(t_i)$ . Временной ряд флюктуаций фазы  $s(t_j)$  получался из данных о частоте  $f(t_i)$  суммированием

$$s(t_j) = 2\pi \sum_{i=1}^j f(t_i).$$

С целью улучшения обнаружения корреляционного максимума была использована процедура итерационного скользящего медианного усреднения по трем точкам, что соответствует усреднению за 30 секунд.

Вычисление корреляционной функции проводилось по стандартному алгоритму. Во всех сеансах удалось выделить устойчивые корреляционные картины, главные максимумы которых вполне значимы с вероятностью 90% и локализуются с точностью  $\pm 30$  с. В таблицах 1, 2 приведены значения  $\tau_0$ , полученные по данным восточного и западного наземного пунктов приема соответственно. Видно, что полностью независимые результаты определения временной задержки  $\tau_0$  по материалам измерений в двух пунктах хорошо согласуются между собой.

На рис. 2 представлены для разных гелиоцентрических расстояний  $R$  значения скорости движения неоднородностей  $v$ , следующие из

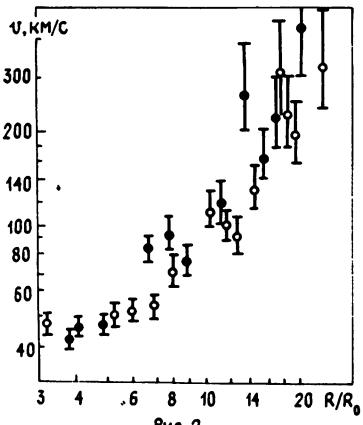


Рис 2

найденных величин  $\tau_0$  и результатов теоретического анализа. Темные кружки относятся к данным восточного пункта, светлые кружки - западного пункта. Вертикальными отрезками показаны погрешности определения  $v$ , соответствующие ошибкам измерения  $\tau_0$ .

Характерно, что погрешности определения имеют наименьшее значение при малых гелиоцентрических расстояниях, где отсутствует надежная информация о скоростях движения солнечного ветра.

5. Представленный в разделе 2 теоретический анализ показывает, что схема двукратного радиопросвечивания, реализуемая при работе радио-системы в режиме когерентного ответа, при использовании одного приемного пункта эквивалентна схеме однократного радиопросвечивания, но с

использованием двух разнесенных пунктов наблюдений. Различие состоит в величине эффективной базы. В случае двукратного просвечивания эффективное расстояние между трассами распространения радиоволны в несколько раз превышает соответствующие значения для случая разнесенных наблюдений флюктуаций радиоволны в двух наземных пунктах. Представляет интерес сопоставить результаты определения скорости солнечного ветра этими методами. В [6] представлены значения скорости солнечного ветра в зависимости от гелиоцентрического расстояния, определенные для тех же сеансов радиосвязи с аппаратами

Таблица 1

Дата	$\rho/R_0$	$\tau_0$ , с
29.05.84	17	600
31.05.84	16	560
2.06.84	14	620
4.06.84	12	500
7.06.84	9	390
8.06.84	8	450
9.06.84	7	430
11.06.84	5	220
12.06.84	4	220
20.06.84	4	1520
7.07.84	20	780

Таблица 2

Дата	$\rho/R_0$	$\tau_0$ , с
22.05.84	24	630
27.05.84	19	580
28.05.84	18	600
29.05.84	17	630
1.06.84	15	520
3.06.84	13	440
5.06.84	11	490
8.06.84	8	370
9.06.84	7	280
10.06.84	6	270
11.06.84	5	260
13.06.84	3	230
28.06.84	12	1020

"Венера-15, -16" путем наблюдений флюктуаций частоты дециметровых радиоволн в двух пунктах, разнесенных по долготе на расстояние около 7000 км. Ввиду того, что с приближением радиолинии к Солнцу увеличиваются флюктуации частоты аппаратурного происхождения, в этом методе возрастают и погрешности определения максимума кросскорреляционной функции временного смещения, а следовательно, и погрешности определения скорости движения неоднородностей. Сравнение данных, представленных на рис. 2 и в [6], свидетельствует об их хорошем согласии в широком диапазоне изменения гелиоцентрического расстояния  $R$ . Это указывает на высокую достоверность и надежность полученного профиля скорости движения потоков плазмы для расстояний, недоступных для прямых измерений.

Необходимо отметить расхождение между обсуждаемыми здесь данными о скорости солнечного ветра, полученными из частотных данных, и результатами определения ее по амплитудным флюктуациям радиоволн [6]. Значения скорости, найденные по флюктуациям амплитуды, оказались выше аналогичных величин, найденных по частотным данным, в области малых гелиоцентрических расстояний  $R < 12 R_0$ . Этот экспериментальный факт получил объяснение в рамках гипотезы о суперпозиции движений неоднородностей плазмы и звуковых волн, перемещающихся относительно движущихся потоков солнечного ветра. В этом случае кажущаяся скорость  $v$  может быть существенно выше истинной массовой скорости плазмы [14]. Для расстояний  $R > 12 R_0$  скорость солнечного ветра, определенная по флюктуациям амплитуды, хорошо соответствует данным, представленным рис. 2 и [6].

Главный итог исследований солнечного ветра, осуществленных методом радиопросвечивания с использованием аппаратов "Венера-15, -16", состоит в доказательстве сильного ускорения солнечного ветра на расстояниях  $(8 - 20) \cdot R_0$ . Здесь скорость увеличивается от  $35 \pm 10 \text{ км с}^{-1}$ , а, следовательно, кинетическая энергия плазмы должна возрасти приблизительно в 40 раз [20].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев О. И. Распространение радиоволн в космосе. - М.: Наука, 1985.
2. Ефимов А. И., Яковлев О. И., Рубцов С. Н. и др. //Радиотехника и электроника. 1987. Т.32. № 10. С.2025.
3. Яковлев О. И., Ефимов А. И., Молотов Е. П. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. № 1. С.3.
4. Арманд Н. А., Ефимов А. И., Яковлев О. И. и др. //Радиотехника и электроника. 1988. Т.33. № 8. С.1574.
5. Ефимов А. И., Корсак О. М., Яковлев О. И. и др. //Радиотехника и электроника. 1988. Т.33. № 12. С.2640.
6. Яковлев О. И., Ефимов А. И., Якубов В. П. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. № 5. С.531.
7. Ефимов А. И., Яковлев О. И., Вышлов А. С. и др. //Радиотехника и электроника. 1989. Т.34. № 8. С.1596.
8. Ефимов А. И., Яковлев О. И., Вышлов А. С. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33. № 9. С.1107.
9. Яковлев О. И., Ефимов А. И., Размансов В. М., Штыров В. К. //Астрон. журн. 1980. Т.57. № 4. С.790.
10. Яковлев О. И., Ефимов А. И., Рубцов С. Н. //Космич. исслед. 1987. Т.25. № 2. С.251.
11. Рубцов С. Н., Яковлев О. И., Ефимов А. И. //Космич. исслед. 1987. Т.25. № 4. С.620.
12. Яковлев О. И., Ефимов А. И., Рубцов С. Н. //Астрон. журн. 1988. Т.65. № 6. С.1290.
13. Якубов В. П., Яковлев О. И., Ефимов А. И. и др. //Космич. исслед. 1990. Т.27. № 5. С.772.
14. Ефимов А. И., Чашей И. В., Шишов В. И. и др. //Космич. исслед. 1990. Т.28. № 4. С.581.
15. Павельев А. Г., Яковлев О. И., Кучерявенков А. И. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. № 2. С.127.
16. Савич Н. А., Азарк С. Л., Вышлов А. С. и др. //Космич. исслед. 1987. Т.25. № 2. С.243.
17. Савич Н. А., Самознаев Л. Н. //Радиотехника и электроника. 1976. Т.21. № 3. С.594.

18. Васильев М. Б. //Радиотехника и электроника. 1988. Т.23.  
N 2. С.411.
19. Luneburg E., Esposito P.B. A method for the evaluation  
of solar coronal plasma propagation speeds by radio oc-  
cultation of space probes. Presented at the National Ra-  
dio Science Meeting URSI, APS, IEEE, 18-21 June 1979,  
Seattle, USA.
20. Яковлев О. И., Шишлов В. И., Чашей И. В. //Письма в Астрон.  
журн. 1990. Т.16. N 2. С.163.

Сибирский физико-технический институт  
при Томском университете  
Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21 марта 1990 г.

THE SOLAR WIND VELOCITY AS DETERMINED FROM TWO-WAY  
DOPPLER MEASUREMENTS FOR NEAR-SUN RADIO SOUNDING

V. P. Yakubov, O. I. Yakovlev, A. I. Efimov, A. L. Erofeev

The correlation relations for phase and frequency fluctuations are analysed for the case of two-way propagation of radio waves in the solar corona. It is shown that the correlation function has a distinctive maximum at the time shift which depends on the irregularities velocity and the distance between the radio link and the Sun. A new method is discussed for the determination of the solar wind velocity. The results of the theoretical analysis are compared with the experimental data which have been obtained at radio sounding of solar corona using "Venera-15, -16" space crafts. The values of the solar wind velocity are presented according to phase and frequency measurements for two-way radio occultation experiments of the solar corona. These results are compared with the velocity values determined by another methods.

УДК 551.510.535

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ  
ДЛЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
В ИОНОСФЕРЕ ПРИ ЕЕ НАКЛОННОМ ОБЛУЧЕНИИ

Л. М. Ерухимов, М. М. Шварц

Рассмотрено рассеяние электромагнитной волны на искусственных неоднородностях. Получено выражение для рассеянного поля с учетом модуляции флукутации диэлектрической проницаемости в полях обратнорассеянной волны и волны накачки. Приведены численные оценки интенсивности рассеянного на уровне отражения вертикального луча поля для различных мощностей и углов.

В настоящей работе приводится анализ возможности использования искусственных неоднородностей (ИН), образованных в поле стоячей мощной волны при ее отражении от ионосфера или за счет вынужденного температурного рассеяния (ВТР), для "доставки" электромагнитных волн за счет рассеяния на ИН в область плазменных резонансов при наклонном облучении ионосферы мощным пучком радиоволн. Это позволяет осуществлять нагрев ионосферной плазмы при значительном ее удалении от передатчика.

При распространении сильной электромагнитной волны (даже с частотой, превышающей плазменную) возникает [2] вынужденное температурное рассеяние, которое приводит к образованию в ионосфере вытянутых вдоль геомагнитного поля неоднородностей плазмы ("решетки" с волновым вектором  $\vec{k}_\perp \vec{H}$ ) [3]: волна накачки (ВН) вместе с волной, рассеянной плазменной решеткой, создает стоячую волну, которая греет плазму в пучностях и еще больше усиливает плазменную "решетку". Волновое число решетки удовлетворяет условию синхронизма

$$\alpha = 2k \sin \theta / 2, \quad (1)$$

где  $\theta = \vec{k}_1 \vec{k}_s$  - угол рассеяния,  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_s$  - волновые векторы прямой и рассеянной волн. Возникающее при расслоении ионосферной плазмы искажение профиля диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\vec{r})^*$  определяется квадратом напряженности электрического поля

$$\tilde{\epsilon} = \left(1 - \frac{z}{L_{\text{ЭФФ}}}\right) \frac{\Delta N}{N} \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_s^*}{|\vec{E}_1| |\vec{E}_s^*|}, \quad (2)$$

\*Для случайно неоднородной среды проницаемость  $\epsilon(\vec{r})$  представлена в виде  $\epsilon(\vec{r}) = \bar{\epsilon}(\vec{r}) + \tilde{\epsilon}(\vec{r})$ , и для линейного слоя плазмы  $\bar{\epsilon} = 1 - z/L_{\text{ЭФФ}}$ ,  $\tilde{\epsilon} = \bar{\epsilon} \Delta N/N$ .

где  $\vec{E}_1$  - падающая волна,  $\vec{E}_s$  - рассеянная волна,  $L_{\text{ЭФФ}}$  - расстояние вдоль оси  $z$  от точки вхождения в плазменный слой  $\bar{\varepsilon}(0) = 1$  до точки  $\bar{\varepsilon}(L_{\text{ЭФФ}}) = 0$ ,  $N$  - концентрация,  $\Delta N$  - флуктуации концентрации.

Скалярное произведение  $\vec{E}_1 \vec{E}_s$  можно разложить на два множителя, первый из которых будет учитывать модуляцию флуктуации диэлектрической проницаемости в полях обратнорассеянной волны и накачки, второй - характеризовать "участие" решеток ВТР с различными волновыми числами в искажении профиля  $\bar{\varepsilon}$ .

Представим электрические поля падающей  $\vec{E}_1$  и рассеянной назад  $\vec{E}_s$  волны в виде

$$\vec{E}_1 = A_1 \vec{e}_1 \exp(i \vec{k}_1 \vec{r}), \quad \vec{E}_s = A_s \vec{e}_s \exp(i \vec{k}_s \vec{r}), \quad (3)$$

где  $\vec{e}_{1,s}$  - поляризация соответствующих волн, причем  $|A_s| = |A_1| = A$  из-за незначительного затухания ( $A$  - амплитуда волны накачки). Компоненты волнового вектора  $\vec{k}$  в случае наклонного падения волны на плоский изотропный ионосферный слой с  $\varepsilon = \varepsilon(z)$  имеют вид [1]

$$k_x = 0, \quad k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(0) \sin^2 \theta_0}, \quad k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon(0) \sin^2 \theta_0}, \quad (4)$$

фаза рассеянной назад волны

$$\varphi_s = \varphi_{\text{отр}} + \varphi_{\leftarrow} - \pi/2, \quad (5)$$

где  $\varphi_{\text{отр}}$  - набег фазы ВН от точки входа в слой плазмы до точки отражения,  $\varphi_{\leftarrow}$  - набег фазы рассеянной волны от точки отражения до исследуемой точки  $(z, y, x)$  \* ВТР решетки,  $\pi/2$  - учет отражения от каустики (отличия от геометрооптической фазы). В данной модели пренебрегаем при описании множителя учетом "разбуживания" поля вблизи точки отражения, связывая это с тем, что вклад этой области в интенсивность рассеянного сигнала должен быть не очень существенным (область порядка  $\lambda$ ).

Таким образом, множитель, характеризующий флуктуацию диэлектрической проницаемости, имеет вид

$$\beta = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_s^*}{|\vec{E}_1 \vec{E}_s^*|} \right\} = \sin \left( 2 \frac{\omega}{c} L_{\text{ЭФФ}} \left[ \frac{2}{3} \left( \cos^2 \theta_0 - \frac{z}{L_{\text{ЭФФ}}} \right)^{3/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \theta_0 \left( \sin 2\theta_0 \frac{y}{L_{\text{ЭФФ}}} \right) \right] \right), \quad (6)$$

а множитель, учитывающий многообразие решеток, записывается в виде

$$\tilde{\gamma} = \exp(-i \vec{a} \vec{r}). \quad (7)$$

Однократно рассеянное поле  $E_s$  находится из решения неоднородных

---

\*Координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  нормированы на  $L_{\text{ЭФФ}}$ .

уравнений Максвелла (при слабых флуктуациях  $\langle \tilde{\epsilon}^2 \rangle \ll \bar{\epsilon}^2$  представлено рядами теории возмущения  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots, \vec{E}_1 = \vec{E}_s$ ), которое можно получить, используя известные функции Грина, в виде [4]

$$E_s(\vec{r}) = \frac{k_0^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} \tilde{\epsilon}(\vec{r}') [\vec{n}'_s [\vec{E}_1(\vec{r}') \vec{n}'_s]] d^3 r', \quad (8)$$

где  $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ . Поляризационный множитель, если  $\chi$  - угол между  $\vec{e}_1$  и  $\vec{n}_s$ , обозначим  $\sin\chi = [\vec{n}'_s [\vec{e}_1 \vec{n}'_s]]$ . Первичное поле представляет собой плоскую волну

$$E_1 = A \vec{e}_1 \exp(i \vec{k}_1 \vec{r}), \quad (9)$$

причем фаза этого поля согласно (4) и (5)

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \frac{\omega}{c} (x + y \sin\theta_0 - \frac{2}{3} L_{\text{ЭФФ}} ((1 - \frac{z}{L_{\text{ЭФФ}}} - \sin^2\theta_0)^{3/2} - \cos^3\theta_0)). \quad (10)$$

Итоговая формула для интенсивности рассеянного поля\* имеет вид

$$E_s = \frac{k_0^2}{4\pi} A \sin\chi \int_V \frac{e^{ik_0} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} (1 - \frac{z}{L_{\text{ЭФФ}}}) \times \\ \times (\frac{\Delta N}{N})_\theta \sin(2 \frac{\omega}{c} L_{\text{ЭФФ}} (\frac{2}{3} (\cos^2\theta_0 - \frac{z}{L_{\text{ЭФФ}}})^{3/2} + \sin\theta_0 (\sin 2\theta_0 + y))) \times \\ \times \exp \left\{ (-2i \frac{\omega}{c} \sin \frac{\theta}{2} \vec{r}) \exp(i\omega/c) (x + y \sin\theta_0 - \frac{2}{3} L_{\text{ЭФФ}} \times \right. \\ \left. \times ((1 - \frac{z}{L_{\text{ЭФФ}}} \sin^2\theta_0)^{3/2} - \cos^3\theta_0)) \right\} d\vec{r}, \quad (11)$$

где поле  $E_s$  - поле, рассеянное на решетке с волновым вектором  $\vec{a} = 2 \frac{\omega}{c} \sin\theta/2$ ,  $\vec{z}$  - проекция  $\vec{a}$  вдоль  $\vec{r}$  ( $\vec{a} \cdot \vec{r} = \vec{r}$ ),  $(\frac{\Delta N}{N})_\theta = (\frac{\Delta N}{N})_0 \delta(\theta - \bar{\theta})$ ,  $F(\theta)$  - функция видимости. Однако при определении интенсивности рассеяния поля необходимо учесть, что в исследуемые точки вблизи области уровня отражения для пучка радиоволн сигналы будут приходить от разных решеток, имеющих различные  $\vec{a}$ , а

\*Излучение в область верхнегибридного резонанса из-за рефракции рассеянной волны приходит в узком конусе углов не более  $12^\circ$  около вертикали, так что можно пользоваться формулами работы [4].

интенсивность можно записать в виде\*

$$I_s = \langle \vec{E}_{s\theta_1} \vec{E}_{s\theta_2}^* \rangle_{\bar{\theta}} . \quad (12)$$

При рассеянии излучение распределяется в пространстве в области, ограниченной конусом (ракурсное рассеяние), и прижато к образующим этого конуса. Здесь нас интересует рассеяние в плоскости  $yz^{**}$ , поэтому можно рассматривать излучение с решетки только в двух направлениях  $\alpha + \gamma$  и  $\alpha - \gamma$  (рис. 1). Тогда функцию видимости можно выбрать в виде

$$F(\theta) = [\delta(\theta - (\alpha + \gamma)) + \delta(\theta - (\alpha - \gamma))] . \quad (13)$$

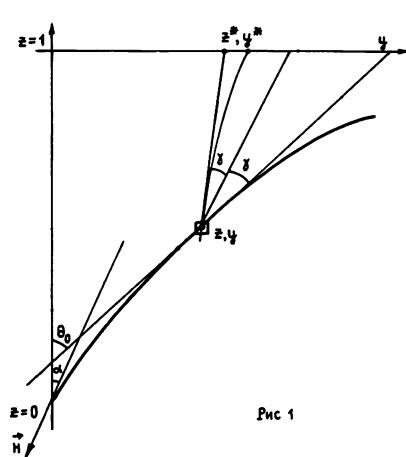


Рис 1

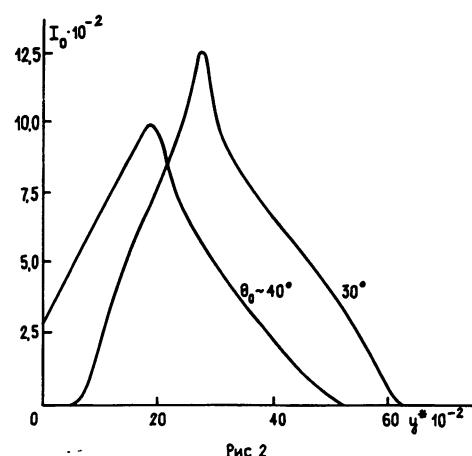


Рис 2

Условие ракурсности накладывает также ограничение на размеры рассеивающей области. Излучение приходит в исходную точку из очень небольшого участка рассеивающей среды (порядка  $\lambda \times \lambda$ ). Тогда интегрирование по переменным  $z$  и  $u$  проводится довольно просто и интенсивность  $I_s$  можно оценить следующим образом\*\*\*:

\*При усреднении переходим к углам  $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_2$ , характеризующим угол между возникающими решетками.

\*\*Интеграл в (1) при интегрировании разделяется по переменным  $x$  и можно проинтегрировать по  $x$  в виде  $J_x = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \exp(ikx) dx$ , где  $\Delta x = \sqrt{\lambda r} - \Delta x/2$  область характерного изменения фазы поля  $(\Delta\phi = \frac{kz\theta^2}{2} = k_0 \frac{\Delta x^2}{2r} \sim \pi)$ .

В результате величина интеграла  $J_x = \frac{\lambda}{\pi} |\sin(2\pi\sqrt{r/\lambda})| \approx \frac{\lambda}{\pi}$ .

\*\*\*Считается  $\sin \chi = 1$ .

$$I_s(y^*, z^*, y, z, \theta_0) = \frac{k_0^4}{16\pi^2} A_0^2 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 \sin^2(2k_0 L_{\text{ЭФ}} \left(\frac{2}{3} (\cos^2 \theta_0 - z)\right)^{3/2} + \\ + \sin \theta_0 (\sin 2\theta_0 - y)) \frac{(1-z)^2}{((z^* - z)^2 + (y^* - y)^2)} \Delta z^2 \Delta y^2, \quad (14)$$

где  $y^*$  и  $z^*$  для точек луча  $y, z$ ,  $\theta_0$  определяются с учетом рефракции рассеянной волны,  $\Delta z, \Delta y \sim \lambda$ .

Вычисление интенсивности рассеянного поля (14) в область ВГР (верхнегибридного резонанса) проводилось численно для пучка радиоволн шириной  $10^\circ$  под разными первоначальными углами наклона  $\theta_0$  к оси  $z$ . Интенсивность поля при усреднении по слою  $\pm 5$  км в области ВГР в зависимости от расстояния  $y^*$  при различных углах наклона пучка ( $\theta_0 \approx 30 \div 40^\circ$ ) имеет вид

$$I_s(y^*, \theta_0) = I_0(y^*, \theta_0) \cdot 10^4 \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2, \quad (15)$$

где  $I_0(y^*, \theta_0)$  приведена на рис. 2. В зависимости от выбора величины  $(\Delta N/N) \sim 10^{-3} \div 10^{-1}$  величина  $I_s$  изменяется в пределах  $I_s = [5 \cdot 10^{-5} \div + 5 \cdot 10^{-1}] A_0^2$ . Реально при ионосферных экспериментах  $\Delta N/N$  достигает значений  $1 \div 5 \cdot 10^{-2}$  и  $I_s \sim 10^{-2} \div 10^{-1} A_0^2$ , т. е. можно достичь значительной величины мощности рассеянного излучения на уровне ВГР, что позволяет при  $I_s > I_{\text{ПН}}^*$  обеспечить возникновение искусственной ионосферной турбулентности. Пороги ТПН соответствуют мощностям передатчика  $P_3 \geq 2 \div 3$  МВт. Тогда при мощностях волны накачки

$P_3 \approx 100 \div 200$  МВт для углов  $\theta_0 \approx 20 \div 35^\circ$  можно обеспечить интенсивности в области ВГР, равные порогам ТПН. Кроме того, в работе [2] приведены оценки возбуждения решеток ВТР, дающие для  $P_3$  приблизительно десятки МВт, что позволяет при данных мощностях осуществить предложенный механизм.

Приведенные расчеты показали, что с возникновением ВТР-решеток при определенной величине мощности накачки мощность (при  $P_3 \approx 100 \div 200$  МВт), рассеянная с такой решетки, обеспечивает развитие искусственной ионосферной турбулентности. Этот механизм дает много новых приложений и представляет теоретический интерес с точки зрения изучения рассеяния электромагнитных волн на неоднородностях в магнитоактивной плазме.

В заключение заметим, что в принципе за счет конечной протяженности по высоте области с искусственной ионосферной турбулентностью возможно возникновение неустойчивости нелокального типа при воздействии мощными наклонными пучками радиоволн на ионосферу, в которой связь между уровнями существования плазменных волн (на частоте, равной частоте радиоволны) и уровнем отражения радиоволны осуществляется за счет рассеяния.

\*Мощность излучения, необходимого для возмущения ТПН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1976.
2. Митяков Н. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 34. № 6. С. 671.
3. Литвак А. Г., Миронов В. А. // В сб.: Термические нелинейные явления в плазме. - Горький: ИПФ АН СССР, 1979.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. - М.: Наука, 1978.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
26 марта 1990 г.

### ON THE PROBLEM OF USING ARTIFICIAL IRREGULARITIES FOR HEATING PARAMETERIC INSTABILITY EXCITATION BY INCLINED IONOSPHERE RADIATION

*L. M. Erukhimov, M. M. Shwarts*

The scattering of electromagnetic waves by artificial irregularities is considered. The scattering field expression is obtained taking into account modulation fluctuations of the dielectric permittivity in fields of back-scattered waves and pumping waves. Numerical estimations are presented for the scattered field intensity of different powers and angles at the level of the vertical ray reflection.

УДК 551. 526. 535. 214

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ НЕКОГЕРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Г. Г. Бахшян, Г. И. Мариносян, К. С. Мосоян*

На основе уточненной двухмасштабной модели рассеяния и излучения радиоволн СВЧ диапазона от взволнованной морской поверхности получены расчетные выражения для средней УЭПР и радиояркостной температуры. Приближенно взят двухкратный интеграл. Оценена степень допущенной ошибки. Приведены результаты расчетов зависимости средней УЭПР и радиояркостной температуры от угла наблюдения для вертикальной и горизонтальной поляризаций передающей и приемной антенн. Приводятся оценки влияния отдельных параметров, характеризующих состояние морской поверхности на характеристики рассеяния и излучения электромагнитных волн от указанной поверхности, выявлены корреляционные связи между ними и определены оптимальные условия наблюдения неоднородности морского фона различного происхождения.

При обнаружении и классификации аномалий в спектре ветрового волнения эффективность исследований повышается при одновременных измерениях как средних значений УЭПР (удельный эффективной поверхности рассеяния) и  $T_y$  (радиояркостной температуры), так и их приращений, среднеквадратичных дисперсий, корреляционной связи и поляризационных особенностей. При дистанционном зондировании на морской поверхности наблюдаются неоднородные, аномальные образования различного происхождения, обусловленные, например, сликами, наличием нефтяной пленки и т. п. В зависимости от характера возмущения различают аномальные участки с деформацией высокочастотной (мелкомасштабные волны) или низкочастотной (крупномасштабные гравитационные волны) части спектра морского волнения, либо их совместное действие. Параметры, характеризующие состояние волнения, среднеквадратичная высота ряби  $\sigma_1^2(u)$ , среднеквадратичный уклон крупногравитационных волн волнения  $m^2(u)$  и параметр Филипса  $a(u)$ , имеют различную инерционность к изменению условий на поверхности. Инерционность параметров ряби к изменению  $u$ -скорости приповерхностного ветра оценивается днями минуты, в то время как инерционность среднеквадратичного уклона крупных морских волн оценивается от десятков минут до нескольких часов. Пренебрежение этими факторами может привести к ошибкам, и, возможно, этим объясняется большой разброс экспериментальных данных, полученных при одной и той же средней скорости ветра.

В настоящей работе рассмотрены вопросы расчета рассеянного и собственного радиоизлучения от взволнованной морской поверхности. В основу расчета положена методика, изложенная в [1-6], где на основе двухмасштабной модели рассеяния разработан единый математический

аппарат [4-6] расчета излучательных и отражательных характеристик водной поверхности. При этом полагалось, что граница области применимости теории рассеяния на мелкомасштабной ряби является функцией степени волнения. Для установления количественных связей между характеристиками рассеяния и параметрами волнения были проведены численные расчеты угловой зависимости УЭПР и  $T_{\text{я}}$

соответственно для вертикальной ( $\hat{V}$ ) и горизонтальной ( $\hat{H}$ ) поляризаций передачи и приема. Расчеты проводились для случаев установившегося волнения, соответствующих значениям скорости ветра (на высоте 19,5 м)  $u = 3, 6, 6, 3, 10, 15 \text{ м/с}$ . Численные значения параметров морского волнения, входящих в расчетные формулы, приведены в табл. 1, и рассчитаны по результатам работ [6 - 8].

Таблица 1

N п/п	I	II	III	IV	Y
$u, \text{ м/с}$	3,64	6,27	9,77	15,42	21,29
$m, \text{ рад}$	0,075	0,102	0,123	0,156	0,189
$\sigma_1, \text{ см}$	0,0121	0,02585	0,03493	0,05015	0,07
$a(u) \cdot 10^3$	2,5	13,22	20,66	42,6	83,1
$k, \text{ см}^{-1}$			2,91		
$\varepsilon_g$			45 - i 37		
$T_g$			293		
$\Phi_0, \text{ град}$			45		

Вывод расчетных формул. Поскольку поперечное сечение обратного рассеяния является частным случаем дифференциального коэффициента рассеяния  $\gamma_p(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s)$ , то

$$\sigma_{B,P}(\theta) = \gamma_p(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s) \cos \theta \Big|_{\theta_s = \theta, \Phi_s = \pi}, \quad (1)$$

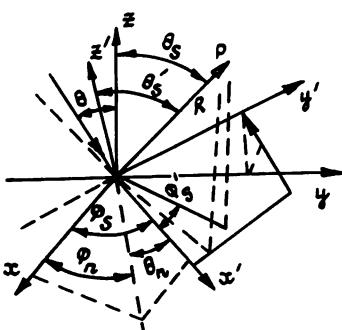


Рис. 1.

где  $P \equiv \hat{H}, \hat{V}$  - соответственно для горизонтальной и вертикальной поляризаций,  $\theta$  - угол наблюдения, отсчитанный от вертикали (рис. 1),  $\Phi$  - азимутальный угол,  $\theta_s$  и  $\Phi_s$  - углы, определяющие направление рассеяний. Если пренебречь влиянием излучения неба, то связь между  $T_{\text{я}}$  и  $\gamma_p(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s)$  будет иметь вид [4]

$$T_{\text{я}, P}(\theta) = T_g - \frac{T_g}{2\pi} \iint \gamma_p(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s) \sin \theta_s d\theta_s d\Phi_s, \quad (2)$$

где  $T_g$  - гидродинамическая температура воды. Согласно двухмасштабной теории рассеяния, дифференциальный коэффициент рассеяния определяется как [1, 2, 4]

$$\gamma_p(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s) = \gamma_p^{(0)}(\theta, \theta_s, \Phi_s) + \langle \gamma_p^{(1)}(\theta, \theta_s, \Phi, \phi_s) \rangle. \quad (3)$$

Первый член правой части (3) представляет собой дифференциальный коэффициент рассеяния, рассчитанный в приближении Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \gamma_H^{(0)}(\theta, \theta_s, \Phi_s) &= \frac{2a_1^2}{m^2 q_z^4 \cos\theta} \left[ \frac{|\langle R_H \rangle|^2 b^2 + |\langle R_V \rangle|^2 d^2}{b^2 + d^2} \right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{q_x^2 + q_y^2}{2m^2 q_z^2}\right); \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_V^{(0)}(\theta, \theta_s, \Phi_s) &= \frac{2a_1^2}{m^2 q_z^4 \cos\theta} \left[ \frac{|\langle R_V \rangle|^2 b^2 + |\langle R_H \rangle|^2 d^2}{b^2 + d^2} \right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{q_x^2 + q_y^2}{2m^2 q_z^2}\right), \end{aligned} \quad (4b)$$

где

$$\begin{aligned} |\langle R_H \rangle|^2 &= \left| \frac{\cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \right|^2 \left[ 1 - 4k^2 \sigma_1^2 \cos\theta \exp\left(-\frac{\sin^2\theta}{2}\right) \right], \\ |\langle R_V \rangle|^2 &= \left| \frac{\epsilon_r \cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\epsilon_r \cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \right|^2 \left[ 1 - 4k^2 \sigma_1^2 \cos\theta \exp\left(-\frac{\sin^2\theta}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\cos^2\theta = a_1/2, \quad a_1 = 1 + \cos\theta \cos\theta_s - \sin\theta \sin\theta_s \cos\Phi_s,$$

$$q_x = \sin\theta_s \cos\Phi_s - \sin\theta, \quad q_y = d = \sin\theta_s \sin\Phi_s,$$

$$q_z = \cos\theta + \cos\theta_s, \quad b = \sin\theta \cos\theta_s + \cos\theta \sin\theta_s \cos\Phi_s,$$

$$m^2 = \sum_{\perp} m_{\perp}^2 \sin^2\Phi_0 + \sum_{\parallel} m_{\parallel}^2 \cos^2\Phi_0$$

- среднеквадратичный уклон крупногравитационных структур волн волнения,  $m_{\perp}^2, m_{\parallel}^2$  - среднеквадратичные уклоны волн волнения, соответственно, вдоль и поперек направления ветра,  $\epsilon_r = \epsilon_1 + i\epsilon_2$  - комплексная диэлектрическая проницаемость воды,  $k$  - волновое число локации,  $\sigma_1^2$  - среднеквадратичная высота ряби. Второй член первой

части (3) представляет собой дифференциальный коэффициент рассеяния, рассчитанный в приближении теории возмущения первого порядка. Косые скобки указывают на усреднение  $\gamma_p^{(1)}(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s)$  в случае, когда рябь модулируется уклоном крупногравитационных волн волнения. Аналитический вид его [4] после некоторых несложных преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_p^{(1)}(\theta, \theta_s, \Phi, \Phi_s) = & \frac{a(u_x)}{m^2} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2+\theta}^0 f_p(\theta_n, \Phi_n) \exp\left(-\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_n}{2m^2}\right) d\theta_n d\Phi_n + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_p(\theta_n, \Phi_n) \exp\left(-\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_n}{2m^2}\right) d\theta_n d\Phi_n \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_p(\theta_n, \Phi_n) = & \cos\theta' \cos^2\theta'_s \left[ |M_{p,H}|^2 + |M_{p,V}|^2 \right] \left( 1 + \operatorname{tg}\theta_n \operatorname{tg}\theta \cos\Phi_n \right) \times \\ & \times \frac{\operatorname{tg}\theta_n}{t^4 \cos^2\theta_n} \left[ 1 + \frac{m^2 - m_\perp^2}{m^2 + m_\perp^2} \cos 2\Phi \right], \end{aligned}$$

штрих над углами означает, что взяты их локальные значения (см. рис. 1):

$$\cos\theta' = \cos\theta_n \cos\theta + \sin\theta_n \sin\theta,$$

$$\cos\theta'_s = \cos\theta_n \cos\theta_s - \sin\theta_n \sin\theta_s \cos\Phi_s,$$

$$t^2 = [\sin\theta'_s \cos(\Phi_s - \Phi) - \sin\theta']^2 + \sin^2\theta'_s \sin^2(\Phi_s - \Phi),$$

$$M_{H,H} = \frac{(\varepsilon_r - 1) \cos(\Phi_s - \Phi)}{[\cos\theta' + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'}][\cos\theta'_s - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'_s}]},$$

$$M_{H,V} = \frac{(\varepsilon_r - 1) \sin(\Phi_s - \Phi) \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'_s}}{[\varepsilon_r \cos\theta' + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'}][\cos\theta'_s - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'_s}]},$$

$$M_{V,H} = \frac{-(\varepsilon_r - 1) \sin(\Phi_s - \Phi) \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'}}{[\varepsilon_r \cos\theta' + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'}][\cos\theta'_s - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta'_s}]},$$

$$M_{v,v} = \frac{-(\varepsilon_r - 1) [\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta'} \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta'}_s \cos(\Phi_s - \Phi) - \varepsilon_r \sin \theta' \sin \theta'_s]}{[\varepsilon_r \cos \theta' + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta'}][\varepsilon_r \cos \theta'_s - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta'_s}]},$$

$a = a(u_x)$  – параметр Филипса; в области интересующих нас частот локации

$$a(u_x) = 4,05 - 10^{-3}[1,247 + 0,0268u_x + 6,03 - 10^{-5}u_x^2]^2,$$

где  $u_x$  – скорость трения, которая функционально зависит от скорости ветра и на высоте 19,5 м (см. [7]). Область применимости теории диффузного рассеяния в работе [4] определялась из условия

$$t \geq 1. \quad (6)$$

В работе [2] условие (6) было заменено следующим:

$$\cos \theta < \omega_{min}^2(k) / (2gk), \quad (7)$$

где  $\omega_{min}(k)$  – граница разделения масштабов в двухмасштабной модели шероховатой поверхности. При этом предполагалось, что в сантиметровом диапазоне волн локации значение  $\omega_{min}(k)$  приходится на равновесный участок спектра морского волнения и практически не зависит от скорости ветра и. В дальнейшем было показано [7], что такая зависимость существует и, следовательно, граница области применимости теории диффузного рассеяния на мелкомасштабной ряби зависит от степени волнения. В приведенных нами расчетах эта зависимость аппроксимировалась выражением

$$\theta'_k = \theta \pm \theta_k \approx \theta_k = 2 \operatorname{arctg}(m), \quad (8)$$

где  $m^2$  – среднеквадратичный уклон морской поверхности, зависящий как от скорости ветра, так и от границы разделения масштабов в двухмасштабной модели,  $\theta'_k$  – локальный угол наблюдения. Знак (+) в неравенстве (8) соответствует заднему склону крупногравитационных волн волнения, знак (-) – переднему склону этих волн.

Отметим также, что применение условия (8) к процедуре усреднения дифференциального коэффициента рассеяния по уклонам крупногравитационных волн привело к необходимости разделенного учета влияния модуляции локального угла наблюдения передним и задним уклонами волн. Верхний предел интегрирования по  $\theta_n$  в выражении (5) должен быть выбран таким образом, чтобы  $\theta_{n_{max}} \leq \theta_1 = \theta - \operatorname{arctg}(m)$ . В обратном случае задача решается некорректно, так как интегрирование по азимутальному углу проводится от нуля до  $2\pi$ . Учет условия (8) приводит к ограничению пределов интегрирования по  $\theta_n$  при усреднении в (5).

Если угол наблюдения  $\theta$  разделить на три участка, а именно:

$$1) 0 \leq \theta \leq \theta_k, \quad 2) \theta_k \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_k, \quad 3) \frac{\pi}{2} - \theta_k \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

то из (8) можно получить, что области интегрирования по  $\theta_n$  в первом

случае должны быть  $\theta_n \in [-\pi/2 + \theta; \theta - \theta_k] \cup [\theta + \theta_k; \pi/2]$ ;

во втором случае  $\theta_n \in [-\pi/2 + \theta; 0] \cup [0; \theta - \theta_k] \cup [\theta + \theta_k; \pi/2]$

и в третьем случае  $\theta_n \in [-\pi/2 + \theta; 0] \cup [0; \theta - \theta_k]$ .

Уточнение пределов интегрирования привело к тому, что даже при углах наблюдения, близких к вертикальным в величине дифференциального коэффициента рассеяния, теория диффузного рассеяния вносит определенный вклад. Дело в том, что при локальном угле наблюдения, под которым рассматривается рябь на склоне крупногравитационных волн (даже когда  $\theta \approx 0$ ), выполняются условия применимости теории возмущения при рассеянии электромагнитных волн от ряби. Вышеуказанное уточнение привело к тому, что дифференциальный коэффициент рассеяния, определяемый выражением (3), становится годным для всей области углов визирования. Это позволяет использовать полученные результаты для расчета УЭПР и  $T_g$  в области углов наблюдения ( $0 - 90^\circ$ ).

