

Известия высших учебных заведений

# РАДИОФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С АПРЕЛЯ 1958 г.

Том 34, № 5

Нижний Новгород

май 1991

## СОДЕРЖАНИЕ

Брук Ю. М. Разделение широкополосных, дрейфующих по частоте сигналов и помех при многоканальном обнаружении . . . . .	483
Кукушкин А. В. Флуктуации функции когерентности поля радиоволн метрового диапазона, рассеянного в случайно-неоднородной космической среде . . . . .	492
Вольпов А. Л., Зимин Ю. А. Статистическая модель интерферограмм сдвига, полученных при наблюдении когерентно освещенных объектов через турбулентную атмосферу . . . . .	501
Резник А. Н. Квазистационарное поле теплового излучения в теории контактной радиотермометрии . . . . .	512
Клейман Е. Б., Ойрингель И. М., Ступко Е. Г. Затухание метастабильных атомных состояний в равновесной неизотермической плазме . . . . .	519
Кучеров А. Н., Макашев Н. К., Устинов Е. В. Фактор теплового самовоздействия многочастотного оптического луча . . . . .	528
Малахов А. Н. Диффузия через резкие потенциальные барьеры. I. Точное решение . . . . .	536
Филинов В. С. Модифицированные интегралы по траекториям и комплексный метод Монте—Карло в статистической теории распространения волн в дисперсных средах . . . . .	548
Гузев М. А. Пространственно-временной подход в статистической теории нестационарных волновых процессов . . . . .	558
Дунин С. З., Максимов Г. А. Рассеяние скалярных полей на шероховатых поверхностях. Учет многократно рассеянных волн . . . . .	565
Соколов С. В. Рекуррентный метод решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова . . . . .	575
Розов В. А., Сочава А. А. Дифракция электромагнитных волн на полу бесконечной сетке с квадратными ячейками . . . . .	583
Кисель В. Н., Федоренко А. И. Дифракция электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре с неоднородным магнитодиэлектрическим покрытием	590
Дмитриев А. Ю., Трубецков Д. И., Четвериков А. П. Нестационарные процессы при взаимодействии винтового электронного пучка со встречной волной в волноводе . . . . .	595

## Краткие сообщения и письма в редакцию

Коваленко А. Н. Аналитические выражения для электродинамических характеристик основной волны микрополосковой линии . . . . .	601
Листвин В. Н. Эволюция состояния поляризации рассеянного излучения в одномодовом волоконном световоде . . . . .	603
Афанасьев С. В. Излучение модели сверхсветового источника в нестационарной среде . . . . .	605
Быков М. М., Горшков Б. Г., Заслонко И. К. Исследование корреляционного волоконно-оптического кольцевого интерферометра на многомодовом светодоводе . . . . .	607
Остриков К. Н. Влияние пристеночных переходящих областей на распространение поверхностной волны в плазменном слое, ограниченном металлом . . . . .	610

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ  
(главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗ-  
НЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО,  
Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ,  
В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С ТАГЕР, В. И. ТА-  
ЛЯНОВ.

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 28.11.90. Подписано к печати 10.10.91.  
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 11,55. Усл. кр.-отт. 11,55. Уч.-изд. л. 11,9. Тираж 991 экз  
Заказ 4786. Цена 1 р. 80 к.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика». Телефон 36-01-71.

---

Нижегородская областная типография управления издательств, полиграфии  
и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

© «Известия высших учебных заведений. Радиофизика», 1991.

УДК 621.396.62

## РАЗДЕЛЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ, ДРЕЙФУЮЩИХ ПО ЧАСТОТЕ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ ПРИ МНОГОКАНАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ

*Ю. М. Брук*

Дано строгое решение методом Фурье задачи разделения широкополосных сигналов, отличающихся скоростями дрейфа частоты. Исследовано изменение шума при восстановлении сигналов. Предложена новая схема построения многоканальной приемной системы, основанная на использовании разностных множеств. Такая система при меньшем числе каналов дает упрощение обработки и рост чувствительности. Приведен пример выделения слабого сигнала пульсара и подавления интенсивных помех

Задача разделения (ортогонализации) суммы сигналов неизвестной формы, амплитуды и временного положения — одна из труднейших, и ее решение возможно лишь при некоторых ограничениях. В работе [1] рассматривалась задача разделения широкополосных, периодических, дрейфующих по частоте радиосигналов, например, космических источников излучения (пульсаров) и не дрейфующих местных помех, наблюдавших одновременно в нескольких настроенных на различные частоты каналах. Было исследовано два варианта ее решения. Строгое требовало решения системы линейных уравнений высокого порядка, что, естественно, связано с рядом трудностей и чревато неустойчивостью. Приближенное зависело от степени ортогональности сигналов и помех. Общим недостатком обоих методов была неконтролируемая погрешность результата, зависящая от отношения сигнал/шум (С/Ш) и выполнения ряда исходных допущений о свойствах сигнала и помехи.

В рамках той же задачи будет дано в замкнутом виде и детально проанализировано строгое решение, удобное для практических расчетов. Предлагается и исследуется новый метод построения многоканальной системы (МПС), использующий теорию дискретных разностных множеств (ЦРМ). Применение этого метода позволяет существенно расширить полосу обзора, упростить алгоритм обработки и уменьшить шум.

**1. Основные соотношения. Метод Фурье.** Постановка задачи поясняется рис. 1 (см. на вклейке). Сигнал в каждом  $k$ -м приемном канале является суммой двух различных сигналов  $S_k$  и  $P_k$ , причем  $S_k$  отличаются амплитудой  $a_k$  и сдвигом  $q_k$ , а  $P_k$  — только амплитудой  $b_k$ . В общем случае количество неизвестных сигналов, их форма и размерность ограничены лишь числом отсчетов  $N$  и числом каналов  $M$ , но все сигналы отличаются сдвигами. Для каждого сигнала предполагаются известными только сдвиги  $q_k$  или закон дисперсии и частоты настройки каналов, по которым все  $q_k$  могут быть вычислены. Ставится задача ортогонализации таких сигналов, т. е. разработка процедуры, обеспечивающей фильтрацию одного и зануление или минимизацию всех других.

Итак, принятый сигнал в  $k$ -м канале ( $0 \leq k \leq M-1$ ) задан своими отсчетами  $Z_{k,i}$  ( $0 \leq i \leq N-1$ ) и может быть записан в виде

$$Z_k(i) = a_k S_k(i) + b_k P_k(i) + X_k(i), \quad (1)$$

где  $S_{k,i}$ ,  $P_{k,i}$ ,  $X_{k,i}$  — соответственно компоненты полезного сигнала, по-

мехи и аддитивного шума,  $a_k$  и  $b_k$  — константы, зависящие только от номера канала. Предполагается, что структура сигнала и помехи подобна во всех каналах, как это видно из рис. 1, причем из условия широкополосности  $a_k > 0$ ,  $b_k > 0$ , сигнал в  $k$ -м канале сдвинут на  $q_k$  единиц, сдвиг помехи равен нулю. Масштабы  $S_{k,i}$  и  $P_i$  выбраны так, что

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} b_k = 1. \text{ Полагаем, что при любом целом сдвиге сиг-}$$

нал неискажается, т. е. в случае одиночного сигнала его размер не превышает  $N - |q_k|_{\max}$ . В случае периодического сигнала это ограничение отсутствует, поскольку сдвиг циклический, т. е.  $q_k = (q_k)_{\text{mod } N}$ .

В [1] система (1) с  $N \cdot M$  отсчетами и  $2(N+M)-1$  неизвестными решалась линейными и нелинейными методами наименьших квадратов. Здесь мы поступим иначе и для этого запишем дискретное преобразование Фурье (ДПФ) (1) по переменной  $i$  с учетом сдвига сигнала на  $q_k$  единиц:

$$\tilde{Z}_k(n) = a_k \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} q_k n\right) \tilde{S}(n) + b_k \tilde{P}(n) + \tilde{X}_k(n), \quad (2)$$

где  $\sim$  означает ДПФ, а  $\tilde{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} i n\right)$  и  $\tilde{P}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} P_i \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} i n\right)$  — ДПФ сигнала и помехи в первом канале.

Приведем далее полезный сигнал в  $k$ -м канале к первому каналу. Для этого сдвинем (1) на  $q_k$  единиц в направлении, противоположном исходному. ДПФ такого сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_k(n) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} q_k n\right) &= a_k \tilde{S}(n) + b_k \tilde{P}(n) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} q_k n\right) + \\ &+ X_k(n) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} q_k n\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Суммируя по  $k$  (2) и (3), получим

$$\tilde{W}_p(0, n) = \tilde{A}(n) \tilde{S}(n) + \tilde{P}(n) + \tilde{X}_p(0, n); \quad (4)$$

$$\tilde{W}'_s(n, n) = \tilde{S}(n) + \tilde{B}'(n) \tilde{P}(n) + \tilde{X}'_s(n, n), \quad (5)$$

где  $\tilde{X}_p(0, n)$  и  $\tilde{X}'_s(n, n)$  — ДПФ шума, преобразованного как сигнал ( $S$ ) или помеха ( $P$ ),  $(')$  означает комплексное сопряжение,

$$\tilde{W}(n, n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{Z}_k(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} q_k n\right),$$

$$\tilde{X}(n, n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{X}_k(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} q_k n\right),$$

где

$$\tilde{A}(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a_k \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} q_k n\right),$$

$$\tilde{B}'(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} b_k \exp\left(j \frac{2\pi}{N} q_k n\right)$$

— ДПФ отсчетов спектра и амплитуд (сигнала и помехи), разделенных интервалами  $q_k$ ; «'» означает комплексное сопряжение; индексы  $s$  и  $p$  указывают на то, что в соответствующем спектре интенсивность сигнала или помехи максимальна. Из (4) и (5)

$$\tilde{S}(n) + \frac{\tilde{X}'_s(n, n) - \tilde{X}_p(0, n)\tilde{B}(n)}{1 - \tilde{A}(n) \cdot \tilde{B}'(n)} = \frac{\tilde{W}'_s(n, n) - \tilde{W}_p(0, n)\tilde{B}'(n)}{1 - \tilde{A}(n) \cdot \tilde{B}'(n)}; \quad (7)$$

$$\tilde{P}(n) + \frac{\tilde{X}_p(0, n) - \tilde{X}'_s(n, n)\tilde{A}(n)}{1 - \tilde{A}(n) \cdot \tilde{B}'(n)} = \frac{\tilde{W}_p(0, n) - \tilde{W}'_s(n, n)\tilde{A}(n)}{1 - \tilde{A}(n) \cdot \tilde{B}'(n)}. \quad (8)$$

Итак, мы получили с точностью до преобразованного шума отдельно спектр сигнала и помехи, решив в замкнутом виде задачу их разделения. Заметим, что, как видно из (6), при  $n=0 A(0)=B(0)=1$  и постоянная составляющая не может быть восстановлена без дополнительных условий, например неотрицательности сигнала и помехи. С учетом этого ограничения, если известны или заданы амплитуды  $a_k$  и  $b_k$ , обратное преобразование Фурье ОДПФ (7) и (8) дает вид сигнала и помехи. Исследуем эффективность разделения, которая существенно зависит от корректирующей весовой функции  $(1 - \tilde{A}(n)\tilde{B}'(n))^{-1}$ , интенсивности и спектра шума. Обычно  $a_k$  и  $b_k$  неизвестны, поэтому сразу возникает вопрос, можно ли их определить, хотя бы в отсутствие шума. В принципе, эта задача разрешима при  $M \geq 2$ , но не линейными методами. Мы используем другой подход и рассмотрим некоторые общие свойства функций  $\tilde{A}(n)$  и  $\tilde{B}(n)$  и ряд частных случаев с тем, чтобы разработать оптимальную структуру приемной системы и процедуру обработки.

**2. Эквидистантная приемная система.** Исследуем наиболее простую  $M$ -канальную систему, обеспечивающую одинаковые задержки сигнала между соседними каналами, т. е.  $q_k = qk$ . Именно такая аппаратура чаще всего используется для исследования пульсаров [2]. Положим  $a_k = b_k = 1$ . Тогда из (6)  $\tilde{A}(n) = \tilde{B}(n)$  и

$$\tilde{A}(n)\tilde{B}'(n) = |L(n)|^2 = \frac{\sin^2(\pi/N) M q n}{M^2 \sin^2(\pi/N) q n}, \quad (9)$$

где  $L(n)$  назовем оператором сдвига. Очевидно, полное восстановление сигнала и помехи возможно, если  $|L(n)| < 1$  для всех  $n$ ,  $1 \leq n \leq N-1$ . Это условие выполняется при  $(N, q) = 1$ , т. е. для  $N$  и  $q$  взаимно простых, причем весьма желательно выбирать  $N$  простым числом. Оно совпадает с найденным в [1] условием максимального ранга матрицы системы (1). Становится ясным, что вырождение возникает, если  $1 - |L(n)|^2 = 0$ , а неустойчивость и рост шума, если  $1 - |L(n)|^2 \ll 1$ . Отсюда сразу видны способы повышения устойчивости, например введение спектральной весовой функции или неравномерность размещения приемных каналов. Заметим, что в [1] эта задача в общем виде не была решена. Из (9) видно, что разделение наиболее эффективно при  $M=N$ ,  $q$  целом и  $(N, q) = 1$ . Тогда  $L(n) = 0$  и при суммировании сигнала автоматически подавляется помеха, а при суммировании помехи — сигнал. Подобная система применяется при небольших  $N$  [2], так как для  $N \sim 10^2$  она становится неоправданно сложной. Кроме того, желательно

использовать минимально допустимое число каналов, поскольку исходное предположение о широкополосности сигнала и помехи тем более справедливо, чем меньше  $M$ . С другой стороны, при малом  $M$  растет дисперсия и корреляция шума. Чтобы правильно выбрать  $M$ , исследуем свойства автоковариационной функции шума АКФ  $C(\tau)$  в предположении, что во всех каналах действует  $\delta$ -коррелированный по  $i$  и по  $k$  шум с единичной дисперсией. При этом  $\langle \tilde{X}_p(0, n) \tilde{X}_s(n, n) \rangle = 0$  и

$$C(\tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1 + |L(n)|^2}{(1 - |L(n)|^2)^2} \cos \frac{2\pi}{N} \tau. \quad (10)$$

Здесь  $C(\tau)$  нормировано на  $MN$  — полную энергию шума при простом суммировании, так что  $C(0) = 1$  при  $L(n) = 0$ .

Из (9) видно, что для любых  $q$   $0 \leq |L(n)|^2 \leq 1$ . Поэтому  $C(0) \geq 1$ , т. е. после обработки шум не уменьшается. Подставляя (9) в (1) и суммируя по  $n$ , получаем для дисперсии шума приближенное выражение

$$C(0) \simeq 1 + 0,4N^4(M^2 - 1)^{-2}(N - 1)^{-1}. \quad (11)$$

Если допустить удвоение дисперсии,  $M_{\min} \simeq 0,8N^{3/4}$ . Функцию  $C(\tau)$  не удается получить в явном виде даже для рассматриваемого нами простого оператора сдвига. Поэтому рассмотрим результаты численных расчетов. Семейство АКФ  $C(\tau)/C(0)$  для  $N=33$  разных  $M$  и  $q$  показано на рис. 2. Из (9) — (11) и вида АКФ можно сделать следующие выводы.

Если используется малое число каналов  $2 \leq M < M_{\min}$ , шум после восстановления резко возрастает и оказывается сильно скоррелированным. Для любых  $M > M_{\min}$  АКФ четко делится на две области  $\tau = 0$  и  $\tau > 0$ , связанные с некоррелированной и коррелированной компонентами шума. Спектр шума при  $(N, q) = 1$  имеет один максимум на частоте  $n_1$ , для которой  $(n_1 q)_{\text{mod } N} = 1$ , а на частотах  $(nq)_{\text{mod } N} = k$  падает как  $k^{-2}$ . По этой причине коррелированная компонента шума — почти гармоническая функция и выбрасывание из спектра всего одной максимальной гармоники уменьшает более чем на порядок и коррелированную компоненту и добавку к дисперсии. При этом можно уменьшить число каналов почти вдвое ( $M_{\min} \simeq 0,43N^{3/4}$ ). Исключение и следующей за ней по интенсивности гармоники  $n_2$ , для которой  $(n_2 q)_{\text{mod } N} = 2$ , дает  $M_{\min} \simeq 0,3N^{3/4}$ . Если допустимо стать на путь подобной коррекции спектра восстанавливаемого сигнала, возникает законный вопрос о возможности обойтись без спектральной обработки, т. е. искать не  $S(n)$ , а  $S_1(n) = S(n)(1 - |L(n)|^2)$ . Это зависит от спектра  $S(n)$  и выбора  $q$ . Например, при  $q = 1$  в восстанавливаемом сигнале ослаблены низкочастотные гармоники, что эквивалентно ФВЧ с частотой среза  $N/2M$ . При  $q = 2$  ослаблены низкочастотные и высокочастотные гармоники, что эквивалентно ПФ с частотами среза  $N/4M$  и  $N/2 - N/4M$ . Главное преимущество такого метода разделения — отсутствие необходимости в применении ДПФ. Действительно, умножив (7) на  $1 - |L(n)|^2$  и применив ОДПФ, получим

$$S_1(i) + X_s(i) - X_p(i) * \tilde{L}'(n) = W_s(i) - W_p(i) * \tilde{L}'(n). \quad (12)$$

Здесь « $*$ » означает свертку

$$\begin{aligned} W_s(i) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Z_k(i+qk), \quad W_p(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Z_k(i), \\ W_p(i) * \tilde{L}'(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_p(i+qk). \end{aligned}$$

Очевидно, процедура разделения содержит лишь циклический сдвиг и сложение принятых сигналов (1). Для (12), подобно (10) и (11), имеем

$$C(\tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} (1 + |L(n)|^2) \cos \frac{2\pi}{N} n\tau; \quad (13)$$

$$C(0) \simeq 1 + M^{-1} - N^{-1}, \quad (14)$$

откуда следует, что при любых  $M$  спектр шума и его дисперсия изменяются незначительно.

Итак, эффективное разделение сигнала и помехи возможно и при  $M \ll N$ , что является преимуществом метода, однако обычно оно сопровождается искажениями спектра сигнала и шума. Рассмотрим один из возможных путей устранения этого недостатка — отказ от требования  $q_k = qk$ .

**3. Неэквидистантная приемная система.** Представляется естественным считать «хорошой» такую многоканальную приемную систему (МПС), которая обеспечивает полное разделение при незначительном росте дисперсии и корреляции шума. Для этого весовая функция  $(1 - |L(n)|^2)^{-1}$  в (7) и (8) должна быть близка к единице для любых  $n$ . Поскольку выражение для  $L(n)$  не отличается от диаграммы направленности (ДН) антенны—решетки, можно рассматривать проблему оптимизации МПС как задачу синтеза ДН с низким уровнем боковых лепестков (БЛ) в интервале  $1 \leq n \leq N-1$  и разрешением  $\sim N^{-1}$  в главном лепестке (ГЛ).