Рассмотрим процедуру усреднения дифференциального коэффициента рассеяния. Анализ подынтегральной функции (5) показывает, что когда  $\theta_n$  стремится к своему предельному значению, то

$$f_p(\theta_n, \Phi_n) \exp(-\operatorname{tg}^2 \theta_n / (2m^2)) \rightarrow 0.$$

Максимального значения она достигает, когда  $\operatorname{tg}^2 \theta_n / (2m^2) \approx 0$ . В области углов интегрирования, особенно когда  $\theta_n$  удовлетворяет условию (8), подынтегральная функция  $f_p(\theta_n, \Phi_n)$  гладкая и поэтому, следуя методике, изложенной в работе [4], будем иметь

$$\langle \gamma_p^{(1)}(\theta, \Phi, \theta_s, \Phi_s) \rangle = a(u_x) [B_p \psi_1 + C_p (\psi_2 - \psi_3)],$$

$$0 \leq \theta \leq \theta_k; \quad (9a)$$

$$\langle \gamma_p^{(1)}(\theta, \Phi, \theta_s, \Phi_s) \rangle = a(u_x) [B_p (1 + \psi_1 + \psi_2) + C_p (1 - \psi_3)],$$

$$\theta_k \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_k; \quad (9b)$$

$$\langle \gamma_p^{(1)}(\theta, \Phi, \theta_s, \Phi_s) \rangle = a(u_x) [B_p (1 - \psi_2) + C_p (1 - \psi_3)],$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta_k \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (9b)$$

где

$$B_p = \left\{ \frac{\cos \theta' \cos \theta'_s [ |M_{p,h}|^2 + |M_{p,v}|^2 ] (1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta_n \cos \Phi_n)}{[(\cos(\Phi'_s - \Phi') \sin \theta'_s - \sin \theta')^2 + \sin^2 \theta'_s \sin^2(\Phi'_s - \Phi')]^2} \right\},$$

$$\theta_n = \frac{\theta_k}{2}, \quad \Phi'_n = \Phi' = 0,$$

$$C_p = \left\{ \frac{\cos\theta' \cos\theta'_s [ |M_{p,h}|^2 + |M_{p,v}|^2 ] (1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta_n \cos\Phi_n)}{[(\cos(\Phi'_s - \Phi') \sin\theta'_s - \sin\theta')^2 + \sin^2\theta'_s \sin^2(\Phi'_s - \Phi')]^2} \right\},$$

$$\theta_n = -\frac{\theta_k}{2}, \quad \Phi'_n = \phi' = 0,$$

$$\psi_1 = \exp[-\operatorname{tg}^2(\theta + \theta_k)/(2m^2)],$$

$$\psi_2 = \exp[-\operatorname{tg}^2(\theta - \theta_k)/(2m^2)],$$

$$\psi_3 = \exp[-\operatorname{tg}^2(-\frac{\pi}{2} + \theta)/(2m^2)].$$

Численные расчеты показывают, что для всех углов наблюдения, кроме скользящих, значение допущенной ошибки в приближении (9) не превышает 1%.

Используя приближение (9), по формулам (1) и (2) на ЭВМ были рассчитаны угловые и поляризационные зависимости для УЭПР и  $T_g$ . Расчеты проводились для скоростей ветра  $u_{19,5m} = 6,5$  м/с при значениях  $k = 2,95$  см<sup>-1</sup>,  $m_{||} = 0,109$ ,  $m_{\perp} = 0,095$ ,  $\Phi_0 = 45^\circ$ ,  $m = 0,102$ ,  $\sigma_1(u) = 0,02585$ ,  $a(u_x) = 13,25 - 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_r = 45 - i37$  и  $T_g = 293$  К.

Расчетные результаты сопоставлены с известными [6,9] экспериментальными результатами. При этом наблюдается хорошее их совпадение в пределах  $\pm 1 - 3$  дБ.

Используя полученные результаты, предлагается методика классификации различных неоднородных образований в спектре ветрового волнения морской поверхности. Предлагаются также оптимальные условия наблюдения конкретных видов этих неоднородных образований.

В расчетных формулах состояние морской поверхности определяется тремя параметрами: среднеквадратичным уклоном крупных гравитационных волн; параметром, характеризующим интенсивность спектра ряби (параметр Филипса), удовлетворяющим условию брэгговского рассеяния и зависящим от скорости приповерхностного ветра, и среднеквадратичной высотой ряби. Для установления количественных связей между характеристиками рассеяния и параметрами волнения были проведены численные расчеты угловой зависимости удельной эффективной поверхности рассеяния (УЭПР) и радиояркостной температур ( $T_g$ ),

соответственно, для вертикальной ( $\hat{V}\hat{V}$ ) и горизонтальной ( $\hat{H}\hat{H}$ ) поляризации и приема. Расчеты проводились для случаев установившегося волнения, соответствующих значениям скорости ветра (на высоте 19,5 м)  $u = 3,6; 6,3; 10; 15$  м/с, когда азимутальный угол наблюдения  $\Phi_0 = 45^\circ$  от генерального направления ветра. Численное значение параметров морского волнения, входящих в расчетные формулы, приведены в табл. 1 и рассчитаны по результатам работ [6-8].

Для количественной оценки влияния изменения параметров волнения на характеристики рассеяния рассчитано приращение УЭПР, обусловленное либо изменением только интенсивности ряби, либо изменением только среднеквадратичного уклона морских волн и совместным действием параметров волнения для всей области углов наблюдения. Как следует из этих расчетов, брэгговское рассеяние имеет

место при углах наблюдений  $\theta = 25 - 85^\circ$ , причем величина приращения  $\Delta T_b$  в этом диапазоне не зависит от поляризации и от угла наблюдения.

Зависимость приращения УЭПР от параметра  $a(u_x)$  имеет линейный характер. Следовательно, неоднородные участки с аномальным изменением интенсивности мелкомасштабной составляющей спектра (ряби), удовлетворяющей условию резонансного рассеяния, могут быть одинаково хорошо обнаружены в диапазоне углов  $30 - 80^\circ$  на любой поляризации. В отличие от этого случая возможность обнаружения неоднородных участков морского фона, обусловленных изменением среднеквадратичного уклона крупных волн (например, появлением зыби), существенно зависит от поляризации и угла наблюдения. Наиболее контрастно они обнаруживаются на горизонтальной поляризации. Наибольший вклад в величину приращения среднего значения УЭПР наблюдается на углах

$15 - 25^\circ$  и составляет  $12 - 15$  дБ для горизонтальной поляризации излучения и приема и  $10 - 13$  дБ для вертикальной поляризации. Примечательно и то, что на вертикальной поляризации при углах наблюдения  $40 - 75^\circ$  влияние уклона на величину средней УЭПР практически отсутствует. Расчеты показывают, что оптимальные условия обнаружения (радиолокатором) одновременно сликов и зыби не совпадают.

Аналогичные расчеты выполнены и для случая теплолокации. На вертикальной поляризации, в окрестности углов  $55 - 65^\circ$ , наблюдается пересечение кривых, соответствующих разным степеням волнения, т. е. эта область углов нечувствительна к изменению величины средней скорости ветра на морской поверхности. Максимальные изменения  $T_y$  на вертикальной поляризации имеют место на скользящих углах наблюдения ( $\theta > 70^\circ$ ) и составляют примерно  $30 - 40$  К. На вертикальных углах  $\theta < 25^\circ$  эта величина не превышает  $8 - 9$  К. Расчеты показывают, что основной вклад в приращении радиояркостной температуры из-за изменения параметров ряби вносит среднеквадратичная высота ряби. Вклад от  $a(u_x)$  в яркостную температуру во всем угловом диапазоне наблюдений на обеих поляризациях не превышает нескольких градусов, причем максимум его приходится на вертикальные углы. При скользящих углах наблюдения ( $\theta > 70^\circ$ ) на вертикальной поляризации увеличение шероховатости уменьшает радиояркостную температуру. На горизонтальной же поляризации во всем угловом диапазоне наблюдений увеличение шероховатости поверхности приводит к положительным приращениям  $\Delta T_y$ .

Существенно разное влияние оказывают изменения низкочастотной части спектра волнения на приращения  $\Delta T_y$  на вертикальной и горизонтальной поляризациях. Наибольший вклад в  $\Delta T_y$  вносит изменение среднеквадратичного уклона морской поверхности при скользящих углах наблюдения, причем увеличение уклона соответствует уменьшению радиояркостной температуры.

На горизонтальной же поляризации наибольшее влияние уклона воды волнения наблюдается при углах  $\theta \sim 70^\circ$ . Во всем угловом диапазоне кроме очень скользящих углов ( $\theta > 80^\circ$ ) приращение  $T_{y,n}$  имеет положительный знак. Из сравнения этих зависимостей следует в частности, что для обнаружения неоднородностей морского фона, обусловленных изменением высокочастотной части спектра (наличием слика, нефтепродукта и т. п.) целесообразно наблюдение вести при вертикальных углах. Для обнаружения же участков морского фона с аномальным изменением уклонов (появление зыби и т. п.) необходимо вести

наблюдения при углах  $60 - 70^\circ$  на горизонтальной поляризации и углах  $60 - 80^\circ$  - на вертикальной поляризации.

В целях улучшения обнаружительной способности радиофизической аппаратуры считаем целесообразным анализировать также и корреляционную зависимость между приращениями радиояркостной температуры и УЭПР.

На основании полученных результатов можно построить корреляционные связи между приращением  $\Delta T_{a,p}$  и  $\Delta \sigma_{b,p}$  морской поверхности для различных углов наблюдения и поляризации.

Для примера на рис. 2 приведена подобная зависимость для вертикальной поляризации и угла наблюдения  $\theta = 80^\circ$ . Как следует из рис. 2, изменения в спектре мелкомасштабной ряби и крупномасштабной зыби приводят к существенно различным корреляционным зависимостям. Изменение параметров ряби наблюдается только в радиолокационном канале, а изменение уклона крупных волн в радиометрическом канале. По

величине приращения УЭПР и радиояркостной температуры можно количественно оценить изменение параметров волнения в аномальном участке морской поверхности, а также определить характер неоднородного образования. В этом случае применение совместной радиолокационной - радиометрической аппаратуры для дистанционного наблюдения за состоянием морской поверхности является более предпочтительным.

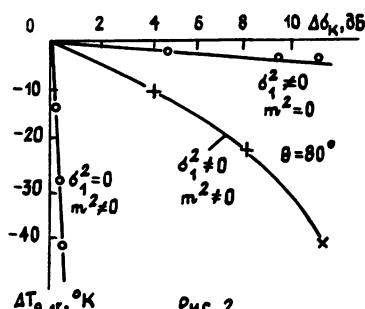


Рис. 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. - М. : Наука, 1972.
2. Лемента Ю. А., Фукс И. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 3. С. 379.
3. Фукс И. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9. № 5. С. 876.
4. Wu S.T., Fyng A.K.//J. Geophys. Res. 1972. V. 77. N 30. P. 5977.
5. Moor R.K., Fyng A.K.//Proc. IEEE. 1979. V. 67. N 11. P. 1504.
6. Chan H.L., Fyng A.K.//J. Geophys. Res. 1977. V. 82. N 24. P. 3439.
7. Mitsuyasu, Honde T.//J. Oceanograph. Soc. Jap. 1974. N 30. P. 185.
8. Рабинович Ю. И., Мелентьев В. В. //Труды ГГО. 1970. Вып. 235. С. 78.
9. Jones W.L., Schreder L.C., Mitchell//IEEE. 1977. V. AP-25. N 1. P. 52.

Ереванский филиал Центрального научно-исследовательского института  
"Комета"

Поступила в редакцию  
14 марта 1990 г.,  
после объединения  
30 июля 1990 г.

УДК 533. 951

## НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СТРУКТУРАХ

В. Л. Голуб, А. И. Кондратенко, В. П. Олефир

Изучены дисперсионные свойства непотенциальных поверхностных волн в цилиндрическом плазменном слое, находящемся в аксиальном магнитном поле. Получено аналитическое решение для частоты симметричной и несимметричной обобщенно-поверхностных волн при конечном магнитном поле в вакуумной полости внутри безграничной плазмы. Численно исследовано влияние магнитного поля радиусов цилиндров и азимутального волнового числа на дисперсию высокочастотной и низкочастотной ветвей. Показано, что уменьшение толщины плазменного слоя приводит к изменению характера дисперсии.

Исследование дисперсионных свойств плазменных волноводов связано с созданием плазменных генераторов и усилителей [1-3, 5]. Для увеличения КПД пучково-плазменных систем и повышения их мощности используются релятивистские электронные пучки. Волны, возбуждаемые при этом, являются существенно непотенциальными. Знание зависимости дисперсионных характеристик этих волн от плотности плазмы, Геометрии волновода, магнитного поля дает возможность управлять фазовой скоростью и поддерживать синхронизм пучка и волны. Для эффективного взаимодействия с пучком могут быть использованы поверхностные волны (ПВ), фазовая скорость которых не превышает скорости света.

Спектры ПВ в цилиндрических структурах вида плазма-вакуум, вакуум-плазма, вакуум-плазма-вакуум в отсутствие внешнего магнитного поля подробно исследовались в [4]. На практике для создания таких структур необходимо наличие внешнего магнитного поля вдоль оси волновода.

Известно [4, 6], что при этом на дисперсионной кривой возникает точка, разделяющая ее на две части, которые отличаются зависимостью амплитуды волн от поперечной координаты. Если  $a$  - безразмерное волновое число вдоль оси волновода, а  $q_*$  - его значение в указанной выше точке, то при  $q > q_*$  амплитуды полей в волне спадают экспоненциально от границы раздела, а при  $q < q_*$  амплитуды убывают, осциллируя. Волны при  $q < q_*$  получили название обобщенно-поверхностных.

Возбуждение симметричных волн этого типа в волноводе плазма-факуум изучалось в [6]. В работе [7] исследовалась радиальная структура электрического и магнитного полей симметричной ПВ, однако существенно непотенциальная область, где волна становится обобщенно-поверхностной не рассматривалась.

В данной работе исследуются дисперсионные свойства непотенциальных ПВ (симметричных и несимметричных) в магнитоактивных цилиндрических волноведущих структурах:

плазменный трубчатый волнород в вакууме;  
цилиндрическая вакуумная полость в плазме;  
плазменный цилиндр в вакууме.

Трехслойные (трубчатые) структуры на практике могут быть удобны тем, что возбуждаемые в них две ветви ПВ перекрывают по частоте весь интервал возможного существования этих волн - от нуля до плазменной частоты в области малых безразмерных радиусов цилиндров. В двухслойных волноводах существует только одна из ветвей ПВ: низкочастотная (НЧ) в структуре плазма-вакуум и высокочастотная (ВЧ) в структуре вакуум-плазма. Экспериментальное получение сплошного и трубчатого плазменного цилиндров - задачи одного порядка.

Дисперсионное уравнение для ПВ в трубчатом волноводе. Двухслойные структуры могут быть получены как предельные случаи трехслойной, поэтому выведем дисперсионное уравнение для последней. Рассмотрим бесконечный плазменный цилиндр с осью вдоль координаты и поперечным сечением в виде кольца с радиусами  $i$ . Внешнее магнитное поле направлено вдоль оси. Будем искать решение уравнений Максвелла в виде ПВ, распространяющейся вдоль оси. При этом плазма рассматривается в гидродинамическом приближении без учета теплового движения. Тангенциальные компоненты полей в цилиндрических координатах имеют вид

1) для области  $0 \leq r \leq r_1$  (вакуум)

$$E_z = A_1 I_m(\alpha_v r), \quad H_z = A_2 I_m(\alpha_v r),$$

$$E_\phi = i A_2 I_m(\alpha_v r) z^I(r) + A_1 \frac{mk}{\alpha_v^2 r} I_m(\alpha_v r),$$

$$H_\phi = -i A_1 I_m(\alpha_v r) z^I(r) + A_2 \frac{mk}{\alpha_v^2 r} I_m(\alpha_v r);$$

2) для области  $r_1 \leq r \leq r_2$  (плазма)

$$E_z = \sum_{j=1}^2 C_j K_m(k_j r) + D_j I_m(k_j r),$$

$$H_z = i \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 k k_z} \sum_{j=1}^2 F_j (C_j K_m(k_j r) + D_j I_m(k_j r)),$$

$$E_\phi = \sum_{j=1}^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 k k_z} F_j \{ C_j K_m(k_j r) [-\varphi_j^k(r) + \frac{mk}{\epsilon_1 F_j} (1 + \epsilon_3 \frac{k^2}{k_j^2})] +$$

$$+ D_j I_m(k_j r) [-y_j^I(r) + \frac{mk}{r} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 F_j} (1 + \epsilon_3 \frac{k^2}{k_j^2})]\},$$

$$H_\phi = \sum_{j=1}^2 i \{ C_j K_m(k_j r) [-\epsilon_3 y_j^k(r) + \frac{mk}{r} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{F_j}{k_j^2}] +$$

$$+ D_j I_m(k_j r) [-\epsilon_3 y_j^I(r) + \frac{m}{kr} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{F_j}{k_j^2}]\};$$

в области  $r \geq r_2$  (вакуум)

$$E_z = B_1 K_m(\alpha_v r), \quad H_z = B_2 K_m(\alpha_v r),$$

$$E_\varphi = i B_2 K_m(\alpha_v r) z^k(r) + B_1 \frac{m k_z}{\alpha_v^2 r} K_m(\alpha_v r),$$

$$H_\varphi = -i B_1 K_m(\alpha_v r) z^k(r) + B_2 \frac{m k_z}{\alpha_v^2 r} K_m(\alpha_v r).$$

Здесь введены следующие обозначения:  $A_j, B_j, C_j, D_j$  – произвольные константы;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда порядка  $m$ ;

$$z^I(r) = \frac{k}{\alpha_v} \frac{I'_m(\alpha_v r)}{I_m(\alpha_v r)}, \quad z^k(r) = \frac{k}{\alpha_v} \frac{K'_m(\alpha_v r)}{K_m(\alpha_v r)},$$

$$Y_j^I(r) = \frac{k}{k_j} \frac{I'_m(k_j r)}{I_m(k_j r)}, \quad Y_j^k = \frac{k}{k_j} \frac{K'_m(k_j r)}{K_m(k_j r)},$$

$$\alpha_v^2 = k_z^2 - k^2, \quad k = \omega/c, \quad \alpha^2 = k_z^2 - \epsilon_1 k^2,$$

$$F_j = k_j^2 - \alpha^2 \epsilon_3 / \epsilon_1, \quad k_j^2 = p_1 \pm (p_1^2 - p_2^2)^{1/2},$$

$$p_1 = [\alpha^2 (\epsilon_1 + \epsilon_3) + \epsilon_2^2 k^2] / 2 \epsilon_1, \quad p_2 = \xi \epsilon_3 / \epsilon_1, \quad \xi = \alpha^4 - \epsilon_2^2 k^4,$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы  $\epsilon_{ik}$ :

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -i \epsilon_2 & 0 \\ i \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix},$$

$k_z$  – волновое число вдоль оси;  $m$  – азимутальное число волны. Используя непрерывность тангенциальных компонент  $E_{z,\varphi}, H_{z,\varphi}$  на границах  $r = r_1, r = r_2$  и исключая, например,  $A_j, B_j$ , можно получить однородную систему уравнений относительно  $C_j, D_j$ . Дисперсионное уравнение – условие существования ненулевого решения этой системы – имеет вид

$$\det M_{ik} = 0, \tag{1}$$

где  $M_{ik}$  –  $(4 \times 4)$ -матрица:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(z^I - y_{11}^k + e_{11}) \quad F_2(z^I - y_{21}^k + e_{21}) \quad F_1(z^I - y_{11}^I + e_{11}) \quad F_2(z^I - y_{21}^k + e_{21}) \\ z^I - \varepsilon_3 y_{11}^k + h_{11} \quad z^I - \varepsilon_3 y_{21}^k + h_{21} \quad z^I - \varepsilon_3 y_{11}^I + h_{11} \quad z^I - \varepsilon_3 y_{21}^k + h_{21} \\ F_1(z^k - y_{12}^k + e_{12}) \quad F_2(z^k - y_{22}^k + e_{22}) \quad F_1(z^k - y_{12}^I + e_{12}) \quad F_2(z^k - y_{22}^I + e_{22}) \\ z^k - \varepsilon_3 y_{12}^k + h_{12} \quad z^k - \varepsilon_3 y_{22}^k + h_{22} \quad z^k - \varepsilon_3 y_{12}^I + h_{12} \quad z^k - \varepsilon_3 y_{22}^I + h_{22} \end{array} \right\},$$

(2)

где

$$z^I = z^I(r = r_1), \quad z^k = z^k(r = r_2),$$

$$y_{1j}^I = y_j^I(r = r_1), \quad y_{1j}^k = y_j^k(r = r_1),$$

$$e_{1j} = \frac{mk^3}{r_1 F_j} \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_3 - \frac{1}{k_j^2})}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\alpha_v^2}, \quad h_{1j} = \frac{m}{kr_1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} F_j \left( \frac{1}{k_j^2} - \frac{1}{\alpha_v^2} \right) \quad (i, j=1, 2).$$

В общем случае решение уравнения (1) возможно только численно. Аналитические выражения можно получить лишь в некоторых предельных случаях.

Вакуумная полость в безграничной плазме. В отсутствие магнитного поля распространение аксиально-несимметричных волн в цилиндрическом канале, окруженном плазмой, рассматривалось в [8], с учетом магнитного поля при  $r_2 \rightarrow \infty$   $M_{1k}$  переходит в  $(2 \times 2)$ -матрицу и дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{(z^I - y_{11}^k + e_{11})(z^I - \varepsilon_3 y_{21}^k + h_{21})}{(z^I - y_{21}^k + e_{21})(z^I - \varepsilon_3 y_{11}^k + h_{11})} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (3)$$

Введем безразмерные переменные:

$$q = k_z r_1, \quad \mu = \omega/\omega_p, \quad R = \omega_p r_1/c, \quad u = \omega_h/\omega_p,$$

$$\beta = \omega/k_z c, \quad \gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1},$$

$\omega_p$ ,  $\omega_h$  – соответственно плазменная и электронная циклотронная частоты. Будем рассматривать ультрапараллельную область  $\beta \leq 1$ ,  $\gamma \gg 1$ . Здесь волна становится обобщенно-поверхностной. Это видно из того, что поперечные волновые числа  $k_j$  становятся комплексно-сопряженными:

$$k_{1,2}^2 = \alpha^2 \varepsilon_3 / \varepsilon_1 \mp i \sqrt{|\alpha|} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 2 \varepsilon_1 \beta^2 \gamma^2,$$

где

$$|\alpha| = 4 (1 - \mu^2) \beta^2 \gamma^4 / u^2.$$

Так как  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / \varepsilon_1 \sim u^2$ , то мнимая часть  $k_{1,2}$  в этой области пропорциональна магнитному полу. Для симметричной волны ( $m = 0$ ) можно получить следующие асимптотические формулы:

$$\mu \approx (2a/r)^{1/2} \quad \text{при} \quad R \gg q \gg 1, \quad q^2 \sim aR; \quad (4)$$

$$\mu \approx q/R(1 - (q/aR)^2)^{1/2} \quad \text{при} \quad R \gg q \gg 1, \quad q^2 \gg aR, \quad (5)$$

где  $a = \frac{1 + (1 + u^2)^{1/2}}{2} \sim 1$  при  $u \leq 1$ . Области применимости формул (4), (5) можно описать в несколько других терминах. Так как в рассматриваемой области

$$k_j r_1 \approx \frac{R(1 \mp iu)^{1/2}}{(1 + u^2)^{1/2}} \quad (j = 1, 2),$$

то выражения (4), (5) относятся к случаю, когда волновод является широким для ПВ в плазме:  $|k_j r_1| \sim R \gg 1$ . При этом формула (4) соответствует "узкому вакууму" ( $\alpha_v r_1 \ll 1$ ), а (5) - "широкому вакууму" ( $\alpha_v r_1 \gg 1$ ).

Выражение для несимметричной волны ( $m \neq 0$ ) при  $\alpha_v r_1 \ll 1$ ;  $|k_j r_1| \gg 1$  имеет вид

$$\mu \approx \left(\frac{1 + |m|}{R}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

В (6) зависимость от магнитного поля отсутствует, поскольку при его получении учитывались члены максимального порядка по  $\gamma^2/aR \gg 1$ . Если учесть слагаемые следующего порядка, то получим биквадратное уравнение относительно  $\mu$ , решение которого есть

$$\mu \approx \sqrt{P + (P^2 + Q)^{1/2}}, \quad (7)$$

где

$$P = (|m| + 1)(Ra - 2\gamma^2|m|)/R^2,$$

$$Q = 4(|m| + 1)^2|m|\gamma^2 a/R^3.$$

Формула (7) определяет зависимость  $\mu = \mu(\gamma)$ . Результат численных расчетов для  $\mu = \mu(q)$  в этой области показан на рис. 1. Кривые 1-4 соответствуют  $u = 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8$  при  $R = 20, m = 1$ . Выражения (6), (7) соответствуют левому краю семейства дисперсионных кривых. Расщепление спектра справа определяется асимптотикой для  $q \gg 1$ ,  $q \gg R$  в области потенциальных волн [4]:

$$\mu \approx \left(\frac{1 + u^2}{2}\right)^{1/2}. \quad (8)$$

**Плазменный цилиндр в вакууме.** В другом предельном случае ( $r_1 = 0$ ) дисперсионное уравнение (4) преобразуется к виду

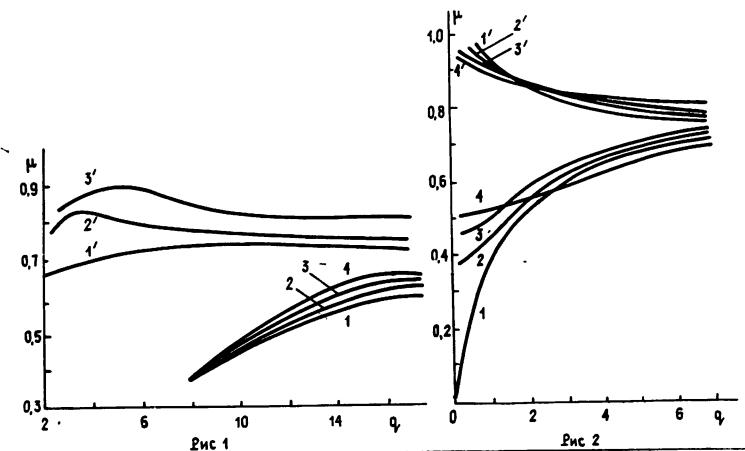
$$\frac{(z^k - y_{12}^I + e_{12})(z^k - \epsilon_3 y_{22}^I + h_{22})}{(z^k - y_{22}^I + e_{22})(z^k - \epsilon_3 y_{12}^I + h_{12})} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Снова рассмотрим область  $\beta \leq 1$ ,  $\gamma \gg 1$ . Для симметричных волн ( $m = 0$ ) зависимость  $\mu(\gamma)$  при  $|k_j r_2| \gg 1$ ,  $\alpha_v r_2 \ll 1$  была

получена в [6]. Несимметричность волны становится существенной при малом безразмерном радиусе  $R = (\omega_p r_2/c) < 1$ . Спектральные кривые в этом случае представляют собой семейства, у которых частота является монотонно возрастающей функцией циклотронной частоты и азимутального числа  $m$  (при одинаковых значениях  $q$ ). Дисперсия на таких кривых остается аномальной во всем интервале волновых чисел. С ростом магнитного поля точка перехода  $q_*$  от поверхностной

волны к обобщенно-поверхностной смещается к левому краю спектра, что соответствует увеличению частоты. Так, например, для  $R = 0,2$ ;  $m = 1$  частота перехода  $\mu_* = \mu(q_*)$  возрастает от 0,65 до 0,97 при изменении  $u$  в интервале  $0,2 \pm 0,8$ . От величины  $m$  положение точки  $q_*$  зависит слабо. При  $R = 0,2$ ,  $u = 0,2$   $q_* \approx 1$  для  $m = 1, 2, 3$ .

Численное исследование дисперсионных свойств трехслойной структуры вакуум - плазма - вакуум. Для конечных значений  $r_1, r_2$  уравнение (1) решалось численно. При этом найдено, что существуют такие области параметров  $(R_1, R_2, q)$ , где спектры ПВ существенно отличаются от соответствующих зависимостей в двухслойной структуре. На рис. 1 показано влияние толщины плазменного слоя на характер дисперсии высокочастотной ветви (ВЧ) ПВ. Если безразмерные радиусы  $R_1, R_2$  велики ( $R_{1,2} \gg 1$ ), а толщина слоя мала ( $R_2 - R_1 \ll 1$ ), то на дисперсионной кривой имеются как области нормальной, так и аномальной дисперсии. В соответствующем двухслойном волноводе вакуум-плазма при  $R \gg 1$  дисперсия всегда нормальная, а при  $R \ll 1$  - аномальная. Кривые 1'-3' отвечают значениям  $R_2 = \infty; 3,5; 3,2$  при  $R_1 = 3; u = 0,1$ . Эффект смены характера дисперсии имеет место и в отсутствие магнитного поля. С увеличением  $u$  эффект становится менее выраженным, так как магнитное поле увеличивает левую предельную частоту спектра, приближая ее к единице.



Рассмотрим влияние несимметричности ПВ на ее спектр. На рис. 2 представлены зависимости  $\mu = \mu(q)$  для НЧ ветви (кривые 1-4) и ВЧ ветви (кривые 1'-4') для  $m = 0 + 3$ , соответственно, при значениях  $R_1 = 0,1; R_2 = 0,15; u = 0,4$ . При малых значениях безразмерных радиус зависимость частоты  $\mu$  от  $m$  существенна. Для НЧ ветви  $\mu$  увеличивается с ростом  $m$ , для ВЧ - уменьшается. Отметим, что ПВ являются невзаимными, т. е. спектр зависит от знака азимутального

числа  $m$  (точнее от знака произведения  $m \times H_0$ ). Это связано с тем, что имеется выделенное направление вдоль оси  $z$  - вектор магнитного поля  $\vec{H}_0$ . Расчеты показывают, что частота НЧ ветви с  $m < 0$  лежит ниже частоты с  $m > 0$ . Для ВЧ ветви зависимость обратная.

**Выводы:** В работе изучены дисперсионные свойства непотенциальных поверхностных волн в двух- и трехслойных замагниченных волноведущих структурах. Получено аналитическое решение для частоты ПВ в существенно непотенциальной области для вакуумной полости в безграничной плазме. Показано, что уменьшение толщины плазменного слоя в волноводе вакуум-плазма-вакуум приводит к изменению характера дисперсии.

Численно исследовано влияние магнитного поля, радиусов цилиндров и азимутального числа на спектры НЧ и ВЧ ветвей поверхностной волны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я. Б. //Укр. физ. журн. 1978. Т. 23. № 11. С. 1885.
2. Ерохин Н. С., Кузелев И. В. и др. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. -М.: Наука, 1982. - 272 с.
3. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. -М.: Энергоатомиздат, 1988. - 320 с.
4. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 208 с.
5. Барченко В. Т., Долженко О. В., Кузелев М. В. // Изв. Ленингр. электротехнического ин-та. 1979. № 247. С. 76.
6. Кондратенко А. Н., Олефир В. П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 6. С. 654.
7. Березин А. К., Землянский Н. М., Мирный В. И. и др. Препринт ХФТИ 86-25. - М.: ЦНИИатоминформ, 1986.
8. Анисимов И. А., Левитский С. М. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 3. С. 486.

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
16 января 1990 г.

## NONPOTENTIAL SURFACE WAVES IN MAGNETOACTIVE PLASMA

V. L. Golub, A. N. Kondratenko, V. P. Olefir

Dispersion properties of nonpotential surface waves in cylindrical plasma layer being in an axial magnetic field are studied. The analytical solutions for a frequency of symmetrical and nonsymmetrical generalized surface waves at the finite magnetic field for a vacuum cavity in boundless plasma are derived. The influence of magnetic field, cylindrical sizes and azimuthal wave number is investigated numerically. It is shown that the reduction of plasma layer thickness leads to a change of the dispersion character of the surface wave.

УДК 539.194

## КАЧЕСТВЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ СПИН-ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ СПЕКТРОВ

А. В. Буренин

Рассмотрен новый метод качественного построения спин-вращательных операторов в теории сверхтонких молекулярных взаимодействий, связанных с ядерным спином. Метод основан на использовании концепции цепочки групп симметрии вложенных друг в друга моделей, возникающих при аналитическом решении задачи о стационарных состояниях молекулы с помощью теории возмущений.

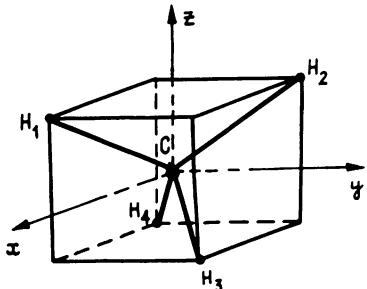
В последнее время для качественного анализа как жестких, так и нежестких молекул в работах [1-4] развит подход, использующий концепцию цепочки групп симметрии вложенных друг в друга моделей, возникающих при аналитическом решении задачи о стационарных состояниях молекулы с помощью теории возмущений. В основе этого подхода лежит естественное предположение, что каждая модель, возникающая по мере последовательного перехода к нулевому приближению, содержит дополнительную качественную информацию о рассматриваемой молекуле и эта информация отображается в группе симметрии этой модели. В результате группа симметрии любой приближенной модели играет самостоятельную роль по отношению к группам симметрии более строгих моделей. Все эти группы симметрии объединяются в цепочку условиями сшивки. А именно, в группах симметрии соседних моделей указываются эквивалентные элементы, по отношению к которым решения уравнения Шредингера должны преобразовываться одинаковым образом. На наш взгляд, концепция цепочки групп симметрии обладает серьезными идеологическими и техническими преимуществами по сравнению с традиционно используемой концепцией СНРГ группы [5].

Метод качественного построения чисто вращательных операторов физических величин в теории молекулярных спектров на основе цепочки групп симметрии был рассмотрен в [2]. В настоящей работе проведено расширение этого метода на спин-вращательные операторы, описывающие сверхтонкие взаимодействия, связанные с ядерным спином. Для конкретности изложения мы проведем построение на примере спин-вращательного оператора Гамильтона молекулы метана  $^{12}\text{C}\text{H}_4$ . Традиционным качественным методам построения, для этого случая посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [6-8]).

### ПОСТРОЕНИЕ СПИН-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ГАМИЛЬТОНА

При аналитическом решении задачи о стационарных состояниях молекулы метана  $^{12}\text{C}\text{H}_4$  методами теории возмущений возникает следующая цепочка основных моделей и, соответственно, групп симметрии:

1) строгая постановка задачи - группа симметрии  $\pi_4 \times C_1^*$  (использование группы симметрии  $C_1$ , связано с пренебрежением слабыми взаимодействиями [9]); 2) приближение Борна - Оппенгеймера. В этом приближении для заданного электронного состояния возникает понятие потенциала взаимодействия ядер и, соответственно, понятие равновесной конфигурации молекулы метана  $^{12}\text{CH}_4$  (рис. 1). Симметрия движения в приближении Борна - Оппенгеймера при достаточно малых отклонениях от положения равновесия определяется группой  $T_d \times C_1$ , где  $T_d$  - точечная



Фиг 1

вращательные элементы, случае это группа  $R$ ,

из требования инвариантности спин-вращательного гамильтонiana по отношению к преобразованиям группы  $\pi_4$  следует, что его координатная и спиновая части должны преобразоваться по одному неприводимому представлению  $[\lambda]$  группы  $\pi_4$ . Тогда для каждого такого представления в случае спин-вращательного взаимодействия наиболее низкого порядка (мнемоническое обозначение  $JI$ ) можно записать

$$H^{(JI)} = P_{r i k}^{[\lambda]} J_i I_{k\alpha} P_{ra}^{[\lambda]} I_{a\alpha}. \quad (1)$$

Здесь  $J_i$  - компонента координатного углового момента в молекулярной системе координат (МСК);  $I_{k\alpha}$  - направляющие косинусы, определяющие ориентацию МСК относительно лабораторной системы координат (ЛСК). Величины  $I_{k\alpha}$  возникают вследствие необходимости представления компонент ядерного спина в МСК через их компоненты в ЛСК;  $I_{a\alpha}$  - компонента спина ядра водорода "a" в ЛСК;  $P^{[\lambda]}$ ,  $P^{[\lambda]}_{ra}$  - постоянные коэффициенты, соответственно, координатной и спиновой частей гамильтонiana;  $r$  - индекс базисного орта неприводимого представления  $[\lambda]$ .

Спиновая часть, зависящая от переменных  $I_a$  ( $a = 1 - 4$ ) в ЛСК образует представление размерности 4. Легко показать, что оно складывается на прямую сумму неприводимых представлений [4] и [31]. Естественно, что только эти представления возможны в выражении (1).

\*Обозначения всех используемых в статье групп симметрии, их классов и неприводимых представлений соответствуют [9,10]. В данном случае  $\pi_4$  - группа перестановок тождественных ядер водорода, а  $C_1$  - группа инверсии пространственных координат всех ядер и электронов молекулы. Естественно, что полная группа симметрии строгой задачи имеет и другие преобразования, которые сейчас для нас несущественны. Заметим, что группа  $\pi_4 \times C_1$  совпадает с CNPI - группой молекулы метана.

группа молекулы  $\text{CH}_4$ ; 3) движение ядер разбивается на независимые колебательное и вращательное, для описания которых используются модели гармонического осциллятора и жесткого волчка. Группой симметрии колебательной задачи является группа, формально совпадающая с точечной, но ее элементы действуют только на колебательные координаты. Группой симметрии вращательной задачи является группа симметрии жесткого волчка. Она имеет только чисто действующие на углы Эйлера. В данном

Взаимодействие, соответствующее полностью симметричной спиновой схеме Юнга, мы будем называть скалярным, а соответствующее остальным возможным спиновым схемам Юнга - тензорным. Сшивая группы  $\pi_4$  и  $T_d$  [2], получаем для полной координатной части гамильтониана в приближении Борна - Оппенгеймера следующие разрешенные представления -  $A_1^{(+)}$  и  $F_2^{(+)}$ . Здесь дополнительно учтено, что координатная часть гамильтониана должна быть инвариантна относительно операции  $i^*$  (группа  $T_d \times C_1$ ). Таким образом, задача сводится к построению координатной части нужного типа симметрии из чисто вращательных элементов. Согласно [2] ее решение можно представить в виде

$$(\Gamma_{\text{коорд}})_{T_d \times C_1} = (A_{1\text{эл}})_{T_d} \times (A_{1\text{кол}})_{T_d} \times (\Gamma_{\text{вр-ин}})_{T_d \times C_1}. \quad (2)$$

Здесь  $A_{1\text{эл}}$ ,  $A_{1\text{кол}}$  - неприводимые представления, по которым преобразуются электронная и колебательная части гамильтониана. В данном случае они отсутствуют. Поэтому мы используем представление  $A_1$  группы  $T_d$ ;  $\Gamma_{\text{вр-ин}}$  - неприводимое вращательное-инверсионное представление. Корреляция между вращательными представлениями группы симметрии сферического волчка  $R_3$  и вращательно-инверсионными представлениями группы  $T_d \times C_1$  приведена в [2] и получена путем связи этих групп по их общей ядерной вращательной подгруппе 0. При этом представление  $T_d$  относится к вращательной части, а представление  $C_1$  к полной координатной части, что и отражено стрелкой в выражении (2). Важно, что поведение относительно операции  $i$  используется только для полной координатной части и определяется физической стороной задачи. В то же время при работе с CNPI - группой задается поведение относительно операции  $i$  всех сомножителей в полной координатной части. Однако поведение сомножителей не имеет физического смысла и определяется соглашением о поведении осей МСК относительно операции  $i$  (подробнее см. в [1]). В частности, это формально приводит к неоднозначности в схеме анализа свойств симметрии.

Итак, необходимо найти такие чисто вращательные комбинации в выражении (1) (группа симметрии  $R_3$ ), которые при переходе к приближению Борна-Оппенгеймера эволюционируют в решения с симметрией  $A_1^{(+)}$  и  $F_2^{(+)}$  (группа  $T_d \times C_1$ ). Используя таблицу корреляции между этими группами, легко получить, что разрешенные комбинации должны преобразовываться, соответственно, по представлениям  $A_1$  и  $F_2$  вращательной подгруппы 0. Комбинации  $J_1 I_{kd}$  преобразуются согласно тензорному представлению  $u_3 \times u_3$ , где  $u_3$  - трехмерное представление группы унитарных преобразований трехмерного пространства. Это тензорное представление разбивается на неприводимые представления  $u_3^{(\lambda)}$ , каждое из которых соответствует определенной схеме Юнга группы  $\pi_2$  [10]. Проводя затем редукцию на группу вращений  $R_3$ , получаем

\*Мы следуем [9], считая, что операция  $i$  не определена в спиновом пространстве. Это противоположно традиционной используемой идеологии, где постулируется и используется при анализе свойств симметрии инвариантность вектора спина относительно этой операции [5-8].