Мы предлагаем решение этой задачи за счет такого неэквидистантного размещения каналов МПС, чтобы последовательность  $q_k$  временных задержек полезного сигнала между первым и всеми последующими каналами образовала циклическое разностное множество — ЦРМ. Как было недавно показано [3, 6], подобное размещение элементов в антenne дает низкий уровень БЛ и высокое разрешение в ГЛ. Такую систему мы будем сокращенно именовать РМПС.

Рассмотрим определения и свойства ЦРМ, существенные для оценки параметров РМПС, и исследуем свойства таких РМПС. Более детальные сведения о ЦРМ можно найти в [4–6].

ЦРМ характеризуется тремя целыми параметрами  $(N, M, \lambda)$ , причем  $(N, M) = 1$ , а

$$\lambda = \frac{M(M-1)}{N-1} = m_l - m_{N-l}, \quad (15)$$

где  $m_l$  — число одинаковых задержек сигнала, равных  $l_q$ , между каналами  $i$  и  $k$ , т. е.  $ql = |q_i - q_k|_{\text{mod } N}$ . Из (15) следует  $M = 0,5 + \sqrt{0,25 + \lambda(N-1)}$ , откуда наименьшее число каналов РМПС, образующих ЦРМ, будет при  $\lambda = 1$ . Тогда  $M \simeq \sqrt{N}$ , что существенно меньше минимально приемлемого для эквидистантной МПС с полным восстановлением сигнала и близко к МПС с неполным восстановлением спектра.

Для всех  $1 \leq n \leq N-1$ ,  $(N, q) = 1$  и  $a_k = b_k = 1$

$$|L(n)|^2 = \frac{N-M}{M(N-1)}. \quad (16)$$

Из этого важнейшего свойства ЦРМ следует постоянство весовой функции

$$\frac{1}{1 - |L(n)|^2} = \frac{M(N-1)}{N(M-1)} \quad (17)$$

и, значит, отпадает необходимость в использовании ДПФ. Тогда, подобно (12), имеем

$$S(i) = \frac{M(N-1)}{N(M-1)} [W_s(i) - W_p(i) * \tilde{L}'(n)] ; \quad (18)$$

$$P(i) = \frac{M(N-1)}{N(M-1)} [W_p(i) - W_s(i) * \tilde{L}(n)] . \quad (19)$$

На рис. 2 показан пример восстановления сигнала, принятого трехканальной РМПС (ЦРМ 7, 3, 1), согласно (18). В каждом канале (рис. 2а) сигнал и помеха показаны отдельно. Видно, что они состоят из семи точек каждый, т. е. полностью перекрываются. Сдвиги между сигналами  $S_1$  и  $S_2$ ,  $S_2$  и  $S_3$  равны  $q_1=1$  и  $q_2=2$ , сдвиг между помехами равен нулю. Процедура разделения состоит из четырех этапов (рис. 2б). (1). Каналы 1, 2 и 3 суммируются без сдвига. Образуется  $W_p$ -помеха + остаток сигнала. (2). Каналы 1, 2 и 3 суммируются со сдвигами  $q_1=-1$  и  $q_2=-2$ . Образуется  $W_s$  — сигнал + остаток помехи. (3). Рассматривая  $W_p$  как полезный сигнал в трех каналах, суммируем его, так же как в п. 2. Образуется  $(1/M)W_p * L'$ . (4). Из (3) вычитается (4). Процедура разделения завершена.

Найдем далее усиление шума. Подставляя (16) в (10) и суммируя по  $n$ , получим

$$C(\delta) = C(0) \frac{\sin(N-1)(\pi\tau/N) \cos \pi\tau}{(N-1) \sin(\pi\tau/N)} = \begin{cases} C(0) & \tau=0 \\ \frac{-C(0)}{N-1} & \tau>0 \end{cases} ; \quad (20)$$

$$C(0) = \left[ 1 + \frac{N-M}{M(N-1)} \right] \left[ \frac{M(N-1)}{N(M-1)} \right]^3 \simeq 1 + 3(M^{-1} - N^{-1}) . \quad (21)$$

Поскольку из (20) при  $\tau>0$   $C(\tau) = \text{const}$ , шум после обработки остается некоррелированным, а его дисперсия (21) возрастает незначительно.

Сравним (11) и (21) при одинаковом числе приемных каналов. На рис. 3 показана такая зависимость, построенная по (11) (рис. 3а) и (21) (рис. 3б) с учетом (15) для  $\lambda=1$  и  $\lambda=2$ . Видно, что с ростом  $N$  качество эквидистантной МПС падает из-за ухудшения восстановления низкочастотных гармоник. Преимущество РМПС — одинаковая достоверность восстановления всех гармоник спектра, а при  $\lambda=1$  РМПС — безызбыточная система. Поэтому при любом имеющемся в распоряжении числе приемных каналов РМПС дает большие возможности обнаружения и исследования сигналов. В частности, при использовании РМПС для исследования пульсаров можно значительно расширить полосу частот анализатора спектра.

Синтез конкретной РМПС. т. е. определение сдвигов  $q_k$  при заданном  $N$  и выбранной величине  $\lambda$ , — процедура неоднозначная, поскольку существует множество ЦРМ с одинаковыми и близкими значениями  $N$ ,  $M$ ,  $\lambda$ . Значения  $q_k$  многих ЦРМ приведены в [4, 5]. Другие (эквивалентные) с теми же  $N$ ,  $M$ ,  $\lambda$  для каждого ЦРМ из [4, 5] можно найти самим [6] за счет сдвига  $q_k+r$  или умножения  $tq_k$ , где  $r$  и  $t \neq 0$  целое,  $t < N$ ,  $(N, t) = 1$  и все  $q_k+r$  и  $tq_k$  берутся по  $\text{mod } N$ , а также инверсии и дополнения. Хотя любое из этого великого разнообразия ЦРМ формально одинаково пригодно для разделения сигналов, существуют «лучшие» и «худшие» ЦРМ. Они заметно отличаются уровнем БЛ, т. е. значениями  $|L(n)|$  при нецелых значениях  $n$ . Поэтому «хорошие» РМПС менее чувствительны к флуктуациям  $a_p$  и  $b_h$  и более пригодны для использования в анализаторах спектра случайных сигналов. Такие ЦРМ были найдены в [6]. Координаты  $q_k$  элементов некоторых из них,

любезно предоставленные нам авторами, приведены ниже в табл. 1 для различных практически приемлемых значений  $N$ ,  $M$ ,  $\lambda$ .

Уже отмечалось, что невыполнение условия  $a_k = b_k = \text{const}$  и наличие аддитивного шума исключают возможность строгого решения задачи разделения сигналов. В этом случае естественно использовать метод наименьших квадратов. Тогда, рассматривая приведенные выше соотношения для  $S$  и  $P$  в качестве первого приближения, приходим к соотношениям

$$a_k = \sqrt{\frac{E_s}{E_p} \frac{R_{ks} - R_{kp}R_{sp}}{1 - R_{sp}^2}}, \quad b_k = \sqrt{\frac{E_p}{E_s} \frac{R_{kp} - R_{ks}R_{sp}}{1 - R_{sp}^2}}, \quad (22)$$

где  $E_s$ ,  $E_p$  — энергия сигналов  $S$  и  $P$ ,  $R_{sp}$  — коэффициент их взаимной корреляции,  $E_k$  — энергия сигнала в  $k$ -м канале,  $R_{ks}$ ,  $R_{kp}$  — коэффициенты взаимной корреляции сигналов  $S$  и  $P$  и сигнала  $k$ -го канала.

**4. Применение.** Мы весьма детально изучили различные аспекты проблемы разделения задержанных сигналов. Рассмотрим на базе этого некоторые практические процедуры.

*1. Очистка сигналов от помех.* Условие широкополосности  $a_k = b_k = \text{const}$  выполняется не всегда, и здесь возможны разные случаи. Если  $P \gg S$ , перед разделением проводится нормировка на энергию в каждом канале. Это дает  $b_k \approx 1$ , после чего находим  $P(i)$  и  $Z_k(i) - P(i)$ . Затем нормируется  $Z_k(i) - P(i)$  и определяется  $S(i)$ . Фактически это усовершенствованная процедура корреляционной очистки [1]. Если  $P$  и  $S$  одного порядка и  $P$  — помеха в виде коротких импульсов, целесообразно либо использовать (22), либо проводить очистку в малом числе каналов с коррекцией спектра в области низких частот.

Один из описанных алгоритмов применялся для очистки космических сигналов пульсаров от местных помех, в результате чего повышалось отношение сигнал/шум. На рис. 4 показан пример использования соотношения (12), не требующего применения ДПФ для обработки сигнала пульсара  $1133+16$ , принятого многоканальной приемной системой;  $N=98$ ;  $M=12$ ;  $q=2$ ;  $T$  — период;

а) — суммарный сигнал без очистки от помех; б) — суммарный сигнал после очистки.

Обработка сигналов осуществлялась за один проход без вычисления отдельно  $W_s(i)$  и  $W_p(i)$  по следующей программе:

число каналов =  $M$ , число отсчетов =  $N$ , сдвиг между каналами =  $C$ , сигнал  $S(K, J)$  накапливается в  $C(J)$

```

FOR J=0 TO N-1 \ C(J)=0 \ NEXT J
FOR K=0 TO M-1 \ D=K*C \ FOR J =0
      TO N-1 \ J1=J+N*((J+D)/N)
      A=0 \ FOR L=0 TO M-1 \ D1=L*C \ L1=
            =J+D1-N*((J+D1)/N)
      A=A+S(K,L1) \ NEXT L \ X=A/M \ C(J)=
            =C(J)+S(K,J1)-X \ NEXT J
            .   NEXT K
    
```

**2. Обнаружение и анализ задержанных сигналов.** В разных задачах поиска, селекции космических и земных источников излучения, например пульсаров, ионосферных свистов, сигналов РЛС и т. п., требуется определить скорость дрейфа частоты. Для этого необходимо раз-

Таблица 1

$N$	$M$	$\lambda$	$ L(n) _{\Delta B}^{\max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
31	6	1	5,9	0	1	4	10	12	17								
40	13	4	9,5	0	5	7	15	21	22	23	25	26	29	34	35	38	
133	12	1	7,7	0	2	6	24	29	40	43	55	68	75	76	85		
183	14	1	8,1	0	12	21	27	32	46	74	76	77	84	100	113	117	135

деление принятых сигналов по временным задержкам. Описанная выше процедура разделения двух сигналов легко обобщается на большее их число. Так, если  $M = N$  и  $N$  простое число или для любых РМПС ( $M < N$ ), сигналы с задержками  $q_k = k$ ,  $0 \leq k \leq N-1$  ортогональны и автоматически разделяются процедурой сдвига и сложения каналов. Для нецелых  $q$  разделение также возможно, однако требует для каждой гармоники решения системы линейных уравнений, матрица которой имеет в качестве определителя определитель Вандермонда [7]. Если  $M \neq N$ , решение либо позволяет разделить  $M$  сигналов, либо может быть найдено методом наименьших квадратов.

3. *Анализ случайных процессов.* Многоканальные приемные системы часто используются в качестве анализаторов спектра случайных сигналов, частотная АКФ которых зависит только от разности частот. Например, при исследовании рассеяния или фарадеевского вращения при распространении в космической плазме. Описанная выше РМПС в таком качестве может оказаться весьма эффективной, позволяя либо сократить число каналов приема, либо расширить полосу обзора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брук Ю. М., Ульянов О. М., Устименко Б. Ю. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 8 С. 1658
- 2 Брук Ю. М., Устименко Б. Ю // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 12. С. 1867
3. Leeper D. C. — Thinned aperiodic antenna arrays with improved peakside lobe levelcontrol. — Pat. USA № 4. 071. 848. 31. 01. 78
- 4 Baumert L D Cyclic Difference Sets. — Lecture Notes in Mathematics. V 182. N Y. Springer-Verlag. 1971 — 166 р
- 5 Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. — М.: Сов. радио, 1975.— 200 с.
6. Копилович Л. Е, Содин Л. Г. Препринт ИРЭ АН УССР № 293, Харьков, 1986
7. Лютстерник Л. А, Янпольский А. Р. Высшая алгебра (СМБ).—М.: Физматгиз, 1962.—300 с.

Радиоастрономический институт  
АН УССР

Поступила в редакцию  
25 августа 1989 г.,  
после доработки  
26 июня 1990 г.

## SEPARATION OF FREQUENCY DRIFTING SIGNALS IN A MULTICHANNEL RECEIVING SYSTEM

Yu. M. Bruck

An exact solution of the orthogonalization problem for broadband signals is given. The signals differ in the rate of frequency change. The changes of noise by the restoration of the signals are investigated. A new multichannel receiving system is proposed. The structure of the receiving system is based on the theory of cyclic difference set. This system has less channels, more sensitivity and demands simpler data processing. An example of detection of the weak signal of the pulsar and suppression of the intensity signal of the interference is given.

УДК 52—77:537.87:621.371

**ФЛУКТУАЦИИ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ  
РАДИОВОЛН МЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ПРИ РАССЕЯНИИ  
В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

*A. B. Кукушкин*

Проведен качественный анализ флуктуаций волнового поля в режиме слабого и сильного рассеяния. Показано, что для метровых радиоволн рассеяние в межзвездной среде приводит к возникновению стохастической многолучности и спекл-структуре в изображении источника. Рассмотрен метод спекл-интерферометрии при стохастической многолучности в межзвездной среде. Исследовано аналитическое решение для межчастотной функции корреляции поля и приведены оценки ширины полосы когерентности как функции частоты

Для метрового и декаметрового диапазона радиоволн одним из главных факторов, ограничивающих чувствительность и разрешающую способность инструментов, оказывается рассеяние в среде распространения (ионосфера, межпланетная (МПС) и межзвездная среда (МЗС)). Влиянию рассеяния в среде распространения при радиоастрономических измерениях посвящено большое количество работ (см., например, [1,2] и библиографию в этих работах). Однако в большинстве из них справедливо рассматривается приближение слабого рассеяния, что обусловлено используемым диапазоном радиоволн. Существующие системы апертурного синтеза и радиоинтерферометры с независимой записью в основном работают в диапазоне сантиметровых радиоволн, где рассеяние в ионосфере и в МПС является довольно слабым. Что же касается рассеяния в МЗС, то характерные масштабы искажений волнового фронта в МЗС в этом диапазоне не менее или на порядок превышают максимальные линейные размеры апертур, синтезируемых наземными инструментами [3]. В диапазоне метровых и декаметровых радиоволн интенсивность рассеяния в МПС существенным образом зависит от элонгации. Для ослабления влияния в МПС наблюдение источников в этом диапазоне производится при элонгациях, превышающих  $90-120^\circ$ . Характер рассеяния в ионосфере подвержен значительным изменениям в зависимости от состояния ионосферы в момент измерений. В умеренных широтах при спокойной ионосфере для метрового диапазона характерен режим ненасыщенных или частично насыщенных флуктуаций. Как известно [4], в последнем случае распространение волны сопровождается эффектом фокусировки, что приводит к значительным флуктуациям амплитуды и фазы. Даже качественный анализ рассеяния в МЗС показывает, что при наблюдении источников в плоскости Галактики режим рассеяния в МЗС соответствует сильным насыщенным флуктуациям.

В настоящем сообщении проведен теоретический анализ влияния рассеяния на характеристики интерферометра.

1. Положим, что в двух пространственно разнесенных антенах принимаются волны одинаковой поляризации, и рассмотрим скалярные волновые поля  $E(r_1, t_1)$ ,  $E(r_2, t_2)$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  — радиусы-векторы центров антенн,  $t_1$ ,  $t_2$  — времена прихода волн. Направим ось  $z$  из центра источника в направлении на центр вектора базы  $b = r_2 - r_1$ , и будем считать, что обе антенны расположены в плоскости  $z = \text{const}$ . Введем координаты в этой плоскости,  $r_{1,2} = \{z, \rho_{1,2}\}$ , тогда вектор базы  $b =$

$\rho_1 - \rho_2$ ; выделим затем в фурье-гармонике поля  $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega)$  на частоте  $\omega$  быстрый множитель  $\exp(ikz)$ ,  $k = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света. Будем предполагать, что волна распространяется в холодной квазинейтральной космической плазме с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \langle \epsilon(\omega, \mathbf{r}) \rangle + \delta\epsilon(\omega, \mathbf{r})$ , косыми скобками  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций. Здесь  $\langle \epsilon \rangle = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ,  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 \langle N_e \rangle / m$  — плазменная частота,  $\langle N_e \rangle$  — средняя электронная концентрация,  $e, m$  — заряд и масса электрона,  $\delta\epsilon = 4\pi e^2 \delta N_e(\mathbf{r}) / m\omega^2$ ,  $\delta N_e$  — флукутирующая компонента электронной концентрации,  $\langle \delta N_e \rangle = 0$ . Для медленно меняющейся комплексной амплитуды поля  $U(\omega, \mathbf{r}) = \tilde{E}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-ikz)$  следует параболическое уравнение

$$2ik \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + [k^2 (\langle \epsilon \rangle - 1) + k^2 \delta\epsilon] U = 0. \quad (1)$$

Начальное условие при  $z=0$

$$U(\omega, 0, \rho) = U_0(\omega, \rho), \quad (2)$$

где  $U_0(\omega, \rho)$  — фурье-гармоника поля излучения источника. Решение уравнения (1) можно записать в квадратурах, используя метод фейнмановских интегралов по траекториям [5],

$$U(\omega, z, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho_0 U(\omega, \rho_0) G(\rho, z; \rho_0, 0), \quad (3)$$

$$G(\rho, z; \rho_0, 0) = \int D\eta(z) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^z dz' [(d\eta/dz')^2 + V(\omega, z) + \delta\epsilon(\omega, \eta(z'), z')] \right\}. \quad (4)$$

Здесь  $V(\omega, z) = \langle \epsilon \rangle - 1$ ,  $D\eta(z)$  — дифференциал в пространстве непрерывных траекторий  $\eta(z)$ . Интегрирование в (4) производится по всем возможным траекториям  $\eta(z')$  с граничными условиями  $\eta(0) = \rho_0$ ,  $\eta(z) = \rho$ . Сделаем несколько предположений, обычно используемых при анализе радиоинтерферометрических измерений.

Будем считать, что поле излучения космического источника является пространственно однородным, и положим, что выполняются неравенства

$$T \gg \Delta f^{-1} \gg f_0^{-1}; \quad (5a)$$

$$k_0 d\gamma_i \ll 1; \quad (5b)$$

$$\Delta f \ll c/(b\gamma_i), \quad (5c)$$

где  $T$  — время когерентного накопления,  $\Delta f$  — ширина полосы регистрируемых частот,  $f_0$  — центральная частота фильтра приемной системы,  $d$  — размер антенны,  $\gamma_i$  — угловой размер источника,  $b = |\mathbf{b}|$ . При этом усреднение по временным флукутуациям принимаемого сигнала эквивалентно усреднению по ансамблю реализаций случайного поля источника (неравенство (5a)), ширина диаграммы направленности антенны намного превышает угловой размер источника (5b), что позволяет считать приемные антенны точечными; в пределах полосы частот диаграмма направленности интерферометра неизменна (5c) (задержки в разности хода волн в угловом секторе  $\sim \gamma_i$  находятся в пределах когерентного цуга  $\tau_c \sim 1/\Delta f$ ).

Как известно [6, 7], характер рассеяния волн зависит от соотношения между характерным радиусом когерентности поля  $R_c$  и величиной зоны Френеля  $R_F = \sqrt{\lambda}z$ . Соответственно неравенство  $R_c \gg R_F$  определяет область слабых или ненасыщенных флукутуаций. В этом случае траектория физического луча в (4) слабо отличается от невозмущен-

ной, т. е. в отсутствие флуктуаций  $\delta\epsilon$ . Интегрирование в (4) выполняется вдоль невозмущенных траекторий, и в результате для функции когерентности (ФК) поля  $\Gamma = \langle U(\rho_1, z) U^*(\rho_2, z) \rangle$  следует известное выражение  $\Gamma(\rho_1, \rho_2, z) \sim \exp(-D_s(b, z))$ , где  $D_s(b, z)$  — структурная функция флуктуаций разности фаз на базе  $b$ .

В другом предельном случае  $R_c \ll R_F$  поле на выходе из рассеивающего слоя представляется суперпозицией  $N$  лучей, где  $N \sim (R_F/R_c)^4 \gg 1$ . Характерный размер эффективно рассеивающей области  $R_c \sim = R_F^2/R_c \gg R_F$ . Учитывая, что выражение для функции когерентности поля в режиме сильных и слабых флуктуаций имеет одинаковый вид, воспользуемся известным решением для ФК [5]. При использовании колмогоровской модели спектра турбулентных флуктуаций  $\delta\epsilon(r)$

$$R_c = \begin{cases} 1,78\sigma_\epsilon^{-6/5} K^{-6/5} L_s^{-3/5} L_0^{2/5}, & R_c \gg l_0 \\ 2,15\sigma_\epsilon^{-1} K^{-1} l_0^{1/6} L_s^{-1/2} L_0^{1/3}, & R_c \ll l_0 \end{cases}, \quad (6)$$

где  $\sigma_\epsilon^2 = 1,77 r_e^2 \lambda^4 \langle \delta N_e^2 \rangle$ ,  $r_e$  — классический радиус электрона,  $L_s$  — толщина рассеивающего слоя. Следуя [8, 9], введем параметры флуктуаций электронной концентрации плазмы — дисперсию  $\langle \delta N_e^2 \rangle$ , эффективную толщину слоя неоднородностей  $L_s$ , внешний —  $L_0$  — и внутренний —  $l_0$  — масштабы флуктуаций. Для межзвездной среды (МЗС) в галактической плоскости  $\langle \delta N_e^2 \rangle \approx 10^{-4}$  см $^{-6}$ ,  $L_0 \approx 10^{20}$  см,  $L_s \approx 10^{21}$  см,  $l_0 \approx 10^{10}$  см; для МПС примем оценки, полученные в окрестности земной орбиты (1а, е):  $\langle \delta N_e^2 \rangle \approx 10^{-2}$  см $^{-6}$ ,  $L_0 \approx 10^{13}$  см,  $l_0 \approx 10^6$  см,  $L_s \approx 10^{14}$  см. Эти оценки приближенно определяют условия рассеяния в МПС при наблюдении источников с элонгациями  $\phi > 90^\circ$ . Для ионосферы предполагаем, что основной вклад в рассеяние вносит слой  $F$ ,  $\langle \delta N_e^2 \rangle \approx 10^5$  см $^{-6}$ ,  $L_0 \approx 10^8$  см,  $L_s \approx 10^7$  см. На рис. 1 (см. на вклейке) приведены зависимости радиуса когерентности  $R_c$  от частоты  $f_0$  для МЗС, МПС и ионосферы. Здесь же приведена зависимость зоны Френеля  $R_F(f_0)$  для типичных значений расстояний в рассеивающем слое. На рис. 1 приняты следующие обозначения: 1 —  $R_c$  в МЗС в плоскости галактического диска, 2 —  $R_c$  в околоволосной области МЗС, 3 —  $R_c$  в спокойной ионосфере, 4 —  $R_c$  в МПС при  $\phi > 90^\circ$ , 5, 6 — величины зоны Френеля  $R_F$  в ионосфере и МПС соответственно. Примем скорости переноса неоднородностей для межзвездной среды  $v_s = 50$  км/с, ионосферы  $v_i = 100$  м/с.

Время когерентного накопления в корреляционном приемнике ограничено за счет среды временем смещения искажений волнового фронта на величину радиуса когерентности. Из рис. 1 ясно, что основное ограничение на время когерентного накопления вносит ионосфера и МПС. Для метрового диапазона радиоволн режим рассеяния в ионосфере соответствует слабым ненасыщенным флуктуациям. Напротив, рассеяние в МЗС происходит в режиме сильных, насыщенных флуктуаций и сопровождается стохастической многолучевостью.

Если сравнивать процессы усреднения в режиме ненасыщенных флуктуаций и стохастической многолучевости, то можно отметить следующее. В области применимости МПВ в мгновенном отсчете функции когерентности поле в каждой из точек наблюдения формируется одним физическим лучом со случайным наклоном волнового фронта, который создает случайную разность фаз волновых полей на базе  $b = \rho_1 - \rho_2$ . При усреднении по времени, что в пределе эквивалентно усреднению по ансамблю реализаций  $\delta\epsilon$ , происходит сложение волн с различными наклонами волновых фронтов (лучей с различными углами прихода), что и приводит к известному выражению для ФК при длительной экспозиции.

При стохастической многолучевости даже в одном отсчете ФК (усреднение за интервал времени  $T \ll T_c$ ) происходит сложение большого числа лучей с различными углами прихода. При этом фазовая структура поля, связанная с отдельным лучом, в статистическом смысле аналогична фазе в приближении МПВ, амплитуда, естественно, от-

личается, так как энергия поля перераспределяется в существенно большей области пространства. Характерный поперечный размер  $R_s$  этой области по порядку можно оценить как  $R_s \sim z \langle \theta_s^2 \rangle^{1/2} \simeq R_F^2/R_c$ . Здесь  $\langle \theta_s^2 \rangle^{1/2}$  — эффективная ширина углового спектра рассеянных волн. Используя аналогию с оптической спекл-интерферометрией [10], можно сказать, что при стохастической многолучевости в межзвездной среде в одной реализации формируется спекл-структура функции когерентности поля. При этом такие величины, как характерный размер спекла  $R_c$ , размер области пространства, заполненной спеклами  $R_s$ , и число спеклов  $N$  изменяются достаточно медленно при смене реализаций среды, чем обуславливаются рефракционные межзвездные мерцания.

2. Рассмотрим возможности метода спекл-интерферометрии в режиме насыщенных флуктуаций. В этом случае производится серия коротких «экспозиций» (накопление за достаточно малый интервал времени  $T < T_c$ ) функций когерентности  $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$  при неизменной проекции вектора базы на плоскость изображения. В каждом полученном отсчете образуется квадрат модуля ФК  $|\Gamma(\rho_1, \rho_2)|^2$  (суммируются квадраты выходов косинусного и синусного каналов интерферометра) и производится усреднение  $|\Gamma(\rho_1, \rho_2)|^2$  по полученному ансамблю реализаций в течение времени  $T_{\text{tot}} \gg T_c$ . Обычно полное время усреднения  $T_{\text{tot}}$  ограничено или емкостью магнитного носителя или допустимым изменением проекции вектора базы на  $u, v$ -плоскости, т. е. полем обзора.

Рассмотрим средний по ансамблю квадрат модуля функции взаимной когерентности

$$\begin{aligned} K(\rho_1, \rho_2) = \langle |\Gamma(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle &= c^2 S_A \int dq_1 \int dq_2 A(k_0 + q_1) A(k_0 + q_2) \times \\ &\times \int d^2 \vartheta \int d^2 n B(\vartheta + n/2) B(\vartheta - n/2) \int d^2 \eta_1 \dots \int d^2 \eta_4 \times \\ &\times \exp[i(pn + q\vartheta) [\eta_1 - \eta_2 - (\eta_3 - \eta_4)]] \} \times \end{aligned} \quad (7)$$

$$\times \langle G(k_1, \rho_1, \eta_1, L_s) G^*(k_1, \rho_2, \eta_2, L_s) G^*(k_2, \rho_1, \eta_3, L_s) G^*(k_2, \rho_2, \eta_4, L_s) \rangle$$

на выходе из слоя межзвездной среды толщиной  $L_s$ . Здесь

$$B(n) = \int d^2 \rho_0 \langle U_0(\rho' + \rho_0) U_0^*(\rho') \rangle \exp(-ikn\rho_0) \quad (8)$$

— угловое распределение радиояркости источника,  $A(k)$  — квадрат модуля передаточной функции приемного устройства. От интегрирования по полосе частот  $\Omega_{1,2}$  мы перешли к интегрированию по волновым числам  $q_{1,2} = \Omega_{1,2}/c$ ,  $p = (k_1 + k_2)/2$ ,  $k_{1,2} = k_0 + q_{1,2}$ ,  $q = q_1 - q_2$ . При  $R_c \ll R_F$  поле метровых радиоволн на выходе из слоя межзвездной среды обладает гауссовой статистикой. В результате четвертый момент поля в (7) можно асимптотически представить в виде произведения парных корреляторов. При этом основной вклад дают только два члена:

$$\begin{aligned} \langle G(k_1, \rho_1, \eta_1, L_s) G^*(k_1, \rho_2, \eta_2, L_s) G^*(k_2, \rho_1, \eta_3, L_s) G(k_2, \rho_2, \eta_4, L_s) \rangle &\simeq \\ &\simeq \langle G(k_1, \rho_1, \eta_1, L_s) G^*(k_1, \rho_2, \eta_2, L_s) \rangle \langle G^*(k_2, \rho_1, \eta_3, L_s) \times \\ &\times G(k_2, \rho_2, \eta_4, L_s) \rangle + \langle G(k_1, \rho_1, \eta_1, L_s) G^*(k_2, \rho_1, \eta_2, L_s) \rangle \times \\ &\times \langle G^*(k_1, \rho_2, \eta_3, L_s) G(k_2, \rho_2, \eta_4, L_s) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Отброшенные члены имеют порядок  $\exp(-2\langle (\delta S)^2 \rangle)$ , где  $\langle (\delta S)^2 \rangle$  — дисперсия флуктуаций фазы рассеянного поля. В режиме насыщенных флуктуаций  $\langle (\delta S)^2 \rangle \gg 1$ . Подстановка первого члена суммы (9) в (7) дает квадрат модуля средней по ансамблю ФК. Рассмотрим момент

$$\Gamma_s = \langle G(k_1, \rho_1, \eta_1, L_s) G^*(k_2, \rho_1, \eta_3, L_s) \rangle. \quad (10)$$

Используя представление (4) для функции Грина и статистиче-

скую однородность флуктуаций  $\delta\epsilon$ , можно перейти к однократному интегралу по траекториям:

$$\Gamma_s = \frac{iq}{2\pi L_s} \exp \left[ i \frac{q}{2L_s} \left( \rho_1 - R_0 + \frac{p}{q} \rho_0 \right)^2 \right] \times \quad (11)$$

$$\times \int D\mathbf{v}(z) \exp \left\{ -i\kappa \int_z^{L_s} dz' \left[ \frac{1}{2} (d\mathbf{v}/dz')^2 - i \frac{p^2}{\kappa} H_\epsilon(\mathbf{v}(z'), z') \right] \right\},$$

где  $\kappa = k_1 k_2 / q$ ,  $R_0 = (\eta_1 + \eta_2)/2$ ,  $\rho_0 = \eta_1 - \eta_2$ , на траектории  $\mathbf{v}(z')$  наложены граничные условия  $\mathbf{v}(0) = \rho_0$ ,  $\mathbf{v}(L_s) = 0$ :

$$H_\epsilon(\mathbf{v}(z)) = 2 \int d^2 \mathbf{x}_\perp \Phi_\epsilon(0, \mathbf{x}_\perp) [1 - \cos(\kappa_\perp \mathbf{v}(z))] \quad (12)$$

Основной вклад в интеграл (11) дают траектории, отстоящие друг от друга на расстояние, не превышающее радиус когерентности поля  $R_c$ . Для турбулентных изотропных флуктуаций космической плазмы  $l_0 \simeq 10^{10}$  см и  $R_c \ll l_0$  в метровом диапазоне радиоволн. В этом случае структурную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\delta\epsilon$  можно представить в виде

$$H_\epsilon = \alpha v^2(z),$$

где  $\alpha = H_\epsilon''(0)/2$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ . В результате

$$\Gamma_s = B \exp \left[ i \frac{q}{2L_s} \left( \rho_1 - R_0 + \frac{p}{q} \rho_0 \right)^2 - i \frac{\kappa v}{2} \operatorname{ctg}(\kappa z) \rho_0^2 \right], \quad (13)$$

где

$$B = -\frac{k_1 k_2}{4\pi^2 L_s^2} \left( \frac{\nu z}{\sin(\nu z)} \right) \exp(-q^2 \gamma_0/16), \quad (14)$$

$\nu^2 = -2iaq$ ,  $\gamma_0 = \pi L_s \int d^2 \mathbf{x}_\perp \Phi_\epsilon(0, \mathbf{x}_\perp) = \langle (\delta S)^2 \rangle / k_0^2$ , знак \* означает комплексное сопряжение.

После подстановки полученных выражений в коррелятор (7) получим

$$K = c^2 S_A^2 \int dp \int dq F(p, q) [B_1(p, q, b) + B_2(p, q, b)], \quad (15)$$

где

$$B_1(p, q, b) = \int d^2 \theta \int d^2 n B(\theta + n/2) B(\theta - n/2) \times \quad (16)$$

$$\times \exp[ib(pn + q\theta) - (p^2 + q^2/4)L_s H_\epsilon(b)];$$

$$B_2(p, q, b) = |\cos(\nu z)|^{-2} \exp(-q^2 \gamma_0/8) \times \quad (17)$$

$$\times \int d^2 \theta \int d^2 n B(\theta + n/2) B(\theta - n/2) \exp \left\{ i(pn + q\theta)b - 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{\lambda^2 n^2 L_s}{2\kappa} (\operatorname{tg}(\nu z)/\nu z) \right] \right\},$$

$$\lambda = (p^2/q)(1 - q^2/4p^2), \quad F(p, q) = A(p + q/2)A(p - q/2).$$

Как видно из (16),  $B_1(p, q, b)$  является квадратом модуля средней функции когерентности. Никаких новых ограничений на полосу частот по сравнению с неравенством (5в) этот член не дает. В выражении (17) есть два параметра, определяющих  $\Delta F$  — ширину полосы когерентности в частотной области или, что эквивалентно, разность

волновых чисел  $\Delta q = 2\pi\Delta F/c$ ; они характеризуют существенное уменьшение функции межчастотной корреляции  $B_2(p, q, L_s)$ . Первый характерный масштаб по  $q$  определяется показателем экспоненты  $\exp(-q^2\gamma_0/8)$ . При среднеквадратичном отклонении флюктуаций оптической длины пути, равном  $\sqrt{\gamma_0/2}$ , разность флюктуаций фазы на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  составляет  $q\sqrt{\gamma_0}/2$ . Величина  $q^2 \gamma_0/8 = q^2 \langle (\delta S)^2 \rangle / k_0^2$  определяет дисперсию флюктуаций дифференциальной разности фаз при частотном разносе  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Тогда ширина полосы когерентности  $\Delta F_1 = f_0 \langle (\delta S)^2 \rangle^{-1/2}$ . В последнем выражении подразумевается усреднение за конечное время  $T_{\text{tot}}$ . В отличие от самоусреднения, которое происходит за счет суперпозиции огромного числа микролучей, усреднение по флюктуациям оптической длины пути  $\gamma_0$  относится лишь к центральному лучу, определяющему суммарный наклон волнового фронта всей совокупности лучей в одной реализации. Конечное значение времени усреднения  $T_{\text{tot}}$  фактически ограничивает максимальные масштабы флюктуаций диэлектрической проницаемости космической плазмы величиной  $L_{\text{tot}} = |\mathbf{v}_\perp| T_{\text{tot}}$ .

Для кармановской модели спектра флюктуаций в МЗС можно получить оценки дисперсии флюктуаций фазы  $\langle (\delta S)^2 \rangle_{\text{tot}}$ . Введем время переноса неоднородности с масштабом  $l_0$ :  $T_0 = l_0/v_s$ ,  $v_s = |\mathbf{v}_\perp|$ . Тогда при  $T_{\text{tot}} \ll T_0$

$$\begin{aligned} \langle (\delta S)^2 \rangle_{\text{tot}} &\simeq 8.5 \cdot 10^{-22} \lambda^2 L_s \langle (\delta N_e)^2 \rangle L_0^{-2/3} x_m^{-5/3} \times \\ &\quad \times (T_{\text{tot}}/T_0)^{8/3} \exp[-(T_0/T_{\text{tot}})^2] \end{aligned} \quad (18)$$

и при  $T_{\text{tot}} \gg T_0$

$$\langle (\delta S)^2 \rangle_{\text{tot}} \simeq 2 \cdot 10^{-22} \lambda^2 L_s \langle (\delta N_e)^2 \rangle L_0^{-2/3} (v_s T_{\text{tot}})^{5/3}. \quad (19)$$

Здесь все масштабы измерены в сантиметрах,  $[v_s]$  — см/с. Соответственно ширина полосы когерентности

$$\Delta F_1 \simeq 0.363 \cdot 10^{-8} f_0^2 (T_{\text{tot}}/T_0)^{1/3} \exp((T_0/T_{\text{tot}})^2/2), \quad T_{\text{tot}} \ll T_0. \quad (20)$$

$$\Delta F_1 \simeq 0.5 \cdot 10^{-9} f_0^2 (T_{\text{tot}}/T_0)^{-5/6}, \quad T_{\text{tot}} \gg T_0.$$

На рис. 2 приведены зависимости предельной полосы частот  $\Delta F_1$  для  $f_0 = 30, 100$  и  $300$  МГц как функции времени усреднения, при этом принято  $v_s = 50$  км/с,  $l_0 \sim 10^{10}$  см,  $T_0 \simeq 30$  мин. Как видно из рисунка, флюктуации оптической длины пути не накладывают существенных ограничений на ширину полосы регистрируемых частот.