$u_3 \times u_3 = u_3^{(2)} + u_3^{(1)} = D^{(2)} + D^{(0)} + D^{(1)}$ . Из имеющихся представлений группы  $R_3$  нас интересуют  $D^{(0)}$  и  $D^{(2)}$ , так как к ним относятся комбинации, преобразующиеся, соответственно, по представлениям  $A_1$  и  $F_2$  подгруппы 0. Окончательные результаты представлены в табл. 1. Слева в таблице приведены координатные части, преобразующиеся по неприводимым представлениям  $A_1^{(+)}$  и  $F_2^{(+)}$  группы  $T_d \times C_1$ , а справа - спиновые части, преобразующиеся по неприводимым представлениям [4] и [31] группы  $\pi_4$ . Подчеркнем следующее обстоятельство. Базисные орты спиновой части, относящейся

Таблица 1  
Координатная и спиновая части гамильтониана спин-вращательного взаимодействия типа  $JJ$  для молекулы  $^{12}\text{CH}_4$  в основном состоянии.  
Векторы даны в ЛСК.

Координатная часть	Спиновая часть
$A_1^{(+)}: \vec{T} = J_1 \vec{I}_1$	[4]: $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \vec{I}_4$
$F_2^{(+)}: \vec{T}^{(x)} = J_y \vec{I}_z + J_z \vec{I}_y$	[31]: $\vec{I}^{(x)} = \vec{I}_1 - \vec{I}_2 + \vec{I}_3 - \vec{I}_4$
$\vec{T}^{(y)} = J_z \vec{I}_x + J_x \vec{I}_z$	$\vec{I}^{(y)} = -\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 - \vec{I}_4$
$\vec{T}^{(z)} = J_x \vec{I}_y + J_y \vec{I}_x$	$\vec{I}^{(z)} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 - \vec{I}_3 - \vec{I}_4$

к представлению  $F_2$  подгруппы 0, выбраны таким образом, чтобы матрицы этих неприводимых представлений совпали с матрицей преобразования полярного вектора в группе  $T_d$ . Заметим, что такой базис для спиновой части был впервые использован в [11]. В результате получаем следующие выражения для скалярного

$$H_s^{(JJ)} \sim J_1 I_{1\alpha} I_\alpha = J_1 I_1 \quad (3)$$

и тензорного

$$H_t^{(JJ)} \sim T_\alpha^{(1)} I_\alpha^{(1)} = \sum_{k=1}^3 J_k (I_k^{(1)} + I_k^{(2)}) \quad (4)$$

членов спин-вращательного гамильтониана (1). Эти выражения аналогичны полученным ранее в [11, 6].

Рассмотренный метод позволяет также легко построить члены спин-вращательного гамильтониана следующих порядков. В качестве примера рассмотрим члены типа  $J^3 I$ . В этом случае координатная часть преобразуется по представлению\*  $u_3^{(3)} \times u_3^{(1)} = D^{(4)} + D^{(3)} + 2D^{(2)} +$

\*При рассмотрении комбинаций углового момента мы учитываем только симметризованное представление  $u_3^{(3)}$ . Дополнительные члены, соответствующие остальным схемам Юнга, при учете правил коммутации для компонент углового момента приводят только к переопределению феноменологических коэффициентов в построенном гамильтониане.

$+ D^{(1)} + D^{(0)}$ . Полученные представления группы  $R_3$  содержат два представления  $A_1$  и четыре представления  $F_2$  вращательной подгруппы 0. В результате имеется два независимых члена в скалярном взаимодействии

$$H_{s,1}^{(J^3 I)} \sim J^2 H_s^{(JI)}, \quad H_{s,2}^{(J^3 I)} \sim J_1^3 I_1 \quad (5)$$

и четыре независимых члена в тензорном взаимодействии

$$H_{t,1}^{(J^3 I)} \sim J^2 H_t^{(JI)}, \quad H_{t,2}^{(J^3 I)} \sim J_x J_y J_z (I_x^{(x)} + I_y^{(y)} + I_z^{(z)}), \\ (6)$$

$$H_{t,3}^{(J^3 I)} \sim \sum_{\substack{1 k 1 \\ 1 k 1 = xyz, yzx, zxy}} J_1^3 (I_k^{(1)} + I_1^{(k)}), \quad H_{t,4}^{(J^3 I)} \sim \sum_{\substack{1 k 1 \\ 1 k 1 = xyz, yzx, zxz}} J_1 (I_k^2 - J_1^2) (I_1^{(k)} - I_k^{(1)}).$$

Заметим, что выбор разрешенных комбинаций неоднозначен. Однако это приводит только к переопределению феноменологических коэффициентов в гамильтониане.

Мы рассмотрели метод качественного построения спин-вращательных операторов на примере спин-вращательного гамильтониана молекулы метана в невырожденном электронно-колебательном состоянии. По своей физической сути этот метод существенно отличается от ранее использовавшихся. Достаточно заметить радикальное различие по отношению к интерпретации действия операции пространственной инверсии  $i$  на спиновые переменные. На наш взгляд, эта интерпретация в работах [6-8] (список можно легко продолжить) нефизична. В заключение подчеркнем, что предлагаемый метод допускает обобщение на вырожденные состояния молекул. В этом случае в уравнение (2) будут входить нетривиальные выражения для электронно-колебательной части.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А. В., Марков В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 3. С. 287.
2. Буренина А. В., Вакс В. Л., Марков В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 12. С. 1406.
3. Буренин А. В., Полянский О. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 2. С. 169.
4. Буренин А. В. // ЖХХ. 1985. Т. 26. № 4. С. 155.
5. Банкер Ф. Симметрия молекул и спектроскопия. М.: Мир, 1981.
6. Hougen J.T. In: MTP International Review of Science, Physical Chemistry, Series Two, vol.3, Spectroscopy, ed. D.A.Ramsay, 1976.
7. Itano W.M. // J.Mol. Spectr.: 1978. V. 71. P. 193.
8. Michelot F., Bobin B. Moret-Baily J. // J.Mol.Spectrosc. 1979. V. 76. P. 374.
9. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, Том III, Квантовая механика. - М.: Наука, 1974.
10. Каплан И. Г. Симметрия многоэлектронных систем. - М.: Наука, 1969.
11. Anderson C.H., Ramsey N.F. // Phys. Rev. 1966. V. 149. P. 14.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
26 февраля 1990 г.

УДК 539.124.143

**ОРИЕНТАЦИОННО-МОДУЛИРОВАННЫЙ ЭПР В СИСТЕМАХ  
С АНИЗОТРОПНЫМ ЗЕЕМАНОВСКИМ И ТОНКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ**

*Б. Ф. Алексеев, М. Б. Гайфуллин*

Исследовано влияние адиабатической ориентационной модуляции резонансных условий, осуществляющейся линейно поляризованным перпендикулярным магнитным полем, на спектр ЭПР в спин-системах с гексагональной, тетрагональной и тригональной симметрией окружения парамагнитного центра с эффективным спином  $S \leq 3/2$  с учетом анизотропии зеемановского и тонкого взаимодействий. Найдены общее выражение для амплитуды осциллирующей синфазно с модуляцией мнимой части парамагнитной восприимчивости и частные виды этого выражения для ряда практических выжных случаев. Указано на новые возможности метода ориентационно-модулированного ЭПР, главным образом на возможность улучшения разрешения в сложных суперпозиционных спектрах ЭПР кристаллов. Расчетные результаты подтверждены экспериментально.

1. В электронных системах с анизотропией спиновых взаимодействий возможно детектирование спектров ЭПР, основанное на использовании эффекта зависимости параметров спектра (положения линий, их высших моментов, времен релаксации и др.) от ориентации кристалла в магнитном поле. На практике при осуществлении такого метода используют обычно модулирующее магнитное поле линейной [1, 2] или круговой [3-5] поляризаций, перпендикулярное внешнему статическому полю. Такая "перпендикулярная" (в отличие от традиционной "параллельной") модуляция приводит к периодическому изменению направления результирующего квазистатического магнитного поля по отношению к осям неподвижного кристалла, что обуславливает, в конечном итоге, модуляцию только анизотропных составляющих спинового гамильтонiana (ориентационно-модулированный ЭПР - ОМ ЭПР). В первых экспериментальных работах [1, 2] такого рода показано, что в присутствии линейно поляризованного перпендикулярного модулирующего поля анизотропные линии спектра необычным образом изменяют свою интенсивность по сравнению со случаем традиционной параллельной модуляции. В работах [3-5] использовано модулирующее перпендикулярное поле круговой поляризации, и с такой ориентационной модуляцией (ОМ) удалось, в частности, разделить анизотропные спектры ЭПР от неэквивалентных центров со сверхтонким взаимодействием в кристаллах аксиальной симметрии. В одной из этих работ [4] дана также теория спектров ОМ ЭПР для систем с анизотропными зеемановским и сверхтонким взаимодействиями при ОМ циркулярно поляризованным полем. В последующих работах [6-9], выполненных с участием авторов, использована технически просто осуществляемая ОМ линейно поляризованным магнитным полем. Теория спектров ОМ ЭПР для такой модуляции ранее не разработана.

Ниже на основе квантово-статистического подхода исследуется подробно структура сигналов ОМ ЭПР при перпендикулярной адиабатической

(т. е. медленной по сравнению с релаксационными процессами) модуляции магнитного поля с линейной поляризацией в электронных системах с гексагональной, тетрагональной и тригональной симметрией для эффективного спина  $S = 3/2$  с одновременным учетом анизотропии зеемановского и тонкого взаимодействий в предположении, что главные оси их тензоров совпадают. Кроме того, используется приближение сильного магнитного поля и известное высокотемпературное приближение, предполагается также линейность отклика спиновой системы на СВЧ магнитное воздействие и отсутствие эффектов насыщения. Для большинства практических приложений метода ОМ ЭПР эти приближения теоретического рассмотрения мало существенны. Отдельные частные расчетные и экспериментальные результаты обсуждались ранее в работах [6-9].

Отметим также, что кроме упомянутых работ [3-5] (по сути это разные редакции одного результата) других работ по ОМ ЭПР с циркулярно поляризованным модулирующим полем неизвестно и поэтому сопоставление принципиальных особенностей двух методов ОМ ЭПР здесь вряд ли оправдано. Можно, однако, предполагать, что отдельные результаты, обсуждаемые ниже, достижимы и с использованием ОМ ЭПР с круговой поляризацией модулирующего поля, но несомненно, такой метод сложнее в техническом отношении.

2. Пусть в лабораторной системе координат (ЛСК) магнитное поле  $\vec{B}(t) = \vec{i}b_m \cos \Omega t + \vec{k}B_0$ , где  $\vec{i}$  и  $\vec{k}$  - единичные орты вдоль осей  $x$  и  $z$  ЛСК. Тогда в молекулярной системе координат (МСК)  $x, y, z$  гамильтониан рассматриваемой спин-системы имеет вид

$$\hat{H} = \beta S^z \vec{g} U B_0 (\vec{i}m \cos \Omega t + \vec{k}) + \sum_{n,p} B_p^n O_p^n, \quad (1)$$

где  $\beta$  - магнетон Бора,  $\vec{g}$  - тензор спектроскопического расщепления,  $U(\theta, \varphi, \psi)$  - матрица поворотного преобразования из ЛСК в МСК,  $\theta, \varphi, \psi$  - эйлеровы углы,  $m = b_m / B_0$ ,  $B_p^n$  - параметры кристаллического поля,  $O_p^n$  - спиновые операторы [10, 11].

Использование общего гамильтониана (1) приведет в последующем к громоздким и трудно интерпретируемым результатам. Для упрощения задачи примем ниже приближение сильного поля, т. е. значительное превышение зеемановской энергии над энергией тонкого взаимодействия, и выделим в последней только наиболее существенную составляющую  $B_2^0 O_2^0$ . Это означает, что последующие результаты будут пригодны строго для кристаллических полей низкой симметрии (гексагональной, тетрагональной, тригональной) и эффективного спина  $S \leq 3/2$  (при  $p > 2S$  все  $B_p^n = 0$ ). Для  $S > 3/2$  результаты останутся справедливыми, если  $B_4^0, B_6^0 \ll B_2^0$ . Отбрасывание в энергии тонкого взаимодействия слагаемых  $B_2^{\pm n} O_2^{\pm n}$  для  $n > 0$  означает, что ниже пренебрегаем также эффектами перемешивания состояний, разделенных большими энергетическими зазорами.

В приближении сильного поля гамильтониан (1) несложно диагонализировать. Можно указать такую систему координат  $x', y', z'$  в которой зеемановская часть гамильтониана (1) диагональна. Осуществляя методом фиктивных вращений переход в такую СК и преобразовывая известным способом [10, 11] в нее оператор  $B_2^0 O_2^0$ , разлагая далее преобразованный гамильтониан в степенной ряд по

малому параметру  $m$  (допущение  $m \ll 1$  почти всегда оправдано в ЭПР) и удерживая в разложении только составляющие, линейные по  $m$ , получаем

$$\hat{H}' = g(t) \beta B_0 S_z + B_2^0 (A_0 + A_t m \cos \Omega t) [3S_z^2 - S(S+1)], \quad (2)$$

где

$$g(t) = g_0 + mR_1 \cos \Omega t, \quad g_0^2 = g_x^2 \cos^2 \theta + g_y^2 \sin^2 \theta,$$

$$g_{\parallel} = g_z, \quad g_{\perp}^2 = g_x^2 \sin^2 \varphi + g_y^2 \cos^2 \varphi,$$

$$A_0 = [(3g_{\parallel}^2/g_0^2) \cos^2 \theta - 1]/2, \quad A_t = - R_2 (3g_{\parallel}^2/2g_0^2) \sin 2\theta,$$

$$R_1 = \sin \theta [(g_{\parallel}^2 - g_{\perp}^2) \cos \theta \sin \psi + (g_x^2 - g_y^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi]/g_0,$$

$$R_2 = \{\cos \theta [(g_{\parallel}^2 - g_{\perp}^2) \cos \theta \sin \psi + (g_x^2 - g_y^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi]/g_0^2 -$$

$$-\sin \psi\} (g_{\parallel}/g_0).$$

Из вида гамильтониана (2) следует, что перпендикулярное модулирующее поле обуславливает осцилляции энергий обоих (зеемановского и тонкого) взаимодействий, следовательно, усложняет структуру энергетических уровней системы эффектами мультиплетности. Чтобы индуцировать переходы между уровнями системы, приложим вдоль оси  $z$  ЛСК квазирезонансное СВЧ поле  $j2B_1 \cos \omega t$ . Гамильтониан взаимодействия спин-системы с таким полем в системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  есть

$$\hat{H}_1(t) = 2\beta B_1 (R_3 S_x + R_4 S_y) \cos \omega t, \quad (3)$$

где

$$R_3 = (g_x g_y \sin \psi)/g_{\perp},$$

$$R_4 = g_{\parallel} [(g_x^2 - g_y^2) \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + g_{\perp}^2 \cos \psi]/(g_{\perp} g_0).$$

За счет тонкого взаимодействия энергетические уровни системы становятся неэквидистантными, поэтому каждая линия спектра ЭПР формируется в результате спиновых переходов только между двумя энергетическими уровнями, которым отвечают векторы состояний  $|a\rangle = |M\rangle$  и  $|b\rangle = |M+1\rangle$  (приближение "простой" линии [10]). Дальнейшее описание модуляционного эффекта осуществим методом матрицы плотности, уравнения движения которой (уравнение Лиувилля) в используемом ниже высокотемпературном приближении есть

$$d\Delta/dt + (i/\hbar) [\hat{H}'_0 + \hat{H}(t), \Delta] + \Gamma(\Delta) = (iq/\hbar) [\hat{H}(t), \hat{H}'_0], \quad (4)$$

где  $\Delta = \rho - \rho_0$  — отклонение матрицы плотности  $\rho$  от равновесной  $\rho_0$ ,  $\hat{H}'_0$  — не зависящая от времени часть гамильтониана (2),  $\hat{H}(t)$  — время-зависящая часть гамильтониана (2) и гамильтониан (3),  $\Gamma(\Delta)$  —

релаксационное слагаемое,  $q = 1/[kT(2S + 1)]$ , здесь  $kT$  - энергия теплового движения.

При воздействии СВЧ поля на спиновую систему индуцируется поперечная намагниченность  $M_y$ , которая связана с динамической магнитной восприимчивостью  $\chi = \chi' - i\chi''$  соотношением

$$M_y = B_1(\chi' \cos \omega t + \chi'' \sin \omega t). \quad (5)$$

В приближении простой линии статистическое среднее поперечной намагниченности определяется как

$$\langle M_y \rangle = \text{Sp } \rho \hat{M}_y = -g_0 \beta \text{Re} \langle a | \Delta | b \rangle \langle b | S_x | + i S_y | a \rangle. \quad (6)$$

Таким образом, решая уравнение (4), находим матрицу плотности (точнее, ее матричные элементы  $\Delta_{ab} = \langle a | \Delta | b \rangle$ ) и далее с использованием выражений (5), (6) определяем восприимчивость системы. Для дальнейшего анализа необходимо вычисление матричных элементов коммутаторов, входящих в уравнение (4). Опуская здесь эти громоздкие расчеты, приведем сразу окончательный вид уравнения Лиувилля для матричных элементов  $\Delta_{ab}$ :

$$\begin{aligned} d\Delta_{ab}/dt + (i/\hbar) \{ g_0 \beta B_0 + 3B_2^0 A_0 (2M + 1) + [mR_1 \beta B_0 + 3B_2^0 A_t (2M + 1)] \times \\ \times \cos \Omega t + i\hbar/T_{ab} \} \Delta_{ab} = (iq\beta B_1/\hbar) [(S + M + 1) (S - M)]^{1/2} \times \\ \times (R_3 + iR_4) [g_0 \beta B_0 + 3B_2^0 A_0 (2M + 1)] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

При написании уравнения (7) принято  $\langle a | \hat{H}_1 | b \rangle \approx 0$ , что оправдано при условии  $\Delta_{aa} \approx \Delta_{bb} \approx 0$ . Это, иначе, означает, что амплитуда СВЧ поля предполагается столь малой, что эффектами насыщения спиновой системы можно пренебречь. Кроме того, для релаксационного слагаемого в (4) использовано стандартное для таких задач выражение [10]  $(\Gamma(\Delta))_{ab} = \Delta_{ab}/T_{ab}$ , где  $T_{ab}$  - время спин-спиновой релаксации для переходов между состояниями  $|a\rangle$  и  $|b\rangle$ .

Решение неоднородного уравнения (7) возможно методом вариации постоянной. Опуская эту процедуру, приведем только окончательное выражение для ответственной за ЭПР-абсорбцию минимой части  $\chi''$  парамагнитной восприимчивости:

$$\begin{aligned} \chi''(\omega) = C \sum_{n, n'=-\infty}^{\infty} J_n(X) J_{n'}(X) f_n(\omega) \{ \cos(n - n') \Omega t + \\ + T_{ab} [(g_0 \beta B_0 + 3B_2^0 A_0 (2M+1)) \hbar^{-1} + (n-n') \Omega - \omega] \sin(n - n') \Omega t \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $J_n(X)$  - целочисленные функции Бесселя;

$$X = (m/\hbar\Omega) [\beta R_1 B_0 + 3B_2^0 A_t (2M + 1)],$$

$$C \approx \frac{\pi \beta^2 (S+M+1) (S-M) \omega (R_3^2 + R_4^2)}{8kT(2S+1)},$$

$$f_n(\omega) = \frac{T_{ab}/\pi}{1 + T_{ab}^2 \{ \hbar^{-1} [g_0 \beta B_0 + 3B_2^0 A_0 (2M+1)] + n\Omega - \omega \}^2}.$$

Согласно (8), восприимчивость  $\chi''$  (конечно, и  $\chi'$ ) есть сумма бесконечного числа гармоник, кратных частоте  $\Omega$  модуляции, синфазных и квадратурных по отношению к модулирующему полю. Форма каждой гармоники описывается лоренцевой функцией - естественное следствие вида использованного релаксационного слагаемого. Легко видеть, что с увеличением номера гармоник их интенсивности быстро убывают. Наибольшей интенсивностью обладает первая осциллирующая синфазно с модуляцией гармоника, для амплитуды которой из (8) имеем

$$\chi''_{1c}(\omega) = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(J_{n+1} + J_{n-1}) f_n(\omega). \quad (9)$$

Амплитуда первой квадратурной гармоники  $\chi''_{1c}$  при адиабатичности модуляции  $\Omega T_{ab} \ll 1$  пренебрежимо мала.

Внешне компактное выражение (9) в действительности довольно сложно для анализа. Чтобы получить более содержательный результат для реальных систем, учтем, что в ЭПР прохождение спектра осуществляется обычно изменением поля  $B_0$  при  $\omega = \text{const}$  и в условиях адиабатичности ОМ большинство модуляционных компонент располагается в пределах ширины  $2T_{ab}^{-1}$  "простой" линии ЭПР. Введем безразмерную расстройку магнитного поля

$$\delta_B = \{B_0 + [3B_2^0 A_0 (2M+1) - \hbar\omega]/g_0\beta\}/\Delta B,$$

где  $\Delta B = \hbar/(T_{ab} g_0 \beta)$  - полуширина линии ЭПР. Тогда можно разложить функцию формы резонансной линии в степенной ряд

$$f_n(\delta_B + n\eta) \approx f_n(\delta_B) \Big|_{n=0} + (df_n/d\delta_B) \Big|_{n=0} (\Delta B \eta n) + \dots, \quad (10)$$

где  $\eta = \hbar\Omega/(g_0\beta\Delta B) \ll 1$  - малый параметр. Подставляя разложение (10) в ряд (9), приходим к необходимости вычисления сумм вида

$$I(k, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k J_n(X) J_{n+r}(X) = (-1)^{k+r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k J_n(X) J_{n-r}(X).$$

Такие суммы вычислены в работах [12, 13]. В частности, при  $r = 1$  и  $k = 0, 1$  имеем  $I(0, 1) = 0$ ,  $I(1, 1) = X/2$ . Тогда, учитывая, что  $f(\omega) = (\hbar/g_0\beta) f(B_0)$ , вместо (9) получаем

$$\chi''_{1c}(B_0) \approx \frac{\pi(S+M+1)(S-M) \hbar\omega B_0}{8kT(2S+1)g_0^2 B_0} \times$$

$$\times [ \beta R_1 B_0 + 3 B_2^0 A_t (2M+1) ] L df(B_0) / dB_0, \quad (11)$$

где  $R_1$  и  $A_t$  определены выражениями (2) и коэффициент

$$L = R_3^2 + R_4^2 = (g_x g_y / g_\perp)^2 \sin^2 \psi + (g_\parallel / g_\perp g_0)^2 \times$$

$$\times [(g_x^2 - g_y^2) \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + g_\perp^2 \cos \psi]^2.$$

Выражение (11) в границах использованных приближений полностью описывает структуру наблюдаемых сигналов ОМ ЭПР. Видно, что если анизотропия у гамильтониана (1) отсутствует, то спектр ОМ ЭПР не возникает, изотропные линии в спектре ОМ ЭПР не проявляются. Представляется, следовательно, возможным в условиях ОМ очищать спектр ЭПР от фоновых изотропных компонент и в "чистом виде" детектировать только анизотропные линии. Этот факт, однако, отмечался и ранее [2, 14, 15] с использованием представлений, в основном, качественного характера.

3. Обсудим ряд частных случаев, имеющих самостоятельное практическое значение.

3.1. Пусть энергия тонкого взаимодействия пренебрежимо мала по сравнению с зеемановской или полностью отсутствует, как при  $S = 1/2$ , тогда  $B_2^0 = 0$ . В этом случае сигнал ОМ ЭПР возникает только за счет эффекта модуляции  $g$ -фактора. Внешне сходный с таковым, но иной физической природы "г-резонанс" описан для атомных систем в работе [16]. В рассматриваемом случае из выражения (11) получаем

$$\chi''_{1c}(B_0) \approx \frac{\pi(S+M+1)(S-M)\hbar\omega \beta b_m R_1 L}{8kT(2S+1)g_0^2} \frac{df(B_0)}{dB_0}. \quad (12)$$

Для  $S=1/2$  и аксиальной симметрии  $g$ -тензора ( $g_x = g_y = g_\perp$ ) имеем  $R_1 = [(g_\parallel^2 - g_\perp^2)/2g_0] \sin 2\theta \sin \psi$ ,  $L \approx g_\perp^2$ , тогда вместо (12) получаем

$$\chi''_{1c}(B_0) \approx \frac{\pi\hbar\omega\beta b_m (g_\parallel^2 - g_\perp^2) g_\perp^2 \sin 2\theta \sin \psi}{32 kT g_0^3} \frac{df(B_0)}{dB_0}. \quad (13)$$

Выражения (12), (13) отображают основные особенности сигналов ОМ ЭПР в системах с модулируемым  $g$ -фактором. Наиболее существенная из них - сильная угловая зависимость интенсивности сигналов, отсутствующая в традиционном спектре. Для аксиально-симметричного  $g$ -фактора эта зависимость отображается множителем  $\sin 2\theta \sin \psi$  (здесь удобна замена  $\psi \rightarrow \alpha - \pi/2$ , т. е.  $\sin \psi \rightarrow \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между осью  $x$  ЛСК и проекцией оси  $oz$   $g$ -тензора на плоскость  $xy$ ). При  $\alpha = \pi/2$ , любом  $\theta$  спектр ОМ ЭПР отсутствует. Эта особенность связана с модуляцией при  $\alpha = \pi/2$  гамильтониана зеемановского взаимодействия только на удвоенной частоте ОМ и с индексом модуляции, пропорциональным  $m^2$ . Также при  $\theta = 0; \pi/2$ , т. е. при ориентации главной оси  $oz$   $g$ -тензора вдоль или перпендикулярно магнитному полю

$\vec{B}_0$ , спектр ОМ ЭПР исчезает. При "прохождении" углов  $\theta = 0; \pi/2, \alpha \neq \pi/2$  фаза сигнала ОМ ЭПР на частоте ОМ изменяется на  $180^\circ$ . Эти угловые эффекты в спектрах ОМ ЭПР для систем с модулируемым  $g$ -фактором, полностью подтверждающиеся экспериментально [8], указывают на новые возможности метода ЭПР при ориентировании кристаллов в магнитном поле или определении направления осей  $g$ -тензора. Вместе с тем очевидна и возможность разделения спектров от структурно-неэквивалентных или магнитонеэквивалентных парамагнитных центров. Достигается, следовательно, существенное улучшение разрешения сложных суперпозиционных спектров ЭПР.

3.2. В случае изотропного  $g$ -фактора или пренебрежимо малой его анизотропии, но заметного тонкого взаимодействия (при использованных допущениях оно аксиально-симметричное) имеем  $R_1 = 0, R_2 = -\cos\alpha, L = g_0^2$ ; из (11) тогда получаем

$$\chi''_{1c}(B_0) \approx \frac{9\pi(S+M+1)(S-M)\hbar\omega B_2^0(2M+1)\sin 2\theta\cos\alpha}{16 kT(2S+1)B_0} \frac{df}{dB_0}. \quad (14)$$

Подобное выражение, описывающее структуру сигнала ЭПР для данного частного случая, получено ранее в нашей работе [6] методом возмущений, зависящих от времени. Из (14) видно, что интенсивности тонкоструктурных компонент в спектре ОМ ЭПР подвержены точно таким же угловым вариациям, как и в системах с только модулируемым аксиально-симметричным  $g$ -фактором (выражение (13)). Здесь возникает, однако, новый характерный эффект, отображаемый множителем  $(2M+1)$  в (14) – альтернирование фаз у тонкоструктурных компонент с одинаковым по величине, но противоположным по знаку числом  $M$ . Этот результат, вытекающий строго из данного рассмотрения, ранее обсуждался на основе феноменологических представлений только в работе [14]. В системах с полуцелым  $S > 1/2$  в спектре ОМ ЭПР полностью подавляется центральная тонкоструктурная линия (в рассматриваемом приближении изотропная), отвечающая переходу  $| -1/2 \rangle \leftrightarrow | 1/2 \rangle$ . Если, таким образом, традиционный тонкоструктурный спектр ЭПР плохо разрешен, то в условиях ОМ из-за отмеченных эффектов в центре спектра возникает характерный провал, по положению которого на оси частот (поля  $B_0$ ) возможно более надежное определение параметров спин-системы (например,  $g$ -фактора). При вращении кристалла в магнитном поле  $\vec{B}_0$  спектр ОМ ЭПР исчезает при "магических" углах  $\theta$  и  $\pi - \theta$  (тонкоструктурные компоненты коллапсируют в одну и из-за противоположности фаз себя погашают) и, конечно, при углах  $\theta = 0; \pi/2$ .

3.3. Приведем также выражение для сигнала  $\chi''_{1c}(B_0)$  в системах с тонким взаимодействием и аксиально-симметричным  $g$ -фактором (его анизотропию примем малой, так что  $g_{||} \approx g_{\perp} \approx g_0$ ):

$$\begin{aligned} \chi''_{1c}(B_0) \approx & \frac{\pi(S+M+1)(S-M)\hbar\omega B_2}{16 kT(2S+1)g_0^2 B_0} \frac{df(B_0)}{dB_0} \times \\ & \times [\beta B_0(g_{||}^2 - g_{\perp}^2)/g_0 + 9B_2^0(2M+1)]g_{\perp}^2 \sin 2\theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (15)$$

Видно, что возникает своеобразный, сильно асимметричный относительно центра спектр ОМ ЭПР. В зависимости от соотношения слагаемых в квадратных скобках линии справа и слева от центра могут иметь противоположные фазы. Угловая зависимость интенсивностей линий здесь, конечно, "традиционная" для аксиально-симметричных систем.

4. Реализация метода ОМ ЭПР возможна при несущественном усложнении стандартных стационарных спектрометров ЭПР - оснащении их резонаторов СВЧ штырями или катушками перпендикулярной модуляции. Последующее прохождение и детектирование спектров традиционное. Ниже приводятся некоторые из результатов, полученные нами на модифицированном спектрометре ЭПР X-диапазона при  $\Omega/2\pi = 100$  кГц.

Спектры на рис. 1 иллюстрируют важный для повышения разрешения в спектрах ЭПР эффект подавления в условиях ОМ изотропных линий.

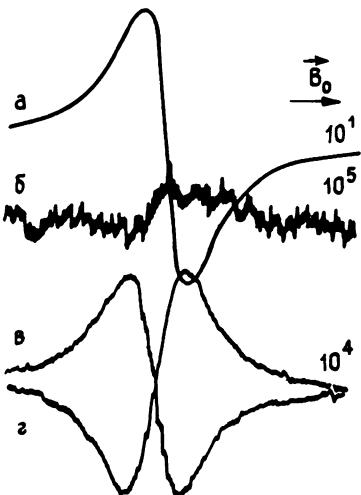


Рис. 1.

Здесь кривой *a* представлен обычный (с параллельной модуляцией) спектр ЭПР порошкообразного  $MnSO_4 \cdot 5H_2O$  при комнатной температуре. Детектируется только центральная изотропная тонкоструктурная компонента, СТС не разрешена. Кривая *b* - спектр того же образца в режиме, ОМ при "хорошой" ортогональности полей  $\vec{B}_\parallel(t)$  и  $\vec{B}_0$ .

Справа у кривых указаны коэффициенты усиления спектрометра. Видно, что в этом эксперименте изотропная линия подавляется в  $\sim 10^4$  раз практически до уровня шумов спектрометра. Несомненно, что эффект подавления изотропной линии в значительной мере определяется степенью ортогональности полей  $\vec{B}_\parallel(t)$  и  $\vec{B}_0$ . На рис. 1в, г приведены спектры ЭПР того же образца при углах между  $\vec{B}_\parallel(t)$  и  $\vec{B}_0$ , равных  $\pi/2 + \varepsilon$ ;  $\varepsilon \neq 0$ ;  $|\varepsilon| \ll 1$ . Вследствие появления составляющей модуляционного поля, параллельной  $\vec{B}_0$ , возникают в этом случае слабые сигналы "обычного" ЭПР. По фазе и интенсивности таких сигналов можно судить о знаке и величине отклонения  $\varepsilon$ .

Спектры на рис. 1в, г указывают на возможность контроля за ортогональностью полей  $\vec{B}_\parallel(t)$  и  $\vec{B}_0$ , принципиальной для качественных ОМ ЭПР-экспериментов, на способ настройки спектрометров ОМ ЭПР, которая здесь может быть даже автоматизирована с использованием классического нуль-фазового метода.

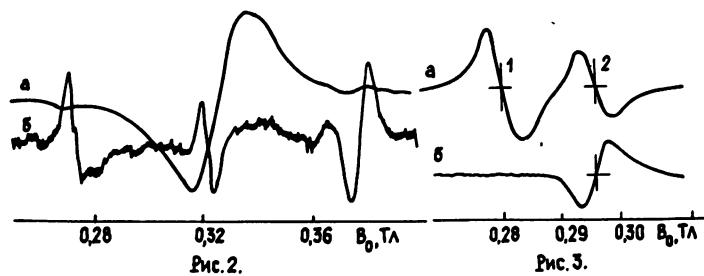


Рис. 2.

Рис. 3.

Устранение в условиях ОМ маскирующих изотропных линий в реальном суперпозиционном спектре ЭПР показано на рис. 2. Здесь кривой *a* представлен обычный спектр ЭПР кристаллического GaP<Fe<sub>2</sub>O> при 77 К, предварительно отожженного на воздухе в течение 10 часов при температуре 1470 К. Появившиеся при отжиге кислородные центры обусловливают изотропную интенсивную линию шириной около 20 мТл, почти полностью маскирующую анизотропный спектр ЭПР ионов Fe<sup>3+</sup>. При ОМ, как на рис. 2б, выявляется в "чистом виде" только анизотропный тонкоструктурный спектр ЭПР Fe<sup>3+</sup> (здесь кубической симметрии). Из анализа угловых зависимостей положения линий этого спектра определены параметры спин-гамильтониана, согласующиеся с литературными данными для бескислороденного GaP<Fe>.

Обсуждавшуюся ранее возможность разделения в условиях ОМ спектров ЭПР от магнитонеэквивалентных центров иллюстрирует рис. 3. Образцом служил двухблочный кристалл CuSO<sub>4</sub>·5 H<sub>2</sub>O с несовпадающими осями Z<sub>1</sub> и Z<sub>2</sub> аксиально-симметричного g-фактора (*s* = 1/2; тонкая структура спектра отсутствует). В обычном спектре ЭПР (кривая *a*) наблюдаются две синглетные линии 1 и 2 от двух блоков. При ОМ и Z<sub>1</sub> ||  $\vec{B}_0$  линия 1 в спектре ОМ ЭПР исчезает (кривая *b*). Последующим поворотом кристалла достигается подавление линии 2, но восстановление, конечно, линии 1. Соответствующий угол поворота есть угол между осями Z<sub>1</sub> и Z<sub>2</sub>, здесь он составил 46,0±0,5°. В этом эксперименте в условиях ОМ осуществлено не только разделение линий в суперпозиционном спектре, но и достигнуто надежное ориентирование осей кристаллитов в магнитном поле.

В кристаллах ZnS< Mn> со смешанной сфалерит-вюрцитной структурой использование ОМ разделено линии от структурно-неэквивалентных центров Mn<sup>2+</sup>. В обычном спектре ЭПР такой смешанной структуры наблюдается около 60 линий (из-за громоздкости спектр не приводим). В спектрах ОМ ЭПР в случаях, когда ось кристалла совпадала, либо была перпендикулярна полю  $\vec{B}_0$ , "гексагональный" спектр вюрцита подавлялся почти до уровня шумов спектрометра, оставался только трансформированный "кубический" спектр сфалерита. Достигалось, следовательно, значительное улучшение разрешения спектра. Отметим также, что все другие особенности спектров ОМ ЭПР, обсуждавшиеся выше, надежно подтверждены экспериментально.

Представленные результаты указывают на новые необычные возможности метода ОМ ЭПР (как и ОМ ЯМР) при радиоспектроскопических исследованиях твердых тел. В действительности круг таких возможностей шире, и только часть из них здесь обсуждена. Метод ОМ ЭПР пригоден при изучении систем даже с малой анизотропией взаимодействий. В таких случаях для повышения глубины модуляции взаимодействий можно применить угловую модуляцию положения кристалла в магнитном поле [13,15].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dobney P.T. //J. Phys. E: Sci. Instrum. 1970. V.3. N 4. P. 328.
2. Белоногов А. М., Драпкин В. З. и др. //Сб. науч. трудов Ленинградского электротехн. ин-та. 1972. N 116. С. 10.
3. Schweiger A., Günthard H.H. //Chem. Phys. Lett. 1982. V. 85. N 3. P. 259.
4. Schweiger A. //J. Magn. Reson. 1983. V. 51. N 2. P. 286.

5. Kreis R., Schweiger A.//Proc. XXII congres AMPERE on magnetic resonance and related phenomena. - Zurich: 1984. P. 123.
6. Алексеев Б.Ф., Гайфуллин М.Б., Тер-Мартиросян Л.Т. //Изв. вузов. Физика. 1987. Т. 30. N 12. С. 95.
7. Алексеев Б.Ф., Гайфуллин М.Б. //ЖПС. 1988. Т. 48. N 4. С. 691.
8. Алексеев Б.Ф., Гайфуллин М.Б. //ФТТ. 1988. Т. 30. N 5. С. 1509.
9. Alekseev B.F., Sizova E.A., Tikhonov A.B. XXIV congres AMPERE on magnetic resonance and related phenomena. - Posnan: 1988. Р. С-56.
10. Альтшулер С.А., Козырев Б.М. Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп. - М.: Наука, 1972.
11. Сорин Л.А., Власова М.В., Левандовский В.Д. Введение в радиоспектроскопию парамагнитных монокристаллов. - Киев: Наукова думка, 1969.
12. Islam T., Miyagawa I.//J.Magn.Reson. 1983. V. 51. N 3. P.383.
13. Алексеев Б.Ф., Сизова Е.А., Тихонов А.Б. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. N 6234-В88. Деп. от 3 августа 1988 г.
14. Sinclair-G.R., Pilbrow J.R. et al.//J.Magn.Reson. 1984. V. 57. N 2. P. 228.
15. Алексеев Б.Ф., Гайфуллин М.Б., Сизова Е.А. и др.//Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. N 10. С. 932.
16. Малышев Л.Г., Новиков Л.Н.//Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 17. N 8. С. 1118.

Ленинградский электротехнический  
институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию  
6 апреля 1990 г.

## ORIENTATION-MODULATED EPR IN SYSTEMS WITH ANISOTROPIC ZEEMAN AND FINE INTERACTIONS

B. F. Alekseev, M. B. Gajfullin

The effect of the adiabatic orientation modulation of resonance conditions caused by the perpendicular magnetic field on EPR spectrum of spin-systems with hexagonal, tetragonal or trigonal symmetry of environment of a paramagnetic centre with effective spin  $S = 3/2$  has been investigated in terms of anisotropic Zeeman and fine interactions. The total expression for the amplitude of the imaginary component of paramagnetic susceptibility cophased with modulation, and the particular forms of this expression describing some cases of practical importance have been found. The new applications of the orientation-modulated EPR method connected mainly with the resolution enhancement in complex overlined EPR spectra in crystals are determined. The calculated results are proved experimentally.

УДК 517.9

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ФРАКТАЛЬНОГО СИГНАЛА НА СИСТЕМУ ФЕЙГЕНБАУМА И БИФУРКАЦИЯ В УРАВНЕНИИ РЕНОРМГРУППЫ

*А. П. Куэнцов, С. П. Куэнцов, И. Р. Сатаев*

Для описания некоторых реалистичных сигналов, генерируемых динамическими системами на пороге хаоса, введена модель фрактального сигнала, имеющего фазовый портрет в виде двухмасштабного канторового множества. Показано, что воздействие такого сигнала на систему Фейгенбаума может приводить к бифуркации ренормгруппового уравнения, состоящей в слиянии и обмене характера устойчивости его неподвижных точек. С точки зрения реальной динамики, эта бифуркация соответствует смене типа критического поведения на пороге хаоса.