Второй характерный масштаб частотной корреляции в (17) определяется членом

$$|\cos(\nu L_s)|^{-2} \sim \exp(-\sqrt{q L_s \langle \theta_s^2 \rangle}), \quad (21)$$

где  $\langle \theta_s^2 \rangle^{1/2} \sim (k_0 R_c)^{-1}$  — эффективная ширина углового спектра рассеянного поля. Этот член практически не зависит от времени усреднения  $T_{\text{tot}}$  и связан со стохастической многолучевостью в МЗС. Из (21) следует, что эффективная ширина в пространстве волновых чисел  $q_{\text{eff}} \sim \sim [L_s \langle \theta_s^2 \rangle]^{-1}$  и ширина полосы когерентности

$$\Delta f \leq \Delta F_2 = c q_{\text{eff}} / 2\pi \sim c / L_s \langle \theta_s^2 \rangle. \quad (22)$$

Интерпретация этого выражения заключается в следующем. Максимальное запаздывание  $\tau_s$  в пределах конуса рассеяния связано с его шириной  $\langle \theta_s^2 \rangle$  соотношением  $\tau_s \sim L_s \langle \theta_s^2 \rangle / 2c$ .

Для когерентного сложения рассеянных волн необходимо, чтобы весь пространственный волновой пакет находился в пределах коге-

рентного цуга, т. е.  $\tau_s \leq \Delta F_2^{-1}$ , что и приводит к неравенству (22). Ширина когерентности (22) определяет эффективную полосу регистрации, в пределах которой вклад выражения (17) в квадрат модуля имеет заметную величину. На рис. 3 приведена зависимость предельной полосы частот  $\Delta F_2$  от центральной частоты фильтра  $f_0$  (линия 1). Очевидно, что столь малые полосы регистрации ограничивают чувствительность приемной системы.

Сделаем предельный переход в (15) к бесконечно узкой полосе регистрации:  $q = 0$ ,  $p = k_0$ . В этом случае в единичной полосе частот

$$K = S_A^2 \int d^2 \Phi \int d^2 n B(\theta + n/2) B(\theta - n/2) \times \\ \times \exp(ik_0 nb) [\exp[-D_s(L_s, b)] + \exp(-(4/3)n^2/n_s^2)], \quad (23)$$

где  $n_s = (kL_s \langle \theta_s^2 \rangle^{1/2})^{-1} = R_c/L_s$  — угловой размер радиуса когерентности. Первый член в (23) представляет собой произведение квадрата модуля ФК поля источника  $\Gamma_i(u)$  на квадрат модуля средней передаточной функции среды  $\exp(-D_s(L_s, b))$ . Этот член обеспечивает подавление всех пространственных частот  $b/\lambda$ , превышающих пространственную частоту когерентности  $R_c/\lambda$ . Второй член в (23) при выполнении неравенства  $k n_s b \sim R_c b / (\lambda L_s) \gg 1$  и для источника конечных угловых размеров  $\gamma_i \gg n_s$  имеет порядок  $n_s S_i^2 / \gamma_i$ , где  $S_i$  — плотность потока источника. Таким образом, при широкой полосе регистрации  $\Delta f \gg \Delta F_2$  средний квадрат модуля ФК на выходе слоя МЗС эквивалентен квадрату модуля средней по ансамблю ФК. Рассеяние в межзвездной среде накладывает фундаментальный предел углового разрешения системы апертурного синтеза (САС), равный углу рассеяния  $\langle \theta_s^2 \rangle^{1/2}$  МЗС. Из изложенного, в частности, следует, что увеличение базы интерферометров, входящих в САС, свыше радиуса когерентности  $R_c$  в МЗС нецелесообразно, т. к. не приводит к увеличению углового разрешения.

Рассмотрим влияние стохастической многолучевости на мерцания источников в МЗС. Устоявшаяся точка зрения, основанная на выводах теории слабого рассеяния, заключается в том, что угловое разрешение метода мерцаний оказывается порядка углового размера зоны Френеля  $\theta_F \sim 1/kR_F \sim \sqrt{\lambda}/L_s$ , т. е. оно ухудшается с увеличением длины волны. Однако это справедливо лишь в условиях слабого рассеяния, когда характерным поперечным масштабом когерентности является зона Френеля  $R_F$ . При стохастической многолучевости в режиме насыщенных флуктуаций в МЗС масштабом когерентности является  $R_c$ , который, напротив, уменьшается с ростом длины волны как  $\lambda^{-1}$ . Угловое разрешение метода мерцаний в этом случае оказывается порядка  $n_s$ -углового размера радиуса когерентности и теоретически достигает величины порядка  $10^{-8}$  угловой секунды. Однако это разрешение возможно, лишь если ширина полосы регистрации  $\Delta f$  не превышает  $\Delta F_2$ , что резко ограничивает чувствительность системы.

Можно показать, что индекс мерцаний

$$m^2 = (K(b=0) - |\langle \Gamma(0) \rangle|^2) / |\langle \Gamma(0) \rangle|^2 \quad (24)$$

точечного источника в двух предельных случаях, соответственно, равен

$$m^2 \simeq \begin{cases} 1, & \Delta f \ll \Delta F_2, \\ (\Delta F_2 / \Delta f) \ll 1, & \Delta f \gg \Delta F_2 \end{cases}. \quad (25)$$

Приведем выражения для спектра флуктуаций индекса мерцаний  $V_m(v)$  для точечного источника, ( $v$  — частота).

При  $\Delta f \ll \Delta F_2$  и  $v^2 \ll v_s^2 f_0 / \Delta f$

$$V_m(v) \simeq \exp(-v^2/v_s^2), \quad (26)$$

где  $v_s = T_s^{-1} = v_s/R_c$ ,  $T_s$  — характерный период мерцаний, он соответст-

вует времени смещения дифракционной картины рассеянного поля на масштаб порядка  $R_c$ . Для  $f_0 = 300$  МГц  $T_s = 100$  с.

При  $\Delta f \gg \Delta F_2$  и  $v^2 \ll v_s^2 f_0 / \Delta f$

$$V_m(v) \simeq 2(\Delta F_2 / \Delta f) \exp(-v^2/v_s^2). \quad (27)$$

Как следует из (26), (27), спектр флуктуаций индекса мерцаний в МЗС имеет ширину порядка  $v_s$  ( $v_s \simeq 10^{-2}$  Гц,  $f_0 = 300$  МГц в плоскости галактического диска). Если полоса регистрации частот  $\Delta f$  не превышает  $\Delta F_2$ , то волны в пределах конуса рассеяния складываются когерентно и создают интерференцию с характерным периодом  $T_s$ . В противном случае флуктуации уменьшаются из-за некоррелированности волн с различными частотами, разнесенными на величину, большую  $\Delta F_2$ .

Для исключения фазовых искажений в САС, обусловленных ионосферой и МПС при больших элонгациях, где имеет место режим ненасыщенных флуктуаций, идеология спектр-радиоинтерферометрии полностью аналогична используемой в оптике [10].

Рассмотрим средний по ансамблю (в течение времени  $T_{\text{tot}}$ ) квадрат модуля когерентности. В приближении МПВ, когда в ионосфере  $R_c \gg R_F$  и  $R_c \gg d$ , где  $d$  — линейный размер апертур телескопов, для  $K(p_1, p_2, L_s)$  можно получить

$$K(p_1, p_2, L_s) = K(b, L_s) = \int dp \int dq F(p, q) \times \\ \times \int d^2\vartheta \int d^2n B(\theta + n/2) B(\theta - n/2) \exp[i b(pn + q\vartheta) - 2(q^2/p^2) D_s(L_s, b)]. \quad (28)$$

Последовательный учет рассеяния в МЗС при  $\Delta f \gg \Delta F_2$  приводит к тому, что в качестве начального распределения радиояркости в (28) следует полагать эффективное распределение яркости, определяемое подынтегральным членом в (16). Очевидно, что при выполнении неравенства

$$(q^2/p^2) D_s(L_s, b) \ll 1 \quad (29)$$

в среднем квадрате модуля ФК (28) практически исключены фазовые искажения, вносимые ионосферой, и все пространственные частоты, вплоть до дифракционного предела  $b/\lambda$ , проходят без ослабления.

Неравенство (29) определяет ограничения предельной полосы регистрации за счет ионосферы. Используя соотношение между структурной функцией фазы ФК  $D_s(b, L_s)$  и эффективной шириной углового спектра рассеянных волн  $\langle \theta_s^2(b) \rangle \sim D_s(b, L_s) / (kb)^2 \sim C_s^2 L_s b^{-1/3}$  при  $b \gg l_0$ , можно записать

$$\Delta f \leq \Delta F_3 = \frac{\lambda}{b} f_0 \langle \theta_s^2(b) \rangle^{-1/2} \sim f_0^2 b^{-5/6}. \quad (30)$$

На рис. 3 приведены оценки предельной полосы частот  $\Delta F_3$  (линия 2), обусловленные случайной рефракцией в ионосфере в соответствии с (30). На меньших базах случайные градиенты волнового фронта в МПС вообще не накладывают ограничений на предельную полосу частот. Как видно из приведенных на рис. 3 оценок, ограничения  $\Delta f$ , вносимые ионосферой, не существенны в метровом диапазоне радиоволн.

Суммируя изложенное, можно сделать следующие выводы.

1) Если полоса регистрации приемной системы не превышает ширину полосы когерентности, рассеяние радиоизлучения космических источников метрового диапазона волн в межзвездной среде накладывает предел углового разрешения САС, равный эффективному углу рассеяния в межзвездной среде.

2) Рассеяние в ионосфере приводит к ограничению времени когерентного накопления величиной порядка 100 с. Существенных ограничений ширины полосы регистрируемых частот рассеяние в МПС и в ионосфере не накладывает.

3) Для исключения фазовых искажений, вносимых ионосферой и МПС, могут эффективно использоваться методы спекл-маскирования и автокалибровки. При этом возможно разрешение САС довести до дифракционного предела, если он не превышает  $\langle \Phi^2 \rangle^{1/2}$  в МЗС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев О. И. Распространение радиоволн в космосе. — М.: Наука, 1985.
2. Матвеенко Л. И. В кн.: Астрофизика и космическая физика. — М.: Наука, 1982. С. 88.
3. Кукушкин А. В., Литвиненко Л. Н. Сб.: Материалы IX Всесоюзной школы по дифракции и распространению волн. — Казань, 1988.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
5. Фейнман Р., Хибbs А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
6. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
7. Dashen R // J. Math. Phys. 1979. V. 20. № 5. P. 894
8. Герман Б. Н., Ерухимов Л. М., Янин Ю. А. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
9. Lee L. C., Jokipii J. R. // Astrophys. J. 1976. V. 206. № 15. P. 735.
10. Токовинин А. А. Звездные интерферометры. — М.: Наука, 1986.

Радиоастрономический институт  
АН УССР

Поступила в редакцию  
1 июня 1989 г.,  
после объединения  
6 июля 1990 г.

## FLUCTUATIONS OF METER RADIO WAVES COHERENCE FUNCTION, SCATTERED IN A RANDOM COSMIC MEDIUM

A. V. Kukushkin

A qualitative analysis of the wave normal fluctuations in the case of nonsaturated and highly saturated regimes is carried out. Because of scattering in the interstellar medium, meter and decameter radio waves propagate along multiple paths and propagating process is stochastic and the associated speckle-structure of the source image occurs. A speckle-interferometric method has been developed allowing multiple paths in the interstellar random medium. The analysis is based on cross-frequency coherence function for meter and decameter band wave field. The coherence band width is discussed as a function of frequency. The scattering in the interstellar medium puts a limit to the angular resolution of aperture synthesis systems which as estimated in the paper.

УДК 621.373.8

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕРФЕРОГРАММ СДВИГА,  
ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ  
КОГЕРЕНТНО ОСВЕЩЕННЫХ ОБЪЕКТОВ  
ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ АТМОСФЕРУ**

*А. Л. Вольпов, Ю. А. Зимин*

Проведен анализ статистических характеристик и функции распределения интерферограмм сдвига, полученных при когерентном освещении объектов через турбулентную атмосферу. Рассмотрены два случая освещения — в зависимости от отношения поперечного размера освещющей апертуры к радиусу корреляции фазовых флуктуаций оптического поля в турбулентной атмосфере. Для обоих случаев составлена статистическая модель интерферограммы, проанализирована ее зависимость от дисперсии фазовых флуктуаций и от числа независимых пространственных областей корреляции оптического поля.

При наблюдении когерентно освещенных объектов через турбулентную атмосферу прямые методы построения изображений оказываются неприменимыми из-за искажений, вызванных средой. Алгоритмы, разработанные для восстановления искаженных атмосферой изображений в некогерентном свете, предлагаю апостериорную статистическую обработку короткоэкспозиционных снимков. Однако при когерентном подсвете их применение неоправдано в силу физических различий, происходящих при формировании изображений двух типов: в когерентном свете оно происходит при линейности преобразования комплексной амплитуды поля, а в некогерентном — при линейности преобразования интенсивности. В результате оказывается, что искаженное изображение будет представлять собой квадрат модуля свертки комплексной амплитуды поля в этой плоскости с импульсным откликом «атмосфера—телескоп» вместо свертки истинного изображения с квадратом модуля указанного импульсного отклика (или с функцией рассеяния точки) [1].

Компенсация искажений в первом случае более сложна, так как внесенные искажения здесь неотделимы от комплексной амплитуды самого объектного поля [2], однако если от плоскости изображений приемной оптической системы перейти к ее входному (или выходному) зрачку, связанному с ней преобразованием Фурье, то выражения, описывающие искаженное поле, становятся проще. В частности, при условии изопланатичности объекта фаза комплексной амплитуды будет представлять собой аддитивную сумму фазы неискаженного поля и фазовых искажений, вносимых атмосферой. Очевидно, что обрабатывать подобный сигнал проще, чем описываемый интегральными преобразованиями (сверткой).

Данный подход к проблеме «видения», состоящий в регистрации и обработке комплексной амплитуды оптического поля в плоскости выходного зрачка, предполагает использование методов измерения фазы волнового фронта. Как известно, наиболее точными из них являются интерференционные, в частности методы интерферометрии сдвига [3]. Интерферометры сдвига позволяют измерять разности фаз между соседними участками или локальные наклоны волнового фронта в направлении сдвига. Два распределения разностей фаз в двух ортогональных направлениях дают возможность получить непосредственно распределение фазы.

Как известно, любой оптический сигнал, прошедший через турбулентную атмосферу, в том числе и после отражения от поверхности объекта, носит случайный характер, зависящий от флуктуаций показателя преломления атмосферы. Поэтому для получения информации об объекте из интерферограмм сдвига необходимо применять методы обработки случайных полей аналогично тому, как это делается при наблюдении некогерентно освещенных объектов. Однако в данном случае вид исходной информации (интерферограмма) будет иным, и для реализации тех или иных статистических алгоритмов обработки необходимо составить статистическую модель интерферограммы.

### ИНТЕРФЕРОГРАММА ПРИ ПОДСВЕТЕ ОБЪЕКТА ИСТОЧНИКОМ С ПОПЕРЕЧНЫМ РАЗМЕРОМ $(d/\rho_0) < 1$

Пусть объект, находящийся в зоне изопланатизма турбулентной атмосферы, освещается источником когерентного света с размерами  $d/\rho_0 < 1$  и координатой  $\rho^0$ , где  $d$  — диаметр освещивающего пучка,  $\rho_0$  — радиус корреляции фазовых искажений оптического поля в турбулентной атмосфере. В этом случае в картины плоскости объекта формируется комплексная амплитуда поля

$$K_0(r) = \epsilon_0 \exp \left[ i\tilde{\varphi}(\rho^0) + i\frac{k}{R}r\rho^0 - i\frac{k}{2R}|r|^2 - i\frac{k}{2R}|\rho^0|^2 \right] = \epsilon_0 A(r), \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  — напряженность электрического поля,  $\tilde{\varphi}(\rho^0)$  — фазовые искажения в точке  $\rho^0$ ,  $r$  — радиус-вектор в картины плоскости объекта,  $R$  — расстояние до объекта,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны света.

После отражения от объекта с комплексным коэффициентом отражения  $Q(r)$  получим

$$E(r) = K_0(r)Q(r).$$

В плоскости входного или выходного зрачка приемной оптической системы формируется распределение комплексной амплитуды отраженного поля, прошедшего слой турбулентной атмосферы:

$$\begin{aligned} \epsilon_\varphi(\rho) = \exp[i\varphi(\rho)]\epsilon(\rho) &= \frac{1}{\lambda R} \exp \left[ i\varphi(\rho) + i\frac{k}{2R}|\rho|^2 \right] \times \\ &\times \int_{\Omega} E_0(r) \exp \left( -i\frac{k}{R}r\rho \right) dr, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E_0(r) = E(r) \exp \left( i\frac{k}{2R}|r|^2 \right)$ ,  $\varphi(\rho)$  — фазовые искажения, вносимые турбулентной атмосферой на этапе приема,  $\rho$  — радиус-вектор в плоскости выходного зрачка,  $\Omega$  — двумерная проекция объекта на картины плоскость. При регистрации интерферограммы сдвига из  $\epsilon_\varphi(\rho)$  формируются два поля, одно из которых сдвигается в попечном направлении на вектор  $\Delta\rho$ , подчиняющийся условию  $|\Delta\rho| \leq \leq \frac{1}{3} \min \left\{ \frac{\lambda R}{l}, \rho_0 \right\}$  ( $l$  — попечный размер объекта), которые затем взаимодействуют друг с другом. При этом в одно поле вносится небольшой наклон, характеризуемый величиной  $\exp(i\omega_0\rho)$ .

Регистрируемая интенсивность имеет вид

$$\begin{aligned} I(\rho) &= |\epsilon(\rho)|^2 + |\epsilon(\rho + \Delta\rho)|^2 + 2\operatorname{Re}\epsilon(\rho) \times \\ &\times \epsilon^*(\rho + \Delta\rho) \exp [i\varphi(\rho) - i\varphi(\rho + \Delta\rho) + i\omega_0\rho], \end{aligned} \quad (3)$$

где вектор  $\omega_0$  имеет смысл пространственной несущей частоты интерференционных полос.

Наряду с измеряемыми сигналами в регистрирующих и измерительных системах всегда присутствует аддитивный шум, обусловленный различными факторами, основными из которых являются фотонный шум (фон) и шум фотоприемного устройства. Полная измеряемая интенсивность в результате приобретает вид

$$\tilde{I}(\rho) = I(\rho) + n(\rho), \quad (4)$$

где  $n(\rho)$  — шум.