Значительный прогресс в нелинейной динамике был достигнут в последнее время в связи с исследованием сценариев перехода к хаосу [1]. В результате были введены в рассмотрение интересные примеры фрактальных притягивающих множеств, возникающих в фазовом пространстве динамических систем точно на пороге хаоса. Фракталы имеют иерархическую организацию, повторяя себя в бесконечно уменьшающихся масштабах, и характеризуются дробной величиной хаусдорфовой размерности [2, 3]. Простейшим примером может служить аттрактор Фейгенбаума, реализующийся в критической точке перехода к хаосу в динамических системах, демонстрирующих каскад бифуркаций удвоения периода. Этот аттрактор имеет структуру типа канторова множества с хаусдорфовой размерностью  $D_F = 0,538045$ .

Мощным инструментом теоретического исследования подобных ситуаций является метод ренормализационной группы, который в нелинейной динамике впервые был развит Фейгенбаумом [4], а затем разрабатывался многими другими исследователями. Этот подход состоит в конструировании специальной процедуры ренормпреобразования, позволяющей по известному оператору эволюции динамической системы на некотором временном интервале определить оператор эволюции на увеличенном в некоторое число раз промежутке времени. При многократном применении этой процедуры получается последовательность операторов, описывающих поведение на все больших и больших временах. В фазовом пространстве это соответствует переходу к рассмотрению динамики на все более мелких масштабах. В критической ситуации последовательность этих операторов имеет пределом некоторый универсальный оператор, который и определяет структуру фрактального притягивающего множества в фазовом пространстве.

В свете имеющихся достижений в понимании закономерностей критической динамики нелинейных систем естественным образом возникают задачи о воздействии такого рода движений друг на друга. При этом и динамика воздействующей системы, и динамика системы, подвергаемой воздействию, характеризуются иерархической организацией, охватывающей широкий диапазон масштабов в фазовом пространстве, включая сколь угодно малые. Конкуренция движений с разными масштабными свойствами может приводить, а может и не приводить к новым критическим закономе-

рностям в динамике второй системы. Как мы покажем, при изменении параметров воздействующего сигнала, характеризующих его масштабные свойства, возможен переход от одной ситуации к другой.

В рамках метода ренормализационной группы указанный феномен выступает как бифуркация ренормдинамики. Действительно, можно считать, что ренормпреобразование задает некоторую динамику в пространстве операторов ("ренормдинамику"), причем в качестве времени ("ренормвремени") фигурирует номер шага ренормпреобразования. Универсальный предельный оператор ассоциируется тогда с неподвижной точкой ренормпреобразования, которая, вообще говоря, может бифурцировать при изменении параметров задачи. Такая бифуркация должна проявляться и в обычной динамике, приводя к смене типа критического поведения, в том числе к перестройке структуры фрактального притягивающего множества и изменению скейлинговых констант.

**1. Фрактальный сигнал.** Сигнал, который мы хотели бы сконструировать, с тем, чтобы в дальнейшем изучить его воздействие на нелинейную систему, должен удовлетворять следующим условиям. Во-первых, иметь фазовый портрет в виде фрактальной структуры и обладать иерархией масштабов, а во-вторых - содержать параметры, позволяющие управлять его скейлинговыми свойствами, изменение которых могло бы вызвать бифуркацию ренормдинамики.

Определим фрактальный сигнал как заданную в дискретном времени последовательность  $y_n$ , которая строится с помощью рекуррентных соотношений

$$y_{2n} = b(1 + y_n), \quad y_{2n+1} = -a(1 + y_n), \quad (1)$$

где  $a < 1$  и  $b < 1$  - некоторые положительные константы. Начальный элемент  $y_0 = b/(1 - b)$ .

Можно показать, что такой сигнал порождается при задании надлежащего правила обхода во времени элементов двухмасштабного кантюра множества [2]. Это множество получается из начального отрезка  $[-a/(1 - b), b/(1 - b)]$  посредством следующей рекуррентной схемы. На первом шаге построения отрезок делится на три части в отношении  $a, 1 - a - b, b$ , и средний интервал исключается. К каждому из оставшихся отрезков применяется такая же процедура и т. д. Фрактальная размерность предельного множества  $D$  определяется из уравнения [2]:

$$a^D + b^D = 1. \quad (2)$$

Заметим, что приведенная геометрическая трактовка и формула (2) справедливы, пока  $a + b < 1$ , так как в противном случае интервалы, из которых строится множество, начинают перекрываться. Исходное определение (1) сохраняет смысл и при нарушении указанного условия, но при этом определенная обычным образом размерность равна единице.

При  $a = 1/2, 5029$  и  $b = a^2$  построенное множество аппроксимирует аттрактор Фейгенбаума на пороге возникновения хаоса через удвоения периода, причем элементы сигнала при его конструировании с помощью формул (1) оказываются пронумерованными в правильном порядке следования во времени. Хаусдорфова размерность, вычисленная по формуле (2), в этом случае равна  $0,5245$ , что близко к точному значению  $D_F$ .

Аналогичным образом можно использовать модель (1) для описания сигналов, генерируемых отображениями более общего вида  $y_{n+1} = 1 - \lambda|y_n|^z$  с произвольным показателем степени  $z$  при критическом значении параметра  $\lambda$ . Для этого следует положить  $a = 1/b$ ,  $b = 1/\alpha^z$ , где  $\alpha$ -

масштабный фактор для данного  $z$  [5]. При  $a = b = 1/3$  элементы  $y_n$  пробегают точки классического канторова множества, расположенного на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ . Такой сигнал естественно назвать канторовым сигналом. При  $a=1, b=0$  элементы  $y_n$  принимают только значения нуль и -1, причем порядок их следования во времени соответствует порядку следования  $R$  и  $L$  в символической записи траектории на пороге возникновения хаоса через удвоения периода [6].

Итак, многие интересные фрактальные сигналы, возникающие естественным образом в динамике нелинейных систем или конструируемые искусственно, оказываются объединены в один широкий класс, поскольку получаются по крайней мере приближенно посредством общей схемы (1) при различных значениях параметров  $a$  и  $b$ . Хотя предлагаемое построение может показаться несколько искусственным, оно представляется полезным для углубления понимания природы критических явлений в динамических системах и, в частности, создает основу для рассмотрения бифуркаций ренормдинамики.

**2. Динамика системы Фейгенбаума под действием фрактального сигнала.** Приближенный ренормгрупповой анализ. Пусть теперь фрактальный сигнал (1) воздействует на систему, демонстрирующую переход к хаосу через удвоения периода. Ситуация описывается модельным уравнением:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + c y_n, \quad (3)$$

где  $x$  - динамическая переменная,  $\lambda$  - параметр управления бифуркациями исходной системы,  $c$  - параметр интенсивности внешнего воздействия. Заметим, что в системе (3) с очевидностью возможна мультистабильность: при достаточно малых значениях  $c$  система способна совершать движения с разным сдвигом фазы относительно фрактального сигнала. Далее мы ограничимся ситуацией, когда в момент  $n = 0$  (см. определение (1)) система запускается из окрестности начала координат. Численные расчеты показывают, что при конечных  $c$  именно этот аттрактор обладает наиболее широким бассейном притяжения.

Начнем с приближенного ренормгруппового анализа в стиле [8], что позволит получить процедуру ренормпреобразования в явном виде и разобраться в качественных особенностях ренормдинамики.

Построим оператор эволюции системы за два шага дискретного времени. Рассматривая только небольшие значения динамической переменной и интенсивности внешнего воздействия, отбросим члены, содержащие  $x^4$  и  $c^2$ :

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 1 - \lambda(1 - \lambda x_n^2 + c y_n)^2 + c y_{n+1} \approx \\ &\approx 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_n^2 + (y_{n+1} - 2\lambda y_n)c. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся теперь определением фрактального сигнала (1) и выразим  $y_n$  и  $y_{n+1}$  через  $y_{n/2}$ , а также выполним замену переменной

$$x_n = [1 - \lambda - (a + 2\lambda b)c] X_{n/2} \quad (5)$$

и параметров

$$\lambda_1 = 2\lambda^2[\lambda - 1 + (a + 2\lambda b)c], \quad (6)$$

$$c_1 = c(a + 2\lambda b)/[\lambda - 1 + (a + 2\lambda b)c].$$

В результате получим отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + c_1 y_n. \quad (7)$$

Итак, оператор эволюции за удвоенное время приведен с точностью до замены переменных к исходному виду (3). Это значит, что динамика двух экземпляров системы, параметры которых связаны соотношениями (6), будет подобной, различаясь в два раза по временным масштабам. Изложенную процедуру можно применить теперь к соотношению (7) и получить оператор эволюции за четыре временных шага и т. д. В результате  $m$ -кратной ренормализации приходим к отображению вида (3) с параметрами  $\lambda_m$  и  $c_m$ , которые получаются рекуррентным образом из соотношений

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1} &= 2\lambda_m^2[\lambda_m - 1 + (a + 2\lambda_m b)c_m], \\ c_{m+1} &= c_m(a + 2\lambda_m b)[\lambda_m - 1 + (a + 2\lambda_m b)c_m]^{-1}.\end{aligned}\quad (8)$$

Пара величин  $(\lambda_m, c_m)$  может рассматриваться как представление оператора эволюции, поскольку в данном приближении полностью определяет его. Поэтому уравнения (8) – это и есть уравнения ренормдинамики.

Если положить  $c = 0$ , можно найти неподвижную точку уравнений (8), которой отвечает  $\lambda_F = (\sqrt{3} + 1)/2$ . Эту точку естественно назвать фейгенбаумовской, так как именно она определяет критическое поведение системы при выключенном внешнем воздействии. Имеется и вторая, нефейгенбаумовская точка:

$$\lambda_{NF} = 1 / (\sqrt{a^2 + 4b} + a), \quad c_{NF} = 1 + 2\lambda_{NF} - 2\lambda_{NF}^2. \quad (9)$$

Линеаризуя отображение (8) вблизи неподвижных точек, можно проанализировать характер их устойчивости и определить соответствующие собственные числа. Для фейгенбаумовской неподвижной точки получаем

$$\delta_F^{(1)} = 4 + \sqrt{3} \approx 5,73, \quad \delta_F^{(2)} = 2\lambda_F(a + 2\lambda_F b), \quad (10)$$

а для нефейгенбаумовской

$$\begin{aligned}\delta_{NF}^{(1,2)} &= 1 - \lambda_{NF} + 2\lambda_{NF}^2(1 + bc_{NF}) \pm \\ &\pm \sqrt{[1 - 2\lambda_{NF} + 2\lambda_{NF}^2(1 + bc_{NF})]^2 - 2\lambda_{NF}(3\lambda_{NF} - 2)}.\end{aligned}\quad (11)$$

При  $a + 2\lambda_F b < 1/2\lambda_F$  первая точка является седлом, а вторая – неустойчивым узлом. В момент  $a + 2\lambda_F b = 1/2\lambda_F$  обе точки сливаются. При  $a + 2\lambda_F b > 1/2\lambda_F$  фейгенбаумовская точка становится неустойчивым узлом, а нефейгенбаумовская – седлом. Таким образом, при  $a + 2\lambda_F b = 1/2\lambda_F$  происходит бифуркация слияния и обмена устойчивости неподвижных точек, хорошо известная в теории бифуркаций [9]. Линия, соединяющая обе неподвижные точки, представляет собой устойчивое многообразие седла. Значения параметров исходного отображения и  $c$ , принадлежащие

этой линии, отвечают (в рассматриваемом приближении) критической ситуации перехода к хаосу. Действительно, при задании начальных  $\lambda$  и  $c$  на этой линии многократное применение ренормпреобразования (8) приводит к перемещению вдоль нее в одну из неподвижных точек. До бифуркации эта фейгенбаумовская неподвижная точка, а после бифуркации - нефейгенбаумовская. Найденная в рассматриваемом приближении бифуркационная линия на плоскости параметров фрактального сигнала  $(a, b)$  показана пунктиром на рис. 1. Области фейгенбаумовского и нефейгенбаумовского критического поведения обозначены соответственно  $F$  и  $NF$ .

Проведенный анализ позволяет также получить приближенные значения критических индексов. Константа, отвечающая за скейлинг по управляющему параметру, определяется наибольшим собственным числом седловой неподвижной точки:

$$\delta = \begin{cases} \delta_F^{(1)} = 5,73, & a + 2\lambda_F b < 1/2\lambda_F \\ \delta_{NF}^{(1)}(a, b), & a + 2\lambda_F b > 1/2\lambda_F \end{cases}. \quad (12)$$

Масштабный фактор  $\alpha$  находится из соотношения (5):  $\alpha = \lambda - 1 + (a + 2\lambda b)c$ . Подставляя сюда значения  $\lambda$  и  $c$  для точки, являющейся седловой при данных  $a$  и  $b$ , имеем

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_F = 1/2\lambda_F = 2,73, & a + 2\lambda_F b < 1/2\lambda_F \\ \alpha_{NF} = 2/(a + \sqrt{a^2 + 4b}), & a + 2\lambda_F b > 1/2\lambda_F \end{cases}. \quad (13)$$

Зависимости скейлинговых констант  $\delta$  и  $\alpha$  от параметра фрактального сигнала имеют характерный излом в точке бифуркации, связанный со сменой типа критической динамики. До бифуркации (ниже показанной на рис. 1 границы) это фейгенбаумское поведение с фиксированными масштабными константами, а после нее - нефейгенбаумовское поведение с масштабными константами, зависящими от параметров  $a$  и  $b$ .

**3. Точный ренормгрупповой анализ.** Перейдем к строгому ренормгрупповому анализу задачи, который подтверждает качественные выводы приближенной теории и позволяет уточнить значения критических индексов и условия бифуркации на плоскости параметров фрактального сигнала  $(a, b)$ .

Получим сначала точное уравнение ренормгруппы. Обозначим правую часть (3) через  $f_0(x, y)$  и перейдем к отображению, описывающему изменение состояния за два временных шага:

$$x_{n+2} = f_0(f_0(x_n, y_n), y_{n+1}).$$

Изменяя масштаб динамической переменной  $x$  в некоторое число раз ( $-\alpha$ ) и выражая  $y_n$  и  $y_{n+1}$  через  $y_{n/2}$  в соответствии с (1), получаем новое отображение  $f_1(x, y)$ . Многократно повторяя процедуру, приходим к уравнению ренормгруппы

$$f_{n+1}(x, y) = -\alpha f_n(f_n(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y)). \quad (14)$$

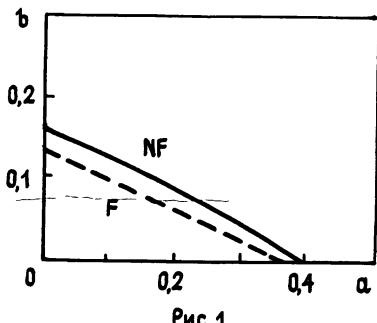


Рис. 1.

Далее основное значение будут иметь неподвижные точки данного уравнения. Получение этих решений подразумевает нахождение масштабной константы  $\alpha$  и функции  $f(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению

$$f(x, y) = -\alpha f(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y)). \quad (15)$$

Если искать решение (14) в форме  $f_s(x, y) = f(x, y) + \delta^s h(x, y)$ , где  $h$  – малая добавка, то в линейном приближении получаем

$$\begin{aligned} \delta h(x, y) = & -\alpha [f'(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y))h(-x/\alpha, b(1+y)) + \\ & + h(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y))]. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда могут быть найдены собственные функции  $h_s(x, y)$  и собственные числа  $\delta_s$ , характеризующие динамику вблизи неподвижной точки.

В наших расчетах функция  $f(x, y)$  представлялась в виде разложения по полиномам Чебышева:

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{M+N} u_{m, n} T_{2m}(x) T_n(y). \quad (17)$$

(Поскольку функция должна быть четной по первому аргументу, в разложении фигурируют полиномы по  $x$  только с четными индексами.) Для нахождения неподвижных точек уравнения (14) использовался метод Ньютона, в соответствии с которым новое приближение для функции  $f(x, y)$ ,

$$f_{\text{нов}}(x, y) = f(x, y) + h(x, y),$$

получается из решения уравнения

$$f(x, y) + h(x, y) = -\alpha f(f(-x/\alpha, b(1+y)), -\alpha(1+y)) + \hat{L}h(x, y), \quad (18)$$

где  $\hat{L}$  – линейный оператор, фигурирующий в (16). При использовании разложения (17) уравнение (18) превращается в систему  $M \times N$  линейных алгебраических уравнений, причем элементы матрицы оператора  $\hat{L}$  в соответствующем базисе вычислялись с использованием ортогональности полиномов Чебышева на сетке, образованной на плоскости  $(x, y)$  нулями произведения  $T_{2m+1}(x) T_{N+1}(y)$ . Значения  $2M$  и  $N$  в проводившихся расчетах достигали 10. Результаты расчетов для некоторых конкретных значений  $a$  и  $b$  приведены в табл. 1.

Масштабные константы и собственные числа для нефейгенбаумовской неподвижной точки уравнения (14)

$b$	$a$	$a_{NF}$	$\delta_{NF}^{(1)}$	$\delta_{NF}^{(2)}$
0	0, 28571	3, 50000	9, 451	1, 232
	0, 38462	2, 60000	5, 03506	1, 03642
0, 05	0, 43416	2, 30329	3, 99075	< 1
	0, 5	2, 00000	3, 15823	
	0, 1	3, 62884	10, 08665	1, 41811
0, 1	0, 15	3, 27345	8, 08463	1, 30943
	0, 2	2, 95726	6, 52502	1, 19965
	0	3, 16228	7, 42181	1, 36605
0, 15963	0, 1	2, 74442	5, 57055	1, 14818
	0, 3	2, 04806	3, 33476	
	0, 4	1, 17701	2, 75770	< 1
0, 2	0, 5	1, 53259	2, 39421	
	0, 39954	1, 54945	2, 44700	< 1
	0, 1	2, 03762	3, 36808	
0, 3	0, 2	1, 83305	2, 93239	< 1
	0, 3	1, 62654	2, 57723	
0, 1	0, 1	1, 68773	2, 71621	< 1

Для нахождения бифуркации слияния неподвижных точек подставим в (15)  $f(x, y) = g(x) + yh(x)$ , где  $g(x)$  - функция Фейгенбаума [4], а  $yh(x)$  - малая добавка. Приравнивая члены первого порядка малости, получаем следующее условие существования двукратно вырожденной неподвижной точки:

$$h(x) = -\alpha a[(b/a)g'(-x/\alpha)]h(-x/\alpha) - h(g(-x/\alpha)). \quad (19)$$

Численно эта задача решается таким образом: фиксируется отношение  $b/a = \xi$  и методом итераций находится наибольшее по модулю собственное число  $v$  линейного оператора, стоящего в квадратных скобках в правой части (19). Далее полагаем  $a = -1/\alpha v$ ,  $b = -\xi/\alpha v$ . На плоскости параметров  $a, b$  точки бифуркации располагаются на кривой, показанной сплошной линией на рис. 1.

4. Как проявляется бифуркация решения уравнения ренормгруппы в наблюдаемом поведении системы? Обсудим теперь перестройку критической динамики исходной системы (3), сопровождающую найденную бифуркацию ренормгруппового уравнения и выражющуюся в модификации скейлинговых свойств системы у порога хаоса.

С этой целью в первую очередь были изучены зависимости ляпуновского характеристического показателя от параметра  $\lambda$  для системы (3), относящейся к добифуркационной, "Фейгенбаумовской" ситуации. Критическая точка перехода к хаосу фиксируется по переходу ляпуновского показателя через нуль. В отличие от традиционных картинок, иллюстрирующих сценарий удвоений периода, в докритической области нет четко выраженных бифуркаций: они размыты за счет влияния внешнего сигнала, который содержит компоненты со всем возможными частотами, кратными  $2^n$ . Однако при сужении рассматриваемой окрестности критической точки вид графиков все более приближается к традиционному, характерному для невозмущенного логистического отображения [1]. В соответствии с ожидаемым Фейгенбаумовским скейлингом получаемые при большом разрешении картинки обладают масштабной инвариантностью относительно изменения масштаба в  $\delta = -4,669$  по управляющему параметру и в два раза по ляпуновскому показателю. Наличие внешнего сигнала существенно лишь в том

отношении, что критическое значение параметра зависит от интенсивности воздействия с. Аттрактор в критической точке представляет собой классический аттрактор Фейгенбаума с размерностью  $D_F$ .

Вторая, "нефейгенбаумовская" ситуация иллюстрируется на рис. 2.

Представлена последовательность графиков, показывающих с возрастающим разрешением зависимость ляпуновского показателя от параметра  $\lambda$  вблизи критической точки для случая  $a=0,2$ ,  $b = 0,2$ ,  $c = 0,5$ . От картинки к картинке масштаб по вертикальной оси пересчитывается в два раза, а по горизонтальной - в 2,93239 раза, что соответствует старшему собственному числу линеаризованного преобразования ренормгруппы в нефейгенбаумовской неподвижной точке при данных  $a$  и  $b$ . Уже на втором шаге вид картинок практически перестает меняться. Это подтверждает наличие ожидаемого скейлинга, а значит, и то обстоятельство, что динамика системы на пороге хаоса связана с нефейгенбаумовской неподвижной точкой. В критической точке перехода к хаосу формируется новая фрактальная структура: тотальное воздействие внешнего сигнала на всех уровнях иерархии приводит к трансформации фейгенбаумовского аттрактора в новое притягивающее множество с иными скейлинговыми свойствами. Хаусдорфова размерность этого аттрактора зависит теперь от параметров внешнего сигнала  $a$  и  $b$ .

5. Критическая динамика в окрестности точки бифуркации уравнения ренормгруппы. Квазискейлинг. Как известно, в обычной динамике развитие процессов во времени замедляется при приближении к точке бифуркации. То же самое будет с ренормдинамикой, если управляющие параметры  $a$  и  $b$  выбрать вблизи бифуркационной кривой рис. 1.

Ренормдинамика на устойчивом многообразии неподвижной точки происходит тем медленнее, чем мы ближе к точке бифуркации. В рамках приближенного ренормгруппового анализа уравнение медленных движений можно найти, если положить в первом уравнении (8)  $\lambda_{n+1} = \lambda_n \approx \lambda_F$ . Тогда из него получаем

$$\lambda_n = \lambda_F - \frac{a + 2\lambda_F b}{2 - 1/\lambda_F} c_n$$

и после подстановки во второе уравнение (8) имеем

$$c_{n+1} = 2\lambda_F(a + 2\lambda_F b)c_n - \frac{a + 4\lambda_F b}{2\lambda_F - 1} c_n^2. \quad (20)$$

Теперь можно перейти от дискретного ренормвремени к непрерывному

$$\frac{dc}{dm} = \varepsilon c - \frac{a + 4\lambda_F b}{2\lambda_F - 1} c^2, \quad (21)$$

где  $\varepsilon = 2\lambda_F(a + 2\lambda_F b) - 1$  — величина надкритичности.

В реальной динамике системы (3) приближение к точке бифуркации ренормгруппового уравнения будет выражаться в том, что для наблюдения скейлинга, связанного с той или иной неподвижной точкой ренормгруппового уравнения, необходимо спускаться на все более глубокие уровни разрешения фрактальной структуры. Требуемую глубину уровня можно оценить по формуле, вытекающей из (21):

$$m \sim \text{const}/\varepsilon. \quad (22)$$

Ситуацию, возникающую в непосредственной близости к точке бифуркации уравнения ренормгруппы, можно охарактеризовать термином квазискейлинг: численные расчеты показывают, что при переходе с одного уровня разрешения на другой график ляпуновского показателя почти не меняется при пересчете масштабов, хотя на самом деле происходит очень медленная эволюция этих картинок.

**6. Объяснение критического поведения двух систем Фейгенбаума с односторонней связью.** В работе [10] численно для модельной системы двух логистических отображений с односторонней связью и экспериментально для системы односторонне связанных нелинейных колебательных контуров, возбуждаемых периодическим внешним воздействием, был обнаружен новый тип критического поведения, названный бикритическим. Он реализуется в определенной точке на плоскости управляющих параметров подсистем, которая характеризуется тем, что при сколь угодно малом увеличении параметра первой или второй подсистемы возникает хаос соответственно в первой или второй подсистеме. В окрестности этой точки имеет место универсальная конфигурация областей на плоскости параметров, характеризующаяся двухпараметрическим скейлингом: она переходит в себя при изменении масштабов по осям координат в  $\delta^{(1)} = 4,6692$  и  $\delta^{(2)} = 2,39$  раза. Этому соответствует пересчет масштаба динамических переменных подсистем в  $\alpha^{(1)} = 2,5029$  и  $\alpha^{(2)} = 1,51$  раза.

Эти результаты находят свое объяснение в рамках более широкой картины, построенной в настоящей работе. Если первая система находится точно на пороге возникновения хаоса, то она генерирует фрактальный сигнал, приближенно описываемый моделью (1), которому соответствует определенная точка на плоскости  $(a, b)$  (рис. 1). Эта точка лежит выше бифуркационной кривой, поэтому поведение второй системы при переходе к хаосу будет определяться нефейгенбаумовской неподвижной точкой с константами скейлинга, равными, согласно табл. 1, 1,549 и 2,447. Видно, что они находятся в хорошем соответствии с найденными в [10] константами  $\alpha^{(2)}$  и  $\delta^{(2)}$ .

**7. Заключительные замечания.** Итак, мы показали, что в зависимости от параметров  $a$  и  $b$ , задающих масштабные свойства внешнего сигнала, происходит следующее. При малых  $a$  и  $b$  переход к хаосу в рассматриваемой системе подчиняется фейгенбаумовскому скейлингу с не зависящими от  $a$  и  $b$  классическими значениями масштабных констант  $\delta = 4,6692$  и  $\alpha = 2,5029$ . После перехода через некоторую критическую линию в плоскости  $a, b$  скейлинговые свойства динамики у порога хаоса начинают зависеть от  $a$  и  $b$ . Это напоминает ситуацию, имеющую место в теории фазовых переходов, когда размерность пространства, рассматриваемая как непрерывный параметр, переходит через критическое значение  $d = 4$ . При этом уравнение (21) медленной ренормдинамики в окрестности точки бифуркации совпадает с точностью до вида коэффициентов с классическим уравнением Вильсона-Фишера [7].

Доверившись полностью указанной аналогии, можно было бы думать, что в нашей задаче подходящим управляющим параметром должна служить фрактальная размерность воздействующего на систему сигнала. Это, однако, не так: бифуркационная кривая на плоскости  $(a, b)$  не совпадает с линиями равной фрактальной размерности. Аналогия имеет скорее методологическое значение. Действительно, мы знаем, что включение задач теории фазовых переходов в более широкий класс, содержащий и нефизические ситуации, оказалось плодотворным для их понимания и приближенного описания. Точно так же анализ влияния искусственно сконструированного сигнала (1) на динамику системы Фейгенбаума проливает свет на особенности поведения таких систем под воздействием реалистичных фрактальных сигналов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир, 1988. - 240с.
2. Halsey T., Jensen M., Kadanoff L. et al. //Phys.Rev. 1986. V.33. N 2. P.1141.
3. Aurelli E. //J.Stat.Phys. 1987. V.47. N 3-4. P.439.
4. Фейгенбаум М. //УФН. 1983. Т.141. N 2. С.343.
5. Ни В., Sattia I. //Phys.Lett. 1983. V.A98. P.143.
6. Procaccia I., Thomae S., Tresser C. //Phys.Rev. 1987. V.A35. N 4. P.1884.
7. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - М.: Мир, 1978. Т.1. С.394.
8. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. С.173.
9. Иосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. - М.: Мир, 1983. - 300с.
10. Безручко Б. П., Гуляев Ю.В. и др. //ДАН СССР. 1986. Т.287. N 3. С.619.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
8 февраля 1990 г.,  
после доработки  
2 июля 1990 г.

## INFLUENCE OF FRACTAL SIGNAL ON FEIGENBAUM SYSTEM AND BIFURCATION IN RENORMALIZATION GROUP EQUATION

A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev

The model of fractal signal having a phase portrait in a form of two-scale Cantor set is introduced for the description of some real signals generated by dynamical systems at an onset of the chaos. It is shown that the influence of such a signal on Feigenbaum system can lead to a bifurcation of the renormalization group equation, consisting of coincidence and exchange of stability of two fixed points. From the point of view of the real dynamics this bifurcation corresponds to the change of a type of critical behaviour at the onset of the chaos which is illustrated by demonstration of scaling properties of Lyapunov exponents. The effect of quasi-scaling in the vicinity of the bifurcation point is considered. The laws of transition to chaos in two one-directionally coupled Feigenbaum system are explained on the basis of the conception developed.

УДК 538.56

## ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ОСЛАБЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В ОБЛАСТИ НАСЫЩЕНИЯ

Р. Х. Алмаев, А. А. Суворов

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в турбулентной среде с пульсациями комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Получены асимптотические выражения для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности  $\sigma_i^2$  в области насыщения. Показано, что наличие пульсаций мнимой части  $\epsilon$  приводит к существенному изменению характера поведения  $\sigma_i^2$  при сильных флуктуациях интенсивности излучения.

В классической теории распространения электромагнитных волн в турбулентной атмосфере, как известно (см., например, [1, 2]), среда характеризуется флуктуациями лишь действительной части диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Такое рассмотрение, однако, оправдано не во всех ситуациях, реализуемых в атмосфере. В частности, при исследовании прохождения излучения по атмосферным трассам, включающим аэрозольные слои со стабильной или изменяющейся при воздействии микроструктурой, или исследовании распространения хорошо поглощаемого газовыми компонентами излучения в "чистой" атмосфере, когда случайные изменения мнимой  $\epsilon_1$  и действительной  $\epsilon_R$  составляющих  $\epsilon$  сравнимы, необходимо учитывать вклад пульсаций мнимой части  $\epsilon$  в статистические характеристики электромагнитной волны. Такого рода задачи рассматривались в работах [3, 4] для сред с плавными коррелированными неоднородностями  $\epsilon_R$ ,  $\epsilon_1$  в приближении метода плавных возмущений в случаях распространения субмиллиметровых радиоволн в атмосфере [3] и лазерных пучков в канале просветления облачной среды [4], а также в работах [5, 6] для случая переноса оптического излучения в турбулентной атмосфере, содержащей дискретные неоднородности, расчеты флуктуаций интенсивности излучения в которых выполнены для модели идеально поглощающих частиц. Следует, однако иметь в виду, что при определенных условиях на статистические характеристики излучения в турбулентной атмосфере могут оказывать влияние даже относительно слабые ( $\tilde{\epsilon}_1 < \tilde{\epsilon}_R$ , где  $\tilde{\epsilon}_R$ ,  $\tilde{\epsilon}_1$  - пульсации действительной и мнимой составляющих  $\epsilon$ ) флуктуации  $\epsilon_1$ . Особенно это важно в случаях, когда скорость накопления возмущений, обусловленных пульсациями  $\tilde{\epsilon}_1$ , значительно превосходит аналогичную величину, связанную с флуктуациями  $\tilde{\epsilon}_R$ . Такая ситуация встречается, например, при исследовании поведения дисперсии дрожания [7] и может реализоваться в области насыщения, когда относительная дисперсия  $\sigma_i^2$  пульсаций интенсивности излучения, обуслов-

ленных случайными изменениями  $\tilde{\epsilon}_R$ , стремится к постоянному предельному значению [8, 9]. Последний случай, а именно учет влияния малых флуктуаций  $\tilde{\epsilon}_I$  на поведение  $\sigma_I^2$  в области насыщения при распространении оптического излучения в турбулентной среде с плавными коррелированными неоднородностями  $\tilde{\epsilon}_R$ ,  $\tilde{\epsilon}_I$ , исследуется в данной работе.

Будем рассчитывать относительную дисперсию  $\sigma_I^2$  флуктуаций интенсивности излучения, распространяющегося вдоль оси  $z$  в поглощающей локально-однородной и изотропной турбулентной среде с отличными от нуля пульсациями как действительной  $\tilde{\epsilon}_R$ , так и мнимой  $\tilde{\epsilon}_I$ , составляющих комплексной диэлектрической проницаемости. В соответствии с определением для вычисления  $\sigma_I^2(\vec{p}, z) = \langle I^2(\vec{p}, z) \rangle - \langle I(\vec{p}, z) \rangle^2 / \langle I(\vec{p}, z) \rangle^2$

необходимо найти первый  $\langle I \rangle$  и второй  $\langle I^2 \rangle$  моменты интенсивности (здесь угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций  $\tilde{\epsilon}$ ).

Считая, что комплексная амплитуда  $U(\vec{p}, z)$  волны удовлетворяет параболическому уравнению

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} U + \Delta_1 U + [ik^2 \tilde{\epsilon}_I + k^2 (\tilde{\epsilon}_R(\vec{p}, z) + i\tilde{\epsilon}_I(\vec{p}, z))] U = 0,$$

и используя метод Гюйгенса - Кирхгофа, для  $\langle I \rangle$  и  $\langle I^2 \rangle$  можно записать

$$\langle I(\vec{p}, z) \rangle = \iint d^2\vec{p}_1 d^2\vec{p}_2 \Gamma_{20}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \langle G(\vec{p}, z; \vec{p}_1, 0) G^*(\vec{p}, z; \vec{p}_2, 0) \rangle; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \langle I^2(\vec{p}, z) \rangle = & \iiint d^2\vec{p}_1 d^2\vec{p}_2 d^2\vec{p}_3 d^2\vec{p}_4 \Gamma_{40}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4) \times \\ & \times \langle G(\vec{p}, z; \vec{p}_1, 0) G(\vec{p}, z; \vec{p}_3, 0) G^*(\vec{p}, z; \vec{p}_2, 0) G^*(\vec{p}, z; \vec{p}_4, 0) \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $G(\vec{p}, z; \vec{p}', z')$  - функция Грина параболического уравнения;  $\Gamma_{20}, \Gamma_{40}$  - функция когерентности второго и четвертого порядка на входе ( $z = 0$ ) в среду;  $\vec{p} = \{x, y\}$  - радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ .

Вычисления в (1), (2) проведем, используя фейнмановский подход, основанный на представлении функции  $G$  в виде континуального интеграла по траекториям [10]. Для случая турбулентной среды без поглощения этот метод применялся в работах [8, 11-13]. Модифицируя фейнмановский подход на случай распространения излучения в среде с флуктуациями комплексной диэлектрической проницаемости, функцию Грина можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(\vec{p}, z; \vec{p}', z') = & G_0(\vec{p}, z; \vec{p}', z') C \iint D^2 \vec{v}(\xi) \exp \left\{ ik \int_{z'}^z d\xi [\vec{v}^2(\xi) + \right. \\ & \left. + \tilde{\epsilon}(\vec{p}_0(\xi) + \vec{v}(\xi), \xi)] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tilde{\epsilon}(\vec{p}, z) = \tilde{\epsilon}_R(\vec{p}, z) + i\tilde{\epsilon}_I(\vec{p}, z)$ ,  $G_0(\vec{p}, z; \vec{p}', z')$  - функция Грина в не-

возмущенной (без флуктуаций) среде; обозначение  $\iint D^2 \vec{V}(\xi)$  подразумевает континуальное интегрирование по всем траекториям  $\vec{V}(\xi)$  с

$\vec{V}(z') = \vec{V}(z) = 0$ ;  $\vec{V}(\xi) = (d/d\xi) \vec{V}(\xi)$ ;  $\vec{\rho}_0(\xi) = [\vec{\rho} \cdot (\xi - z') + \vec{\rho}' \cdot (z - \xi)]/(z - z')$  — траектория луча, идущего из точки  $\vec{\rho}_0(z') = \vec{\rho}'$  в точку  $\vec{\rho}_0(z) = \vec{\rho}$  в невозмущенной среде, и нормировочная константа  $C$  определяется с помощью соотношения

$$C \iint D^2 \vec{V}(\xi) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^z d\xi \vec{V}^2(\xi) \right\} = 1.$$

Остановимся прежде всего на вычислении второго момента интенсивности. Как видно из (2), для этого необходимо определить четвертый момент функции Грина, который для краткости в дальнейшем будем обозначать как  $\langle G^{(4)} \rangle$ . Учитывая соотношение (3), для  $\langle G^{(4)} \rangle$  можно записать

$$\begin{aligned} \langle G^{(4)} (\vec{\rho}, z; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \vec{\rho}_4, 0) \rangle &= G_0^{(4)} (\vec{\rho}, z; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \vec{\rho}_4, 0) \times \\ &\times \langle G_1^{(4)} (\vec{\rho}, z; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \vec{\rho}_4, 0) \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $G_0^{(4)} = G^{(4)} \Big|_{\tilde{\varepsilon}=0}$  и

$$\begin{aligned} \langle G_1^{(4)} \rangle &= |C|^4 \iint \iint \iint D^2 \vec{V}_1(\xi) D^2 \vec{V}_2(\xi) D^2 \vec{V}_3(\xi) D^2 \vec{V}_4(\xi) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^z d\xi [\vec{V}_1^2(\xi) - \vec{V}_2^2(\xi) + \vec{V}_3^2(\xi) - \vec{V}_4^2(\xi)] \right\} \times \\ &\times \langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^z d\xi [\tilde{\varepsilon} (\vec{\rho}_{01}(\xi) + \vec{V}_1(\xi), \xi) - \tilde{\varepsilon}^* (\vec{\rho}_{02}(\xi) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \vec{V}_2(\xi), \xi) + \tilde{\varepsilon} (\vec{\rho}_{03}(\xi) + \vec{V}_3(\xi), \xi) - \tilde{\varepsilon}^* (\vec{\rho}_{04}(\xi) + \vec{V}_4(\xi), \xi)] \right\} \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Проведем усреднение в (5), предполагая гауссовость и  $\delta$ -коррелированность флуктуаций  $\tilde{\varepsilon}$ . Переходя к новым функциональным и пространственным переменным с помощью соотношений

$$\vec{\xi}_1(\xi) = -\frac{1}{2} [\vec{V}_1(\xi) + \vec{V}_2(\xi) - \vec{V}_3(\xi) - \vec{V}_4(\xi)],$$

$$\vec{\xi}_2(\xi) = -\frac{1}{2} [\vec{V}_1(\xi) - \vec{V}_2(\xi) - \vec{V}_3(\xi) + \vec{V}_4(\xi)],$$

$$\vec{\xi}_3(\xi) = -\frac{1}{4} [\vec{V}_1(\xi) + \vec{V}_2(\xi) + \vec{V}_3(\xi) + \vec{V}_4(\xi)],$$

$$\vec{F}_4(\xi) = [\vec{V}_1(\xi) + \vec{V}_3(\xi) - \vec{V}_2(\xi) - \vec{V}_4(\xi)];$$

$$\vec{R}_1 = -\frac{1}{4} (\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 + \vec{\rho}_3 + \vec{\rho}_4), \quad \vec{R}_2 = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2 + \vec{\rho}_3 - \vec{\rho}_4,$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{1}{2} (\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_3 - \vec{\rho}_4), \quad \vec{r}_2 = -\frac{1}{2} (\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_3 + \vec{\rho}_4)$$

и выполнив континуальное интегрирование по переменным  $\vec{F}_3(\xi), \vec{F}_4(\xi)$ , для  $\langle G_1^{(4)} \rangle$  получим

$$\begin{aligned} \langle G_1^{(4)}(\vec{\rho}, z; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_2, 0) \rangle &= \hat{L} F(\vec{\rho}, z; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_2, \vec{F}_1(\xi), \vec{F}_2(\xi), 0) = \\ &= \hat{L} \cdot \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^z d\xi [\tilde{D}(\vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_2 + \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z-\xi}{z}) + \right. \\ &+ \tilde{D}(\vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_2 - \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z-\xi}{z}) + \tilde{D}(\vec{F}_1(\xi) + (\vec{r}_1 + \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z-\xi}{z}) + \\ &+ \tilde{D}(\vec{F}_1(\xi) + (\vec{r}_1 - \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z-\xi}{z}) - \\ &- \tilde{D}(\vec{F}_1(\xi) - \vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{z-\xi}{z}) - \tilde{D}(\vec{F}_1(\xi) + \vec{F}_2(\xi) + \\ &+ (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \frac{z-\xi}{z}) - 2 A_{II}(\vec{F}_1(\xi) + \vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \frac{z-\xi}{z}) - \\ &\rightarrow - 2 A_{II}(\vec{F}_1(\xi) - \vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{z-\xi}{z}) + 2 i D_{RI}(\vec{F}_1(\xi) - \\ &- \vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{z-\xi}{z}) - 2 i D_{RI}(\vec{F}_1(\xi) + \vec{F}_2(\xi) + (\vec{r}_1 + \\ &+ \vec{r}_2) \frac{z-\xi}{z})] \} \exp [k^2 A_{II}(0) z], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $D_{qq}(\vec{\rho})$  - структурная функция флюктуаций действительной ( $q = q' = R$ ), мнимой ( $q = q' = I$ ) частей  $\tilde{\epsilon}$  и их корреляций ( $q = R, q' = I$ ),  $\tilde{D}(\vec{\rho}) = D_{RR}(\vec{\rho}) + D_{II}(\vec{\rho})$ ;  $D_{qq}(\vec{\rho}) = A_{qq}(\vec{\rho}) - A_{qq}(\vec{\rho})$ ,  $A_{qq}(\vec{\rho}) = 2\pi \iint d^2\vec{x} \Phi_{qq}(\vec{x}) \cos \vec{x} \cdot \vec{\rho}$ ;  $\Phi_{qq}(\vec{x})$  - спектр флюктуаций составляющих  $\tilde{\epsilon}$ ;  $\hat{L} = |C|^2 \iint D^2 \vec{F}_1(\xi) D^2 \vec{F}_2(\xi) \exp \{ik \int_0^z d\xi \vec{F}_1(\xi) \vec{F}_2(\xi)\}$  - оператор континуального интегрирования.