Рассмотрим вначале статистические характеристики шума. Множество независимых источников шума в силу центральной предельной теоремы приводит к тому, что  $n(\rho)$  можно считать гауссовым и δ-коррелированным со средним значением и корреляционной функцией соответственно

$$\begin{aligned} \langle n(\rho) \rangle &= \bar{n}, \\ \langle n(\rho_1) n(\rho_2) \rangle &= N_0 \delta(\rho_1 - \rho_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N_0$  — спектральная плотность мощности шума. Анализ статистических характеристик  $I(\rho)$  начнем с вычисления среднего значения

$$\langle I(\rho) \rangle = B(\rho) + \exp [-(1/2) D(|\Delta\rho|)] 2 \operatorname{Re} \varepsilon(\rho) \varepsilon^*(\rho + \Delta\rho) \exp(i\omega_0 \rho), \quad (6)$$

где  $B(\rho) = |\varepsilon(\rho)|^2 + |\varepsilon(\rho + \Delta\rho)|^2$ , а  $\exp [-(1/2) D(|\Delta\rho|)]$  имеет характерный вид [4]  $\exp [-(1/2) D(|x|)] \approx \exp(-3.44|x/\rho_0|^{5/3})$ . Найдем корреляционную функцию интерферограммы:

$$\begin{aligned} Q(\rho_1, \rho_2) &= \langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle - \langle I(\rho_1) \rangle \langle I(\rho_2) \rangle, \\ \langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle &= B(\rho_1) B(\rho_2) + 2B(\rho_1) \operatorname{Re} \{\exp(i\omega_0 \rho_1) \times \\ &\times \varepsilon(\rho_2) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \langle \exp[i\varphi(\rho_2) - i\varphi(\rho_2 + \Delta\rho)] \rangle + \\ &+ 2B(\rho_2) \operatorname{Re} \{\exp(i\omega_0 \rho_1) \varepsilon(\rho_1) \varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \langle \exp[i\varphi(\rho_1) - \\ &- i\varphi(\rho_1 + \Delta\rho)] \rangle\} + \langle 2 \operatorname{Re} \{\exp[i\omega_0 \rho_1 + i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_1 + \Delta\rho)]\} \times \\ &\times 2\varepsilon(\rho_1) \varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \rangle \operatorname{Re} \{\exp[i\omega_0 \rho_2 + i\varphi(\rho_2) - i\varphi(\rho_2 + \Delta\rho)] \times \\ &\times \varepsilon(\rho_2) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho)\} \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \langle \exp[i\varphi(\rho) - i\varphi(\rho + \Delta\rho)] \rangle &= \exp[-(1/2) D(|\Delta\rho|)], \\ \langle \exp[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_1 + \Delta\rho) + i\varphi(\rho_2) - i\varphi(\rho_2 + \Delta\rho)] \rangle &= \\ &= \exp[-D(|\Delta\rho|) + D(|\rho_1 - \rho_2|) - (1/2) D(|\rho_1 - \rho_2 - \Delta\rho|) - \\ &- (1/2) D(|\rho_1 - \rho_2 + \Delta\rho|)]. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle &= B(\rho_1) B(\rho_2) + 2MB(\rho_1) \operatorname{Re} \{\varepsilon(\rho_2) \times \\ &\times \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \exp(i\omega_0 \rho_2)\} + 2MB(\rho_2) \operatorname{Re} \{\varepsilon(\rho_1) \times \\ &\times \varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \exp(i\omega_0 \rho_1)\} + 2M^2 P_1(\rho_1, \rho_2) \times \\ &\times \operatorname{Re} \{\varepsilon(\rho_1) \varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \varepsilon(\rho_2)\} \times \end{aligned} \quad (8)$$

$$\times \exp[i\omega_0(\rho_1 + \rho_2)]} + 2M^2 P_2(\rho_1, \rho_2) \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \times \\ \times \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho)\varepsilon(\rho_2) \exp[i\omega_0(\rho_1 - \rho_2)]\}.$$

Здесь

$$P_1(\rho_1, \rho_2) = \exp[-(1/2)D(|\rho_1 - \rho_2 + \Delta\rho|) - \\ - (1/2)D(|\rho_1 - \rho_2 - \Delta\rho|) + D(|\rho_1 - \rho_2|)], \\ P_2(\rho_1, \rho_2) = \exp[(1/2)D(|\rho_1 - \rho_2 + \Delta\rho|) + \\ + (1/2)D(|\rho_1 - \rho_2 - \Delta\rho|) - D(|\rho_1 - \rho_2|)], \\ M = \exp[-(1/2)D(|\Delta\rho|)].$$

Для оценки величины  $Q(\rho_1, \rho_2)$  аппроксимируем выражение для  $\exp[-(1/2)D(|x|)]$  функцией вида  $\exp(-ax^2)$ . В этом случае после несложных преобразований можно получить

$$P_1(\rho_1, \rho_2) \approx \exp(-2a|\Delta\rho|^2) \approx M^2,$$

$$P_2(\rho_1, \rho_2) \approx \exp(2a|\Delta\rho|^2) \approx M^{-2}.$$

Подставляя эти значения в (18) и вычисляя произведение функций (6), получим

$$Q(\rho_1, \rho_2) \approx 2M^4 \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho)\varepsilon(\rho_2)\varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \times \\ \times \exp[i\omega_0(\rho_1 + \rho_2)]\} + 2\operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho)\varepsilon^*(\rho_2)\varepsilon(\rho_2) \times \\ \times \varepsilon(\rho_2 + \Delta\rho) \exp[i\omega_0(\rho_1 - \rho_2)]\} - M^2 \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \times \\ \times \exp(i\omega_0\rho_1)\} \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_2)\varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \exp(i\omega_0\rho_2)\}. \quad (9)$$

Поскольку вектор  $\Delta\rho$  подчиняется условию

$$|\Delta\rho| \leq \frac{1}{3} \min\left[\frac{\lambda R}{l}, \rho_0\right],$$

а  $\frac{\lambda R}{l}$  и  $\rho_0$  примерно одного порядка, то  $M^4 \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$Q(\rho_1, \rho_2) \approx 2\operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho)\varepsilon^*(\rho_2)\varepsilon(\rho_2 + \Delta\rho) \times \\ \times \exp[i\omega_0(\rho_1 - \rho_2)]\} - M^2 \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho) \times \\ \times \exp(i\omega_0\rho_1)\} \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho_2)\varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \exp(i\omega_0\rho_2)\}. \quad (10)$$

Дисперсия в этом случае будет равна

$$\sigma_I^2 = \langle I^2(\rho) \rangle - \langle I(\rho) \rangle^2 \approx |\varepsilon(\rho)|^2 |\varepsilon(\rho + \Delta\rho)|^2 - \\ - M^2 \{ \operatorname{Re}\{\varepsilon(\rho)\varepsilon^*(\rho + \Delta\rho) \exp(i\omega_0\rho)\} \}^2. \quad (11)$$

Обозначим для удобства анализа  $|\varepsilon(\rho)| |\varepsilon(\rho + \Delta\rho)| = C(\rho)$ ,  $\arg \varepsilon(\rho) - \arg \varepsilon(\rho + \Delta\rho) = \beta(\rho)$  и перепишем выражения (6) и (11):

$$\langle I(\rho) \rangle = B(\rho) + MC(\rho) \cos[\beta(\rho) + \omega_0\rho], \\ Q(\rho_1, \rho_2) = C(\rho_1)C(\rho_2) \{ \cos[\beta(\rho_1) - \beta(\rho_2) + \\ + \omega_0(\rho_1 - \rho_2)] - M^2 \cos[\beta(\rho_1) + \omega_0\rho_1] \cos[\beta(\rho_2) + \omega_0\rho_2] \}. \quad (12)$$

Из выражений (12) видно, что характер регистрируемой информации об объекте, содержащийся в среднем значении и корреляционной функции интерферограммы, существенно зависит от величины сдвига. При малом сдвиге  $M \rightarrow 1$  и среднее значение  $\langle I(\rho) \rangle$  отличается от мгновенного распределения  $I(\rho)$  лишь небольшим падением контраста интерференционных полос, а корреляция  $Q(\rho_1, \rho_2)$  близка к факторизованной функции  $\text{Im}[\varepsilon(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1 + \Delta\rho)]\text{Im}[\varepsilon(\rho_2)\varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho)]$ . При увеличении сдвига  $M$  изменяется от 1 до 0, в результате чего контраст полос падает, факторизации  $Q(\mu_1, \mu_2)$  не происходит, и в пределе, когда  $M \rightarrow 0$ , интерференционные полосы, содержащие полезную информацию, полностью размываются ( $\langle I(\rho) \rangle \approx B(\rho)$ ), а корреляция стремится к действительной части от произведения комплексных амплитуд. Физически в силу того, что большой сдвиг означает нарушение условия  $|\Delta\rho| \leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{R}{l}, |\rho_0| \right\}$ , происходит умножение друг на друга двух пар независимых полей  $\varepsilon_1(\rho_1), \varepsilon_1^*(\rho_1)$  и  $\varepsilon_2(\rho_2), \varepsilon_2^*(\rho_2)$  (индексы 2 соответствуют сдвинутым полям), в силу чего оказывается невозможным извлечь полезную информацию об объекте из произведения в общем случае.

Рассмотрим зависимость  $Q(\rho_1, \rho_2)$  от разности между аргументами  $\rho_1 - \rho_2 = \delta\rho$ . Когда вектор  $\delta\rho$  мал, из выражения (11) видно, что при малом сдвиге  $\Delta\rho (M^2 \rightarrow 1)$  ситуация мало меняется по сравнению с общим случаем разности  $\delta\rho$ , а при достаточно большом сдвиге ( $M^2 \rightarrow 0$ )  $Q(\rho_1, \rho_2)$ , хотя и становится пропорциональной функции разности двух частных производных фазы объектного поля  $\arg \varepsilon_1'(\rho)$  и  $\arg \varepsilon_2'(\rho)$  в направлении  $\delta\rho$  в силу независимости полей  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , извлечь полезную информацию оказывается также достаточно сложно.

Рассмотрим плотность распределения вероятности интенсивности  $I(\rho)$ . В соответствии с (12) выражение для  $I(\rho)$  можно переписать в виде

$$I(\rho) = B(\rho) + C(\rho) \cos [\beta(\rho) + \Delta\phi(\rho) + \omega_0 \rho], \quad (13)$$

где  $\Delta\phi(\rho) = \phi(\rho) - \phi(\rho + \Delta\rho)$ ,  $\Delta\phi \simeq \left. \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\Delta\rho} |\Delta\rho|$ . Как известно, распределение  $\Delta\phi$ , так же как и  $\phi$ , в турбулентной атмосфере подчиняется нормальному закону [5]. Поэтому можно показать, что плотность распределения  $I(\rho)$  имеет вид

$$\begin{aligned} w(I, \rho) = & [2\pi\sigma_{\Delta\phi}^2(1 - Z^2(I, \rho))]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\Delta\phi}^2} [\ln(Z(I, \rho) + \right. \\ & \left. + \sqrt{1 - Z^2(I, \rho)}) - \beta_0]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $Z(I, \rho) = [I(\rho) - B(\rho)]/C(\rho)$ ,  $\sigma_{\Delta\phi}^2$  — дисперсия  $\Delta\phi$ ,  $\beta_0 = -\beta(\rho) + \omega_0 \rho$ . При этом использовано равенство  $\arccos x = i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  и условие ограниченности  $\Delta\rho$ , приводящее к пределам изменения  $0 \leq \Delta\phi \leq \pi$ . Функция  $w(I, \rho)$  выражается через логарифмически нормальное распределение. На рис. 1 (см. на вклейке) представлена плотность распределения вероятности нормированной интенсивности интерферограммы  $w(I, \rho)$  в зависимости от  $Z$  при разных  $\sigma_{\Delta\phi}^2$ .

**ИНТЕРФЕРОГРАММА ПРИ ПОДСВЕТЕ ОБЪЕКТА ИСТОЧНИКОМ  
С ПОПЕРЕЧНЫМ РАЗМЕРОМ ( $d/\rho_0 \geq 1$ )**

В этом случае объект освещается полем

$$V(\rho) = \epsilon_0 W(\rho) \exp[i\tilde{\varphi}(\rho)], \quad (15)$$

где

$$W(\rho) = \begin{cases} 1 & |\rho| \leq d/2, \\ 0 & |\rho| > d/2, \end{cases}$$

что приводит к формированию в картииной плоскости распределения

$$K(r) = \epsilon_0 \exp \left[ -i \frac{k}{2R} |r|^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) \exp \left[ i\tilde{\varphi}(\rho) - \right. \\ \left. - i \frac{k}{2R} |\rho|^2 + i \frac{k}{R} r\rho \right] d\rho. \quad (16)$$

После отражения от объекта в плоскости выходного зрачка будем иметь

$$\epsilon_\varphi(\rho) = \exp[i\varphi(\rho)] \tilde{\epsilon}(\rho) = \frac{\exp[i\varphi(\rho)]}{\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\rho') \times \\ \times W(\rho' + \rho) \exp[i\tilde{\varphi}(\rho' + \rho)] d\rho', \quad (17)$$

где

$$\epsilon(\rho) = \exp \left[ i \frac{k}{2R} |\rho|^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 Q(r) \exp \left[ i \frac{k}{2R} |r|^2 - i \frac{k}{R} r\rho \right] dr. \quad (18)$$

Интерферограмма поля  $\epsilon_\varphi(\rho)$  в этом случае приобретает вид

$$I_\varphi(\rho) = \langle |\tilde{\epsilon}(\rho)|^2 + |\tilde{\epsilon}(\rho + \Delta\rho)|^2 + 2\operatorname{Re}[\tilde{\epsilon}(\rho)\tilde{\epsilon}^*(\rho + \Delta\rho)] \rangle. \quad (19)$$

Для среднего значения запишем

$$\langle |\tilde{\epsilon}(\rho)|^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\rho'_1) \epsilon^*(\rho'_2) W(\rho'_1 + \rho) W(\rho'_2 + \rho) \times \\ \times \langle \exp[i\tilde{\varphi}(\rho'_1 + \rho) - i\tilde{\varphi}(\rho'_2 + \rho)] \rangle d\rho'_1 d\rho'_2 = \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\rho'_1) \epsilon^*(\rho'_2) W(\rho'_1 + \rho) W(\rho'_2 + \rho) \times \\ \times \exp \left[ -3,44 \left( \frac{|\rho'_1 - \rho'_2|}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] d\rho'_1 d\rho'_2,$$

$$\langle |\tilde{\epsilon}(\rho + \Delta\rho)|^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\rho'_1) \epsilon^*(\rho'_2) W(\rho'_1 + \rho + \Delta\rho) W(\rho'_2 + \rho + \Delta\rho) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[ -3,44 \left( \frac{|\rho'_1 - \rho'_2|}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] d\rho'_1 d\rho'_2, \\
\langle & 2\text{Re}[\tilde{\epsilon}(\rho)\tilde{\epsilon}^*(\rho + \Delta\rho) \exp[i\varphi(\rho) - i\varphi(\rho + \Delta\rho) + i\omega_0\rho]] \rangle = \\
= & 2\exp \left[ -3,44 \left( \frac{|\Delta\rho|}{\rho_0} \right)^{5/3} \text{Re} \left\{ \exp(i\omega_0\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}(\rho') \times \right. \right. \\
\times & \tilde{\epsilon}^*(\rho'_2) W(\rho'_1 + \rho) W(\rho'_2 + \rho + \Delta\rho) \exp \left[ -3,44 \left( \frac{|\rho'_1 - \rho'_2 - \Delta\rho|}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] \times \\
& \left. \left. \times d\rho'_1 d\rho'_2 \right\} . \right]
\end{aligned}$$

Здесь использовано условие некоррелированности фазовых атмосферных искажений при подсвете и приеме, как это происходит в случае двухпозиционной локации.

Рассмотрим несколько частных случаев. При освещении объекта через слой турбулентной атмосферы в его картинной плоскости формируется спекл-картина, обусловленная флуктуациями показателя преломления [6]. Размер всего пятна  $D_0$  пропорционален  $\lambda R/\rho_0$ , а размер спекла  $D_c \sim \lambda R/d$ . В зависимости от соотношений размера объекта  $l$ ,  $D_0$  и  $D_c$  выражения (20) принимают различную форму.

а) При  $l \leq \lambda R/d$  размер области пространственной когерентности объектного поля  $\lambda R/l$  оказывается близким к размеру  $d > \rho_0$ , и тогда масштаб флуктуаций поля  $\tilde{\epsilon}(\rho)$  больше области изменения

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} D \left| \frac{\rho}{\rho_0} \right| \right]. \quad \text{В результате}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\tilde{\epsilon}(\rho)|^2 \rangle & \approx P \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\epsilon}(\rho')|^2 W(\rho' + \rho) d\rho', \\
\langle |\tilde{\epsilon}(\rho + \Delta\rho)|^2 \rangle & \approx P \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\epsilon}(\rho')|^2 W(\rho' + \rho + \Delta\rho) d\rho', \\
\langle & 2\text{Re}[\tilde{\epsilon}(\rho)\tilde{\epsilon}^*(\rho + \Delta\rho) \exp[i\varphi(\rho) - i\varphi(\rho + \Delta\rho) + i\omega_0\rho]] \rangle \approx \\
\approx & P \exp \left[ -3,44 \left( \frac{|\Delta\rho|}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] 2\text{Re} \left[ \exp(i\omega_0\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}(\rho') \times \right. \\
& \times \left. \tilde{\epsilon}^*(\rho' + \Delta\rho) W(\rho' + \rho) d\rho' \right],
\end{aligned}$$

где

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -3,44 \left( \frac{|\rho|}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] d\rho.$$

б) При  $l > \lambda R/d$  (или  $l \gg \lambda R/d$ )  $\lambda R/l \sim \rho_0$  и общий вид выражения (20) не меняется.

в) Случай  $\lambda R/\rho_0 < 1$  в реальной ситуации при локации удаленных объектов практически исключен.

Для определения корреляционной функции вычислим корреляцию между одинаковыми и между различными составляющими интерферограммы:

$$\begin{aligned}
Q_{11}(\rho_1, \rho_2) &= \langle |\varepsilon(\rho_1)|^2 |\varepsilon(\rho_2)|^2 \rangle - \langle |\varepsilon(\rho_1)|^2 \rangle \langle |\varepsilon(\rho_2)|^2 \rangle \approx \\
&\approx \iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\rho'_1) \varepsilon^*(\rho_2) \varepsilon(\rho'_3) \varepsilon^*(\rho'_4) W(\rho'_1 + \rho_1) W(\rho'_2 + \rho_2) \times \\
&\times W(\rho'_3 + \rho_1) W(\rho'_4 + \rho_2) \exp \left[ -3,44 \left( \left( \frac{|\rho'_1 - \rho'_2|}{\rho_0} \right)^{5/3} + \left( \frac{|\rho'_3 - \rho'_4|}{\rho_0} \right)^{5/3} \right) \right] \times \\
&\times \left\{ \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} (\rho'_2 - \rho'_4)(\rho'_1 - \rho'_3) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} (\rho'_1 - \rho'_2)(\rho'_3 - \rho'_4) \right] - 1 \right\} d\rho'_1 d\rho'_2 d\rho'_3 d\rho'_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{12}(\rho_1, \rho_2) &= 2 \langle |\varepsilon(\rho_1)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \varepsilon(\rho_2) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \exp [i\varphi(\rho_2) - \right. \\
&\quad \left. - i\varphi(\rho_2 + \Delta\rho) + i\omega_0 \rho_2] \right\rangle - \langle |\varepsilon(\rho_1)|^2 \rangle \langle 2 \operatorname{Re} \{ \varepsilon(\rho_2) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \times \right. \\
&\times \exp [i\varphi(\rho_2) - i\varphi(\rho_2 + \Delta\rho) + i\omega_0 \rho_2] \rangle \approx 2 \exp \left[ -3,44 \left| \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right] \times \\
&\times \operatorname{Re} \{ \exp(i\omega_0 \rho_2) \iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\rho'_1) \varepsilon^*(\rho'_2) \varepsilon(\rho'_3) \varepsilon^*(\rho'_4) W(\rho'_1 + \rho_1) \times \\
&\times W(\rho'_2 + \rho_1) W(\rho'_3 + \rho_2) W(\rho'_4 + \rho_2 + \Delta\rho) \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho'_1 - \rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \left| \frac{\rho'_3 - \rho'_4 - \Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) \right] \left\{ \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} \times \right. \right. \\
&\times (\rho'_2 - \rho'_4 + \Delta\rho)(\rho'_1 - \rho'_3) - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} (\rho'_1 - \rho'_2)(\rho'_3 - \rho'_4 + \Delta\rho) - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} \times \\
&\left. \left. \times (\rho'_1 - \rho'_2 + \rho'_3 - \rho'_4) \right] - 1 \right\} d\rho'_1 d\rho'_2 d\rho'_3 d\rho'_4, \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{13}(\rho_1, \rho_2) &\approx \langle 2 \operatorname{Re} \{ \varepsilon(\rho_1) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \varepsilon(\rho_2) \varepsilon^*(\rho_2 + \Delta\rho) \times \right. \\
&\times \exp [i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_1 + \Delta\rho) + i\varphi(\rho_2) - i\varphi(\rho_2 + \Delta\rho) + \\
&+ i\omega_0 (\rho_1 - \rho_2)] \rangle \approx 2 \exp \left( -6,88 \left| \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) \operatorname{Re} \left\{ \exp [i\omega_0 (\rho_1 - \right. \right. \\
&- \rho_2)] \iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\rho'_1) \varepsilon^*(\rho'_2) \varepsilon(\rho'_3) \varepsilon^*(\rho'_4) W(\rho'_1 + \rho_1) (W(\rho'_2 + \\
&+ \rho_1 + \Delta\rho) W(\rho'_3 + \rho_2) W(\rho'_4 + \rho_2 + \Delta\rho) \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho'_1 - \rho'_2 - \Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \left| \frac{\rho'_3 - \rho'_4 - \Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) \left\{ \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + 2 \left| \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} \times \right. \right. \\
&\times (\rho'_3 - \rho'_4)(\rho'_1 - \rho'_3) - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} (\rho'_1 - \rho'_2 + \Delta\rho) \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

Остальные составляющие общей корреляционной функции  $Q_I(\rho_1, \rho_2)$  выводятся аналогичным образом, причем  $Q_{II}(\rho_1, \rho_2) = Q_{II}(\rho_1, -\rho_2)$ . В случае а) выражения (21) приобретают вид

$$Q_{I1}(\rho_1, \rho_2) \approx \iint_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(\rho'_1)|^2 |\varepsilon(\rho'_2)|^2 W(\rho'_1 + \rho_1) W(\rho'_2 + \rho_2) \times$$

$$\times \left\{ \exp \left( \left| \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + 2 \left| \frac{\rho'_1 - \rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) - P^1 \right\} d\rho'_1 d\rho'_2,$$

$$Q_{I2}(\rho_1, \rho_2) \approx 2 \exp \left( -3,44 \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\omega_0 \rho_2) \times \right.$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(\rho'_1)|^2 |\varepsilon(\rho'_2)|^2 W(\rho'_1 + \rho_1) W(\rho'_2 + \rho_2) W(\rho'_2 + \rho_2 + \Delta \rho) \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) - 6,88 \left| \frac{\rho'_1 - \rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{6,88}{\rho_0^{5/3}} \Delta \rho (\rho'_1 - \rho'_2) \right] - P^2 \right\} d\rho'_1 d\rho'_2,$$

(22)

$$Q_{I3}(\rho_1, \rho_2) \approx \exp \left( -3,44 \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) 2 \operatorname{Re} \left\{ \exp[i\omega_0(\rho_1 - \rho_2)] \times \right.$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(\rho'_1)|^2 |\varepsilon(\rho'_2)|^2 W(\rho'_1 + \rho_1) W(\rho'_2 + \rho_1 + \Delta \rho) W(\rho'_1 + \rho_2) \times$$

$$\times W(\rho'_2 + \rho_2 + \Delta \rho) \left\{ \exp \left[ -3,44 \left( \left| \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + 4 \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right|^{5/3} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 6,88 \left( \left| \frac{\rho'_1 - \rho'_2}{\rho_0} \right|^{5/3} + \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right|^{5/3} - \frac{1}{\rho_0^{5/3}} (\rho'_1 - \rho'_2) \Delta \rho \right) \right] - P^3 \right\} d\rho'_1 d\rho'_2.$$

Из выражений (21) и (22) нас интересуют в основном члены, отвечающие корреляции информационной составляющей

$$2 \operatorname{Re} \{ \varepsilon(\rho)^* (\rho + \Delta \rho) \exp[i\varphi(\rho) - i\varphi(\rho + \Delta \rho) + i\omega_0 \rho] \}.$$

Видно, что величина корреляционной функции  $Q_{I2}$  и  $Q_{I3}$  в большой степени зависит от разности ее аргументов  $\delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ . Корреляция практически отсутствует на расстоянии  $|\delta \rho| = \rho_0$ . При этом сильное влияние на нее оказывает величина сдвига  $\Delta \rho$ , снижающая контраст в  $M^2$  и  $M^4$  раз соответственно для  $Q_{I2}$  и  $Q_{I3}$  вместо обычного в  $M$  раз при вычислении средних значений. Следует отметить, что в приближении а) даже при корреляции информационной составляющей фазовая информация отсутствует.

Перейдем к рассмотрению плотности вероятности интерферограммы  $I_\Phi(\rho)$ . Каждую составляющую  $I_\Phi(\rho)$  представим в виде суммы независимых составляющих:

$$I_\Phi(\rho) \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \varepsilon_i \varepsilon_j^* \exp(i\varphi_{ij}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{i+h} \times$$

$$\times W_{j+h} \varepsilon_i \varepsilon_j^* \exp(i\varphi_{i+j, j+h}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_{j+h} \times$$

$$\times 2 \operatorname{Re} [\varepsilon_i \varepsilon_j^* \exp(i\Delta\varphi + i\varphi_{i+j+h} + i\alpha)],$$

где  $W_i W_j \varepsilon_i \varepsilon_j$  соответствует обозначениям  $W(\rho')$  и  $\varepsilon(\rho')$ ,  $\phi_{ij} = \phi(\rho'_1 + \rho) - \phi(\rho'_2 + \rho)$ , индекс  $k$  соответствует смещению на  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\phi = \phi(\rho') - \phi(\rho + \Delta\rho)$ . Для величины  $q = 2\text{Re}[\varepsilon_i \varepsilon_j^* \exp(i\theta_{ij+k})]$  (где  $\theta_{ij+k} = \Delta\phi + \phi_{ij+k} + \alpha$ ), как было показано выше, справедливо распределение

$$w(q) = [2\pi\sigma_\theta^2 (1 - \tilde{Z}^2(q))]^{-1/2} \exp \{-[\ln(\tilde{Z}(q) + \sqrt{\tilde{Z}^2(q) - 1}) - \beta]^2/2\sigma_\theta^2\}, \quad (24)$$

где  $\tilde{Z}(q) = q/|\varepsilon_i||\varepsilon_j|$ ,  $\beta = \arg \varepsilon_i - \arg \varepsilon_j + \alpha$ , выражющееся через логарифмически нормальное (рис. 1). Как было показано в работе [7], сумма логарифмически нормально распределенных величин также является логарифмически нормальной при конечном  $N$ , так что при  $(d/\rho_0)^2 \geq 1$  каждое слагаемое из (23) распределено по закону, описываемому выражением (24), а при условии  $3(d/\rho_0)^2 \geq 1$  и вся сумма распределена точно так же.

Как показано в работе [8], логарифмический закон очень устойчив к суммированию и стремится к нормальному закону по центральной предельной теореме очень медленно. Однако при условии  $L = 3N^2 = 3(d/\rho_0)^2 \gg 1$  суммирование по  $L$  реализациям может оказаться заметным. Для оценки числа реализаций  $L = 3N^2$ , при которых закон распределения  $I_\Phi(\rho)$  можно считать нормальным, воспользуемся разложением плотности распределения суммы  $L$  независимых случайных величин по полиномам Эрмита [7]:

$$f_L(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \left[ 1 + \frac{\gamma_1}{64L^{1/2}} h_3(z) + \frac{\gamma_2}{24L} h_4(z) + \dots O(L^{-3/2}) \right], \quad (25)$$

где  $h_n(z)$  — полиномы Эрмита,  $\gamma_1, \gamma_2$  — коэффициенты асимметрии и эксцесса,  $z = (x - L\langle x \rangle)/(\sigma_x^2 L)^{1/2}$ ,  $x$  — случайная величина,  $\langle x \rangle, \sigma_x^2$  — ее среднее значение и дисперсия соответственно. Поскольку наибольший вклад в  $f_L(z)$  из всей суммы после 1 вносит член  $(\gamma_1/64L^{1/2})h_3(z)$ , величину критического значения  $L_{kp}$  можно оценить из условий

$$\frac{\gamma_1 h_3(z)}{64L_{kp}^{1/2}} \ll 1 \quad \text{или} \quad L_{kp} \geq 0,025\gamma_1^2 h_3^2(z). \quad (26)$$

Для логарифмически нормального распределения  $W(q)$  величины  $p = \tilde{Z}(q) + \sqrt{\tilde{Z}^2(q) - 1}$  коэффициент асимметрии определяется как

$$\gamma_1 = (\exp \sigma_\theta^2 - 1)^{1/2} (\exp \sigma_\theta^2 + 2). \quad (27)$$

Дисперсия величины  $\theta_{ij+k} = \Delta\phi + \phi_{ij+k} + \alpha$  определяется фактически удвоенной дисперсией  $\sigma_{\nabla\phi}^2$  градиента фазовых искажений  $\phi(\rho)$ . Полином Эрмита

$$h_3(z) = z^3 + 3z,$$

будучи уменьшенным на  $\exp(-z^2/2)$ , заметно проявляет свои свойства при малых и средних значениях  $z$  (на больших  $z$  произведение стремится к 0 как  $\exp(-z^2/2)$ ), поэтому для расчета  $L_{kp}$  положим  $h_3(z) \sim 1$ . В табл. 1 приведены оценки значений  $L_{kp}$  для различных величин дисперсии  $\sigma_{\nabla\phi}^2$  и соответствующие им предельные значения  $(d/\rho_0)_{kp}^2$ .

Таблица 1

$(\sigma_{\eta\varphi}^2)^{1/2}$	$L_{kp}$	$(d/\rho_0)^2$
0,1"	300	100
0,5"	$2,9 \cdot 10^3$	$8,7 \cdot 10^3$
1"	$1,25 \cdot 10^7$	$9,75 \cdot 10^7$
10"	$1,2 \cdot 10^{12}$	$3,6 \cdot 10^{12}$

Из табл. 1 видно, что на предельное соотношение площадей передающей апертуры и ячейки пространственной когерентности фазовых искажений сильное влияние оказывает дисперсия градиента фазовых флуктуаций  $\sigma_{\eta\varphi}^2$ . Чем меньше дисперсия, тем быстрее наступает переход  $I_\varphi(\rho)$  к нормальному распределению. При слабых флуктуациях ( $\sigma_{\eta\varphi} \sim 0,1 \div 0,3''$ ) распределение  $I_\varphi(\rho)$  близко к нормальному при относительно небольших соотношениях  $d/\rho_0$ , что согласуется с результатами работы [8]. Однако в турбулентной атмосфере дисперсия  $\sigma_{\eta\varphi}^2$  обычно достигает больших значений  $(1-10'')^2 \gg 1$ , в результате чего при любых приемлемых соотношениях  $(d/\rho_0)^2 \gg 1$  интерферограмма подчиняется закону распределения типа (24).

Таким образом, интерферограмма сдвига, регистрируемая при наблюдении объекта в когерентном свете через турбулентную атмосферу  $\tilde{I}_\varphi(\rho)$ , состоит из четырех составляющих: собственно интерферограммы  $I_\varphi(\rho)$ , включающей два распределения интенсивности в выходном зрачке телескопа, перекрестную составляющую, несущую фазовую информацию, и шума  $n(\rho)$ . Шум  $n(\rho)$  является нормально распределенным и  $\delta$ -коррелированным со средним значением  $n$  и спектральной плотностью мощности  $N_0$ . Интерферограмма  $I_\varphi(\rho)$  при  $(d/\rho_0) < 1$  распределена по закону (14), близкому к логарифмическициальному при любом значении дисперсии  $\sigma_{\eta\varphi}^2$ . В случае  $(d/\rho_0)^2 \geq 1$  распределение остается близким к логарифмическициальному (24) при  $\sigma_{\eta\varphi}^2 \geq (0,1'')^2$ , а при  $(d/\rho_0)^2 \gg 1$  граница  $\sigma_{\eta\varphi}^2$  перехода к нормальному распределению повышается до  $\sim (0,3'')^2$ . В турбулентной атмосфере со средними и с сильными флуктуациями фазы практически при всех приемлемых значениях  $(d/\rho_0)^2 \gg 1$  интерферограмма  $I_\varphi(\rho)$  имеет плотность распределения типа (24).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Устинов Н. Д., Вольпов А. Л., Зимин Ю. А. // Опт. и спектр. 1987. Т. 63. № 4. С. 849.
2. Устинов Н. Д., Ануфриев А. В. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 5. С. 937.
3. Rimmer M. P. // Appl. Optics. 1974. V. 13. № 3. P. 623.
4. Fried D. L. // Optica Acta. 1979. V. 26. № 5. P. 592.
5. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере / Под ред. Стробена.— М.: Мир, 1981.
6. Лазерная локация / Под ред. Н. Д. Устинова.— М.: Машиностроение. 1985.
7. Bagat R. // J. Opt. Soc. America. 1976. V. 66. № 3. P. 211.
8. Mitchell R. L. // J. Opt. Soc. America. 1968. V. 58. № 9. P. 1267

Научно-производственное объединение  
«Астрофизика»

Поступила в редакцию  
17 ноября 1989 г.

#### STATISTICAL MODEL OF SHEAR INTERFEROGRAMS GIVEN BY THE COHERENTLY ILLUMINATED OBJECT OBSERVATION THROUGH TURBULENT ATMOSPHERE

A. L. Vol'pov, Yu. A. Zimin

An analysis has been made of the statistical characteristics and probability distribution density of the shear interferograms given by the coherently illuminated objects through turbulent atmosphere. Two cases of the illumination are considered depending on the relation of the illumination aperture transverse dimension and phase fluctuations correlation scale of the optical field in turbulent atmosphere. A statistical model of the interferogram is composed for both variants, its dependence on phase fluctuation variance and the number of the independent spatial correlation regions of the optical field is analysed.

УДК 621.371:615.47

## КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ТЕОРИИ КОНТАКТНОЙ РАДИОТЕРМОМЕТРИИ

А. Н. Резник

Решена электродинамическая задача о тепловом излучении неравномерно нагретого полупространства, принимаемом антенной произвольного диаметра, расположенной на произвольном расстоянии от поверхности излучающей среды. Получено интегральное соотношение, связывающее принимаемую мощность с глубинным профилем температуры среды при учете квазистационарного теплового излучения. Найдены условия, при которых учет квазистационарного поля дает существенные поправки к результатам лучевой теории. Полученные эффекты проанализированы применительно к проблеме определения внутренней температуры биообъектов методом контактной радиотермометрии.

Контактная радиотермометрия — КР (или радиометрические измерения при соприкосновении приемной антенны с поверхностью зондируемого объекта) — нашла применение в задачах определения глубинной температуры биообъектов [1,2] и в плазменных исследованиях [3]. Являясь дистанционным методом, КР имеет существенно лучшую разрешающую способность, чем при измерениях удаленной антенной. Это связано с тем, что при КР измерения обычно производятся в ближней зоне антенны, размеры которой примерно соответствуют разрешению. Можно полагать поэтому, что КР найдет более широкое применение в разнообразных приложениях, где требуется исследование локальных неоднородностей температуры, например, при подповерхностном зондировании земных покровов.

Восстановление глубинного профиля температуры  $T(z)$  при КР обычно производится по уравнению для яркостной температуры  $T_y$ , которое в случае однородной диэлектрической проницаемости излучающей среды  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$  имеет вид [2]

$$T_y = (1 - \Gamma_0^2) \int_{-\infty}^0 T(z') \gamma \exp(\gamma z') dz', \quad (1)$$

где  $\gamma = 2k_0 \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon}$  — коэффициент поглощения,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  — волновое число электромагнитной волны в вакууме,  $\Gamma_0^2$  — коэффициент отражения по мощности на границе среда — антенна. Применимость уравнения (1) при КР, однако, до настоящего времени не была убедительно обоснована. Сомнения в применимости (1) возникают по следующим причинам. Во-первых, зондируемая с помощью КР среда, как правило, является сильно поглощающей, для нее  $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ . В этом случае неприменимо понятие яркостной температуры, вводимое через лучевую интенсивность излучения  $J$  [4]. Неприменимо также уравнение переноса излучения, из которого следует решение (1)\*. Во-вторых, известно [5], что вблизи поверхности излучающей среды наряду с волновым существует квазистационарное поле, которое не описывается лучевой интенсивностью и, следовательно, уравнением (1). Взаимодействуя с приемной антенной, квазистационарное поле влияет на результаты КР-измерений.