Дальнейший анализ выражений (1), (2), (5), (6) будем проводить в интересующей нас области насыщения флуктуаций интенсивности, которая характеризуется условием  $\beta_0^2 \gg 1$  (где  $\beta_0^2(z) = 0,31 C_{RR}^2 k^{7/6} z^{11/6}$  – относительная дисперсия флуктуаций интенсивности плоской волны в приближении МПВ,  $C_{RR}^2 = C_{qq'}^2 |_{q=q'=R}$ ,  $C_{qq'}^2$  – структурная характеристика

флуктуаций составляющих  $\tilde{\epsilon}$ ), при условии относительной малости флуктуаций  $\tilde{\epsilon}_1 (<|\tilde{\epsilon}_1|> \ll <|\tilde{\epsilon}_R|>)$ . В соответствии с подходом, предложенным в [8, 12], в области сильных флуктуаций ( $\beta_0^2 \gg 1$ ) справедливо следующее асимптотическое представление функции  $\langle G_1^{(4)} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle G_1^{(4)}(\vec{r}, z; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_2, 0) \rangle &\equiv \hat{L} \cdot F(\vec{r}, z; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_2, \vec{f}_1(\xi), \vec{f}_2(\xi), 0) = \\ &= \hat{L} \cdot F(\vec{f}_1(\xi) + \vec{r}_1 \frac{z - \xi}{z} \gg \vec{f}_2(\xi) + \vec{r}_2 \frac{z - \xi}{z}; \frac{1}{2} \vec{R}_2 \frac{z - \xi}{z}) + \\ &+ \hat{L} \cdot F(\vec{f}_2(\xi) + \vec{r}_2 \frac{z - \xi}{z} \gg \vec{f}_1(\xi) + \vec{r}_1 \frac{z - \xi}{z}; \frac{1}{2} \vec{R}_2 \frac{z - \xi}{z}). \end{aligned}$$

Используя это соотношение и проводя в  $\langle G_1^{(4)} \rangle$  интегрирование по оставшимся континуальным переменным  $\vec{f}_1(\xi)$ ,  $\vec{f}_2(\xi)$ , получим

$$\begin{aligned} \langle G_1^{(4)}(\vec{r}, z; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_2, 0) \rangle &= \{\tilde{G}_1^{(4)}(\vec{r}_1/\vec{r}_2) + \tilde{G}_1^{(4)}(\vec{r}_2/\vec{r}_1)\} \times \\ &\times \exp[k^2 A_{II}(0)z]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1^{(4)}(\vec{r}_\alpha/\vec{r}_\beta) &= \exp\left\{-\frac{k^2}{4} \int_0^z d\xi [D_{RR}((\vec{r}_\alpha + \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z - \xi}{z}) + \right. \\ &+ D_{RR}((\vec{r}_\alpha - \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z - \xi}{z})] \right\} + \pi k^2 \int_0^z d\xi \iint d^2 \vec{a} \left\{ \Phi_{RR}(\vec{a}) \times \right. \\ &\times \left[ \cos\left(\frac{\vec{a}}{2} \vec{R}_2 \frac{z - \xi}{z}\right) - \cos\vec{a}\left(\frac{\vec{a}}{k} S(\xi, \xi) - \vec{r}_\alpha \frac{z - \xi}{z}\right) \right] + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \Phi_{II}(\vec{a}) \cos\vec{a}\left(\frac{\vec{a}}{k} S(\xi, \xi) - \vec{r}_\alpha \frac{z - \xi}{z}\right) - 2 \Phi_{RI}(\vec{a}) \times \\ &\times \sin\vec{a}\left(\frac{\vec{a}}{k} S(\xi, \xi) - \vec{r}_\alpha \frac{z - \xi}{z}\right) \exp(i\vec{a} \vec{r}_\beta \frac{z - \xi}{z}) \times \end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k^2}{4} \int_0^z d\eta [D_{RR}(\frac{\vec{a}}{k} S_n(\xi, \eta) - (\vec{r}_\alpha + \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z - \eta}{z}) + \right.$$

$$+ D_{RR} \left( \frac{\vec{a}}{k} S_n(\xi, \eta) - (\vec{r}_\alpha - \frac{1}{2} \vec{R}_2) \frac{z - \eta}{z} \right) \Big\},$$

где  $S_n(\xi, \eta) = S(\xi, \eta) \theta(\xi - \eta) + S(\eta, \xi) \theta(\eta - \xi)$ ,  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

функция Хевисайда;  $S(\xi, \eta) = S(\xi > \eta) = \eta(z - \xi)/z$ , индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения 1, 2. Получим асимптотические выражения для  $\sigma_i^2$  в области насыщения в случае распространения плоской и сферической волн, для которых

$$U(\vec{r}, z) \Big|_{z=0} = U_0(\vec{r}) = \begin{cases} A_0 \frac{2\pi}{k^2} \delta(\vec{r}) & - \text{сферическая волна} \\ A_0 & - \text{плоская волна} \end{cases},$$

где  $A_0$  - начальная амплитуда волн. Подставляя (8) в (2) и учитывая, что функция Грина в невозмущенной ( $\tilde{\epsilon} = 0$ ) поглощающей среде имеет вид

$$G_0(\vec{r}, z; \vec{r}', z') = \frac{k}{2\pi i(z - z')} \exp \left\{ \frac{ik}{2(z - z')} |\vec{r} - \vec{r}'|^2 + ik(z - z') - \frac{k}{2} \int_z^z d\xi \bar{\epsilon}_I(\xi) \right\},$$

а для средних значений интенсивности справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \langle I_s(z) \rangle &= I_0(kz)^{-2} \exp \left\{ -k \int_0^z d\xi \bar{\epsilon}_I(\xi) + \frac{k^2}{2} A_{II}(0) z \right\}, \\ \langle I_p(z) \rangle &= I_0 \exp \left\{ -k \int_0^z d\xi \bar{\epsilon}_I(\xi) + \frac{k^2}{2} A_{II}(0) z \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

после промежуточных преобразований для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности  $\sigma_i^2$  плоской и сферической волн получим

$$\sigma_{II}^2(z) = 1 + \Psi_i(z) \quad (\Psi_i < 1, \quad i = s, p); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_p(z) &= 2\pi k^2 z \int_0^1 d\xi \iint d^2 \vec{a} \left\{ \Phi_{RI}(\vec{a}) \left[ 1 - \cos \frac{\vec{a}^2 z(1 - \xi)}{k} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2\Phi_{RI}(\vec{a}) \sin \frac{\vec{a}^2 z(1 - \xi)}{k} + 2\Phi_{II}(\vec{a}) \cos \frac{\vec{a}^2 z(1 - \xi)}{k} \right\} \times \end{aligned} \quad (11)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{k^2 z}{2} \xi D_{RR} \left( \frac{\vec{a} z(1 - \xi)}{k} \right) - \frac{k^2 z}{2} \int_0^{1-\xi} d\eta D_{RR} \left( \frac{\vec{a} z \eta}{k} \right) \right\};$$

$$\Psi_s(z) = 2\pi k^2 z \int_0^1 d\xi \iint d^2 \vec{a} \left\{ \Phi_{RR}(\vec{a}) \left[ 1 - \cos \frac{\vec{a}^2 z \xi(1-\xi)}{k} \right] - \right. \\ \left. - 2\Phi_{RI}(\vec{a}) \sin \frac{\vec{a}^2 z \xi(1-\xi)}{k} + 2\Phi_{II}(\vec{a}) \cos \frac{\vec{a}^2 z \xi(1-\xi)}{k} \right\} \times \quad (12)$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{k^2 z}{2} \int_0^\xi d\eta D_{RR} \left( \frac{\vec{a} z \eta(1-\xi)}{k} \right) - \frac{k^2 z}{2} \int_0^{1-\xi} d\eta D_{RR} \left( \frac{\vec{a} z \xi \eta}{k} \right) \right\}.$$

Отличие полученных выражений для  $\sigma_i^2$  от соответствующих для турбулентной среды с  $\tilde{\epsilon}_I = 0$  заключается в том, что в рассматриваемой ситуации флуктуации интенсивности зависят не только от пульсаций действительной, но и мнимой составляющей  $\epsilon$ , а также от корреляций  $\tilde{\epsilon}_R$ ,  $\tilde{\epsilon}_I$ . При этом корреляционное и определяемое  $\tilde{\epsilon}_I$  слагаемые дисперсии флуктуаций интенсивности входят в  $\sigma_i^2$  с различными знаками, что может привести к изменению характера поведения  $\sigma_i^2$  в области сильных флуктуаций  $\tilde{\epsilon}_R$ . Анализ соотношений (10)-(12) также показывает, что влияние флуктуаций мнимой части  $\epsilon$  на  $\sigma_i^2$  проявляется, главным образом, через крупномасштабные неоднородности (порядка внешнего масштаба турбулентности  $L_0$ ). Таким образом, в задаче появляется новый (в отличие от случая распространения излучения в среде с  $\tilde{\epsilon}_I = 0$ ) характер-

ный параметр  $q_{0i} = \frac{z}{k\rho_{ci}} \vec{a}_0 \sim \frac{r_{0i}}{L_0}$ , где  $i = s, p$ ,  $\vec{a}_0 = 2\pi/L_0$ ,  $\rho_{ci}$  – радиусы когерентности плоской ( $i = p$ ) и сферической ( $i = s$ ) волн,  $\rho_{ci} = (a_1 C_{RR}^2 k^2 z)^{-3/5}$ ,  $a_p = 0,73$ ,  $a_s = 0,29$ ,  $r_{0i} = z/k\rho_{ci}$ .

Используя для описания флуктуаций  $\epsilon$  спектр Колмогорова – Обухова, подправленный для пульсаций мнимой части  $\epsilon$  в области  $\vec{a}$ , близких к нулю, из (10)–(12) окончательно получим

$$\sigma_{Ip}^2(z) = 1 + 0,86 \beta_0^{-4/5}(z) - 13,45 \frac{C_{RI}^2}{C_{RR}^2} \beta_0^{8/5}(z) + \frac{C_{II}^2}{C_{RR}^2} \varphi_p(z); \quad (13)$$

$$\sigma_{Is}^2(z) = 1 + 2,8 \beta_0^{-4/5}(z) - 7,74 \frac{C_{RI}^2}{C_{RR}^2} \beta_0^{8/5}(z) + \frac{C_{II}^2}{C_{RR}^2} \varphi_s(z), \quad (14)$$

где функции  $\varphi_p$ ,  $\varphi_s$  в зависимости от величин параметра  $q_{0i}$  имеют вид

$$\varphi_i(z) = 8\pi^2 A_{11} \frac{3 \cdot \Gamma(1/6)}{5} (\vec{a}_0 \rho_{ci})^{-5/3} = \quad (15)$$

$$= 2(2\pi)^{1/3} A_{11} \frac{3 \cdot \Gamma(1/6)}{5} \frac{a_1}{0,31} \beta_0^{12/11}(z) \beta_0^{10/11}(kL_0^2) \sim z \quad (q_{0i} \leq 1);$$

$$\varphi_1(z) = 8\pi^2 A_{21} (\alpha_0 \rho_{ci})^{-5/3} q_{01}^{-1/3} = 2A_{21} \left(\frac{\alpha_1}{0,31}\right)^{4/5} \times$$

$$\times \beta_0^{28/55}(z) \beta_0^{12/11}(kL_0^2) \sim z^{7/15} \quad (q_{01} \gg 1). \quad (16)$$

В (15), (16) обозначено:  $\Gamma(x)$  - гамма-функция,  $A_{1p} = 0,045$ ;  $A_{1s} = 0,11$ ;  $A_{2p} = 5,3 \cdot A_{1p}$ ,  $A_{2s} = 6,6 \cdot A_{1s}$ . Область применимости соотношений (13), (14) определяется принятыми при расчетах предположениями о сильных флуктуациях интенсивности, обусловленных пульсациями действительной части  $\epsilon$ , и о слабости флуктуаций  $I$ , обусловленных случайными изменениями  $\epsilon_I$ , что выражается неравенствами

$$\beta_0^2(z) \gg 1; \quad (17)$$

$$\max \left( B_{11} \frac{C_{RI}^2}{C_{RR}^2} \beta_0^{8/5}(z), B_{21} \frac{C_{II}^2}{C_{RR}^2} \beta_0^{12/11}(z) \beta_0^{10/11}(kL_0^2) \right) < 1$$

$$(q_{01} \leq 1); \quad (18)$$

$$\max \left( B_{11} \frac{C_{RI}^2}{C_{RR}^2} \beta_0^{8/5}(z), B_{21} \frac{C_{II}^2}{C_{RR}^2} \beta_0^{28/55}(z) \beta_0^{12/11}(kL_0^2) \right) < 1$$

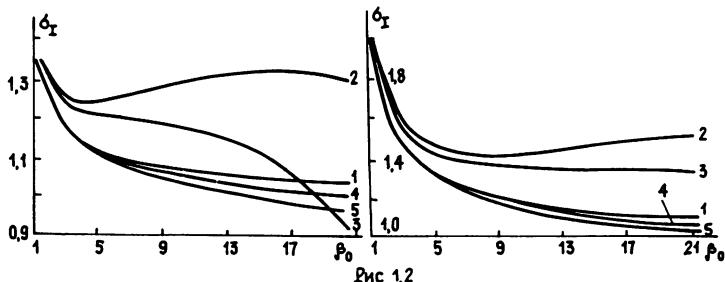
$$(q_{01} \gg 1), \quad (19)$$

где  $B_{1p} = 13,45$ ;  $B_{1s} = 7,24$ ;  $B_{2p} = 0,95$ ;  $B_{2s} = 1,38$ .

Из (13)-(16) видно, что в  $\sigma_I^2$  помимо вторых слагаемых, характерных для турбулентной среды с флуктуациями только  $\epsilon_R$  и быстро убывающими ( $\sim \beta_0^{-4/5}(z)$ ) в области сильных флуктуаций ( $\beta_0^2 \gg 1$ ), входят члены, определяющие вклад корреляций и флуктуаций мнимой составляющей  $\epsilon$ , которые увеличиваются с ростом  $z$  и несмотря на малость отношений  $C_{RI}^2/C_{RR}^2$ ,  $C_{II}^2/C_{RR}^2$  могут быть сравнимы со вторыми слагаемыми. Поскольку последние слагаемые (13), (14) входят в  $\sigma_I^2$  с различными знаками, при определенных значениях  $L_0$ , степени корреляции флуктуаций  $\epsilon_R$ ,  $\epsilon_I$ , дисперсия флуктуаций интенсивности в области насыщения может быть меньше единицы ( $\sigma_{II} < 1$ ), что, как и в случае слабых флуктуаций интенсивности [3, 4], указывает на эффект компенсации (подавления) амплитудных флуктуаций за счет корреляций  $\tilde{\epsilon}_R$ ,  $\tilde{\epsilon}_I$ . Как и следовало ожидать, основной вклад в составляющую  $\sigma_I^2$ , обусловленную пульсациями мнимой части  $\epsilon$ , дают крупномасштабные неоднородности  $\tilde{\epsilon}_I$ . При этом на зависимость от  $z$  указанной составляющей  $\sigma_I^2$  оказывают влияние потери когерентности волны на трассе. В одном слу-

чае ( $q_{01} < 1$ ) влияние потерь когерентности несущественно и имеет место обычная для поглощающих сред с малыми флуктуациями оптической толщины линейная зависимость  $\sigma_1^2$  от  $z$ . В другом пределе ( $q_{01} \gg 1$ ) неполная когерентность излучения приводит к заметному изменению зависимости последнего слагаемого  $\sigma_1^2$  от  $z$ . Отметим также, что при сделанных в работе предположениях (17)–(19) и  $C_{RR}^2 \gg C_{II}^2$  основной механизм формирования флуктуаций амплитуды связан со случайными фокусировками на неоднородностях  $\varepsilon_R$ , поэтому корреляции  $\varepsilon_R$  и  $\varepsilon_I$  проявляются в мелкомасштабной области и третье, корреляционное слагаемое  $\sigma_1^2$  не включает параметр  $q_{01}$ .

Для иллюстрации поведения дисперсии флуктуаций интенсивности излучения в области насыщения при различных соотношениях структурных характеристик пульсаций  $\varepsilon_R$  и  $\varepsilon_I$  на рис. 1, 2 представлены результаты расчета зависимости  $\sigma_1$  от  $\beta_0$  для случая распространения в турбулентной среде плоской (рис. 1) и сферической (рис. 2) волн. Значения параметров в расчетах были выбраны следующими:  $L_0 = 5 \cdot 10^2$  см,  $C_{RR}^2 = 10^{-14}$  см<sup>2/3</sup>. Для определения величины  $C_{RI}^2$  использовалось соотношение  $C_{RI}^2 = b_{RI} \sqrt{C_{RR}^2 C_{II}^2}$ , где  $0 \leq b_{RI} \leq 1$  – коэффициент корреляции.



Кривые на рисунках соответствуют следующие значения параметров  $b_{RI}$ ,  $C_{II}^2$ : 1 –  $C_{II}^2 = 0$ ; 2 –  $C_{II}^2 = 10^{-20}$  см<sup>-2/3</sup>,  $b_{RI} = 0, 5$ ; 3 –  $C_{II}^2 = 10^{-20}$  см<sup>-2/3</sup>,  $b_{RI} = 1$ ; 4 –  $C_{II}^2 = 10^{-22}$  см<sup>-2/3</sup>,  $b_{RI} = 0, 5$ ; 5 –  $C_{II}^2 = 10^{-22}$  см<sup>-2/3</sup>,  $b_{RI} = 1$ . Выбранные величины параметра  $C_{II}^2$  характерны для случая распространения излучения видимого диапазона в турбулентной атмосфере. Заметим, что при прохождении лазерного пучка через канал просветления облачной среды [14] или в слое аэрозоля значения структурной характеристики могут быть существенно выше принятых в расчетах. Из рисунков видно, что как для случая плоской волны, так и для случая сферической волны влияние пульсаций  $\varepsilon_I$  на поведение  $\sigma_1$  в области сильных флуктуаций выражается в отклонении  $\sigma_1$  от традиционной

кривой (присущей ситуации с  $\tilde{\varepsilon}_I = 0$ ) вверх или вниз и даже пересечении при определенных значениях  $\beta_0$  уровня насыщения (кривая 3 на рис. 1). При этом эффект компенсации (подавления) флуктуаций интенсивности, обусловленный корреляцией  $\tilde{\varepsilon}_R$ ,  $\tilde{\varepsilon}_I$ , усиливается при уменьшении  $C_{II}^2$  или увеличении степени корреляции  $b_{RI}$  (кривые 4, 5), а также при увеличении длины трассы (на рис. 1, кривая 3, это происходит при  $\beta_0 > 17$ ). Увеличение  $C_{II}^2$  или уменьшение коэффициента корреляции  $b_{RI}$  приводит к усилиению роли крупномасштабных пульсаций  $\varepsilon_I$  и к росту  $\sigma_I^2$  (кривые 2, 3) по сравнению с ситуацией, когда  $\tilde{\varepsilon}_I = 0$ . Причем эффект этот проявляется уже при относительно небольших значениях  $\beta_0$ .

В заключение отметим, что одна из возможных причин отмеченного в литературе [9] количественного расхождения теоретических и экспериментальных значений  $\sigma_I$  в области насыщения может быть связана с пренебрежением флуктуациями  $\varepsilon_I$  при расчетах относительной дисперсии флуктуаций интенсивности излучения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. - М.: Наука, 1967. - 548 с.
2. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. - М.: Наука, 1976. - 277с.
3. Арманд Н. А., Изюмов А. О., Соколов А. В. //Радиотехника и электроника. 1971. Т.16. № 8. С.1333.
4. Алмаев Р. Х., Семенов Л. П. //Квантовая электроника. 1979. Т.6. № 10. С.2226.
5. Миронов В. Л., Тузова С. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т.23. № 12. С.1453.
6. Боровой А. Г., Вагин Н. И., Волков С. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т.24. № 9. С.1167.
7. Алмаев Р. Х., Суворов А. А. //Труды ИЭМ. 1990. Вып. 23(146).
8. Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И. //ЖЭТФ. 1977. Т.73. Вып. 2(8). С.481.
9. Якушкин И. Г. //Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.19. № 3. С.384.
10. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. - М.: Мир, 1968. - 382с.
11. Dashen K. //J.Math.Phys. 1979. V.20. P.894.
12. Tatarskii V.I., Zavorotnyi V.U.//Prog.Opt.1980. V.18. P.204.
13. Флатте С. М. //ТИИЭР. 1983. Т.71. № 11. С.45.
14. Волковицкий О. А., Седунов Ю. С., Семенов Л. П. Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. - Л.: Гидрометеоиздат, 1982. - 312с.

УДК 539. 219. 3:621. 382

## ДИФФУЗИЯ ЧЕРЕЗ РЕЗКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ.

## 2. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИФФУЗИИ

А. Н. Малахов

Рассмотрены временные характеристики процесса одномерной диффузии через резкие потенциальные барьеры. Предложен метод нахождения характерных времен процесса диффузии по его изображению по Лапласу. Для ряда примеров найдена зависимость времени диффузии от ширины и высоты потенциальных барьеров. Данна физическая интерпретация полученных результатов.

## 1. Постановка задачи и метод решения

1. Статья является непосредственным продолжением работы [1]. Зная точные решения уравнения диффузии, поставим задачу отыскания характерных времен диффузии через потенциальные барьеры, характерных времен выхода диффундирующих частиц из потенциальных ям и т. п.

Прежде всего выясним, что считать временем выхода. Рассмотрим, например, диффузию через потенциальный барьер конечной ширины (рис. 1а). Как показано в [1], при  $t \rightarrow \infty$  на самом барьере частиц не остается, все они равновероятно разместятся по обе стороны барьера, так что вероятности

$$P_0(t) = \int_{-\infty}^1 W_0(x, t) dx, \quad P_1(t) = \int_1^{1+L} W_1(x, t) dx, \quad P_2(t) = \int_{1+L}^{\infty} W_2(x, t) dx,$$

имеющие начальные значения  $P_0(0) = 1$ ,  $P_1(0) = P_2(0) = 0$ , примут следующие финальные значения:  $P_0(\infty) = P_2(\infty) = 1/2$ ,  $P_1(\infty) = 0$ . Совершенно естественно за время выхода частиц за барьер принять значение  $t = \theta$ , при котором  $P_2(\theta) = (1/2)P_2(\infty) = 1/4$ , т. е. время, за которое вероятность быть частицам за барьером, достигает половины финального значения. Аналогичным способом можно ввести время выхода и для других потенциальных профилей, лишь бы соответствующие вероятности  $P(t)$  монотонно изменялись с ростом  $t$ .

2. Если теперь принять во внимание значение плотности вероятности  $W_2(x, t)$ , приведенное в [1], то  $\theta$  должно определяться из условия

$$P_2(\theta) = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{ch} \beta - 1}{\operatorname{ch} \beta + 1} \right)^n \operatorname{erfc} \left( \frac{1 + L + 2nL}{\sqrt{2D\theta}} \right) = 1/4, \quad (1)$$

где

$$\operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{2Dt}} \right) = 2 \int_z^{\infty} W_{\Gamma}(x, t) dx, \quad W_{\Gamma}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp \left( -\frac{x^2}{2Dt} \right).$$

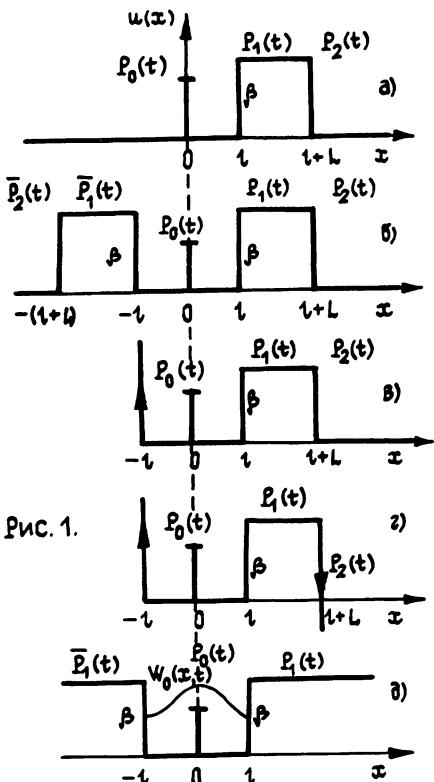


Рис. 1.

Вывод зависимости  $\theta = \theta(\beta)$  из условия (1) представляется весьма проблематичным. Поэтому мы изберем другой подход: будем определять  $\theta$  не по вероятности  $P(t)$ , а по ее изображению по Лапласу  $p^P(p)$ , хотя в него время и не входит. Идея этого подхода заключается в том, чтобы вместо определения времени выхода  $\theta$  по соотношению  $P(\theta) = (1/2) P(\infty)$  сначала вычислить такое значение  $p_0$  операционной переменной преобразования Лапласа, имеющей размерность, обратную времени, чтобы

$$p_0 \hat{P}(p_0) = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{P}(p) = (1/2) P(\infty)$$

(см. предельные соотношения (13) [1]), а затем заменить  $p_0$  на  $1/a\theta$ , где  $a$  — подходящим образом выбранный коэффициент. Другими словами, предлагается находить время выхода диффундирующих частиц за барьер не по эволюции их плотности вероятности (при  $t \rightarrow \infty$ ), а по эволюции изображения плотности вероятности (при  $p \rightarrow 0$ ).

3. Выберем теперь коэффициент  $a$  так, чтобы времена выхода, определенные по  $P(t)$  и по  $p^P(p)$ , совпали для случая свободной диффузии. Последнее обстоятельство связано с тем, что, как указывалось в [1], для рассматриваемого потенциального профиля любые плотности вероятности выражаются через "базовую", равную  $W_\Gamma(x, t)$ , которая как раз и описывает свободную диффузию.

Для свободной диффузии (потенциальное поле отсутствует) из [1] следует, что для всех  $x$

$$Y(x) = (B/2\gamma) e^{-\gamma|x|}, \quad W(x, t) = W_\Gamma(x, t).$$

Напомним, что  $\gamma^2 = Br$ ,  $B = 2/D$ .

Выделим на оси  $x$  точку  $x = 1$  и найдем время выхода свободно диффундирующих частиц за точку 1. На основании вышеизложенного,  $\theta$  может быть получено из соотношения

$$P(\theta) = \int_1^\infty W_\Gamma(x, \theta) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{2D\theta}} \right) = \frac{1}{4},$$

поскольку, как очевидно,  $P(\infty) = 1/2$ . Таким образом, время выхода для свободной диффузии, найденное через  $P(t)$ , равно

$$\theta_{cb} = t_1 \cdot 2, 19, \quad (2)$$

где  $t_1 = l^2/D$ .

Определим теперь время выхода через изображенные вероятности по Лапласу. Так как

$$p^P(p) = p \int_1^\infty Y(x) dx = \frac{1}{2} e^{-\gamma l} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{2},$$

то мы определяем  $\gamma_0 = \sqrt{2p_0/D}$  из условия  $e^{-\gamma_0 l} = 1/2$ . Этому

соответствует  $\gamma_0 = 0,693$ . Подставляя  $\gamma_0 = \sqrt{2/D\alpha\theta_{cb}}$ , находим  $\theta_{cb} = t_1 \cdot 4,163/a$ . Для того чтобы это значение совпало с (2), необходимо принять  $a = 1,90$ . Поскольку, однако, определение времени выхода довольно условно, примем для простоты, что  $\theta_{cb} = 2t_1$ , и операционную переменную  $p$  будем заменять при вычислении времени выхода на  $1/2\theta$ , т. е. будем брать  $\gamma_1 = \sqrt{t_1/\theta}$ .

## 2. Время диффузии через барьеры конечной ширины

1. Вернемся теперь к диффузии через потенциальный барьер конечной ширины (рис. 1а) и проиллюстрируем вычисление времени выхода диффундирующих частиц за этот барьер изложенным методом.

Интегрируя функцию  $u_2(x)$ , заданную формулой (16) в [1], от  $x = -L + L$  до  $x = \infty$  и умножая результат на  $p = \gamma^2/B$ , получим

$$p\hat{P}_2(p) = \frac{1}{2} \frac{(1-R^2) e^{-(1+\lambda)\delta}}{1 - R^2 e^{-2\lambda\delta}},$$

где  $\delta = \gamma_1 t$ ,  $\lambda = L/t_1$ ,  $R = R(\beta) = (1 - e^{-\beta})/(1 + e^{-\beta})$ . При изменении  $p$  (или  $\delta$ ) от  $\infty$  до нуля  $p\hat{P}_2(p)$ , а следовательно, и  $P_2(t)$  изменяются от нуля до  $1/2$ . Поэтому, чтобы отыскать время выхода  $\theta$ , необходимо найти  $\delta$  из уравнения

$$2(1 - R^2) e^{-(1+\lambda)\delta} = 1 - R^2 e^{-2\lambda\delta},$$

а затем положить  $\delta = \sqrt{t_1/\theta}$ .

Наиболее просто решается случай  $\lambda = 1$ , для которого

$$\theta = 4t_1 \ln^{-2}[1 + 4e^{-\beta}/(1 + 2e^{-\beta} + e^{-2\beta})]. \quad (3)$$

Для низкого барьера ( $\beta \ll 1$ ,  $R = (1/2)\beta \ll 1$ ) отсюда получаем  $\theta = 2t_1 = 2t_1(1 + \lambda)^2 = \theta_{cb}$  — т. е. совпадение времени выхода со временем свободной диффузии (до дальней границы барьера). Для высокого барьера ( $e^{-\beta} = \rho \ll 1$ ,  $R = 1 - 2\rho$ ) формула (3) приводит к  $\theta = (1/4)t_1 e^{2\beta}$ . Если  $\lambda \neq 1$ , то для низкого и высокого барьера нетрудно получить соответственно (для высокого барьера берем дополнительное условие  $\lambda > \rho$ )

$$\theta = \theta_{cb}, \quad \theta = \frac{1}{4} t_1 \lambda^2 e^{2\beta} = \theta_{cb} \frac{1}{8} \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} e^{2\beta}. \quad (4)$$

Таким образом, с ростом высоты барьера время выхода за барьер увеличивается и при высоком барьере оно пропорционально  $e^{2\beta}$ : чем выше потенциальный барьер, тем существенно медленнее диффундирующие частицы преодолевают его.

2. Прежде чем переходить к другим примерам, приведем для самого общего случая (см. рис. 1 в [1]) выражения для изображений по Лапласу вероятностей пребывания диффундирующих частиц в соответствующих интервалах оси  $x$ , умноженных на операционную переменную.

Для положительных  $x$

$$p\hat{P}_0(p) = \frac{1}{2} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \left[ d^1(e^{\gamma_{1_1}} - 1) + d^0(1 - e^{-\gamma_{1_1}}) \right], \quad 0 \leq x < l_{1_1},$$

$$p\hat{P}_1(p) = \frac{1}{2} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \left[ d^1_1(e^{\gamma_{1_2}} - e^{\gamma_{1_1}}) + d^0_1(e^{-\gamma_{1_1}} - e^{-\gamma_{1_2}}) \right],$$

$$l_{1_1} < x < l_{2_1}, \quad (5a)$$

$$p\hat{P}_2(p) = \frac{1}{2} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \Pi_2 \left[ d^1_2(e^{\gamma_{1_3}} - e^{\gamma_{1_2}}) + d^0_2(e^{-\gamma_{1_2}} - e^{-\gamma_{1_3}}) \right],$$

$$l_{2_1} < x < l_{3_1},$$

$$p\hat{P}_{N-1}(p) = \frac{1}{2} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_{N-1} \left[ d^1_{N-1}(e^{\gamma_{1_N}} - e^{\gamma_{1_{N-1}}}) + \right.$$

$$\left. + d^0_{N-1}(e^{-\gamma_{1_{N-1}}} - e^{-\gamma_{1_N}}) \right], \quad l_{N-1} < x < l_N,$$

$$p\hat{P}_N(p) = \frac{1}{2} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_N e^{-\gamma_{1_N}}, \quad x > l_N.$$

Для отрицательных  $x$

$$p\hat{\overline{P}}_0(p) = \frac{1}{2} \frac{d_t}{\Delta} \left[ \bar{d}^1(e^{\bar{\gamma}_{1_1}} - 1) + \bar{d}^0(1 - e^{-\bar{\gamma}_{1_1}}) \right], \quad -\bar{l}_{1_1} < x \leq 0,$$

$$p\hat{\overline{P}}_1(p) = \frac{1}{2} \frac{d_t}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \left[ \bar{d}^1_1(e^{\bar{\gamma}_{1_2}} - e^{\bar{\gamma}_{1_1}}) + \bar{d}^0_1(e^{-\bar{\gamma}_{1_1}} - e^{-\bar{\gamma}_{1_2}}) \right],$$

$$-\bar{l}_{1_1} < x < -\bar{l}_{2_1}, \quad (5b)$$

$$p\hat{\overline{P}}_2(p) = \frac{1}{2} \frac{d_t}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2 \left[ \bar{d}^1_2(e^{\bar{\gamma}_{1_3}} - e^{\bar{\gamma}_{1_2}}) + \bar{d}^0_2(e^{-\bar{\gamma}_{1_2}} - e^{-\bar{\gamma}_{1_3}}) \right],$$

$$-\bar{l}_{2_1} < x < -\bar{l}_{3_1},$$

$$p\hat{\overline{P}}_{N-1}(p) = \frac{1}{2} \frac{d_t}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2 \cdots \bar{\Pi}_{N-1} \left[ \bar{d}^1_{N-1}(e^{\bar{\gamma}_{1_N}} - e^{\bar{\gamma}_{1_{N-1}}}) + \right.$$

$$\left. + \bar{d}^0_{N-1}(e^{-\bar{\gamma}_{1_{N-1}}} - e^{-\bar{\gamma}_{1_N}}) \right], \quad -\bar{l}_N < x < -\bar{l}_{N-1},$$

$$p\hat{\overline{P}}_N(p) = \frac{1}{2} \frac{d_t}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2 \cdots \bar{\Pi}_N e^{-\bar{\gamma}_{1_N}}, \quad x < -\bar{l}_N.$$

В интервале  $-\bar{l}_{1_1} < x < l_{1_1}$

$$p\hat{P}_0(p) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-\gamma_1^+} + e^{-\gamma_1^-}) + \frac{1}{2\Delta} \left[ d^1 \bar{d}_t (e^{\gamma_1^+} - e^{-\gamma_1^-}) + \right. \\ \left. + \bar{d}^1 d_t (e^{\gamma_1^+} - e^{-\gamma_1^-}) \right]. \quad (5b)$$

Используемые здесь обозначения полностью соответствуют введенным в [1]. Условие нормировки имеет вид

$$\sum_{k=0}^N \int_{x \geq 0} p \hat{P}_k(p) dx + \sum_{k=0}^N \int_{x \leq 0} p \hat{P}_k(p) dx = 1.$$

3. Рассмотрим теперь время диффузии частиц из центральной области, ограниченной двумя барьерами конечной ширины (рис. 1б). Для этого симметричного случая ( $N = 2$ ,  $t_1 = T_1 = 1$ ,  $t_2 = T_2 = 1 + L$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = \bar{\beta}_2 = -\beta$ ) на основании (5) и [1]

$$p\hat{P}_2(p) = p\hat{P}_2(p) = \frac{(1/2)(1 - R^2)e^{-\gamma(1+L)}}{1 - R^2 e^{-2\gamma L} - Re^{-2\gamma_1} + Re^{-2\gamma(1+L)}}.$$

Это выражение изменяется от нуля до  $1/2$  при изменении  $\delta = \gamma L$  от  $\infty$  до нуля. Следовательно, время выхода диффундирующих частиц за потенциальные барьеры определяется уравнением

$$2(1 - R^2)e^{-(1+\lambda)\delta} = 1 - R^2 e^{-2\lambda\delta} - Re^{-2\delta} + Re^{-2(1+\lambda)\delta}. \quad (6)$$

Для низких барьеров ( $\beta \ll 1$ ), как и должно быть, из (6) следует  $\theta = 2t_{1+L} = \theta_{cb}$ . Для высоких барьеров ( $e^{-\beta} = \rho \ll 1$ ) при дополнительном условии  $\lambda \gg \rho$  можно найти

$$\delta = \frac{1}{2\lambda} \left[ \sqrt{\rho^2 \lambda^2 + 4\rho\lambda} - \rho\lambda \right].$$

Если потребовать, чтобы  $\lambda\rho \ll 1$ , т. е. если в конечном счете относительную ширину высоких барьеров ограничить неравенством  $e^{-\beta} \ll \lambda \ll e^\beta$ , то  $\delta = \sqrt{\rho/\lambda}$  и

$$\theta = t_1 \lambda e^\beta = \theta_{cb} \frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2} e^\beta. \quad (7)$$

Если рассмотреть высокие и тонкие барьеры, когда  $\lambda = \rho = e^{-\beta}$  (чем выше барьеры, тем они тоньше), то, как показывает анализ уравнения (6),  $\theta = 3,7 \cdot t_1$  — время выхода не более чем в два раза превышает время свободной диффузии. Тем самым можно говорить о некотором "туннелировании" диффузии через тонкие, хотя и высокие барьеры.

Сравнивая время диффузии через единственный барьер (формула (4), рис. 1а) и через два барьера (формула (7), рис. 1б), видим, что диффузия, соответствующая рис. 1а, идет существенно медленнее, а именно медленнее в  $\lambda e^\beta \gg 1$  раз. Причиной этого является присутствие свободного пространства слева от барьера на рис. 1а, куда

диффундирующими частицам "проще" двигаться, чем преодолевать высокий барьер. А поскольку в конце концов (при  $t \rightarrow \infty$ ) все же половина частиц "должна перебраться" через барьер, то этот процесс растягивается во времени тем больше, чем выше барьер.

4. Чтобы проверить это утверждение, рассмотрим диффузию из ограниченного слева пространства через тот же барьер (рис. 2в). В этом примере  $N = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $\bar{l}_1 = 1$ ,  $l_2 = 1 + L$ ,  $\bar{l}_2 = \infty$ ,  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = -\beta$ ,

$\bar{\beta}_1 = \infty$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0$ . Из (5а) и [1] следует,

$$p\hat{P}_2(p) = \frac{(1/2)(1-R^2)(1+e^{-2\delta})e^{-(1+\lambda)\delta}}{1-R^2e^{-2\lambda\delta}-Re^{-4\delta}+Re^{-(4+2\lambda)\delta}} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 1.$$

Уравнение для времени выхода  $\theta$  имеет вид

$$(1-R^2)(1+e^{-2\delta})e^{-(1+\lambda)\delta} = 1 - R^2e^{-2\lambda\delta} - Re^{-4\delta} + Re^{-(4+2\lambda)\delta}.$$

Для низкого барьера получаем уравнение  $e^{-(3+\lambda)\delta} + e^{-(1+\lambda)\delta} - 1 = 0$ . Если взять значение  $\lambda = 1$ , то придет к  $\theta = \theta_{cb} \cdot 2,16$ , где  $\theta_{cb} = 2t_{21}$ . Для высокого барьера при тех же ограничениях на относительную ширину барьера,  $e^{-\beta} \ll \lambda \ll e^\beta$ , можно найти

$$\theta = 2t_1 \lambda e^\beta = \theta_{cb} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} e^\beta. \quad (8)$$

Таким образом, как и в предыдущем примере, здесь также получился закон пропорциональности:  $\theta \sim e^\beta$ .

Вместе с тем, сравнивая времена диффузии, соответствующей рис. 1в и предыдущего примера, нетрудно обнаружить, что времена диффузии увеличились практически вдвое как для свободной диффузии, так и для случая высокого потенциального барьера (ср. (8) с (7)). Это можно интерпретировать следующим образом. В рассматриваемом примере (рис. 1в) в отличие от предыдущего (рис. 1б) половине диффундирующих частиц, прежде чем добраться до барьера, приходится сначала пройти путь до отражающей границы, а затем уже обратно, к барьеру. Другими словами, для половины диффундирующих частиц "дорога до барьера" удлиняется от 1 до 31. Соответственно увеличивается и время выхода.

5. Рассмотрим теперь предыдущий пример, в котором за барьером стоит поглощающая граница — попадающие за барьер частицы уже не возвращаются обратно. Этому соответствует бесконечная потенциальная яма, расположенная в точке  $x = 1 + L$  (рис. 1г). В этом случае  $N = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 1 + L$ ,  $\bar{l}_1 = 1$ ,  $\bar{l}_2 = \infty$ ,  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = -\infty$ ,  $\bar{\beta}_1 = +\infty$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0$ . При таких значениях  $l_k$  и  $\beta_k$  из (5а) и [1] следует, что

$$p\hat{P}_2(p) = \frac{(1-R)(1+e^{-2\delta})e^{-(1+\lambda)\delta}}{1-Re^{-2\lambda\delta}-Re^{-4\delta}+e^{-(4+2\lambda)\delta}} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 1.$$

Уравнение для определения времени выхода принимает вид

$$2(1-R)(1+e^{-2\delta})e^{-(1+\lambda)\delta} = 1 - Re^{-2\lambda\delta} - Re^{-4\delta} + e^{-(4+2\lambda)\delta}.$$

Если барьер низкий, то для  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 2$  получим, соответственно,

$\theta = \theta_{\text{cb}}/1,85$  и  $\theta = \theta_{\text{cb}}/2,15$ : по сравнению с предыдущим примером время выхода через низкий барьер уменьшилось примерно в четыре раза. Таково влияние поглощающей границы, расположенной сразу за барьером.

Что касается высокого барьера, то при том же условии на относительную ширину барьера расчет приводит к значению времени выхода, определенному формулой (8). Это значит, что бесконечно глубокая потенциальная яма, расположенная за барьером, не изменила времени выхода.

6. Чтобы понять, почему поглощающая граница, находящаяся за высоким барьером, не повлияла на время выхода через этот барьер, рассмотрим еще один пример — диффузию в так называемой двухуровневой системе, потенциальный профиль которой имеет два минимума (рис. 2).

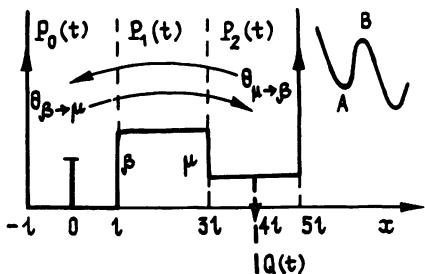


Рис. 2.

Для такого профиля  $N = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 31$ ,  $l_3 = 51$ ,  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = T_3 = \infty$ ,  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = -\mu$ ,  $\beta_3 = \bar{\beta}_1 = \infty$ ,  $\bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = 0$ .

Записывая  $p\hat{P}_2(p)$  согласно (5а) и [1], после ряда преобразований можно найти

$$p\hat{P}_2(p) = P_2(\infty) \frac{(e^{-3\delta} + e^{-5\delta}) 2A}{(1 + e^{-8\delta})(A+1) + 2e^{-4\delta}(A-1)},$$

где  $A = e^{-\mu} + e^{-\beta} + e^{-(\mu+\beta)}$ . Таким образом, время выхода определяется уравнением

$$(e^{-3\delta} + e^{-5\delta}) 4A = (1 + e^{-8\delta})(A+1) + 2e^{-4\delta}(A-1). \quad (9)$$

Отметим весьма примечательное обстоятельство. Поскольку в выражение для  $A$  высота барьера  $\beta$  и глубина потенциальной ямы  $\mu$  входят симметрично, то уравнение (9) не изменится при замене  $\beta \leftrightarrow \mu$ . Следовательно, время выхода  $\theta_{\beta-\mu}$  частиц, дифундирующих из точки  $x = 0$  через барьер высотой  $\beta$  в потенциальную яму глубиной  $\mu$ , будет совпадать с временем выхода  $\theta_{\mu-\beta}$  частиц из точки  $x = 41$  через барьер высотой  $\mu$  в потенциальную яму глубиной  $\beta$ , т. е. с временем обратной диффузии. Это обстоятельство обязано существованию стационарного вероятностного распределения в системе. Для рассматриваемой двухуровневой системы (рис. 2) нетрудно получить

$$P_0(\infty) = \frac{1}{1 + e^{-\beta} + e^{-\beta+\mu}}, \quad P_1(\infty) = \frac{e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta} + e^{-\beta+\mu}}, \quad P_2(\infty) = \frac{e^{-\beta+\mu}}{1 + e^{-\beta} + e^{-\beta+\mu}},$$

и если, например,  $\mu < \beta$ , то ясно, что поток вероятности (частиц), соответствующий  $\theta_{\beta-\mu}$ , будет меньшим, чем для  $\theta_{\mu-\beta}$ . С другой стороны, финальное значение вероятности  $P_2(\infty)$  также меньше чем  $P_0(\infty)$ . Разница финальных значений полностью компенсирует разницу в

величине потоков, что и приводит к совпадению времен выхода.

Для высокого барьера ( $e^\beta \gg 1$ ) и глубокой ямы ( $e^\mu \gg 1$ ) из (9) следует, что время выхода

$$\theta = 4t_1 \frac{e^\beta \cdot e^\mu}{e^\beta + e^\mu} = \frac{2}{9} \theta_{\text{св}} \frac{e^\beta \cdot e^\mu}{e^\beta + e^\mu} \quad (10)$$

определяется отношением  $e^\beta/e^\mu$ . Если барьер сравнительно высок ( $e^\beta/e^\mu \gg 1$ ), то  $\theta = 4t_1 e^\mu$  - время выхода уже не зависит от высоты барьера, а определяется лишь глубиной ямы. Если же глубина ямы за барьером достаточно велика ( $e^\beta/e^\mu \ll 1$ ), то  $\theta = 4t_1 e^\beta$ . Это значение времени выхода, во-первых, полностью совпадает с (8), если учесть, что в рассматриваемом примере  $\lambda = 2$ , и, во-вторых, уже не зависит от глубины потенциальной ямы, которая может быть и сколь угодно большой, как в предыдущем примере.

Если, оставляя барьер высоким, глубину потенциальной ямы взять небольшой ( $e^\mu \approx 1$ ), то из (9) можно найти, что  $\theta = t_1 \cdot 8,35 = \theta_{\text{св}}/2,15$ , что опять же совпадает с предыдущим примером для случая низкого барьера, если учесть, что  $\theta_{\beta \rightarrow \mu} = \theta_{\mu \rightarrow \beta}$ .

7. Итак, время выхода диффундирующих частиц за высокий потенциальный барьер ( $e^\beta \gg 1$ ) существенно зависит от поведения потенциального профиля как перед барьером, так и за барьером и может изменяться в широких пределах от величин порядка времени свободной диффузии  $\theta_{\text{св}}$  до величин порядка  $\theta_{\text{св}} e^{2\beta}$ .

Для случая, когда диффузия частиц идет из ограниченного пространства через высокий потенциальный барьер в достаточно глубокую потенциальную яму, такую, что вероятность диффундирующими частицам вернуться обратно в начальную область весьма мала, время выхода пропорционально  $e^\beta$ , а скорость диффузии, соответственно,  $\sim e^{-\beta}$ .

Отметим, что именно такой множитель  $e^{-\beta}$  для скорости диффузии через высокий потенциальный барьер, профиль которого изображен в верхнем правом углу на рис. 2, был получен Крамерсом [2] приближенным методом, предполагавшим существование гауссова квазистационарного распределения в области потенциального минимума  $A$  и параболического профиля в области  $B$ .

8. В заключение раздела обратимся к среднему времени первого достижения границы, отличающемуся по смыслу от времени выхода. Найдем, например, среднее время первого достижения броуновской частицей (стартующей из точки  $x = 0$ ) точки  $x = 41$  для профиля, изображенного на рис. 2. Как известно (см., например, [3]), в этом случае в точке  $x=x_{\text{гр}} = 41$  необходимо поместить поглощающую границу, которой соответствует бесконечно глубокая потенциальная яма. Тем самым получаем ситуацию, изображенную на рис. 2 пунктиром.

Среднее время первого достижения равно [3]

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} P(t) dt,$$

где  $P(t) = 1 - Q(t)$ ,  $Q(t) = \int_{\text{гр}}^{\infty} W(x, t) dx$ . Переходя к изображению по Лапласу, получим

$$\langle \tau \rangle = \lim_{p \rightarrow 0} (1-p\hat{Q}(p))/p, \quad \hat{Q}(p) = \int_{41}^{\infty} Y(x) dx.$$

Производя вычисление  $p\hat{Q}(p)$  с помощью (5а), придем к

$$\langle \tau \rangle_{0 \rightarrow 41} = 4t_1(1 + e^\beta)(2 + e^{-\mu}).$$

Заменяя  $\beta \rightarrow \mu$ , найдем среднее время первого достижения точки  $x = 0$  при старте броуновской частицы из точки  $x = 41$ :

$$\langle \tau \rangle_{41 \rightarrow 0} = 4t_1(1 + e^\mu)(2 + e^{-\beta}).$$

Средние времена первого достижения для  $0 \rightarrow 41$  и  $41 \rightarrow 0$ , как и должно быть, не совпадают из-за отличия  $\beta$  от  $\mu$ . Если  $\beta = \mu$ ,

$$\langle \tau \rangle = \langle \tau \rangle_{0 \rightarrow 41} = \langle \tau \rangle_{41 \rightarrow 0} = 4t_1(3 + 2e^\beta + e^{-\beta}) = 24t_1(1 + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{4}\beta^2 + \dots).$$

Отсюда для средней частоты переходов частиц через высокий потенциальный барьер ( $e^\beta \gg 1$ ,  $\beta = E/kT$ ,  $E$  - энергия активации) получаем известное соотношение

$$\nu = \langle \tau \rangle^{-1} = \nu_0 e^{-E/kT}.$$

Для произвольной высоты потенциального барьера

$$\nu = \nu_0 e^{-E/kT} / (1 + \frac{3}{2} e^{-E/kT} + \frac{1}{2} e^{-2E/kT}).$$

### 3. Динамика выхода диффундирующих частиц из потенциальной ямы

1. Обратимся теперь к времененным характеристикам процесса диффузии частиц внутри потенциальной ямы и динамики их выхода из нее. При этом ограничимся наиболее простым примером симметричной потенциальной ямы, изображенной на рис. 1д, и наиболее интересным случаем высоких барьеров ( $e^{-\beta} = \rho \ll 1$ ), т.е. случаем глубокой потенциальной ямы. Для рассматриваемого потенциального профиля с  $N = 1$ ,  $l_1 = \bar{l}_1 = 1$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1 = \beta$ , согласно (8а) в [1] и (5), изображения Лапласа для  $W_0(x, t)$  и  $P_1(t)$  имеют вид

$$Y_0(x) = \frac{B}{2\gamma} \left\{ e^{-\gamma|x|} + R \frac{e^{-\gamma(2l-x)} + e^{-\gamma(2l+x)}}{1 - Re^{-2\gamma l}} \right\}, \quad |x| < l, \quad (11)$$

$$p\hat{P}_1(p) = \frac{(1-R) e^{-\delta}}{2(1-Re^{-2\delta})}, \quad \delta = \gamma l. \quad (12)$$

Определим время выхода диффундирующих частиц из потенциальной ямы. Поскольку  $P_1(0) = 0$ ,  $P_1(\infty) = 1/2$ , то согласно (12), уравнение, определяющее время выхода, примет вид

$$2(1-R)e^{-\delta} = 1-Re^{-2\delta}.$$

Отсюда без труда находим, что

$$\theta = \frac{1}{2} \theta_{\text{св}} \ln^{-2} \left[ \sqrt{1-R+R^2} + 1 - R \right].$$

Если барьеры низкие, то, как и должно быть,  $\theta = \theta_{\text{св}}$ . Время выхода частиц из глубокой ямы равно

$$\theta = t_1/\rho^2 = \frac{1}{2} \theta_{\text{св}} e^{2\beta} = \theta_{2\beta} > \theta_{\text{св}}.$$

Итак, здесь опять появился множитель  $e^{2\beta}$ , свидетельствующий о замедлении диффузии, в данном случае диффузии частиц из потенциальной ямы, которые в конце концов (при  $t \rightarrow \infty$ ) все "должны выбраться" из ямы. Это замедление можно объяснить тем, что частицам, попавшим на высокий барьер, "легче скатиться вниз", чем двигаться по плато барьера, т. е. обратным потоком частиц из бесконечных плато в потенциальную яму.

Чтобы найти временной масштаб, связанный с диффузией частиц внутри глубокой потенциальной ямы, рассмотрим такие значения времени  $t$ , когда  $t \ll \theta_{2\beta}$ , т. е. когда практически все частицы находятся в потенциальной яме и не "ощущают" влияния высоких стенок. Поэтому высоту барьера можно взять сколь угодно большой, положив  $R = 1$ . В такой потенциальной яме с течением времени установится стационарное распределение  $w_0(x) = 1/21$ . Найдем время установления этого распределения, взяв для конкретности значения  $x = \pm 1$ . Из (11) при  $R = 1$  следует, что

$$pY_0(\pm 1) = \frac{1}{21} \frac{2\delta e^{-\delta}}{1 - e^{-2\delta}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{21}.$$

Тем самым время установления стационарного распределения, т. е. время релаксации  $\theta_{\text{рел}}$ , определяется из уравнения

$$4\delta e^{-\delta} = 1 - e^{-2\delta}, \quad \delta = \sqrt{t_1/\theta_{\text{рел}}}.$$

Корень этого уравнения равен  $\delta = 2,18$ . Если рассмотреть процесс установления в точке  $x = 0$ , то тогда значение  $\delta = 1,915$ . Приняв для простоты  $\delta = 2$ , придем к  $\theta_{\text{рел}} = (1/8)\theta_{\text{св}}$  — величине, меньшей времени свободной диффузии.

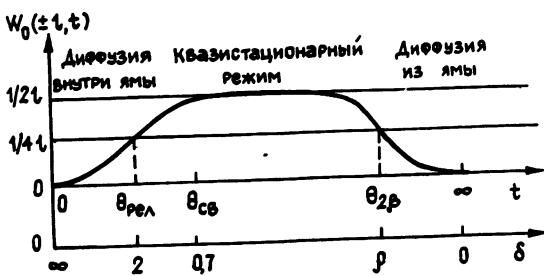


Рис. 3.

2. Тем самым для глубокой потенциальной ямы имеются два резко различных временных масштаба — время релаксации  $\theta_{\text{рел}}$  и время выхода  $\theta_{2\beta} = 4\theta_{\text{рел}}e^{2\beta}$ . На оси времени (и на оси  $\delta = \gamma t$ ), соответственно, имеются три различные области (рис. 3). При  $0 < t \leq \theta_{\text{рел}}$  идет

процесс диффузии внутри ямы. При  $\theta_{\text{рел}} \ll t \ll \theta_{2\beta}$  внутри ямы существует квазистационарное состояние, при котором  $w_0(x, t) = 1/21$ . При  $t \geq \theta_{2\beta}$  происходит диффузия частиц из ямы. Плотность вероятности  $w_0(x, t)$  при таких  $t$  по-прежнему не зависит от  $x$ , являясь постоянной внутри потенциальной ямы и лишь "тает" с ростом  $t$ .

Ситуацию при  $\theta_{\text{рел}} \ll t \ll \theta_{2\beta}$  можно назвать режимом промежуточной асимптотики, когда  $w_0(x, t)$  не зависит от  $t$  (см. рис. 3) и поэтому может быть найдено непосредственно из изображения

$$w_0(x) = pY_0(x, p) = \frac{\delta^2}{\theta_{\text{CB}}} Y_0\left(x, -\frac{\delta^2}{\theta_{\text{CB}}}\right) \quad (13a)$$

аналогично предельным соотношениям (13) в [1]. Только теперь следует полагать, что  $\delta$  удовлетворяет неравенству

$$2 \gg \delta \gg \rho. \quad (13b)$$

В самом деле для  $\delta \ll 1$  и  $\rho \ll 1$  из (11) нетрудно найти, что

$$pY_0(x) = \frac{1}{21} - \frac{\delta}{\delta + \rho}. \quad (14)$$

Отсюда формулы (13) дают  $w_0(x) = 1/21$ . Если, однако, поправку  $\rho/\delta$  в (14) не отбрасывать, а учесть, что из изображения

$$Y_0(x) = -\frac{1}{21p} \left[ 1 - \frac{\rho}{\delta} \right] = -\frac{1}{21} \left[ \frac{1}{p} - \frac{\theta_{\text{CB}}\rho}{(\gamma l)^3} \right]$$

можно найти оригинал плотности вероятности

$$w_0(x, t) = \frac{1}{21} \left[ 1 - \sqrt{2/\pi} \sqrt{t/\theta_{2\beta}} \right]. \quad (15)$$

Эта формула, справедливая при  $\theta_{\text{рел}} \ll t \ll \theta_{2\beta}$ , четко показывает, как именно с ростом  $t$  начинает "таять" квазистационарная плотность распределения частиц в глубокой яме.

При  $t \rightarrow \infty$  на основании предельной теоремы  $w_0(x, \infty) = \lim_{\delta \rightarrow 0} pY_0(x)$ , как и должно быть, из (14) следует, что  $w_0(x, \infty) = 0$ . Математическим условиям  $t \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  соответствует на наших шкалах  $t$  и  $\delta$  условия  $t > \theta_{2\beta}$ ,  $\delta \ll \rho$ . Из (14) следует, что при  $\delta \ll \rho$

$$Y_0(x) = \frac{1}{21p} \frac{\delta}{\rho}.$$

Оригинал соответствующий этому изображению, имеет вид

$$w_0(x, t) = \frac{1}{21} \sqrt{2/\pi} \sqrt{\theta_{2\beta}/t}. \quad (16)$$

Эта формула, справедливая для  $t > \theta_{2\beta}$ , описывает финальное уменьшение плотности вероятности частиц в глубокой потенциальной яме.

3. Проанализируем временные характеристики процесса диффузии из потенциальной ямы исходя из самой плотности вероятности, а не из ее

изображения по Лапласу. Представляя гауссову плотность вероятности в виде  $w_\Gamma(x, t) = (1/2\Gamma) \sqrt{\vartheta/\pi} \exp(-x^2\vartheta/4t^2)$ , где обозначено  $\vartheta = \theta_{cb}/t$ , на основании [1] нетрудно показать, что изображение (11) соответствует следующее точное значение плотности вероятности:

$$w_0(x, t) = \frac{1}{2\Gamma} \sqrt{\vartheta/\pi} e^{-x^2\vartheta/4t^2} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n e^{-n^2\vartheta} \operatorname{ch} \frac{nx\vartheta}{t} \right]. \quad (17)$$

Эта формула справедлива при любых значениях  $t > 0$ ,  $R$ ,  $|x| < 1$  и содержит один временной масштаб  $\theta_{cb}$ . Ограничимся значениями  $t \gg \theta_{cb}$  ( $\vartheta \ll 1$ ), когда уже существует квазистационарное распределение в потенциальной яме, практически не зависящее от  $x$ , вследствие чего положим для простоты  $x = 0$ . В этом случае

$$w_0(0, t) = \frac{1}{2\Gamma} \sqrt{\vartheta/\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n e^{-n^2\vartheta} \right]. \quad (18)$$

Чтобы продвинуться дальше, используем следующую приближенную формулу суммирования:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2\vartheta} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\pi/\vartheta} e^{\alpha^2/4\vartheta} \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}} \right) - 1 \right], \quad (19)$$

которая тем точнее, чем меньше  $\alpha$  и  $\vartheta$ . Практически достаточная точность получается вплоть до  $\alpha = 0,5$  и  $\vartheta = 1$ .

Обозначая  $R = e^{-\varepsilon}$  и используя (19), вместо (18) получим

$$w_0(0, t) = \frac{1}{2\Gamma} e^{\varepsilon^2/4\vartheta} \operatorname{erfc} \left( \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\vartheta}} \right).$$

Для глубокой ямы  $\varepsilon = 2\rho$ , поэтому  $\varepsilon^2/4\vartheta = \rho^2/\vartheta^2 = t/\theta_{cb}$   $e^{2\rho} = t/2\theta_{2\rho}$ . Следовательно, при  $t \gg \theta_{cb}$

$$w_0(0, t) = \frac{1}{2\Gamma} \exp \left( -\frac{t}{2\theta_{2\rho}} \right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{t/2\theta_{2\rho}} \right). \quad (20)$$

Как легко проверить, для  $t \ll \theta_{2\rho}$  и для  $t \gg \theta_{2\rho}$  формула (20) переходит, соответственно, в формулы (15) и (16), которые, следовательно, являются точными. Кроме того, легко убедиться, что (20) есть ни что иное, как оригинал изображения, заданного формулой (14).

В заключение заметим, что полученный ранее при анализе изображения по Лапласу временной масштаб  $\theta_{2\rho}$  возник теперь из точной формулы (17) для плотности вероятности, подтверждая тем самым правомерность предложенного приближенного метода нахождения временных характеристик функции по ее изображению по Лапласу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 5. С.
2. Kramers H.A.//Physica. 1940. V. 7. N 4. P. 284.
3. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М. : Сов. радио, 1961.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11 июля 1990 г.

### DIFFUSION OVER THE SHARP POTENTIAL BARRIERS.

#### 2. TEMPORAL SCALES OF DIFFUSION.

*A. N. Malakhov*

Time characteristics of one-dimensional diffusion process over the sharp potential barriers are studied. A method of determination of diffusion process temporal scales by means of its Laplace transformation is proposed. A set of examples for the diffusion over barriers having the finite width is examined. Dependence of temporal scale of diffusion over barriers upon their altitude and width is discussed. The conditions are determinated under which the temporal scales of diffusion over high potential barriers depends exponentially on the barrier altitude. The dynamics of escape of diffusing particles from a potential hole is considered. The comparison with exact results has shown an efficiency of the method suggested.

УДК 621.372.8

**ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ МОД В ВОЛНОВОДЕ  
С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

A. С. Старков

Получены приближенные выражения для коэффициентов рассеяния мод в двух- и трехметровых волноводах. Обратная задача восстановления формы волновода по матрице рассеяния сведена к решению сингулярного интегрального уравнения типа Коши.

Задача о рассеянии волн в волноводах с неровной границей встречается во многих разделах физики и имеет важные практические приложения [1, 2]. В то же время обратная задача восстановления формы волновода по известным коэффициентам рассеяния мод различных номеров исследована недостаточно. Среди приближенных аналитических методов, предложенных для решения задачи рассеяния, наиболее результативным представляется метод малых возмущений. Этот метод позволяет получить систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд распространяющихся мод [3, 4]. В данной работе для нахождения амплитуды волнового поля на границе используется интегральное уравнение, преимуществом которого по сравнению с методом малых возмущений является более широкая область применимости. В двумерной задаче полученное интегральное уравнение позволяет также полностью исследовать свойства коэффициентов рассеяния в комплексной области и свести решение обратной задачи к матричной задаче Римана, которая, в свою очередь, сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши.

В декартовой системе координат  $(\xi, \zeta)$  рассмотрим плоский волновод с днородным заполнением и идеально отражающимися границами  $\zeta = 0$  и  $\zeta = d + f(\xi)$ . Функция  $f(\xi)$ , описывающая неровность границы, предполагается гладкой и достаточно быстро стремящейся при  $\xi \rightarrow \pm \infty$  к нулю. Пусть  $l$  - характерный масштаб изменения функции  $f(\xi)$ , т. е. характерный горизонтальный (в направлении оси  $\xi$ ) размер неровности границы, а  $k$  - волновое число. Введем безразмерные растянутые координаты  $z = k\zeta$ ,  $x = \zeta/l$ , приведенную толщину волновода  $H(x) = D + F(x)$ , где  $D = kd$ ,  $F(x) = kf(\xi)$ , и параметр  $p = kl$ , характеризующий изменение толщины волновода на расстояниях порядка длины волны.

Для простоты ограничимся случаем скалярных полей  $U(x, z)$ , удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + U = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, 0) = 0, \quad U(x, H(x)) = 0. \quad (2)$$

Дополнительно предположим, что толщина волновода не принимает критических значений, соответствующих появлению или исчезновению

моды с номером  $m$ :  $H(x) \neq \pi(m - 1/2)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Поле возбуждается приходящей из  $-\infty$   $n$ -й собственной модой левой регулярной части волновода

$$U_n(x, z) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} u_n^+(x, z) + \sum_{m=1}^{\infty} r_{nm} u_m^-(x, z), \quad (3)$$

где  $r_{nm}$  - коэффициенты обратного рассеяния  $n$ -й моды в моду с номером  $m$ . Здесь  $u_n^{\pm}(x, z) = \cos \pi(n - 1/2)z/D \exp(\pm ip\lambda_n x)$  есть мода регулярного волновода толщины  $D$ , бегущая в сторону возрастания ( $u_n^+$ ) или убывания координаты  $x$ , а  $\lambda_n = \sqrt{1 - \pi^2(n-1/2)^2 D^{-2}}$  есть собственное значение соответствующей поперечной задачи. Для отрицательных значений индекса  $n$  определим  $\lambda_n$  по формуле  $\lambda_n = -\lambda_{-n}$ .

Тогда для мод регулярного волновода будет выполнено соотношение  $u_n^- = u_{-n}^+$ .

После прохождения нерегулярного участка падающая волна превращается в суперпозицию мод правого регулярного волновода

$$U_n(x, z) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} u_m^+(x, z), \quad (4)$$

где  $t_{nm}$  - коэффициенты рассеяния вперед  $n$ -й моды в моду с номером  $m$ .

Цель настоящей работы - исследование зависимости коэффициентов прямого и обратного рассеяния от аналитических свойств функции  $z = F(x)$ , а также решение обратной задачи восстановления толщины волновода по известной зависимости матриц  $R = \{r_{nm}\}$  и  $T$  от параметра  $p$ .

Обозначим значение волнового поля на границе  $z = 0$  через  $A_n(x) = U_n(x, 0)$ . Тогда значение волнового поля в произвольной точке восстанавливается по  $A_n(x)$  при помощи интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} U_n(x, z) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} \exp(ip\lambda x + i\sqrt{1 - \lambda^2} z) \hat{A}_n(\lambda) d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_-} \exp(ip\lambda x - i\sqrt{1 - \lambda^2} z) \hat{A}_n(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\hat{A}_n(\lambda) = p/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\lambda x} A_n(x) dx$  - обратное преобразование Фурье от  $A_n(x)$ . На комплексной плоскости  $\lambda$  проведены разрезы от точек  $\lambda = \pm 1$  и ветвь радикала выбрана так, чтобы при вещественных  $-1 < \lambda < 1$  выполнялось неравенство  $\operatorname{Re} \sqrt{1 - \lambda^2} > 0$ . Контуры  $\Gamma_{\pm}$  и значения  $\arg \sqrt{1 - \lambda^2}$  на берегах разрезов изображены на рис. 1.

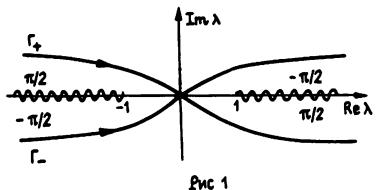
После вычисления интеграла по  $\lambda$  соотношение (5) может быть переписано в виде

$$U_n(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z} (x - t, z) A_n(t) dt, \quad (6)$$

где  $G(x, z)$  – функция Грина верхней полуплоскости  $G(x, z) = (1/2) N_0 \times (\sqrt{p^2 x^2 + z^2})$ ,  $N_0(x)$  – цилиндрическая функция Неймана.

Функция  $U_n(x, z)$ , определенная равенствами (5), (6), удовлетворяет уравнению (1) и первому из граничных условий (2). Для выполнения второго граничного условия потребуем, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z} (x - t, H(x)) A_n(t) dt = 0. \quad (7)$$



Интегральное уравнение (7) для неизвестной функции  $A_n(t)$  получено в результате переноса значений волнового поля с границы  $z = 0$  на границу  $z = H(x)$  и является уравнением первого рода. Для его регуляризации введем интегральный оператор  $K$  с ядром  $K(x, t)$ , который по значению волнового поля на невозмущенной границе  $z = D$  восстанавливает поле при  $z = 0$ .

Действие оператора  $K$  на произвольную

гладкую функцию  $g(x)$  в случае условия Неймана на границе  $z = 0$  определяется следующим образом:

$$Kg = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \exp(ip\lambda_m |x - t|) g(t) dt,$$

$$\gamma_m = i(-1)^{m+1} \pi p (m - 1/2) / D^2.$$

Заметим, что оператор  $K$  задан с точностью до слагаемых вида  $c_j \exp(ip\lambda_j x)$ , где  $c_j$  – произвольные постоянные,  $j = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$ . Подействуем оператором  $K$  на левую часть уравнения (7). Учитывая асимптотику волнового поля на  $-\infty$  (3), получаем интегральное уравнение относительно  $A_n(x)$ :

$$A_n(x) = a_n^+(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \exp(i\lambda_m p |x - t|) g_m(t) dt, \quad (8)$$

где  $a_n^+(x) = u_n^+(x, 0) = \exp(ip\lambda_n x)$  есть значение на границе  $z = 0$  регулярной моды, а

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N(x, t) A_n(t) dt, \quad N(x, t) = (1/2) \left[ \frac{D}{\sqrt{(x-t)^2 + p^{-2} D^2}} \times \right. \\ \left. \times N_1 \left( \sqrt{p^2 (x-t)^2 + D^2} \right) - \frac{H(x)}{\sqrt{(x-t)^2 + p^{-2} H^2(x)}} N_1 \left( \sqrt{p^2 (x-t)^2 + D^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Полученное интегральное уравнение (8) является точным и справедливо для любых непрерывных границ  $z = H(x)$ . Перейдем к исследованию этого уравнения. Вначале с его помощью получим интегральное представление для коэффициентов  $C_{nm}$  разложения  $U_n(x, z)$  по модам регулярной задачи:

$$U_n(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{nm}(x) u_m^+(x, z).$$

Аналогичное разложение для значений волнового поля на границе  $z = 0$  имеет вид

$$A_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{nm}(x) a_m^+(x). \quad (10)$$

При сравнении (10) с правой частью уравнения (8) находим

$$C_{nm} = \delta_{nm} + \int_{-\infty}^x \gamma_m \exp(-i\lambda_m pt) g_n(t) dt, \quad m > 0,$$

$$C_{nm} = \int_x^{\infty} \gamma_{-m} \exp(-i\lambda_m pt) g_n(t) dt, \quad m < 0.$$

Коэффициенты рассеяния вперед и назад находятся из полученных формул при стремлении  $x$  к  $+\infty$  или  $-\infty$ :

$$r_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_m \exp(i\lambda_m pt) g_n(t) dt, \quad (11)$$

$$t_{nm} = \delta_{nm} + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_m \exp(-i\lambda_m pt) g_n(t) dt.$$

Применим теперь для решения уравнения (8) метод итераций. В качестве начального приближения возьмем  $A_{n0} = a_n^+$ , а последующие определим рекуррентными формулами

$$A_{nj}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) g_{n, j-1}(t) dt, \quad g_{nj}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N(x, t) A_{nj}(t) dt.$$

По индукции нетрудно получить оценку

$$A_{nj}(x) \leq \frac{1}{j!} \left[ c(n - 1/2) \int_{-\infty}^x |F(t)| dt / D \right]^j,$$

где  $c$  — некоторая постоянная, не зависящая от свойств волновода.

Отсюда вытекает, что сумма ряда  $A_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(x)$  ограничена

$$|A_n(x)| \leq \exp \left[ c(n - 1/2) \int_{-\infty}^x |F(t)| dt / D \right].$$

Из приведенных оценок следует, что для малых значений параметра Рэлея  $\epsilon = (n - 1/2) \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt / D$  ряд итераций является асимптотическим и  $A_{nj}(x) = O(\epsilon^j)$ .

Для нахождения первой поправки, пропорциональной  $\epsilon$ , достаточно вычислить интеграл (9) при  $A_n(t) = a_n^+(t)$ . Для этого следует записать ядро (9) в виде интеграла Фурье:

$$g_n(x) = p/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_{\pm}} \exp(i\lambda p(x-t)) [\cos \sqrt{1-\lambda^2} H(x) - \cos \sqrt{1-\lambda^2} D] A_n(t) d\lambda dt. \quad (12)$$

Интеграл по  $\lambda$  понимается следующим образом. По формуле Эйлера косинус представляется в виде полусуммы двух экспонент так, как это было сделано в (5), и каждая экспонента интегрируется по своему контуру —  $\Gamma_+$  или  $\Gamma_-$ , на котором она убывает. При подстановке  $a_n^+$  вместо  $A_n$  в интеграл (12) и замене пределов интегрирования получаем

$$A_n(x) = a_n^+(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_m \exp(i\lambda_m p|x-t| + i\lambda_m pt) \times \sin[\pi(n - 1/2) F(t)/D] dt + O(\epsilon^2). \quad (13)$$

Отсюда вытекают следующие приближенные формулы для коэффициентов рассеяния вперед и назад:

$$r_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \gamma_m \exp(ip t (\lambda_n + \lambda_m)) \sin[\pi(n - 1/2) F(t)/D] dt,$$

$$t_{nm} = \delta_{nm} + (-1)^n \gamma_m \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ip t (\lambda_n - \lambda_m)) \sin[\pi(n - 1/2) F(t)/D] dt.$$

Обозначим через  $Q(\lambda)$  обратное преобразование Фурье от  $\sin[\pi(n-1/2) \times F(x)/D]$ :

$$Q(\lambda) = p/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda px} \sin[\pi(n - 1/2) F(x)/D] dx. \quad (14)$$

Тогда для коэффициентов  $r_{nm}$  и  $t_{nm}$  получаем

$$t_{nm} = \delta_{nm} + (-1)^{n+m} \pi^2 (2m - 1) Q(\lambda_m - \lambda_n) / (i\lambda_n D^2) + O(\varepsilon^2),$$

(15)

$$r_{nm} = (-1)^{n+m} \pi^2 (2m - 1) Q(-\lambda_m - \lambda_n) / (i\lambda_n D^2) + O(\varepsilon^2).$$

Обсудим полученные результаты. Вклад в коэффициенты рассеяния дают только те Фурье-компоненты неровностей границы, которые связаны с волновыми числами условиями Брэгга  $\lambda = -\lambda_m - \lambda_n$ ,  $\lambda = \lambda_m - \lambda_n$ . Для гладких возмущений  $F(x)$ , таких, что  $Q(\lambda)$  концентрируется вблизи точки  $\lambda = 0$ , коэффициенты рассеяния назад, в общем случае, много меньше коэффициентов рассеяния вперед  $|r_{nm}| \ll |t_{nm}|$ . Наибольшее значение коэффициента отражения достигается тогда, когда сумма  $\lambda_m + \lambda_n$  принимает минимальное значение, т. е. для моды наибольшего номера  $n_0$ :  $n = n_0$ ,  $m = n_0$ . Коэффициенты рассеяния вперед существенно отличны от нуля, только если величины  $\lambda_m - \lambda_n$  достаточно малы, причем коэффициенты рассеяния в моды с номерами, превосходящими  $n$ , больше, чем аналогичные коэффициенты номеров  $m < n$ . Если же  $Q(\lambda)$  сосредоточена около ненулевой точки  $\lambda = \lambda_0$ , то коэффициенты  $t_{nm}$  и  $r_{nm}$  зависят от того, насколько близко значения  $\lambda_m - \lambda_n$  и  $\lambda_m - \lambda_n$ , соответственно, приближены к  $\lambda_0$ .

Отметим также, что полученные соотношения удобны для статистического усреднения и расчета различных статистических характеристик мод.

Сравним приведенные формулы с формулами метода малых возмущений. Стандартная процедура переноса граничных условий с границы  $z = H(x)$  на прямую  $z = D$  [1] также приводит к соотношениям (15), в которые вместо  $Q(\lambda)$  следует поставить  $Q_1(\lambda) = \pi(n - 1/2) \times$   
 $\times F(\lambda)/D$ . Это приближение может быть получено из (14), если в разложении в ряд Маклорена  $\sin \alpha$  по степеням  $\alpha$  ограничиться при малых  $\alpha$  первым членом. Покажем, что указанная замена  $\sin \alpha$  на  $\alpha$  в формуле (14) даже при малых  $\alpha$  может приводить к существенной потере точности в определении коэффициентов рассеяния. Пусть функция  $F(x)$  является мероморфной в комплексной плоскости  $x$ . Тогда значение преобразования Фурье определяется полюсами  $F(x)$ . Различие между  $Q(\lambda)$  и  $Q_1(\lambda)$  будет мало, если мало преобразование Фурье от следующего члена ряда Маклорена  $\sin[\pi(n - 1/2) F(x)/D]$ , пропорционального  $F^3(x)$ .

Если рассмотреть простейший случай, когда у функции  $F(x)$  только два комплексно-сопряженных полюса  $F(x) = F_0/(x^2 + 1) = F_0[(\xi/1)^2 + + 1]^{-1}$ , то нетрудно убедиться в том, что условие близости  $Q(\lambda)$  и  $Q_1(\lambda)$  имеет вид  $p(n - 1/2)F_0/D \ll 1$ . Здесь  $F_0$  — наибольшая высота неровности.

Таким образом, метод малых возмущений и интегральное уравнение (8) дают одинаковые значения коэффициентов рассеяния для мелкомасштабных возмущений. Если же параметр  $p$  достаточно велик (т. е. или неровности являются крупномасштабными, или длина волны мала) и указанное выше неравенство не выполнено, то метод малых возмущений неприменим.

Перейдем теперь к трехмерной задаче рассеяния, когда толщина волновода является функцией двух переменных  $x$  и  $y$ :  $H = H(x, y) = D + F(x, y)$ . Наряду с декартовой системой координат будем исполь-

зователь связанный с ней полярную  $(\rho, \theta)$ :  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Пусть по-прежнему со стороны отрицательных  $x$  набегает  $n$ -я мода регулярного волновода с плоским фронтом  $u_n^+(x, z) = \cos[\pi(n - 1/2)z/D] \times \exp(ip\lambda_n x)$ . Тогда вне нерегулярного участка

$$U_n(x, y, z) = u_n^+(x, z) + \sum_{m=1}^{\infty} s_{nm}(x, y) \cos[\pi(m - 1/2)z/D].$$

Коэффициенты рассеяния  $s_{nm}$  представим в виде

$$s_{nm}(x, y) = \sqrt{2/\pi p\lambda_m \rho} \exp(ip\lambda_m \rho - i\pi/4) \sigma_{nm},$$

где величину  $\sigma_{nm}$  естественно назвать амплитудой рассеяния  $n$ -й моды в моду с номером  $m$ .

Повторяя почти дословно рассуждения, приведенные при выводе уравнения (8), для значений волнового поля на границе  $z=0$   $A_n(x, y)$  получаем следующее интегральное уравнение:

$$A_n(x, y) = a_n^+(x) + \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m H_0^{(1)}(p\lambda_n r) g_n(t, s) dt ds, \quad (16)$$

где  $r = \sqrt{(x - t)^2 + (y - s)^2}$  – расстояние между точкой наблюдения и точкой интегрирования, а функция

$$g_n(x, y) = p^2/(4\pi^2) \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Gamma_{\pm}} \exp\{ip[\lambda(x - t) + \mu(y - s)]\} [\cos\sqrt{1 - \lambda^2 - \mu^2} H(x, y) - \cos\sqrt{1 - \lambda^2 - \mu^2} D] A_n(t, s) d\lambda d\mu dt ds \quad (17)$$

равна значению на границе  $z = H(x, y)$  волнового поля, нормальная производная которого при  $z = 0$  обращается в нуль, а само поле при  $z = 0$  есть  $A_n(x, y)$ . Интегралы по  $\lambda$  и  $\mu$  понимаются в виде суммы двух интегралов по контурам  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  и легко могут быть вычислены при переходе в полярную систему координат, связанную с  $\lambda$  и  $\mu$ . Функцию  $g_n(x, y)$  можно представить в виде двойного интеграла, если воспользоваться формулой Грина вида (6), в которой следует двумерную функцию Грина  $G(x - t, z)$  заменить на аналогичную трехмерную  $G(x - t, y - s, z)$ .