\* В работе [6] получено решение (1) для сильно поглощающей среды. Однако авторами [6] рассмотрен случай измерений удаленной антенной, когда интенсивность  $J$  вводится только в непоглощающем верхнем полупространстве, что оправдано. Пределы применимости результатов [6] при КР требуют дополнительного исследования.

Другой подход, более общий, связан с решением электродинамической задачи об излучении заданных тепловых источников в поглощающей среде. Этот подход применен в работе [7], где получено интегральное уравнение, связывающее эффективную температуру принимаемого теплового излучения с подповерхностным профилем температуры среды. В [7] рассмотрена плоскослоистая среда с произвольным вертикальным профилем  $\varepsilon(z)$ , при этом решение выражено через неизвестные функции, подлежащие определению для каждого конкретного  $\varepsilon(z)$ . Последнее затрудняет сопоставление результатов лучевой и электродинамической теорий. В связи с этим представляет интерес решение электродинамической задачи для более простого и вместе с тем практически важного случая диэлектрически однородной среды, что позволяет определить условия, при которых это решение переходит в (1). Кроме того, в отличие от [7], не будем ограничиваться случаем плотного контакта приемной антенны с поверхностью зондируемой среды.

Схематически процесс измерений изображен на рис. 1 (см. на вклейке). Границей раздела поглощающей и прозрачной сред является поверхность  $z=0$ . В точке  $Q$  производится измерение средней мощности принимаемого теплового поля, пропорциональной величине  $P(z) = \langle |E_p(z)|^2 \rangle$ , где  $E_p$  — определенная компонента вектора электрического поля. Точка  $Q$  через приемный тракт связана с апертурой антенны, расположенной на высоте  $z$  над границей раздела. Высота  $z$ , размер апертуры и соотношение между  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  произвольны. Температура поглощающей среды  $T(z)$  неоднородна только по вертикали. Согласно [5]

$$E_p(z) = \sum_{i=1}^3 \int E_i^0(r', z', z) j_i^e(r, z') d^2 r' dz', \quad (2)$$

где  $j_i^e$  — компоненты флюктуационного электрического тока в поглощающей среде,  $E_i^0$  — компоненты электрического поля в поглощающей среде, создаваемого элементарным электрическим диполем, расположенным в точке  $Q$  и ориентированным вдоль  $E_p$ . Учитывая соотношение [5]

$$\langle j_i^e(r, z) j_k^{e*}(r_1, z_1) \rangle = \frac{\omega \theta(z)}{4\pi^3} \varepsilon_2 \delta_{ik} \delta(r - r_1) \delta(z - z_1)$$

$(\theta(z) = (\hbar\omega/2) \operatorname{ctn}[\hbar\omega/2kT(z)]$  — функция Планка), получим

$$P(z) = \frac{\omega \varepsilon_2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^0 dz' \theta(z') \int d^2 r' \sum_{i=1}^3 |E_i(r', z', z)|^2. \quad (3)$$

Таким образом, мощность теплового излучения определяется путем решения электродинамической задачи об излучении  $E_i$  антенны, возбуждаемой элементарным источником в точке приема. Решение данной задачи может быть получено, если ввести электрическое  $E_s(r)$  и магнитное  $H_s(r)$  поля на апертуре антенны, которые определяют эффективные магнитный и электрический токи на апертуре (см., например, [8]). Не конкретизируя вид приемной антенны, будем для простоты полагать  $E_s(r) = H_s(r)$ , причем электрическое поле ориентировано по оси  $x$ , а магнитное — по  $y$ . Тогда поле  $E_i$  находится с помощью функции Грина  $G_i(r' - r_1, z', z) = \mathcal{E}_{ix}^e(r' - r_1, z', z) + \mathcal{E}_{iy}^m(r' - r_1, z', z)$ , где  $\mathcal{E}_{ix}^e$ ,  $\mathcal{E}_{iy}^m$  — поля, возбуждаемые в поглощающей среде (в точке  $r, z'$ ) элементарными электрическим и магнитным диполями, расположеными на апертуре антенны (в точках  $r, z$ ). Получим

$$E_i(r', z', z) = -\frac{c}{4\pi} \int d^3 r_1 G_i(r' - r_1, z', z) E_s(r_1). \quad (4)$$

Удобно выразить  $G_i$ ,  $E_s$  через соответствующие преобразования Фурье по поперечным координатам, при этом из (3) найдем

$$P(z) = \frac{4c^2 \omega \epsilon_2}{(4\pi)^6} \int_{-\infty}^0 dz' \theta(z') \int d^2 \mathbf{x} \left[ \sum_{i=1}^3 |G_i(\mathbf{x}, z', z)|^2 \right] |E_s(\mathbf{x})|^2, \quad (5)$$

где  $E_s(\mathbf{x})$  — передаточная функция антенного фильтра,  $G(\mathbf{x}, z', z) = \mathcal{E}_x^e(\mathbf{x}, z', z) + \mathcal{E}_y^m(\mathbf{x}, z', z)$  — разложение по плоским волнам полей в поглощающей среде, создаваемых элементарными диполями в прозрачной среде, которое представляется в следующем виде:

$$\mathcal{E}_x^e(\mathbf{x}, z', z) = \mathcal{E}_{xE}^e(\mathbf{x}, z', z) + \mathcal{E}_{xH}^e(\mathbf{x}, z', z) = \quad (6a)$$

$$= \frac{2\pi}{c} [A_E(\mathbf{x})n_\perp(\mathbf{x}) + A_H(\mathbf{x})n_\parallel(\mathbf{x})] \exp(i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}z) \exp(-i\sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}z'),$$

$$\mathcal{E}_y^m(\mathbf{x}, z', z) = \mathcal{E}_{yE}^m(\mathbf{x}, z', z) + \mathcal{E}_{yH}^m(\mathbf{x}, z', z) = \quad (6b)$$

$$= \frac{2\pi}{c} [B_E(\mathbf{x})n_\perp(\mathbf{x}) + B_H(\mathbf{x})n_\parallel(\mathbf{x})] \exp(i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}z) \exp(-i\sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}z'),$$

где

$$A_E(\mathbf{x}) = \frac{k_0 \mathbf{x}_y}{\mathbf{x} \sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}} T_E(\mathbf{x}), \quad A_H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_x}{\mathbf{x}} T_H(\mathbf{x}),$$

$$B_E(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_y}{\mathbf{x}} T_E(\mathbf{x}), \quad B_H(\mathbf{x}) = \frac{k_0 \mathbf{x}_x}{\mathbf{x} \sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}} T_H(\mathbf{x}),$$

$$n_\parallel = \mathbf{x}^0 \frac{\mathbf{x}_x \sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}}{\sqrt{\epsilon} k_0 \mathbf{x}} + \mathbf{y}^0 \frac{\mathbf{x}_y \sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}}{\sqrt{\epsilon} k_0 \mathbf{x}} - \mathbf{z}^0 \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\epsilon} k_0},$$

$$n_\perp = \mathbf{x}^0 \frac{\mathbf{x}_y}{\mathbf{x}} - \mathbf{y}^0 \frac{\mathbf{x}_x}{\mathbf{x}},$$

$$T_E = \frac{2\sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}}{\sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2} + \sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}}, \quad T_H = \frac{2\sqrt{\epsilon} \sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}}{\epsilon \sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2} + \sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}}$$

— френелевские коэффициенты прохождения плоской волны из прозрачной среды в поглощающую.

Подставим (6) в (5) и учтем, что  $|n_\perp|^2 = 1$ ,  $n_\perp n_\parallel^* = n_\parallel n_\perp^* = 0$ ,  $n_\parallel|^2 = (|\sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2}|^2 + \mathbf{x}^2)/(|\epsilon| k_0^2)$ , получим

$$P(z) = \frac{\omega \epsilon_2}{(4\pi)^4} \int_{-\infty}^0 dz' \theta(z') \tilde{K}(z'); \quad (7)$$

$$\tilde{K}(z') = \int d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{\mathbf{x}_y^2}{\mathbf{x}^2} |T_E|^2 + \frac{\mathbf{x}_x^2}{\mathbf{x}^2} |T_H|^2 |n_\parallel|^2 \right] \left| \frac{k_0 + \sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}}{\sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2}} \right|^2, \quad (8)$$

$$\exp(2\text{Im} \sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2} z') \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \leq k_0 \\ \exp(-2\sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2} z), & \mathbf{x} > k_0 \end{cases} |E_s(\mathbf{x})|^2.$$

Соотношения (7), (8) определяют измеряемую радиометрическим приемником мощность с учетом квазистационарного поля в прозрачной

среде ( $\kappa > k_0$ ) и применимы при  $0 \leq z < \infty$ . Исследуем переход от (7) к результатам лучевой теории, который возможен в следующих случаях:

1) при достаточно большом расстоянии  $z$  приемной антенны от поверхности излучающей среды ( $z > \lambda$ ), когда для  $\kappa > k_0$  сомножитель  $\exp(-2\gamma\kappa^2 - k_0^2 z) \rightarrow 0$ ;

2) при достаточно большом размере апертуры  $D$  приемной антенны ( $D > \lambda$ ), когда  $E_s(\kappa) \rightarrow 0$  для  $\kappa > k_0$ .

В этих случаях квазистационарное поле не влияет на измеряемую мощность, интегрирование в (8) проводится по области  $\kappa \leq k_0$  и может быть сделана замена переменных:  $\kappa_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\kappa_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\kappa = k_0 \sin \theta$ ,  $d^2\kappa = k_0^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$ . Учтем соотношения

$$|T_E|^2 = (1 - |R_E|^2) \frac{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2} (2 \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon k_0^2 - \kappa^2})}{k_0^2 \epsilon_2},$$

$$|T_H|^2 = (1 - |R_H|^2) \frac{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2} (2 \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon k_0^2 - \kappa^2})}{k_0^2 \epsilon_2} \frac{k_0 |\epsilon|}{|\sqrt{\epsilon k_0^2 - \kappa^2}|^2 + \kappa^2}$$

и сделаем замену  $\theta(z') = kT(z')$ , справедливую для радиодиапазона. Пренебрегая потерями в антенне, определим antennную температуру радиометра  $T_A$  в соответствии с [9] как температуру бесконечно протяженного абсолютно черного тела, обеспечивающего прием той же мощности  $P(z)$ , что и от зондируемой среды. Переход к чернотельному излучению в (7), (8) осуществляется при  $\theta(z') = \theta = kT_A = \text{const}$ ,  $\epsilon_1 \rightarrow 1$ ,  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ . В результате выражение (7) приводится к виду

$$T_A = \int_{-\infty}^0 dz' T(z') \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta [\cos^2 \theta (1 - |R_E|^2) + \sin^2 \theta (1 - |R_H|^2)] \times \\ \times \gamma(\theta) e^{i\theta z'} \Phi(\varphi, \theta), \quad (9)$$

где

$$\gamma(\theta) = 2k_0 \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}, \quad (10)$$

$$\Phi(\varphi, \theta) = \frac{(1 + \cos^2 \theta) |E_s(\varphi, \theta)|^2}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) |E_s(\varphi, \theta)|^2}$$

— нормированная диаграмма направленности приемной антенны по мощности, поскольку  $E_s(\varphi, \theta) = \int d^2r E_s(r) \exp[ik_0 \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)]$ . Если распределение поля по апертуре антенны имеет круговую симметрию, выражение (9) упрощается до

$$T_A = \int_{-\infty}^0 dz' T(z') \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \left[ 1 - \frac{|R_E|^2 + |R_H|^2}{2} \right] \gamma(\theta) e^{i\theta z'} \Phi(\theta). \quad (11)$$

Соотношения (9), (11) следуют также и из лучевой теории теплового излучения, если в качестве коэффициента поглощения среды  $\gamma$  использовать его эффективное значение (10), полученное также в работе [6]. С учетом данной оговорки лучевая теория применима в тех случаях, когда можно пренебречь влиянием квазистационарного поля на результаты радиометрических измерений. Если для зондируемой среды  $|\epsilon| \gg 1$ , что справедливо для биообъектов, воды и др., то можно пренебречь  $\sin^2 \theta$  по сравнению с  $\epsilon$  в (10). Тогда, вводя среднеугловой коэффициент отражения  $\Gamma_0^2 = (1/2) (|R_E|^2 + |R_H|^2)$ , придем от (11) к (1).

При КР биообъектов указанные выше условия не выполняются,

поскольку измерения производятся при плотном контакте приемной антенны с поверхностью зондируемой среды ( $z=0$ ), а размер апертуры антенны выбирается порядка длины волны излучения в среде ( $D \approx \lambda / \operatorname{Re}[\epsilon]$ ). Измеряемой величиной при этом является среднеглубинная температура  $T_{\text{ср}}$ , которая определяется как температура равномерно нагретого калибровочного тела с диэлектрической проницаемостью, равной в зондируемой среде, а мощность принимаемого излучения равна  $P(z)$ . На практике измерение  $T_{\text{ср}}$  осуществляется в результате калибровки радиометра по двум таким телам с различными температурами. Используя (7), получим

$$T_{\text{ср}} = \int_{-\infty}^0 dz' T(z') K(z'), \quad (12)$$

где  $K(z') = \tilde{K}(z') / \int_{-\infty}^0 dz' \tilde{K}(z')$ . Определим также эффективную глубину зондирования как

$$d = \left| \int_{-\infty}^0 dz' z' K(z') \right|. \quad (13)$$

Результаты расчета  $d$  в зависимости от параметров  $z/\lambda$ ,  $D/\lambda$  представлены на рис. 2 для  $\lambda = 30$  см,  $\epsilon = 40 + i13$ , близкой к значению диэлектрической проницаемости мышечных тканей человека. Распределение поля на апертуре антенны аппроксимировалось функцией  $E_s(r) = -\exp(-4r^2/D^2)^*$ . Пунктирной линией показана зависимость, которая получена как результат расчета по лучевой теории, когда независимо от  $z/\lambda$ ,  $D/\lambda$  для принятого значения  $\epsilon$  имеем  $d \approx d_{\text{ск}} = (2k_0 \operatorname{Im}[\epsilon])^{-1} = 2,35$  см. Выполненные расчеты дают оценку значений параметров  $D/\lambda$ ,  $z/\lambda$ , при которых применима лучевая теория. Особо выделен случай  $D/\lambda = (\operatorname{Re}[\epsilon])^{-1} = 0,156$ , соответствующий обычно применяемым при медико-биологических исследованиях размерам антенн. Видно, что для этого случая при  $z=0$  имеем  $d \approx 0,77 d_{\text{ск}}$ . Приведенные результаты позволяют оценить погрешность расчета  $T_{\text{ср}}$  по лучевой теории. Учитывая экспоненциальную зависимость ядра (8) уравнения (12) от глубины  $z'$ , для линейного профиля температуры среды  $T(z') = T_0 - \alpha z'$  имеем  $T_{\text{ср}} \approx T_0 + \alpha d$ , что подтверждается также и численными расчетами. Тогда оценка погрешности определения  $T_{\text{ср}}$  по лучевой теории —  $\delta_t \approx \alpha(d_{\text{ск}} - d)$ . При  $\alpha \approx 1-1,5$  К/см, типичном для тела человека на глубинах до 2–3 см [2, 11, 12], получим в рассмотренных выше условиях измерений  $\delta_t \approx 0,5-0,8$  К. Результаты расчета  $\delta_t$  в зависимости от  $D/\lambda$  для нескольких моделей профиля  $T(z)$  в теле человека из рис. 3б. Видно, что для нелинейных профилей  $T(z)$  реализуется меньший уровень погрешностей, которые при  $D/\lambda = (\operatorname{Re}[\epsilon])^{-1}$  составляют 0,1–0,4 К. Полученные оценки погрешностей значительно превышают допустимый уровень ошибок ( $\sim 0,1$  К) КР-измерений  $T_{\text{ср}}$  в медико-биологических исследованиях. Количественная оценка условий применимости лучевой теории зависит от функции распределения поля по апертуре приемной антенны, формы глубинного профиля температуры и диэлектрических свойств зондируемой среды. Расчеты для различных  $\epsilon$ ,  $T(z')$  и  $E_s(r)$  показывают, что исходя из требования  $\delta_t < 0,1$  К область применимости лучевой теории ограничена условиями  $D/\lambda > 0,5$  или  $z/\lambda > 0,1$ . Заметим, что подъем антенны диаметром  $D < \lambda$  на высоту  $z > 0,1 \lambda$  связан с потерей принимаемой мощности в  $(\lambda/D)^2$  раз, как легко видеть из соотношений (7), (8). В связи с этим соответственно ухудшается чувст-

\*Отметим, что при КР поле  $E_s(r)$  может отличаться от распределения в безграничном пространстве и зависеть от  $z$  [10]. Вместе с тем очевидно, что во всех случаях масштаб изменения  $E_s(r)$  совпадает с диаметром апертуры  $D$ , что достаточно для данных оценочных расчетов.

вительность радиометра к изменениям температуры зондируемой среды.

Представленные на рис. 2 результаты свидетельствуют также о принципиальной возможности восстановления  $T(z)$  по данным КР-измерений несколькими антеннами с различными диаметрами апертур  $D$ . Варьирование  $D$  в диапазоне  $0,01\lambda \ll D \ll 0,5\lambda$  позволит осуществить термическое зондирование среды на глубины от тонкого приповерхностного слоя  $z \rightarrow 0$  до  $z \approx d_{\text{ск}}$ , что обычно достигается технически более сложным путем за счет использования нескольких приемников излучения с разными  $\lambda$ .