Будем считать, что нерегулярный участок имеет конечные размеры ( $F(x, y) = 0$  при  $|x| > L$ ,  $|y| > L$ ), и исследуем интегральное уравнение (16) на больших расстояниях, т. е. будем предполагать, что  $pL^2/\rho \ll 1$ . В этом случае, во-первых, можно заменить функцию Ханкеля под знаком интеграла на свою асимптотику для больших значений аргумента

$$H_0^{(1)}(p\lambda_n r) = \sqrt{2/\pi p\lambda_n r} \exp(ip\lambda_n r - i\pi/4)[1 + O(1/p\lambda_n r)],$$

а во-вторых, использовать следующее приближение для расстояния:

$$r = \rho - t \cos \theta - s \sin \theta + O(L^2/\rho).$$

Применим к интегральному уравнению метод итераций и пренебрежем слагаемыми порядка  $(\rho\rho)^{-3/2}$  и  $pL^2/\rho$ . Тогда для амплитуды рассеяния получаем следующую формулу:

$$\sigma_{nm} \approx \gamma_m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\lambda_m p(t \cos \theta + s \sin \theta) + ip\lambda_n t] \times \\ \times \sin[\pi(n - 1/2)F(t, s)/D] dt ds.$$

Так же как и в двумерном случае, введем функцию

$$Q(\lambda, \mu) = p^2/(4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(\lambda x + \mu y)} \sin[\pi(n - 1/2) F(x, y)/D] dx dy,$$

являющуюся обратным преобразованием Фурье от функции  $\sin[\pi(n - 1/2) \times F(x, y)/D]$  и характеризующую спектр неровностей границы. При помощи этой функции амплитуда рассеяния может быть записана в виде

$$\sigma_{nm}(\theta) = i\pi^2(m - 1/2) Q(-\lambda_n + \lambda_m \cos \theta, \lambda_m \sin \theta)/D^2[1 + O(\varepsilon)].$$

Для амплитуд прямого ( $\theta = 0$ ) и обратного ( $\theta = \pi$ ) рассеяния имеем

$$\sigma_{nm}(0) = i\pi^2(m - 1/2)(-1)^m Q(-\lambda_n + \lambda_m, 0)/D^2[1 + O(\varepsilon)],$$

$$\sigma_{nm}(\pi) = i\pi^2(m - 1/2)(-1)^m Q(-\lambda_n - \lambda_m, 0)/D^2[1 + O(\varepsilon)],$$

т. е. эти амплитуды определяются формулами, которые аналогичны формулам (15), полученным в плоской задаче, если в качестве эффективной толщины двумерного волновода  $H(x)$  взять усредненное значение толщины трехмерного волновода:

$$H(x) = D/(\pi(n - 1/2)) \arcsin \int_{-\infty}^{\infty} \sin[H(x, y)\pi(n - 1/2)/D] dy \approx \\ \approx D + \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy.$$

Для малых параметров Рэлея  $\varepsilon$  можно заменить функцию  $Q(\lambda, \mu)$  на следующее приближенное выражение:

$$Q_1(\lambda, \mu) = \pi(n - 1/2) \hat{F}(\lambda, \mu)/D.$$

Таким образом, и в трехмерном случае в первом приближении метода малых возмущений вклад в коэффициенты рассеяния дают соответствующие Фурье-компоненты неровностей границы. Более точно коэффициенты рассеяния определяются Фурье-компонентами функции

$$\sin[\pi(n - 1/2) F(x, y)/D].$$

Перейдем теперь к обратной задаче восстановления функции  $H(x)$ , описывающей неровность границы по известным коэффициентам рассеяния. Рассмотрим только двумерный случай.

Основную роль при решении обратной задачи для дифференциального уравнения второго порядка [5] играет факт аналитичности в комплексной плоскости  $p$  функций Иоста, аналогом которых являются функции  $A_n(x)$ , вообще говоря, не допускают никакого аналитического продолжения с вещественной оси  $p$ . Ввиду этого наряду с задачей (1) – (4) рассмотрим также следующую задачу, которая состоит в нахождении решений  $V_n(x, z)$  уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), начальному условию

$$V_n(x, z) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} u_n^+(x, z) + \sum_{m \in M_2} R_{nm} u_m^+(x, z) \quad (18)$$

и условию ограниченности

$$\max_x |V_n(x, z) \exp(-ip\lambda_n x)| < \text{const.} \quad (19)$$

Подмножества  $M_1$  и  $M_2$  множества целых чисел задаются неравенствами:  $m \in M_1$ , если  $\operatorname{Im} p(\lambda_n - \lambda_m) \leq 0$ ;  $m \in M_2$ , если  $\operatorname{Im} p(\lambda_n - \lambda_m) > 0$ .

Можно показать, что решение задачи (1), (2), (18), (19) существует и единствено, если и действительная и мнимая части комплексного числа  $p$  отличны от нуля. В общем случае для некоторого дискретного набора чисто действительных или чисто мнимых значений параметра  $p$  решение задачи (1), (2), (18), (19) может быть не единственным из-за существования особых решений, убывающих при  $x \rightarrow \pm \infty$  быстрее, чем  $\exp(ip\lambda_n x)$ . Эти выделенные решения и особые значения параметра  $p$  являются аналогом собственных функций и собственных значений задачи квантово-механического рассеяния [5]. В дальнейшем будем предполагать, что такие особые значения параметра  $p$  отсутствуют. Это предположение позволяет несколько упростить последующие выкладки. Для действительных значений параметра  $p$  решения задач (1) – (4) и (1), (2), (18), (19) совпадают.

Условие (18) означает, что при  $x \rightarrow -\infty$  падающее поле равно сумме полей  $n$ -й моды левого регулярного волновода и более быстро убывающих мод. Из условия ограниченности вытекает, что после прохождения нерегулярного участка на правом регулярном конце волновода полное поле есть сумма мод, возрастающих не быстрее, чем мода регулярного волновода с номером  $n$ :

$$V_n(x, z) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{m \in M_1} T_{nm} u_m^+(x, z).$$

По функции  $b_n(x) = V_n(x, 0)$  определим функцию  $\psi_n(x) = b_n(x) \times \exp(ip\lambda_n x)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\psi_n(x) = 1 + \int_{-\infty}^x \sum_{m \in M_1} \gamma_m \exp(ip(\lambda_m - \lambda_n)(x - t)) \varphi_n(t) dt +$$

$$+ \int_{x-m}^{\infty} \sum_{n \in N_2} \gamma_n \exp[i p(\lambda_n - \lambda_m) (x-t)] \varphi_n(t) dt, \quad (20)$$

$$n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\varphi_n(x) = p/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{ip\lambda(x-t)} [\cos \sqrt{1 - (\lambda + \lambda_n)^2} H(x) - \\ - \cos \sqrt{1 - (\lambda + \lambda_n)^2} D] A_n(t) d\lambda dt.$$

Нетрудно проверить, что при выходе в комплексную плоскость  $p$  экспоненты в ядре интегрального уравнения (20) остаются ограниченными и, более того, затухающими, а функция  $\varphi_n(t)$  остается ограниченной. Следовательно, функция  $\varphi_n(x, p)$  будет аналитической функцией  $p$  во всей комплексной плоскости за исключением набора прямых  $P = \{p_{ij}\}$ , определяемых уравнениями  $\operatorname{Im} p\lambda_j = \operatorname{Im} p\lambda_i$ ,  $i, j = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$ . Прямая  $p_{ij}$  проходит через начало координат параллельно отрезку, соединяющему точки  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$ . Число этих прямых бесконечно, и они сгущаются при приближении к мнимой оси.

Введем функцию  $W_n(x, z)$  — решение задачи (1), (2) с начальным условием вида

$$W_n(x, z) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} u_n^+(x, z), \quad n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

Это решение, вообще говоря, не ограничено и при  $x \rightarrow +\infty$  имеет асимптотику

$$W_n(x, z) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m^+(x, z) S_{nm}.$$

Из коэффициентов  $S_{nm}$  составим матрицу  $S$ , а значение функции  $W_n(x, z)$  на границе обозначим через  $\alpha_n(x) = W_n(x, 0)$ .

Указанные аналитические свойства функций  $\psi_j(x)$  позволяют использовать эти функции при решении обратной задачи. Введем вектор-столбцы  $B(x, p) = (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_1, \dots)^T$ ,  $A(x, p) = (\dots, \alpha_{-2},$

$\alpha_{-1}, \alpha_1, \dots)^T$ ,  $\Psi(x, p) = (\dots, \psi_{-2}, \psi_{-1}, \psi_1, \dots)^T$ , значок  $T$  обозначает транспонирование. Введенные векторы связаны соотношениями

$$B = \exp(ip\Lambda x) \Psi(x, p), \quad A = (E + R)B, \quad (21)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица,  $\Lambda = \operatorname{diag} (\dots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ,  $E$  — единичная матрица, а элементы матрицы  $R$  определены в асимптотике (18). Если устремить  $x$  к  $+\infty$ , то получим формулу, связывающую матрицы  $S, R, T$ :

Матрицы  $R$  и  $T$  являются треугольными в следующем смысле: если  $R_{ij} \neq 0$ , то  $R_{ji} = 0$  и, более того, диагональные элементы матрицы  $R$  равны нулю:  $R_{ii} = 0$ . Перечисленные свойства матриц позволяют однозначно находить их из равенства (22) по известной матрице  $S$  [6].

Для практических целей естественно считать матрицы  $R$ ,  $S$ ,  $T$  и векторы  $A$ ,  $B$ ,  $\Psi$  конечномерными.

Будем обозначать предельные значения векторов и матриц при стремлении к  $p_{ij}$  с разных сторон индексами  $\pm$ , а значения на самой прямой - значком 0, например,

$$B_{ij}^{\pm}(x, p) = \lim_{\arg p \rightarrow \arg p_{ij} \pm i0} B(x, p),$$

где  $\arg p_{ij}$  - угол, образованный прямой  $p_{ij}$  с действительной осью.

Тогда функция  $\Psi$  восстанавливается по своим скачкам  $\Psi_{ij}^+ - \Psi_{ij}^-$  на прямых  $p_{ij}$  интегралом типа Коши [7]:

$$\Psi(x, p) = I + \frac{1}{2\pi i} \sum_p \int_{p_{ij}} \frac{\Psi_{ij}^+(x, q) - \Psi_{ij}^-(x, q)}{q - p} dq,$$

$I$  - столбец из единиц.

Теперь достаточно выразить скачки  $\Psi$  через значения матрицы обратного рассеяния  $R$ . Зафиксируем прямую  $p_{ij}$ . При стремлении  $\arg p$  к  $\arg p_{ij} \pm i0$  соотношения (21) принимают вид

$$B_{ij}^{\pm} = (E + R_{ij}^{\pm}) A^0, \quad B_{ij}^0 = (E + R_{ij}^0) A^0.$$

Отсюда можем выразить предельные значения векторов

$$B_{ij}^{\pm} = (E + R_{ij}^{\pm}) (E + R_{ij}^0)^{-1} B_{ij}^0 \equiv \beta_{ij}^{\pm} B_{ij}^0$$

и

$$\Psi_{ij}^+ - \Psi_{ij}^- = e^{-ip\Lambda x} (\beta_{ij}^+ - \beta_{ij}^-) e^{ip\Lambda x} \Psi_{ij}^0.$$

В результате получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\Psi(x, p) = I + \frac{1}{2\pi i} \sum_p \int_{p_{ij}} \frac{e^{-ip\Lambda x} (\beta_{ij}^+ - \beta_{ij}^-) e^{ip\Lambda x} \Psi_{ij}^0(q)}{q - p} dq. \quad (23)$$

Подобные уравнения исследовались в [6], где указаны условия, обеспечивающие существование и единственность их решений.

Таким образом, для решения обратной задачи необходимо знать поведение матрицы обратного рассеяния  $R$  при всех комплексных значениях параметра  $p$  (точнее, на всех прямых  $p_{ij}$ ), или поскольку параметр  $p$  пропорционален частоте, то матрицу  $R$  необходимо знать для комплексных значений частоты. Полный набор этих данных вряд ли может быть получен экспериментально. К тому же коэффициенты отражения для затухающих мод трудно получить с достаточной точностью. Поэтому при проведении практических расчетов имеет смысл ограничиться только распространяющимися волнами ( $\operatorname{Im} \lambda_n = 0$ ) и их взаимным преобразованием. Тогда остается только одна прямая  $p_{ij}$  — действительная ось. В этом случае для нахождения величин, входящих в интегральное уравнение (23), достаточно знать либо матрицу  $S$ , либо матрицы  $R$  и  $T$  только на действительной оси.

Теперь опишем процесс восстановления функции  $F(x)$ , описывающей неровность границы, по известному решению  $\Psi_n(x, p)$  интегрального уравнения (23). Вначале находим  $A_n(x, p) = \Psi_n(x, p) \exp(ip\lambda_n x)$ . Затем по формуле (6) строим волновое поле  $U_n(x, z)$  и его значение на прямой  $z = D$ :  $g_n(x) = U_n(x, D)$ . Для малых значений параметра Рэлея  $\epsilon$  функция  $F(x)$  связана с  $g_n(x)$  формулой

$$g_n(x) = (-1)^n \sin [\pi(n - 1/2) F(x)/D] + O(\epsilon^2).$$

Для  $\epsilon$  порядка единицы или больших удобно находить  $F(x)$  по формуле

$$F(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\pi(n - 1/2)}{\sqrt{1 - [(1/ip)(d/dx) \ln A_n(x, p)]^2}},$$

вытекающей из ВКБ асимптотики  $A_n(x)$  при больших  $p$ :

$$A_n(x) \sim \exp \left( ip \int_{-\infty}^x \sqrt{1 - \pi^2(n - 1/2)^2 H^{-2}(t)} dt \right).$$

В заключение отметим, что полученные в работе формулы могут быть использованы при расчете волноводов, обеспечивающих заданные коэффициенты рассеяния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
2. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

3. Долин Л. С., Нечаев А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 11. С. 1337.
4. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г., Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 8. С. 979.
5. Захаров В. Е., Манаков С. В. и др. Теория солитонов. - М.: Наука, 1980.
6. Beals R., Coifman R.R.// Commun. on Pure and Appl. Math. 1984. V. 37. P. 39.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977.

Ленинградский технологический  
институт холодильной  
промышленности

Поступила в редакцию  
21 марта 1990 г.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF MODE  
SCATTERING IN ROUGH-SURFACED WAVEGUIDES

A. S. Starkov

The approximate expressions for scattering coefficients in two- and three-dimensional waveguides are obtained. Inverse problem of waveguides form restoration on scattering matrix is reduced to a singular integral equation of the Caushy type.

## Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 550.388.2

## ВЛИЯНИЕ ТЕРМИНАТОРА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ИОНОГРАММ НАКЛОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ НА ПРОТЯЖЕННОЙ ТРАССЕ

А. Н. Баранец, Т. Д. Борисова, В. А. Бубнов

По экспериментальным данным наклонного зондирования (НЗ) ионосфера исследовались закономерности изменения характеристик распространения декаметровых радиоволн. Трасса, оборудованная аппаратурой НЗ, по своим характеристикам является субавроральной, широтного направления, протяженностью 9000 км. Экспериментальные измерения проводились в годы максимума (1982 г.) и минимума (1987 г.) солнечной активности. Общий объем экспериментальных измерений примерно 20000 ионограмм НЗ. Вариации характеристик распространения радиоволн исследовались в зависимости от времени суток, сезона, уровня солнечной и магнитной активностей [1, 2]. По ионограммам НЗ изучались такие характеристики распространения декаметровых радиоволн, как диапазон рабочих частот, определяемый максимальной (МНЧ) и наименьшей наблюдаемой частотами (ННЧ), модовая структура, относительные изменения группового времени распространения радиоволн между модами на данной частоте и в зависимости от частоты для конкретного мода (наклон треков на ионограмме НЗ).

По результатам сопоставительного анализа численных и экспериментальных ионограмм НЗ для однотипных ионосферных условий была проведена коррекция параметров модели слоя F2 ионосферы [3]. Наибольшая эффективность коррекции была получена для спокойных геомагнитных условий, для времени суток, когда вся трасса полностью освещена или вся находится в ночи [4]. Проведенная апробация разработанной коррекции модели ионосферы показала удовлетворительное соответствие численных и измеренных характеристик распространения радиоволн на других трассах [5].

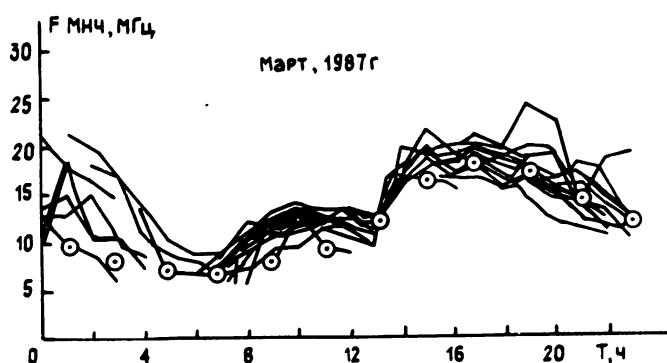


Рис 1

Наибольшие отличия при спокойных гелиогеофизических условиях между численными и экспериментальными ионограммами НЗ наблюдались в периоды с 9 до 13 ч МДВ (московское декретное время) во все сезоны. По экспериментальным данным в это время суток наблюдался локальный максимум в зависимости изменения МНЧ от времени суток (МНЧ ( $T$ )), который отсутствует по результатам вычислений. На рис. 1 приведен пример вариаций экспериментальных значений МНЧ ( $T$ ) (сплошные кривые) в течение суток (измерения проводились в марте 1987 г.). Одновременно нанесены результаты численного моделирования МНЧ ( $T$ ) для медианных ионосферных условий по модели [6] (кружочки,  $\omega = 70$ ).

Численные расчеты траекторий распространения радиоволн для данного времени суток показали возможность ввода в ионосферный волновод радиоволн с частотами  $f_p > \text{МПЧ}_{\text{модели}}$  скачкового механизма.

Ввод в ионосферный волновод происходит на регулярных ионосферных градиентах вдоль трассы. Для медианной модели ионосферы [3] в это время суток величина продольных градиентов распределения параметров слоя  $F2$  составляет  $\Delta H_{\text{m}} F2 / \Delta D \sim 40 \pm 50 \text{ км/1000 км}$ ,  $\Delta f_0 F2 / \Delta D \sim$

$\sim 1 \text{ МГц/1000 км}$ . На рис. 2 представлен пример расчета траекторий распространения радиоволн на исследуемой трассе в утренние часы МДВ. В это время суток трассу пересекает линия терминатора. Стрелками отмечено положение линии терминатора на высотах ионосферного слоя  $F2$ . Расчеты проведены для сигналов с частотой  $f_p > \text{МПЧ}_{\text{модели}}$  для  $T = 12 \text{ ч}$  МДВ, марта по модели [6] ( $f_0 = 12 \text{ МГц}$ ,  $\omega = 50$ ).

Результаты траекторного моделирования нанесены на рис. 2 сплошными линиями. Тонкими линиями на рис. 2 изображены изолинии электронной концентрации  $N_e$  ионосферы вдоль трассы.

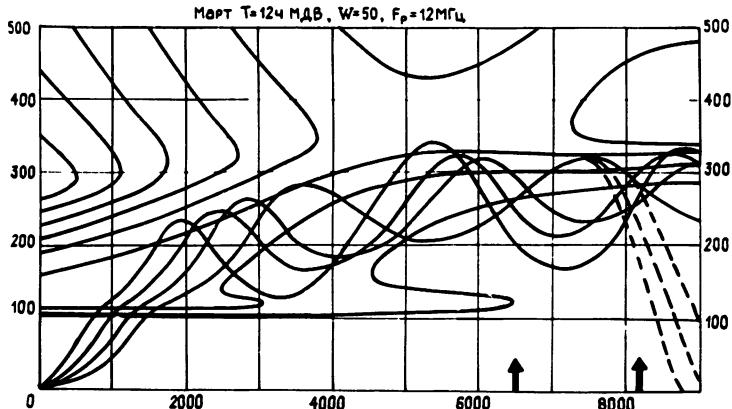


Рис 2

При численном моделировании была рассмотрена возможность вывода радиоволн из ионосферных волновых каналов (ИВК) на положительных ионосферных градиентах  $\Delta f_0 F2 / \Delta D$  в районе терминатора в утренние часы МДВ. Такие градиенты могут быть вызваны наличием на высотах слоя  $F2$  в области терминатора квазипериодических возмущений электронной концентрации ионосферы  $N_e$ , которые в сумме с регулярной частью  $N_e$  создадут знакопеременные градиенты  $N_e$  вдоль радиотрассы. На рис. 2 пунктиром нанесены полученные численным моделированием возможные траектории распространения радиоволн, вывод которых из ИВК происходит благодаря дополнительным градиентам  $\Delta N_e / \Delta D$  в районе терминатора.

По результатам сопоставительного анализа экспериментально

наблюдаемых и полученных в результате численного моделирования значений МНЧ получили, что величина дополнительных ионосферных градиентов в предвосходные часы в районе терминатора вдоль трассы составляет  $\Delta f_0 F2 / \Delta D \sim (2+3,5)$  МГц/1000 км. Величина дополнительных ионосферных градиентов  $\Delta f_0 F2 / \Delta D$  зависит от времени суток, сезона, солнечной активности и уровня магнитной возмущенности. Наиболее стабильно, с вероятностью  $P = 0,8$ , влияние предвосходных градиентов на исследуемой трассе проявляется в зимние и равноденственные месяцы. Полученные закономерности поведения дополнительных ионосферных градиентов в предутренние часы согласуются с исследованиями [7], проведенными по данным вертикального зондирования.

Таким образом, проведенные исследования показали необходимость учета влияния дополнительных знакопеременных градиентов электронной ионизации F2-слоя в области терминатора.

Введение при моделировании распространения радиоволн дополнительных знакопеременных ионосферных градиентов в районе терминатора, превышающих в 2 - 3 раза градиенты пространственного распределения  $N_e$  детерминированной модели ионосфера [3], позволяет получить приемлемое соответствие численных и экспериментальных характеристик распространения радиоволн в случае пересечения радиотрассой терминатора и увеличить вероятность достоверного прогноза МНЧ в течение суток на протяженных трассах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баранец А. Н., Благовещенская Н. Ф. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 4. С. 401.
2. Благовещенская Н. Ф., Бубнов В. А., Устинович В. Т. // Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29. № 5. С. 868.
3. Чернышов О. В., Васильева Т. Н. Прогноз максимальных применимых частот ( $W = 10, 50, 100, 150, 200$ ). - М.: Наука, 1975.
4. Борисова Т. Д. Диссертация. - М.: ИЗМИРАН, 1989.
5. Благовещенский Д. В., Борисова Т. Д. // Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29. № 4. С. 689.
6. Борисова Т. Д., Баранец А. Н., Черкашин Ю. Н. // Сб. статей "Распространение радиоволн в ионосфере". - М., 1986. С. 12.
7. Керблай Т. С., Кища П. В. // Сб. статей "Ионосферное прогнозирование". - М.: Наука, 1982. С. 68.

Ленинградское научно-производственное  
объединение "Вектор"

Поступила в редакцию  
15 августа 1990 г.

# ВОЗДЕЙСТВИЕ ИСКУССТВЕННОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ СИГНАЛОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

А. Г. Бронин, Н. А. Заботин

При исследовании искусственной ионосферной турбулентности (ИИТ) большой интерес представляет информация о спектре неоднородностей. Для определения параметров спектра ИИТ обычно применяются методы, основанные на ракурсном рассеянии радиоволн или регистрации мерцаний сигналов ИСЗ [1, 2]. Возможности диагностики спектра ИИТ могут быть расширены при измерении поляризации радиоволн, испытавших рассеяние на искусственных неоднородностях.

В работе [3] было рассмотрено влияние рассеяния на поляризацию квазимохроматических импульсов с огибающей прямоугольной формы для модели ионосферного слоя с линейным профилем электронной концентрации и изотропным степенным спектром с показателем 4. В настоящей статье методика работы [3] применена к исследованию статистических характеристик сигналов вертикального зондирования (ВЗ), испытавших рассеяние на искусственных неоднородностях, для которых характерна существенная анизотропия спектра.

**1. Метод исследования.** Как было показано в [3], среднее значение  $\langle \chi \rangle$  и дисперсия  $\sigma_\chi^2$  угла ориентации  $\chi$  большой полуоси эллипса поляризации в горизонтальной плоскости могут быть выражены через корреляционные матрицы  $\Phi_{ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle$  и  $\Psi_{ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle$  комплексных компонент рассеянного поля  $\xi_i$  ( $i, j = 1, 2$ ). Корреляционные матрицы могут быть представлены в виде интегралов по рассеивающему объему, подынтегральные выражения в которых содержат пространственный спектр случайных неоднородностей. Оценка этих интегралов методом перевала [4] для условий вертикального зондирования ионосфера приводит к соотношению  $|\Psi_{1j}| \ll |\Phi_{1j}|$ . В результате имеем

$$\sigma_\chi^2 \approx (1/2) Q_0^{-2} \left\{ |E_{01}|^2 \Phi_{12} + |E_{02}|^2 \Phi_{11} + 2 \operatorname{Re}[E_{01} E_{02}^* \Phi_{12}] \right\},$$

$$\langle \chi \rangle \approx 0,$$

где  $Q_0 = |E_{01}|^2 - |E_{02}|^2$ ,  $E_{01}$  - компоненты вектора напряженности электрического поля регулярной составляющей волны.

Как известно, спектр ИИТ имеет достаточно сложный вид [5]. Однако можно показать (см. разд. 2 настоящей работы), что на поляризационные характеристики сигналов ВЗ оказывают влияние неоднородности с масштабами, в несколько раз превышающими длину волны (сотни метров - единицы километров). В указанном интервале искусственные неоднородности сильно вытянуты вдоль силовых линий геомагнитного поля, а в ортогональной ему плоскости спектр ИИТ является степенным [5]. Таким образом, спектр ИИТ для целей настоящей работы может быть аппроксимирован следующим образом:

$$F(\vec{k}) = \delta_R^2 C_\nu (\omega_\perp^2 + k_\perp^2)^{-\nu/2} \delta(k_\parallel),$$

где  $\delta_R^2 = \langle [(\Delta N/N)(\vec{R} + \vec{r}) - (\Delta N/N)(\vec{r})]^2 \rangle$  - структурная функция неоднородностей в масштабе  $R$  в плоскости, ортогональной силовым линиям геомагнитного поля,  $k_\perp$  и  $k_\parallel$  - поперечная и продольная по

отношению к силовым линиям геомагнитного поля составляющие вектора  $\vec{k}$ ,  $\alpha = 2\pi L^{-1}$ ,  $L$  - внешний масштаб турбулентности,

$$C_\nu = (2\pi)^{-1} \Gamma(\nu/2) \left[ \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) - 2\left(\frac{\alpha_m R}{2}\right)^{(\nu-2)/2} K_{(\nu-2)/2}(\alpha_m R) \right]^{-1},$$

$K_\nu(x)$  - функция Макдональда,  $\Gamma(\alpha)$  - гамма-функция.

Вытянутость неоднородностей определяет ракурсный характер рассеяния и некоторые особенности геометрии рассеивающего объема. В работе [3] было показано, что при малоугловом рассеянии основное влияние на статистические характеристики поляризации оказывает рассеяние с изменением типа волны (например, рассеяние обычновенной волны в необыкновенную). Вследствие этого рассеивающий объем определяется из условия пространственного разделения зондирующего и рассеянного импульсов, групповые скорости которых различны. В случае вытянутых неоднородностей, ввиду ракурсного характера рассеяния, вклад в рассеянное поле в точке приема будут давать лишь те точки рассеивающего объема, которые лежат на боковой поверхности конуса с вершиной в начале координат, осью, параллельной силовым линиям магнитного поля, и углом между осью конуса и его образующей, равным углу между вектором напряженности геомагнитного поля и вертикалью.

2. Результаты расчетов. Расчеты дисперсии  $\sigma_x$  угла ориентации эллипса поляризации зондирующего импульса волны обычновенного типа проводились для слоя с экспоненциальным профилем

$$\nu = (f_{kp}/f)^2 \exp[(z - z_0)/H], \quad z \leq z_0,$$

где  $\nu = \omega_0^2 / \omega^2$ ,  $\omega_0$  - плазменная частота,  $\omega$  - частота зондирующего сигнала при следующих значениях параметров: критическая частота  $f_{kp}$  - 8 МГц, высота максимума электронной концентрации  $z_0$  - 300 км, высота нижней границы области, занятой неоднородностями, - 150 км,

$$H = 30 \text{ км}, \quad R = 1 \text{ км}, \quad \delta_R = 10^{-2}, \quad L_m =$$

3 км,  $\nu = 2 - 4$ . На рис. 1 приведены зависимости дисперсии угла ориентации эллипса поляризации  $\sigma_x$  от показателя спектра  $\nu$  для частот 4, 5 и 6 МГц при длительности импульса  $\tau = 22$  мкс. Из расчетов следует, что частотные зависимости и зависимости от длительности импульса  $\tau$  для  $\sigma_x$  различны при различных показателях спектра  $\nu$ . Применяя аппроксимацию  $\sigma_x \sim \omega^\alpha \tau^\beta$ , получаем следующие

результаты.

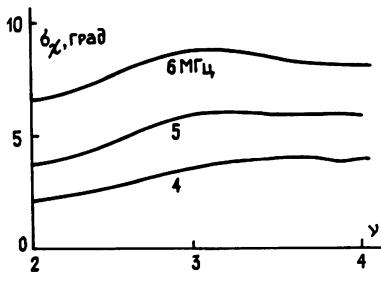


Рис 1

Таблица 1

ν	2, 5	3	3, 5	4
α	2, 3	2, 1	1, 9	1, 8
β	2, 2	2, 0	1, 9	1, 6

Из табл. 1 видно, что с понижением показателя спектра  $\nu$  зависимость  $\sigma_x^2$  от частоты и  $\tau$  становится более крутой. Это можно объяснить подавлением мелкомасштабных неоднородностей в спектрах с большим показателем.

При численных расчетах оценивалось распределение величины модуля вектора рассеяния  $k_{\perp}$  по десяти равным интервалам в диапазоне значений  $0 \leq k_{\perp} \leq k_0 / 2$ . Это позволило установить, что для частоты 3 МГц при  $\tau \leq 30$  мкс основной вклад в  $\sigma_x^2$  дают неоднородности с волновыми числами  $k_{\perp} \leq 0,05 k_0$ , что соответствует неоднородностям с размерами  $l \geq 2 \cdot 10^3$  м. При  $\tau \approx 30$  мкс максимум распределения смещается в область масштабов порядка 1 км, а при  $\tau \approx 50$  мкс  $l \approx 600+700$  м. Для частоты 6 МГц, соответственно, при  $\tau \approx 50$  мкс  $l \approx 300$  м.

Таким образом, рассеяние на ИИТ с масштабами 300 + 2000 м приводит к флуктуациям параметров поляризации сигнала ВЗ, при этом дисперсия угла ориентации эллипса поляризации может достигать  $10^\circ$ , т. е. величины, достаточно заметной для эксперимента. Частотные зависимости, так же как зависимости от длительности импульса  $\tau$ , различны для различных показателей спектра. Все это подтверждает возможность использования измерений поляризации зондирующего сигнала в целях диагностики спектра ИИТ в дополнение к уже имеющимся методам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые процессы в ионосфере и космической плазме. - М.: Наука, 1984. - 392 с.
2. Ерухимов Л. М., Метелев С. А. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 2. С. 208.
3. Бронин А. Г., Заботин Н. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 11. С. 1327.
4. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. - М.: Наука, 1978. - 376 с.
5. Беленов А. Ф., Ерухимов Л. М. и др. //Сб.: Неустойчивости и волновые явления в системе ионосфера - термосфера. - Горький: ИПФ АН СССР, 1989. - 286 с.

Научно-исследовательский институт  
физики при Ростовском университете

Поступила в редакцию  
12 ноября 1990 г.

СТОХАСТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА - ГОРДОНА  
В ЯНГ-МИЛЛСОВСКОМ ПОЛЕ

А. Г. Лавкин

Изучение стохастичности решений уравнения Клейна - Гордона (КГ) в безмассовом поле Янга - Миллса (ЯМ) представляет интерес как пример еще одной системы, проявляющей динамический хаос [1], а также в связи с расширением области применения калибровочных полей [2, 3].

В данной работе динамика этой системы в длинноволновом приближении исследуется методом сечения Пуанкаре.

Самосогласованная система уравнений КГ в поле ЯМ имеет следующий вид [2]:

$$(\partial_\mu \partial_\mu - 2g\partial_\mu A_\mu + g^2 A_\mu A_\mu - m^2) \psi = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\mu F_{\mu\rho}^b + g\varepsilon_{bc\alpha} A_\nu^c F_{\nu\rho}^a + \frac{g^2}{4} \psi^2 A_\rho^b = 0,$$

где  $F_{\mu\rho}^b = \partial_\mu A_\rho^b - \partial_\rho A_\mu^b + g\varepsilon_{bc\alpha} A_\mu^c A_\rho^a$  - тензор напряженности поля ЯМ,  $A_\mu = A_\mu^a L_a$ ,  $L_a$  - генераторы  $SU(2)$ -группы,  $g$  - константа связи,  $m$  - масса  $\psi$ -поля КГ. В длинноволновом приближении в калибровке  $A_0^k = 0$  непринципиальное упрощение (1) достигается подстановкой  $A_1^a = O_1^a b^a$ ,  $b^1 = x/g$ ,  $b^{2,3} = 0$  ( $O_1^a O_1^c = \delta_{ac}$ , суммирования по  $a$  нет) [4]:

$$\dot{x} + \frac{g^2}{4} \psi^2 x = 0, \quad \dot{\psi} + m^2 \psi + \frac{1}{4} x^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Точка означает дифференцирование по времени. Система уравнений (2) решалась в относительных единицах (для удобства принималось  $g = 1$ ,  $m = 2$ ) модифицированным методом Рунге - Кутта четвертого порядка, сохранение энергии системы

$$E = \frac{\dot{x}^2 + g^2 \dot{\psi}^2}{2} + \frac{g^2}{8} \psi^2 x^2 + \frac{g^2 m^2}{2} \psi^2 \quad (3)$$

контролировалось с точностью 0,1%.

Двустороннее отображение Пуанкаре в плоскости  $(\psi, \dot{\psi})$  при  $x$  или  $\dot{x} = 0$  представлено на рис. 1. Видно, что при достаточно малой энергии ( $E = 3$ ) динамика исследуемой системы с хорошей точностью квазипериодична, соответствующий максимальный показатель Ляпунова  $\lambda_{\max} = 0$ . Предельное множество отображения Пуанкаре представляет

собой замкнутую регулярную кривую (инвариантный тор), что соответствует существованию дополнительного (к энергии) интеграла движения. С увеличением энергии становится заметной нерегулярная компонента в динамике системы - точки отображения Пуанкаре не образуют замкнутых кривых. Соответствующие значения  $\lambda_{\max}$  положительны и равны 0,231; 0,696 для  $E = 40$ ; 80.

При энергии  $E \sim 450$  происходит переход к развитой стохастичности, охватывающей практически всю допустимую область фазовой плоскости  $(\psi, \dot{\psi})$ ,  $\lambda_{\max} = 1,173$ . Система уравнений (2) и, тем более (1), становится явно неинтегрируемой в смысле отсутствия полного набора вещественно-аналитических интегралов движения [4].

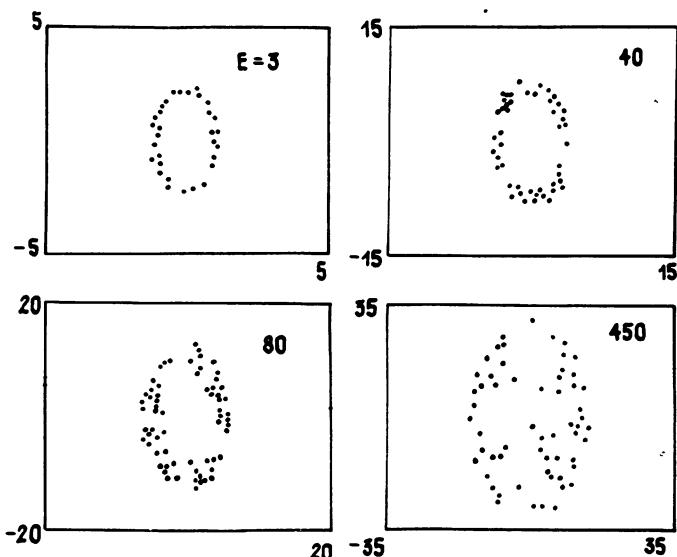


Рис.1.

Исчезновение стохастичности с уменьшением  $E$  следует из того, что при этом последним слагаемым во втором уравнении (2) можно пренебречь и система становится эквивалентной линейному осциллятору. С ростом же энергии (или в случае безмассового уравнения КГ) можно опустить слагаемое  $m^2\psi$ , с которым связана стабилизация динамики полей КГ и ЯМ [8]. Явная стохастичность получающейся системы, нелинейных связанных осцилляторов установлена по целому ряду критериев [4-6].

Отметим, что учет динамики всех компонент поля ЯМ существенно снижает энергию перехода системы к развитой стохастичности. Это представляется естественным: увеличение числа степеней свободы системы должно приводить к менее жестким условиям возникновения динамического хаоса.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - М.: Мир, 1984.
- Вшивцев А. С., Перес-Фернандес В. К., Татаринцев А. В. // Изв. вузов. Физика. 1986. № 5. С. 96.
- Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и диклинаций. - М.: Мир, 1986.
- Николаевский Е. С., Шур Л. Н. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 3.
- Берман Г. П., Маньков Ю. И., Садреев А. Ф. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 705.
- Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутюнян Н. Г. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 34. С. 613.

Центральный научно-исследовательский  
институт измерительной аппаратуры

Поступила в редакцию  
13 июня 1990 г.

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ  
С ВНУТРЕННИМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕНЗОРНЫМИ ПОЛЯМИ

Б. А. Конюхов, И. Д. Конюхова

В различных устройствах оптоэлектроники, таких, как датчики механических колебаний и волоконные линии связи, широко используется поляризованное оптическое излучение. В связи с этим представляют интерес рассмотрение задач динамической поляризационной оптики. Методы динамической фотоупругости имеют особенности, обусловленные распространением волн в динамическом тензорном поле. Основная особенность динамического поля связана с тем, что его тензор не всегда можно привести к диагональному виду даже при условии его симметричности. Квазиглавные направления такого тензора постоянны только в том случае, когда все компоненты тензора синфазны. Этот частный случай динамического поля по существу не отличается от статики. В более общем случае, когда разность фаз колебаний диагональных и недиагональных компонент тензора отлична от нуля, угол квазиглавных направлений меняется во времени. В этом случае многие методы статической фотоупругости неприменимы, и необходимо разработать алгоритмы измерений и обработки сигналов с учетом особенностей динамической фотоупругости.

Целью настоящей работы является вывод поляризационных соотношений динамической фотоупругости при наличии изменений угла квазиглавных направлений во времени и вдоль пути распространения волны. Для этого воспользуемся соответствующими соотношениями статической фотоупругости. Распространение поляризованной волны в среде с упругим тензорным полем описывается системой двух связанных дифференциальных уравнений вида [1, 2]

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} + v \frac{\partial A_x}{\partial z} = - j c (\alpha_{xx} A_x + \alpha_{xy} A_y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial t} + v \frac{\partial A_y}{\partial z} = - j c (\alpha_{yy} A_y + \alpha_{yx} A_x),$$

где  $A_x$ ,  $A_y$  - комплексные амплитуды двух волн, поляризованных вдоль осей  $x$  и  $y$  и распространяющихся вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ ,  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$ ,  $\alpha_{xy}$  - компоненты двумерного тензора внутреннего поля,  $c$  - константа. Наиболее просто система (1) решается в случае, когда квазиглавные направления не врашаются по пути распространения волны. В случае небольших углов вращения и малой анизотропии можно воспользоваться приближенным решением, приведенным в [3]. В этом решении вводится эквивалентный угол квазиглавных направлений, определяемый соотношением

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \int_{z_1}^{z_2} \alpha_{xy} dz}{\int_{z_1}^{z_2} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) dz}, \quad (2)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  - координаты начала и конца пути распространения волны в

среде. Разность фаз между двумя волнами, поляризованными в эквивалентных квазиглавых направлениях, определяется выражением

$$\Phi = \left\{ \left[ c_1 \int_{z_1}^{z_2} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) dz \right]^2 + \left[ 2c_1 \int_{z_1}^{z_2} \alpha_{xy} dz \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Следует отметить, что соотношения (2) и (3) соответствуют решению системы (1) без учета производных по времени в левой части уравнений. Это приближение справедливо, когда скорость распространения волны много больше скорости изменений динамического поля. Все соотношения фотоупругости, как правило, используют это приближение. Если первым слагаемым в уравнениях (1) пренебречь нельзя, то интегрирование по  $z$  в соотношениях (2) и (3) нужно заменить интегрированием по переменной  $\xi = z - vt$ . Это необходимо учитывать при распространении упругих волн в низкочастотном упругом динамическом поле, т. е. в случае динамической акустоупругости.

Соотношениями (2) и (3) обычно пользуются только в статической фотоупругости, где измеряемыми величинами являются эквивалентный угол квазиглавых направлений и двулучепреломление. В динамике эти величины могут быть переменными, и соотношения (2) и (3) можно использовать как соотношения для мгновенных значений. Модуляцию поляризационных свойств волны, распространяющейся в переменном упругом поле, удобнее всего измерять, предварительно трансформировав эту модуляцию в амплитудную. Трансформацию можно осуществить, использовав схему полярископа [4]. Для динамических измерений удобнее всего использовать схему плоского полярископа с циркулярно поляризованной волной на входе. Циркулярно поляризованная волна представляется в виде суммы двух линейно поляризованных волн в эквивалентных квазиглавых направлениях с начальной разностью фаз, равной  $\pi/2$ . По пути распространения между этими волнами накапливается разность фаз, равная  $\Phi$ . На выходе из области распространения плоский анализатор пропускает колебания, поляризованные вдоль некоторого направления  $\theta$ . Интенсивность суммарного колебания, принимаемого выходным приемным устройством, описывается соотношением

$$I = I_0 [1 + \sin \Phi, \cos 2(\theta - \alpha)], \quad (4)$$

где  $I_0$  - квадрат амплитуды колебаний первичных линейно поляризованных волн.

При распространении волны в гармоническом поле интенсивность принятого сигнала меняется с частотой переменного поля. Будем считать соотношение (4) справедливым для мгновенных значений. Подставив (2) и (3) в (4) и приняв  $\sin \Phi \approx \Phi$ , после разложения в ряд Фурье правой и левой частей полученного уравнения получаем для первой гармоники принимаемого сигнала выражение

$$u_1 = c_1 \left[ \sin 2\theta \int_{z_1}^{z_2} N(z) dz - \cos 2\theta \int_{z_1}^{z_2} \tau(z) dz \right], \quad (5)$$

где  $u_1$  - комплексная амплитуда первой гармоники интенсивности света на выходе полярископа,  $N(z)$  - комплексная амплитуда разности диагональных компонент тензора динамического поля  $\alpha_{xx} - \alpha_{yy}$ ,  $\tau(z)$  - комплексная амплитуда удвоенной недиагональной компоненты  $\alpha_{xy}$ .

Для случайного поля аналогичное уравнение получается для комплексных компонент фурье-преобразований соответствующих величин.

С учетом изменений поля за время распространения волны это уравнение записывается в виде

$$U(j\omega) = c_1 \left[ \sin 2\theta \int_{z_1}^{z_2} N(j\omega, z) e^{j\omega z/v} dz - \right. \\ \left. - \cos 2\theta \int_{z_1}^{z_2} \tau(j\omega, z) e^{j\omega z/v} dz \right]. \quad (6)$$

Для фотоупругости выполняется условие  $\omega z/v \approx 0$  и множитель  $e^{j\omega z/v}$  можно принять равным единице.

Из соотношений (5) и (6) следует возможность раздельного измерения сигналов, зависящих от разности диагональных компонент тензора (при  $\cos 2\theta = 0$ ) и от недиагональной его компоненты (при  $\sin 2\theta = 0$ ) [4,5].

Аналогичным образом можно получить соотношение для любой другой схемы измерений модуляции поляризационных свойств волны, распространяющейся в переменном тензорном поле. Описанная схема измерений приведена в качестве примера, так как она обладает рядом преимуществ по сравнению с другими схемами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 191. В. 2. С. 257.
2. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. - Таллин: Валгус, 1975. - 203 с.
3. Абен Х. К., Индурум С. И., Иозепсон Ю. И., Келл К.-Ю. Э. // Тезисы докл. Всесоюзного семинара по оптической томографии. - Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. 1988. С. 7.
4. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. - М.: Наука, 1973. - 576 с.
5. Гитерман Х. Ф., Конюхов Б. А., Конюхова И. Д. // Машиноведение. 1989. № 5. С. 26.
6. Гитерман Х. Ф., Конюхов Б. А., Конюхова И. Д. Способ исследования гармонических напряжений в образце. А. С. № 1525489. Кл. 01 L/24 с приоритетом от 21.11.86. оп. 30.11.89. Б. № 44.

Институт автоматики и процессов  
управления с вычислительным  
центром ДВО АН СССР

Поступила в редакцию  
17 сентября 1990 г.

УДК 621. 373; 535. 8

## ИЗМЕРЕНИЕ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ ОВС С ОШИРОКОПОЛОСНЫМ ИСТОЧНИКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

В. М. Геликонов, М. Н. Кучева, Г. Б. Малыкин

Одним из важнейших параметров одномодовых волоконных световодов (ОВС), характеризующих их способность поддерживать линейную поляризацию излучения, является величина его линейного двулучепре-

ломления  $\beta = (k_2 - k_1)$  рад/м, где  $k_1$  и  $k_2$  - постоянные распространения для двух взаимно ортогональных собственных мод ОВС - быстрой и медленной, и связанные с ним эффективная разность показателей преломления для двух ортогональных мод  $\Delta n = \lambda\beta/2\pi$  и длина поляризационных биений  $L_6 = \lambda/\Delta n = 2\pi/\beta$ , где  $\lambda$  - длина волны излучения. Существует ряд методов измерения величины  $L_6$  [1-3], однако наиболее простой является методика [4-6], основанная на регистрации модуляции состояния поляризации в ОВС при наложении локального продольного магнитного поля на участок ОВС длиной  $\Delta l \ll L_6$  (из-за эффекта Фарадея), которая позволяет кроме того измерять эллиптичность собственных мод ОВС [6].

При использовании в качестве источника излучения газовых лазеров с длиной когерентности излучения в свободном пространстве порядка десятков-сотен метров такие измерения не представляют сложности. Однако, как правило, целесообразно проводить измерения двулучепреломления ОВС с тем типом источника излучения, с которым волокно будет использоваться (в датчике каких-либо физических параметров, линии связи и т. д.). Если в качестве такого источника излучения используются полупроводниковый лазер или суперлюминесцентный диод, обладающие широким спектром излучения, а следовательно, малой длиной когерентности, то в этом случае из-за разности показателей преломления в быстрой и медленной осях ОВС распространяющееся по ним излучение станет взаимно некогерентным на длине волокна  $l_{\text{деп}} = \lambda^2/\Delta\lambda\Delta n$  (длина деполяризации), где  $\Delta\lambda$  - ширина спектра излучения.

При величине  $\Delta n \approx 3 \cdot 10^{-4}$  длина деполяризации ОВС при использовании многочастотного полупроводникового лазера ( $\lambda = 0,8 \text{ мкм}$ ,  $\Delta\lambda \sim 2 \text{ нм}$ ) составит  $\sim 1 \text{ м}$ , а при использовании суперлюминесцентного диода до 10 см. Очевидно, что если излучение на выходе исследуемого отрезка ОВС в значительной степени деполяризовано, то модуляция состояния поляризации в начале или середине исследуемого отрезка не приведет к сколь-либо заметной модуляции состояния поляризации на его выходе, а, следовательно, измерение величины  $L_6$  по указанной методике практически невозможно. Методы [1-3] также требуют значительной степени поляризации света на выходе ОВС. С другой стороны, для того чтобы в исследуемом отрезке ОВС сформировалась основная пространственная мода, требуется не менее 2 - 3 м длины волокна.

В настоящей работе предлагается методика измерения длины поляризационных биений в ОВС, отличающаяся от описанной в [4-6] наличием оптического компенсатора разности оптической длины в быстрой и медленной осях, в качестве которого используется отрезок того же типа ОВС и такой же длины, как и исследуемый отрезок, но развернутый вокруг своей оси на  $90^\circ$  относительно исследуемого. Таким образом, излучение, запущенное на входе исследуемого отрезка ОВС в быструю и в медленную оси, пройдет второй отрезок, соответственно, по медленной и быстрой оси, их оптические пути сравняются и на выходе второго отрезка излучение будет поляризованным.

На рис. 1 представлена схема экспериментальной установки (1 - ППЛ лазер). На входе и выходе установки используются поляризационные управители Лефевра 2 [7], заряженные отрезками ОВС со слабым двулучепреломлением, длина которых не играет практической роли. Входной управитель служит для создания на входе исследуемого отрезка ОВС з линейно поляризованного излучения, ориентированного под углом  $45^\circ$  к его собственным осям, поскольку при этом обеспечивается максимальная глубина модуляции поляризации переменным магнитным полем [6]. Длина исследуемого отрезка ОВС з и компенсационного 4 составляла по  $4,7 \pm 0,05 \text{ м}$ . На исследуемый отрезок налагалось продольное переменное магнитное поле с частотой 220 Гц, длина зазора электромагнита 5 составляла 0,5 мм. В качестве анализатора

состояния поляризации использовался вращающийся поляризатор - обтюратор [8], позволяющий оперативно определять состояние поляризации.

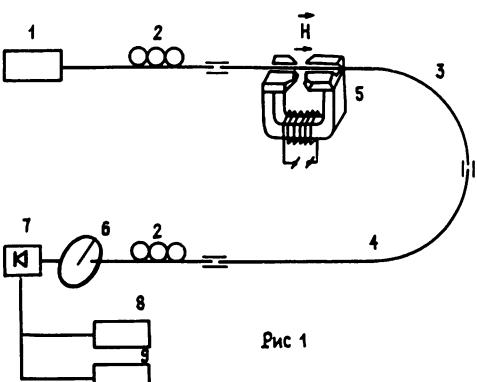


Рис 1

с помощью разработанного в ИПФ АН СССР сварочного станка, позволяющего также ориентировать отрезок 4 относительно отрезка 3 как по трем координатам, так и по углу. На практике удавалось восстановить степень поляризации излучения на выходе системы до 80-85%, вследствие некоторого неравенства отрезков 3 и 4. Если отрезки 3 и 4 сваривались, степень поляризации на выходе падала до ~70%, что, по-видимому, объясняется небольшими угловыми смещениями в момент оплавления электрической дугой.

После ориентации отрезков 3 и 4 под углом 90° выходным управителем 2 на выходе устанавливалась круговая поляризация, при этом, как показано в [6], имеет место максимальный уровень регистрации сигнала на частоте наблюдения. Вращающийся поляризатор 6 останавливался и ориентировался таким образом, чтобы сигнал был максимальен

(этому соответствует угол 45° между направлением его наибольшего пропускания и осями отрезка 4 [6]). Переменный сигнал регистрировался спектроанализатором 8 с полосой 2,5 Гц с большим превышением над шумами. При перемещении электромагнита вдоль волокна наблюдались четкие максимумы и минимумы эффекта (в схему также включен осциллограф). Измеренная нами длина поляризационных биений  $L_0$  составила  $3 \pm$

$$\pm 0.1 \text{ мм} (\Delta n = 2, 7 \cdot 10^{-4}).$$

Предложенный метод компенсации может быть применен также и в способах измерения длины биений [2, 3], поскольку и в этих случаях требуется значительная степень поляризации излучения - в месте сошлифовки волокна в [2] или на выходе ОВС в [3].

В заключение авторы выражают благодарность В. Н. Листвину за ряд полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rashleigh S.C. //Opt.Lett. 1982. V.7. N 6. P.294.
2. Thyagarajaank, Shenoy M.R., Ramadas M.R. //Elt Lett. 1986. V.22. N 16. P.832.
3. Carrara S.L., Kim K.Y., Shaw H.Y. //Opt.Lett. 1986. V.11. N 7. P.470.
4. Simon A., Ulrich R. //Appl.Phys.Lett. 1977. V.31. N 8. P.517.
5. Ulrich R., Simon A. //Appl.Optics. 1979. V.18. N 13. P.2241.
6. Малыкин Г. Б. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 8. С.1020.

7. Lefevre H.G. // Ell Lett. 1980. V.16. P.778.  
 8. Малыкин Г.Б., Степанов Д.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990.  
 Т.33. N 2. С.255.

Институт прикладной физики  
 АН СССР

Поступила в редакцию  
 5 октября 1990 г.

УДК 621.396.96: 621.391.828

## СИНТЕЗ ВЕСОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С ШИРОКИМИ ПРОВАЛАМИ В ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

А. Б. Гершман, В. Т. Ермолаев

Задача синтеза весового распределения антенной решетки (AP), обеспечивающего формирование широких провалов (нулей) в диаграмме направленности (ДН), является актуальной в связи с развитием методов пространственно-временной обработки сигналов, техники адаптивных AP и ряда других областей. Использование широких провалов позволяет понизить чувствительность характеристик AP к скачкообразному изменению частот и угловых координат подавляемых помеховых сигналов [1, 2], чем использование обычных узких провалов в ДН, присущих классической адаптивной AP. В работах [3, 4] разработаны методы синтеза ДН с широкими провалами в заданных направлениях. Основной недостаток данных методов заключается в том, что они неприменимы в ситуации априорной неопределенности относительно угловых координат подавляемых источником помех. Однако данная ситуация наиболее характерна для практических задач, где применяются адаптивные методы обработки сигналов. В настоящей работе рассмотрен метод формирования широких провалов в ДН, который может применяться в условиях априорной неопределенности (в адаптивных AP).

Метод синтеза весового распределения. Задачу синтеза весового распределения, обеспечивающего формирование широких провалов в направлениях  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$  и максимальное усиление в направлении полезного сигнала  $\theta_0$  можно записать в виде следующей задачи условной максимизации:

$$|W^T S(\theta_0)|^2 = \max_{\theta} \quad (1)$$

$$W^T S(\theta_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, I; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^n (W^T S(\theta))}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi=\xi_i} = 0; \quad n=1, 2, \dots, K_i; \quad i=1, 2, \dots, I; \quad (3)$$

$$W^T W = 1. \quad (4)$$

Здесь  $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$  - вектор комплексных весовых коэффициентов AP,  $\xi = (2\pi/\lambda) \sin \theta$ ,  $\lambda$  - длина волны,  $\theta$  - текущая угловая координата, отсчитываемая от нормали к апертуре,

$$S(\theta) = (\exp(jx_1 \xi), \exp(jx_2 \xi), \dots, \exp(jx_N \xi))^T, \quad (5)$$

$x_1, x_2, \dots, x_N$  - координаты приемных элементов AP,  $N$  - число элементов, (+) и ( $T$ ) - знаки эрмитова сопряжения и транспонирования. Угловые координаты  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$  считаем пока известными, хотя потом

это ограничение будет снято. Полагаем также, что  $N > I + \sum_{i=1}^I K_i$ . Смысл накладываемых ограничений (2)–(4) заключается в следующем. Ограничение (2) задает нули в ДН в требуемых направлениях, а (3) используется для регулировки ширины каждого из данных нулей за счет наложения дополнительных условий на производные ДН [2]. Параметр  $K_i$  определяет порядок ограничения (ширину провала) в  $i$ -м направлении. Условие (4) используется для нормировки вектора  $W$ . Соотношения (2), (3) с учетом (5) можно записать в следующем виде:

$$W^T A^n S(\theta_i) = 0 ; \quad n=0, 1, \dots, K_i ; \quad i=1, 2, \dots, I , \quad (6)$$

где

$$A = \text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (7)$$

– диагональная матрица координат приемных элементов. Из (6) следует, что смысл условий (2), (3) заключается в том, что искомый вектор весовых коэффициентов должен быть ортогонален всем векторам системы  $\{A^n S(\theta_i)\}$ ;  $n=0, 1, \dots, K_i$ ;  $i=1, 2, \dots, I$ . Следовательно, решение для вектора  $W$  следует искать в виде

$$W = DR, \quad (8)$$

где  $R$  – новый оптимизируемый комплексный вектор размерности  $N$ ,

$$D = E - Q(Q^T Q)^{-1} Q^T \quad (9)$$

– матричный проектор [5] на подпространство размерности  $N - I - \sum_{i=1}^I K_i$ , являющееся ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на векторы  $\{A^n S(\theta_i)\}$ ;  $n=0, 1, \dots, K_i$ ;  $i=1, 2, \dots, I$ . Здесь

$$\begin{aligned} Q = & (S(\theta_1), AS(\theta_1), \dots, A^{K_1} S(\theta_1), S(\theta_2), AS(\theta_2), \dots, A^{K_2} S(\theta_2), \\ & \dots, S(\theta_I), AS(\theta_I), \dots, A^{K_I} S(\theta_I)) \end{aligned} \quad (10)$$

– матрица размерности  $N \cdot (I + \sum_{i=1}^I K_i)$ , составленная из данных векторов,  $E$  – единичная матрица размерности  $N \cdot N$ . Учитывая (8), получаем, что задача условной максимизации (1) – (4) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} |R^T D S(\theta_0)|^2 &= \max_R , \\ R^T D R &= 1 . \end{aligned} \quad (11)$$

Решение (11) следует искать из уравнения

$$\nabla_R H(R) = 0, \quad (12)$$

где

$$H(R) = |R^T D S(\theta_0)|^2 + \mu(1 - R^T D R) \quad (13)$$

– максимизируемый функционал,  $\mu$  – множитель Лагранжа. Вычисляя градиент функционала  $H(R)$ , будем иметь

$$S^T(\theta_0) D R \cdot D S(\theta_0) = \mu D R . \quad (14)$$

Рассматривая (14) совместно с (8), нетрудно показать, что решением (1) - (4) будет

$$W = (S^+(θ_0)DS(θ_0))^{-1/2}DS(θ_0). \quad (15)$$

Предлагаемый метод отыскания оптимального с точки зрения (1) - (4) вектора весовых коэффициентов описывается соотношениями (9), (10), (15). На рис. 1 представлены модули нормированных амплитудных ДН эквидистантной шестнадцатиэлементной АР с межэлементным расстоянием  $λ/2$ , синтезированных с помощью рассмотренного метода при  $I=2$ ,  $θ_0=0^\circ$ ,  $θ_1=18^\circ$ ,  $θ_2=34^\circ$ . Сплошной кривой изображена ДН при  $K_1=K_2=0$  (при от-

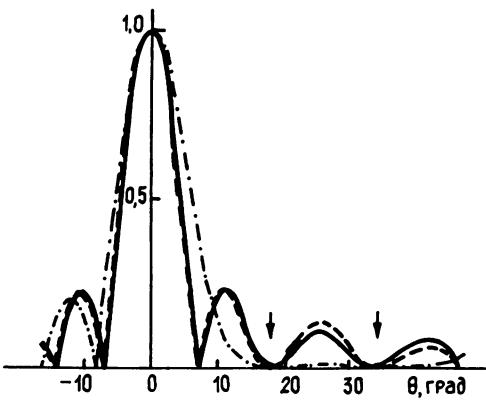


Рис. 1.

представляется вопрос сравнения устойчивости широких провалов в ДН и обычных (узких) провалов к ошибкам формирования весового распределения. Моделирование показало, что относительное снижение глубины широких провалов при  $K_1=K_2=2$  в секторе  $2^\circ$  по сравнению с глубиной узких провалов не превышает 3 дБ для ошибок квантования, обусловленных конечной разрядностью в диапазоне 8 - 32 разряда.

**Применение метода в условиях априорной неопределенности.** В условиях априорной неопределенности (в адаптивных АР) подавление помех осуществляется на основе использования временных выборок входных сигналов решетки. В случае I узкополосных точечных внешних помеховых источников излучения, находящихся в дальней зоне, вектор входных сигналов АР в момент  $t$  может быть записан в виде [6]:

$$x(t) = \sum_{i=1}^I a_i(t) S(\theta_i) + v(t), \quad (16)$$

где  $a_i(t)$  - комплексные неизвестные амплитуды источников помех, которые мы считаем взаимно независимыми,  $v(t)$  - вектор собственного шума АР. В этом случае угловые координаты помех  $θ_i$ ,  $i=1, 2, \dots, I$  и их число являются априорно неизвестными. Рассмотренный метод может применяться в подобной ситуации. Отметим, что система векторов  $\{A^n S(\theta_i)\}$  при формировании матричного проектора  $D$  может быть заменена любой другой системой вида  $\{A^n G_i\}$ ;  $n=0, 1, \dots, K_i$ ;  $i=1, 2, \dots, I$  при условии, что системы  $\{S(\theta_i)\}$  и  $\{G_i\}$  являются эквивалентными (т. е. линейные оболочки этих систем совпадают). При этом

матрица  $A$  зависит только от координат приемных элементов и для построения этой матрицы не требуется априорная информация об источниках помех. Согласно (16), в характерной для задач адаптивной обработки ситуации, когда мощности помеховых источников существенно превышают мощность собственного шума и его вкладом в (16) можно пренебречь, системы векторов  $\{S(\theta_i)\}$  и  $\{X(t_i)\}$ ,  $i=1, 2, \dots, I$ , являются эквивалентными при условии статистической независимости выборок вектора  $X$ . Следовательно, синтез весового распределения, обеспечивающего широкие провалы в ДН в направлениях на источники помех, может быть осуществлен непосредственно по выборкам входных сигналов АР в случае, когда мощности внешних помех существенно превышают мощность собственного шума\*. Для определения числа  $I$  выборок вектора  $X$  можно использовать критерий [7], основанный на проверке линейной зависимости системы  $\{X(t_i)\}$  при увеличении числа входящих в нее векторов.

Сначала с помощью этого критерия находится оценка  $\hat{I}$  параметра  $I$ , затем формируется система векторов  $\{A^n X(t_i)\}$ ,  $n=0, 1, \dots, K_1$ ;

$i=1, 2, \dots, \hat{I}$ , и далее вычисляется выборочная оценка  $\hat{D}$  матричного проектона (9) с использованием вместо матрицы  $Q$  ее выборочной оценки:

$$\hat{Q} = (X(t_1), AX(t_1), \dots, A^{K_1} X(t_1), X(t_2), AX(t_2), \dots, A^{K_2} X(t_2), \dots, \\ X(t_{\hat{I}}), AX(t_{\hat{I}}), \dots, A^{K_{\hat{I}}} X(t_{\hat{I}})).$$

Искомый вектор вексовых коэффициентов определяется с помощью выборочного аналога соотношения (15):

$$W = (S^+(\theta_0) \hat{D} S(\theta_0))^{-1/2} \hat{D} S(\theta_0). \quad (17)$$

Отметим, что для вычисления вектора (17) требуется порядка  $N^3 + N^2 \cdot (I + \sum_{i=1}^I K_i)$  цифровых операций умножения комплексных чисел. На рис. 2 изображен модуль полученной с помощью численного моделирования нормированной амплитудной ДН, синтезированной адаптивно на основе выборок вектора входных сигналов при  $K_1 = K_2 = 2$ . Отношение мощности каждого из помеховых сигналов к мощности собственного шума в одном элементе АР было выбрано равным 30 дБ. Остальные параметры решетки, полезного сигнала и помех соответствуют рис. 1. Глубина нулей адаптивно формируемой ДН в направлениях на источники и соседних направлениях не превышает -32 дБ, что свидетельствует о хорошей степени подавления помеховых сигналов.

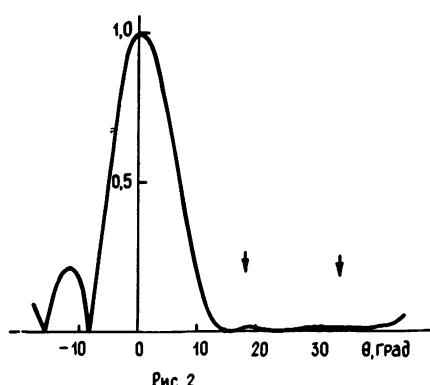


Рис. 2

\*В случае, когда влиянием собственного шума нельзя пренебречь, в качестве системы, эквивалентной  $\{S(\theta_i)\}$ , может быть взята система сигнальных собственных векторов выборочной корреляционной матрицы входных сигналов АР при достаточно большом числе выборок.

\*В случае, когда влиянием собственного шума нельзя пренебречь, в качестве системы, эквивалентной  $\{S(\theta_i)\}$ , может быть взята система сигнальных собственных векторов выборочной корреляционной матрицы входных сигналов АР при достаточно большом числе выборок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 11. С. 1443.
2. Данилевский Л. Н., Коробко О. В., Таурогинский Б. И. // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. № 3. С. 43.
3. Когниенко Л. Г., Фединчик С. И. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 5. С. 190.
4. Манжос В. Н., Семенов Г. Н., Саламатин В. В. // В сб.: Радиотехнические вопросы исследования ионосферы. - М.: РИ АН СССР, 1985. С. 140.
5. Постников М. И. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1986.
6. Гершман А. Б., Ермолов В. Т., Флаксман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 8. С. 941.
7. Журавлев А. К., Ермолин М. В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29. № 2. С. 93.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
16 июля 1990 г.

УДК 621. 382: 533. 9. 01

### ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРЕ ПОЛУПРОВОДНИК - МЕТАЛЛ

Н. А. Азаренков, К. Н. Остриков

Замедляющие полупроводниково-металлические и полупроводниково-диэлектрические структуры широко используются в настоящее время в различных приборах и устройствах твердотельной электроники для решения ряда прикладных задач, связанных с усилением, генерацией и преобразованием электромагнитных волн, а также разработкой физических основ миллиметровой и субмиллиметровой техники [1, 2]. В связи с этим интенсивно изучаются волновые процессы различных типов в ограниченных полупроводниковых системах [3-10]. Поскольку замедляющие структуры выполняются в виде тонких полупроводниковых пленок, нанесенных на поверхность металлической подложки, то особую актуальность приобретает изучение поверхностных (локализованных у поверхности) медленных волновых возмущений в структурах полупроводник - металл. Кроме того, поведение поверхностных волн (ПВ) в таких замедляющих структурах является существенно нелинейным даже при небольших уровнях мощности [4, 7]. В связи с этим необходимо исследование механизмов нелинейности, которые могут быть связаны как с нелинейностью уравнений квазигидродинамики и Максвелла, так и с особенностями кристаллической решетки и спектра свободных носителей заряда [4, 7, 11, 12]. При этом учет характерных для полупроводниковой плазмы последних двух механизмов нелинейности может приводить к результатам, качественно отличающимся от газовой плазмы. Так, в настоящем сообщении рассматривается нелинейный процесс генерации третьей гармоники поверхностной волны в замедляющей структуре полупроводник - металл, обусловленный непараболичностью закона дисперсии носителей заряда, и показано, что в узкощелевых полупроводниковых материалах этот процесс необходимо учитывать наряду с генерацией второй гармоники ПВ, обусловленной нелинейностью квазигидродинамики и Максвелла.

Пусть полупроводник  $n$ -типа занимает полупространство  $x > 0$  и в плоскости  $x=0$  ограничен идеально проводящей металлической поверхностью. Внешнее магнитное поле  $\vec{H}_0$ , параллельное границе, направлено вдоль оси  $z$ . Исследуемые волновые возмущения распространяются на границе полупроводник - металл поперек  $\vec{H}_0$  (геометрия Фойгта [3]), вдоль оси  $y$ . Будем рассматривать ПВ магнитоплазменного типа, частота которых удовлетворяет соотношению  $\omega^2 \ll \omega_e^2$  ( $\omega_e$  - электронная циклотронная частота). Плазма полупроводника предполагается плотной ( $\Omega_e^2/\omega_e^2 \gg \epsilon_0$ ,  $\Omega_e$  - электронная плазменная частота,  $\epsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость решетки) и слабостолкновительной ( $\nu \ll \omega$ ,  $\nu$  - эффективная частота столкновений электронов). Расчеты проведем в модели изотропного непарabolического закона дисперсии свободных носителей, который реализуется для ряда полупроводниковых материалов [7, 11]. Будем считать, что эффективная масса  $m_{\text{эфф}}$ , квазимпульс  $\vec{p}$  электронов вблизи дна зоны проводимости и ширина запрещенной зоны  $\epsilon_g$  удовлетворяют соотношению  $p^2/2m_{\text{эфф}}\epsilon_g \ll 1$ . В этом предельном случае система нелинейных уравнений квазигидродинамики и уравнений Максвелла имеет вид

$$\frac{\delta \vec{p}}{\delta t} + e\vec{E} + \frac{e}{m_{\text{эфф}}c} [\vec{p}, \vec{H}_0] = - \left\{ \frac{\vec{p}}{m_{\text{эфф}}} \vec{\nabla} \right\} \vec{p} - \frac{e}{m_{\text{эфф}}c} [\vec{p}, \vec{H}] +$$

$$+ \frac{e}{m_{\text{эфф}}c} \frac{\vec{p}^2}{\tilde{p}^2} [\vec{p}, \vec{H}_0], \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}(n_0 \vec{n}) = - \vec{\nabla}(n \vec{v}),$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} (n_0 + n) \vec{v},$$

$$\tilde{p}^2 = 2m_{\text{эфф}}\epsilon_g, \quad \vec{v} = (\vec{p}/m_{\text{эфф}})(1 - (p/\tilde{p})^2)$$

- скорость электронов вблизи дна зоны проводимости,  $e$  - заряд электрона,  $c$  - скорость света в вакууме,  $n_0$  - невозмущенная, а  $n$  - возмущенная концентрация носителей заряда. В уравнениях (1) предполагается, что магнитная проницаемость полупроводника слабо отличается от единицы. Члены, пропорциональные  $(p/\tilde{p})^2$ , описывают нелинейность, связанную с непарabolичностью спектра электронов. Нелинейность предполагается слабой ( $\mu = V_e/V_\Phi \ll 1$ ,  $V_e$  - осцилляторная скорость электронов в поле волны,  $V_\Phi$  - фазовая скорость ПВ). В этом случае генерацию высших гармоник можно рассматривать с помощью метода последовательных приближений [13]. При этом учет квадратичных по полю ПВ нелинейностей, связанных с нелинейностью исходных уравнений (1), приводит к генерации второй гармоники волны, а учет кубических нелинейностей, связанных с непарabolичностью спектра носителей заряда - к генерации третьей гармоники. Поскольку в газовой плазме генерация высших гармоник полностью определяется квадратичными нелинейностями, то в рассматриваемом приближении амплитуда третьей гармоники ПВ в  $\mu^{-1} \gg 1$  раз меньше второй [13]. В полупроводниковой плазме появляется дополнительный источник генерации сигнала на частоте  $3\omega$  (кубическая

нелинейность). И поскольку источники этой нелинейности (члены  $\sim (p/\tilde{p})^2 \dot{p}$ ) пропорциональны  $\varepsilon_g^{-1}$ , то следует ожидать, что для узкощелевых полупроводников амплитуды сигнала третьей гармоники могут быть достаточно велики. Для справедливости нашего рассмотрения частота ПВ должна одновременно удовлетворять следующим неравенствам:  $\omega \ll \omega_e^2$ ,  $4\omega^2 \leq \omega_e^2$ . Выполнение второго неравенства позволяет нам считать вторую и третью гармоники несобственными возмущениями системы и исключить из рассмотрения резонансное взаимодействие гармоник.

Для компонент третьей гармоники электромагнитных полей волны, квазимпульса и возмущенной концентрации электронов из уравнений (1) с граничным условием  $E_{yz}(x = 0) = 0$  ( $E_{yz}$  - тангенциальная составляющая электрического поля сигнала частоты  $3\omega$ ) имеем следующие выражения:

$$\vec{G}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \langle \vec{G}_3(x) e^{i\psi_3} + \vec{G}_3^* e^{-i\psi_3} \rangle, \quad \vec{G} = (\vec{E}, \vec{H}, \vec{p}, n),$$

$$E_{xz} = -\frac{\mu^2}{24} A \frac{m_{\text{ЭФФ}} C^2}{\varepsilon_g} \frac{\omega_e^2 \omega^2}{\Omega_e^5} \left[ \left( \frac{9\omega^2}{\omega_e^2} - \alpha \right) (\alpha - 1)^{-1} e^{-\alpha x} - 3e^{-3\alpha x} \right],$$

$$E_{yz} = i \frac{\mu^2}{8} A \frac{m_{\text{ЭФФ}} C^2}{\varepsilon_g} \frac{\omega^3 \omega_e^2}{\Omega_e^5} [e^{-\alpha x} - e^{-3\alpha x}],$$

$$H_{z3} = -\frac{\mu^2}{24} A \frac{m_{\text{ЭФФ}} C^2}{\varepsilon_g} \frac{\omega^2 \omega_e^2}{\Omega_e^4} (\alpha - 1) \left[ e^{-\alpha x} - \frac{\omega^2}{8\omega_e^2} (\alpha - 1) e^{-3\alpha x} \right],$$

$$P_{xz} = -i \frac{\mu^2}{8} \frac{Ae}{\Omega_e} \frac{m_{\text{ЭФФ}} C^2}{\varepsilon_g} \frac{\omega^3 \omega_e^3}{\Omega_e^4 (9\omega^2 - \omega_e^2)} \times \quad (2)$$

$$\times \left[ 1 + \left( \frac{9\omega^2}{\omega_e^2} - \alpha \right) (\alpha - 1)^{-1} e^{-\alpha x} - \frac{\omega^2}{3\omega_e^2} e^{-3\alpha x} \right],$$

$$P_{yz} = \frac{\mu^2}{24} \frac{Ae}{\Omega_e} \frac{m_{\text{ЭФФ}} C^2}{\varepsilon_g} \frac{\omega^2 \omega_e^2}{\Omega_e^4} \left[ \frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{-\alpha x} - \frac{3\omega^2}{9\omega^2 - \omega_e^2} e^{-3\alpha x} \right],$$

$$n_3 = n_0 \frac{\mu^2}{24} \frac{eAC}{\Omega_e \varepsilon_g} \frac{\omega^2 \omega_e^3}{\Omega_e^5} \left[ \frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{9\omega^2}{\omega_e^2} (2\alpha - 1) - \alpha^2 \right) e^{-\alpha x} - 9e^{-3\alpha x} \right],$$

$$\mu = (e\Omega_e A) (m_{\text{ЭФФ}} C \omega \omega_e)^{-1},$$

где  $\Psi_3 = 3(k_2 y - \omega t)$ ,  $k_2 = -(\omega/c)(\Omega_e/\omega_e)$  – волновое число ПВ вдоль направления распространения,  $\alpha_1 \approx \Omega_e/c$ ,  $\alpha_3 \approx \Omega_e \alpha/c$ ,  $\alpha = (1+9\omega^2/\omega_e^2)^{1/2}$ ,  $A$  – амплитуда  $z$ -компоненты магнитного поля ПВ основной частоты на границе плазмы с металлом. Из (2) видно, что третья гармоника рассматриваемых ПВ представляет собой суперпозицию двух волновых взаимодействий поверхностного типа с глубинами проникновения  $\alpha_3^{-1}$  и  $(3\alpha_1)^{-1}$ . Это справедливо даже в том случае, когда  $9\omega^2 \geq \omega_e^2$ , т.е. частота третьей гармоники попадает в диапазон частот, где ПВ основной частоты не существуют [14]. Отсюда можно сделать вывод, что в рассматриваемом случае не происходит трансформации поверхностных волн в объемные и связанные с этим процессом нелинейного затухания ПВ основной частоты [13].

Для оценки эффективности генерации сигнала частоты  $3\omega$  сравним на границе с металлом амплитуды  $z$ -компонент магнитных полей третьей ( $H_{z3}$ ) и ( $H_{z2}$ ) гармоник ПВ в различных полупроводниковых образцах для типичных при проведении экспериментов с магнитоплазменными ПВ азотных температур [4] (выражения для компонент полей волны частоты  $2\omega$  приведены в [15]) и проверим справедливость исходных предположений. Так, для узкощелевых полупроводников  $n$  – InSb ( $\epsilon_g \approx 0,18$  эВ) и  $n$  – InAs ( $\epsilon_g \approx 0,4$  эВ) при азотных температурах полупроводниковая плазма является слабостолкновительной при частотах волны  $\omega \sim 7 \cdot 10^{11} - 10^{12}$  рад/с. Для типичных экспериментальных значений магнитных полей  $H_0 = 2 - 5$  кЭ приближение слабой нелинейности  $\mu \ll 1$  выполняется для вышеуказанных полупроводников при амплитудах поля ПВ  $\sim 1,5$  кВ/см и ниже (для антимонида индия  $\mu \approx 0,1$  соответствует  $E \approx 1,1$  кВ/см, а для арсенида индия тому же значению  $\mu$  соответствуют амплитуды  $\sim 1,3$  кВ/см). Отметим, что такие значения полей ПВ далеки от пробойных. Для вышеуказанных значений частоты, амплитуды ПВ и внешнего магнитного поля отношение  $H_{z3}/H_{z2} \sim 1/3 - 1/2$  в образце  $n$  – InSb и  $H_{z3}/H_{z2} \sim 1/5 - 1/4$  в  $n$  – InAs. В полупроводнике  $n$  – GaAs со значительно большей шириной запрещенной зоны ( $\epsilon_g \approx 1,5$  эВ) при тех же  $H_0$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  величина  $H_{z3}/H_{z2}$  порядка  $10^{-2}$ . Отношения других компонент поля ПВ того же порядка. Отсюда можно сделать вывод о том, что в узкощелевых полупроводниках амплитуда третьей гармоники волны может значительно превышать амплитуду сигнала на частоте  $3\omega$  в газовой плазме и широкощелевых полупроводниках и быть одного порядка с амплитудой второй гармоники ПВ. Отметим, что предельный переход  $\epsilon_g \rightarrow 0$  в нашем случае несправедлив, поскольку при этом нарушается неравенство  $p^2/2m_{\text{эфф}}\epsilon_g \ll 1$  и, кроме того, изотропный непарараболический закон дисперсии трансформируется в линейную зависимость энергии от квазимпульса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшулер Е. Ю., Кац Л. И., Попов В. В. //Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Вып. 7(940). – М.: ЦНИИ Электроника, 1983. – 60 с.
2. Электроника и радиофизика миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн /Под ред. А. Я. Усикова – Киев: Наукова Думка, 1986.
3. Бразис Р. С. //Лит. физ. сб. 1981. Т. 21. № 4. С. 73.
4. Амброзиевичене В. С., Бразис Р. С., Кунигелис А. А. Препринт ИПФ АН ЛитССР. Вильнюс, 1987.
5. Азаренков Н. А., Кондратенко А. И., Остриков К. Н. //Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. № 8. С. 11; 1989. Т. 15. № 14. С. 68.

6. Азаренков Н. А., Кондратенко А. Н., Остриков К. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 5. С. 642.
7. Ханкина С. И., Яковенко В. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 3. С. 389.
8. Дмитрук Н. Л., Литовченко В. Г., Стрижевский В. Л. Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках. - Киев: Наукова Думка, 1989.
9. Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетерцов А. П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. - М.:Наука, 1989.
10. Колпаков С. Н., Филиппов Ю. Ф. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 12. С. 1568.
11. Цидильковский И. М. Электроны и дырки в полупроводниках. - М.:Наука, 1972.
12. Во Хонг Ань. Теория параметрического воздействия электромагнитного излучения большой мощности на твердое тело. - М.:Наука, 1985.
13. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. - М.:Атомиздат, 1976.
14. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. - М.:Энергоатомиздат, 1985.
15. Азаренков Н. А., Остриков К. Н. //Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 2. С. 266.

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
10 апреля 1990 г.

---