Глубина зондирования  $d$  характеризует отклик радиометрического приемника на изменение температуры среды только вдоль вертикальной координаты  $z$ . При исследованиях локальных температурных неоднородностей необходимо знать отклик на изменения  $T$  в поперечных направлениях. Этот отклик удобно характеризовать мощностью  $P(z, z_1, \mathbf{r})$ , принимаемой от элементарного источника тепла, сосредоточенного в точке  $(z_1, \mathbf{r})$ . Подставляя в (3)  $\theta(z', \mathbf{r}) = \delta(z' - z_1)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ , производя преобразования, аналогичные сделанным при выводе (5), и нормируя  $P(z, z_1, \mathbf{r})$  на максимальную мощность от источника в начале координат  $P(z, 0, 0)$ , получим

$$I(z, z_1, \mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^3 |\int d^2 \mathbf{x} e^{ikr} G_i(\mathbf{x}, z, z_1) E_s(\mathbf{x})|^2}{\sum_{i=1}^3 |\int d^2 \mathbf{x} G_i(\mathbf{x}, z, 0) E_s(\mathbf{x})|^2}, \quad (14)$$

где  $G_i(\mathbf{x}, z, z_1)$  определяются на основании (6):

$$G(\mathbf{x}, z, z_1) = [(A_E + B_E)n_{\perp} + (A_H + B_H)n_{\parallel}] \exp(i\sqrt{k_0^2 - \mathbf{x}^2} z) \exp(-i\sqrt{\epsilon k_0^2 - \mathbf{x}^2} z_1). \quad (15)$$

Пример расчета зависимости  $I \rightarrow (z=0, z_1, x, y = 0)$  для  $\lambda = 30$  см,  $\epsilon = 40 + i13$ ,  $D = \lambda/\text{Re}\sqrt{\epsilon} \approx 4,7$  см представлен на рис. 4. Приведенные изолинии функции  $I(z_1, x)$  позволяют судить об относительном вкладе температур отдельных точек среды в определяемую величину  $T_{\text{ср}}$ , поэтому для КР-измерений функция объемной восприимчивости  $I(z, z_1, \mathbf{r})$  играет ту же роль, что и диаграмма направленности при радиометрических измерениях удаленной антенной. Горизонтальная разрешающая способность КР при зондировании сильно поглощающей среды, в частности тела человека, полностью определяется размером апертуры  $D$ .

В заключение подчеркнем необходимость учета принимаемого антеннной контактного радиометра квазистационарного электромагнитного поля. Для КР биообъектов учет квазистационарных полей влияет на оценку эффективной глубины зондирования, которая составляет 70–80% толщины скин-слоя. При решении задач восстановления подповерхностного профиля температуры определение среднеглубинной температуры среды по лучевой теории [2] может приводить к погрешностям более 0,5 К. Такого порядка погрешности возможны в работе [11], где применена электродинамическая теория при учете только волновых полей. Это же относится и к результатам работы [12], где использовано решение вспомогательной задачи о поглощении энергии уединенной плоской волны. Такой подход справедлив только для апертур  $D \gg \lambda$ , что в дециметровом диапазоне волн требует нереальных в медико-биологических исследованиях размеров антенн. Для реальных антенн необходимо рассматривать «веер» плоских волн и квазистационарные поля. Использование электродинамической теории должно сопровождаться информацией о характеристиках приемной антенны (как минимум, о диаметре апертуры и расстоянии до поверхности), что не менее важно, чем указание длины волны радиометра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. С., Густов А. В. и др. // УФН. 1981. Т. 134. Вып. I. С. 155.
2. Троицкий В. С., Аранжереев Е. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 62.
3. Гиппиус А. А., Павлова Л. С., Поляков В. М. Диагностика низкотемпературной плазмы по спектрам ее собственного излучения в ОВЧ и субмиллиметровом диапазонах. — М.: Энергоиздат, 1981.
4. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. — М.: Наука, 1983.
5. Левин М. А., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
6. Гайкович К. П., Резник А. Н., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1987. Т. 23. № 7. С. 761.
7. Шмаленюк А. С. Препринт ИРЭ АН СССР № 2(357). — М., 1983.
8. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1973.
9. Цейтлин Н. М. Антенная техника и радиоастрономия. — М.: Сов. радио, 1976. — 352 с.
10. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах. — М.: Мир, 1984.
11. Гайкович К. П., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 9. С. 1104.
12. Винокурова С. И., Павлова Л. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 3. С. 302.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 мая 1989 г.

### A QUASI-STATIONARY FIELD OF THE THERMAL RADIATION IN THE THEORY OF CONTACT RADIOTHERMOMETRY

A. N. Reznik

An electrodynamic problem has been solved on the thermal radiation of nonuniformly heated semi-space received by the antenna of arbitrary diameter located at an arbitrary distance from the surface of radiating medium. An integral relation has been obtained which connects the received power with the depth temperature profile of the medium taking into account the quasi-stationary thermal radiation. Conditions have been found for which the consideration of quasi-stationary field leads to essential corrections relative to the results of the ray theory. The effects obtained are analysed applicable to the problem of the definition of the internal temperature of bioobjects by the method of contact radi thermometry.

---

УДК 533.93

## ЗАТУХАНИЕ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ В РАВНОВЕСНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

*Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, Е. Г. Ступко*

Рассмотрена задача о времени жизни метастабильного атомного состояния в неизотермической равновесной плазме. Проведено сравнение эффективностей бинарностолкновительного и коллективного механизмов разрушения метастабильности. В качестве последнего рассматривается взаимодействие атомной системы с полем ионных волн в плазме. Для водородоподобных ионов найдена область параметров, в которой взаимодействие с полем ионных волн наиболее эффективно. Приведенные численные оценки указывают на возможное экспериментальное подтверждение важности данного механизма разрушения метастабильности.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная различным аспектам взаимодействия атомов в метастабильных состояниях с плазменной средой (см., например, [1–4] и цитированную там литературу). В первую очередь это связано с тем, что взаимодействие с плазменными полями приводит к снятию метастабильности и появлению в спектре плазмы запрещенных линий, по которым, наряду с методами штарковской спектроскопии, можно проводить бесконтактную диагностику не только плотности и температуры, но и напряженностей турбулентных полей плазмы [1, 2, 4–6]. Так, предложенный Баранже и Мозером метод диагностики плазмы по сателлитам запрещенных линий [5] положил начало целому направлению исследований по взаимодействию метастабильных состояний с турбулентными полями в плазме [1, 2, 4, 7, 8]. В основе механизма снятия метастабильности, предложенного Баранже и Мозером, лежит двухквантовый фотон-плазмонный переход из метастабильного состояния, на важность которого для переходов  $n''S - n'S$  впервые было указано в работе [9]. Последовательное рассмотрение фотон-плазменных процессов с участием квантов как ленгмюровских электронных, так и ионных волн было затем проведено в [8], где обсуждены также возможные астрофизические проявления рассмотренных эффектов (см. также в [3, 10]). Теория одновременного воздействия квазистатических (например, ионно-звуковых) и высокочастотных квазимонохроматических полей в плазме на структуру сателлитов дипольно запрещенных линий изложена в монографии [4]. В [4] развита также адабатическая теория сателлитов, позволяющая выйти за рамки теории возмущений при расчете их интенсивностей.

Особый интерес, имеющий отношение к расчетам населенностей возбужденных состояний, а также интенсивностей запрещенных линий и линий, примыкающих к ним, имеет задача о времени жизни метастабильного состояния в плазме. Впервые она была рассмотрена Парселлом [11] и Ситоном [12], которые на примере водорода в  $2S$ -состоянии в качестве механизма снятия метастабильности рассмотрели неупругий переброс электрона с метастабильного  $2S$  на излучающий  $2P$ -уровень при столкновениях с электронами и ионами плазмы. С логарифмической точностью ими были получены в классическом [11] и борновском [12] приближениях соответствующие сечения неупругого перехода, которые впоследствии были уточнены в [13]. Далее бинарностолкновительный подход получил развитие в работе [14], в которой были выяснены пределы применимости результатов работ [11–13]. В [14] в рамках

двуухровневой модели метастабильного атома с заданным затуханием излучающего уровня был рассмотрен также поляризационный механизм снятия метастабильности при медленных столкновениях с заряженными частицами плазмы, когда столкновения не приводят к неупругому переходу из  $2S$  в  $2P$ , а вызывают лишь поляризационное перемешивание этих состояний, приводящее к появлению дипольного момента на переходе  $2S - 1S$ . Изложенная схема разрушения метастабильности  $2S$ -уровня была затем использована для интерпретации аномального отношения интенсивностей компонент тонкой структуры лаймановской  $L_\alpha$ -линии водородоподобных ионов в плотной плазме [15].

Вместе с тем поляризационное перемешивание метастабильного и излучающего уровней происходит также и при взаимодействии атома с коллективными полями в плазме. В частности, задача о времени жизни метастабильного атомного состояния при взаимодействии с полем высокочастотных ленгмюровских волн была рассмотрена в [8, 16]. При этом в одном случае использовалась вероятность двухквантового излучательного фотон-плазмонного перехода [8], а в другом поле ленгмюровских волн аппроксимировалось суперпозицией монохроматических волновых пакетов со случайными фазами [16]. Ранее аналогичное представление поля ленгмюровских волн успешно использовалось в [17] для нахождения «коллективных» ширин штarkовских подуровней в плазме с развитой ленгмюровской турбулентностью и сильным квазистатическим полем. Отметим, что если в бинарностолкновительной модели гашение метастабильности происходит при взаимодействии с заряженными частицами внутри дебаевской сферы, то вкладу коллективных полей отвечает взаимодействие с частицами вне ее. Таким образом, коллективный механизм и бинарностолкновительный являются в данном случае конкурирующими.

Целью настоящей статьи является исследование проблемы затухания метастабильных состояний в неизотермической плазме. Как известно, в такой плазме существуют слабозатухающие ионные волны [18], причем их частоты распределены в интервале от нуля до  $\Omega_i$ , где  $\Omega_i$  — ленгмюровская ионная частота. Так что поле таких волн, вообще говоря, нельзя представлять в виде суперпозиции монохроматических волновых пакетов, как это имело место для поля электронных волн. Поэтому ниже взаимодействие с плазменными полями в неизотермической плазме будет рассмотрено в наиболее общей форме, которая аналогична введению спектральной плотности флуктуаций напряженности электрического поля в плазме [18]. С единых позиций будут найдены времена жизни метастабильного состояния как для взаимодействия с заряженными частицами внутри дебаевской сферы (которые согласуются с найденными ранее в бинарностолкновительной модели), так и для взаимодействия с частицами вне ее, главный вклад в которое дает поле ионных волн. Будет показано, что коллективные эффекты могут стать основными механизмами разрушения метастабильного состояния даже для случая равновесной плазмы (под равновесной плазмой мы подразумеваем здесь и далее плазму, ионы и электроны которой имеют равновесные максвелловские распределения по скоростям с температурами  $T_e \gg T_i$ ). На основе полученных результатов нами будет также предложена альтернативная интерпретация аномального отношения интенсивностей компонент тонкой структуры линии  $L_\alpha$ , которое наблюдалось в плотной магниевой плазме [15].

Рассмотрим двухуровневый атом с затуханием, находящийся в неизотермической двухкомпонентной плазме. Взаимодействие двухуровневого атома с плазменным микрополем в дипольном приближении описывается следующими уравнениями:

$$ia_0 = V_{01}(t) e^{i\omega t} a_1, \quad ia_1 = -i\gamma a_1 + V_{10}(t) e^{i\omega t} a_0, \quad (1)$$

$$\hbar V_{01} = -(dE)_{01}, \quad E(t) = \sum_j E_j(t),$$

где  $a_0$  и  $a_1$  — амплитуды стационарного (метастабильного) и излучающего состояний,  $\gamma$  — затухание излучающего уровня,  $d$  — дипольный момент атома,  $\omega$  — частота перехода между уровнями 0 и 1,  $E_j$  — напряженность электрического поля, создаваемого  $j$ -й частицей плазмы в точке нахождения атома. Суммирование ведется по всем частицам плазмы.

Будем искать решение системы (1) в приближении теории возмущений по величине взаимодействия  $V_{01}$  для  $a_0$  в виде  $a_0 = e^{-i\Phi(t)}$ , где для фазы  $\Phi(t)$  запишем выражение во втором порядке теории возмущений ( $a_0(0) = 1$ ) [14]:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = i \int_0^t dt' V_{01}(t') \exp [ (i\omega - \gamma) t' ] \times \\ \times \int_0^{t'} dt'' V_{10}(t'') \exp [ (-i\omega + \gamma) t'' ] . \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае время жизни метастабильного состояния  $\tau_0$  находится из условия

$$\langle |a_0(\tau_0)|^2 \rangle = e^{-1}, \text{ т. е. } \langle e^{2i\text{Im } \Phi(\tau_0)} \rangle = e^{-1}, \quad (3)$$

где скобки означают усреднение по фазовому пространству всех частиц плазмы.

В рамках рассматриваемого приближения теории возмущений представляется возможным провести усреднение в показателе экспоненты, оправданность которого будет обсуждена ниже. В этом случае условие (3) перепишется в виде

$$2\langle \text{Im } \Phi(\tau_0) \rangle = -1. \quad (4)$$

Таким образом,  $\tau_0$  определяется из уравнения

$$\begin{aligned} 1 = 2 \text{Re} \int_0^\infty dt' \int_0^{t'} dt'' \exp [ (i\omega - \gamma) (t' - t'') ] \times \\ \times \langle V_{01}(t') V_{10}(t'') \rangle . \end{aligned} \quad (5)$$

Напряженность поля нерелятивистской частицы в плазме можно записать в виде [18], с. 652,

$$E_j = \frac{e_j}{i2\pi^2} \int d^3 k \frac{k}{k^2 \epsilon_l(k, \omega_1)} \exp [ik(r_i - r_j) - i\omega_1 t], \quad (6)$$

где  $\omega_1 = kv_j$ ,  $e$  и  $v$  — заряд и скорость частицы плазмы соответственно,  $r_j$  — ее положение в момент  $t = 0$ ,  $\epsilon_l$  — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы. При этом

$$\begin{aligned} \langle V_{01}(t') V_{10}(t'') \rangle = \sum_{j, l} \left\langle \frac{e_j e_l}{4\pi^4} \int \int d^3 k_1 d^3 k_2 \times \right. \\ \times \frac{(k_1 d_{01})(k_2 d_{01})}{k_1^2 k_2^2 \epsilon_l(k_1, \omega_{1j}) \epsilon_l^*(k_2, \omega_{2l})} \exp \{ ik_1(r - r_j) - \right. \\ \left. \left. - ik_2(r - r_l) - i\omega_{1j} t' + i\omega_{2l} t'' \} \right\rangle , \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega_{1j} = k_1 v_j$ ,  $\omega_{2l} = k_2 v_l$ .

Далее, учитывая, что усреднение по начальным координатам частиц плазмы дает

$$\langle \exp(-ik_1 r_j + ik_2 r_l) \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(k_1 - k_2) \delta_{jl}, \quad (8)$$

и выполняя в (7) интегрирование по  $k_2$  и суммирование по  $l$ , получаем для (5) выражение вида

$$1 = \sum_j \frac{4e_j^2}{\pi V \hbar^2} \operatorname{Re} \int_0^{t_0} dt' \int_0^{t''} dt'' \int \frac{d^3 k}{k^4} |(k d_{01})|^2 \times \\ \times \left\langle \frac{\exp\{(i\omega - \gamma)(t' - t'') - ik v_j(t' - t'')\}}{|\epsilon_i(k, k v_j)|^2} \right\rangle_{v_j}, \quad (9)$$

где скобки теперь означают усреднение по скоростям частиц плазмы.

Учтем далее, что время жизни метастабильного состояния, полученное в рамках теории возмущений, должно быть много больше времени радиационного распада излучающего уровня, т. е. что  $\gamma \tau_0 \gg 1$ .

После этого, интегрируя в (9) по  $t'$  и  $t''$ , получаем приближенное выражение для ширины  $\Gamma = 1/\tau_0$ :

$$\Gamma \simeq \sum_j \frac{4e_j^2}{\pi V \hbar^2} \int d^3 k \frac{|(k d_{01})|^2}{k^4} \left\langle \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - k v_j)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{|\epsilon_i(k, k v_j)|^2} \right\rangle_{v_j}. \quad (10)$$

Выражение (10) можно переписать в следующем виде, проведя дополнительное интегрирование по  $\omega_1$ :

$$\Gamma \simeq \sum_j \frac{4e_j^2}{\pi V \hbar^2} \int d^3 k \frac{|(k d_{01})|^2}{k^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_1)^2} \frac{1}{|\epsilon_i(k, \omega_1)|^2} \langle \delta(\omega_1 - k v_j) \rangle. \quad (11)$$

Для простоты дальнейших вычислений примем, как это было сделано в [14, 15], что скорости частиц плазмы равны **характерным** тепловым скоростям максвелловского распределения ( $v_{Te} = \sqrt{kT_e/m}$  — для электронов,  $v_{Ti} = \sqrt{kT_i/M}$  — для ионов). После этого усреднение  $\delta$ -функции в (11) производится только по углу между векторами  $k$  и  $v_j$ . Оно дает

$$\Gamma \simeq \frac{2n_e e^2}{\pi \hbar^2 v_{Te}} \int d^3 k \frac{|(k d_{01})|^2}{k^5} \int_{-kv_{Te}}^{kv_{Te}} d\omega_1 \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_1)^2} \frac{1}{|\epsilon_i(k, \omega_1)|^2} + \quad (12)$$

$$+ \frac{2n_i e_i^2}{\pi \hbar^2 v_{Ti}} \int d^3 k \frac{|(k d_{01})|^2}{k^5} \int_{-kv_{Ti}}^{kv_{Ti}} d\omega_1 \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_1)^2} \frac{1}{|\epsilon_i(k, \omega_1)|^2},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $e_i = z_i e$  — заряд иона плазмы,  $n_e$  — плотность электронов,  $n_i = n_e/z_i$  — плотность ионов плазмы.

Далее будем проводить рассмотрение только для первого члена в

(12), поскольку второй член идентичен ему при замене индекса  $e$  на  $i$ . Область интегрирования по  $\mathbf{k}$  в (12) можно разделить на две области:  $\int_0^{r_D} d^3 \mathbf{k}$ , где существенны поляризационные эффекты (у нас

$r_D = r_{Di} = \sqrt{KT_i/4\pi n_i e_i^2}$ ), и  $\int_{r_D}^{k_{\max}} d^3 \mathbf{k}$ , где  $\epsilon_l(\mathbf{k}, \omega_1)$  в (12) можно положить равной единице, а  $k_{\max}$  определяется, как и при вычислении интегралов столкновений в кинетической теории уширения спектральных линий, пределом применимости нашего приближения [19]. В частности,  $k_{\max}$  можно определить, когда выполняются условия применимости бинарного приближения теории столкновений, для которого  $k_{\max} \sim 1/\rho_0$ , где

$$\rho_0 = \max \left\{ \rho_{\text{т. в.}} = \sqrt{\frac{ed_{01}}{\hbar\omega}}, \rho_{\text{п}} = \sqrt{\frac{ed_{01}}{KT_e}}, \rho_{\text{в.}} = \frac{\hbar}{mv_{Te}} \right\}$$

при условии  $\rho_0^2 n_e \ll 1$ . Здесь  $\rho_{\text{т. в.}}$  определяется пределом применимости теории возмущений при парных соударениях возмущающей частицы с излучающим атомом,  $\rho_{\text{п}}$  определяется прямолинейностью траекторий налетающих частиц,  $\rho_{\text{в.}}$  — аналог радиуса Вейскопфа в теории уширения, который ограничивает применимость принятого нами усреднения в показателе экспоненты в бинарностолкновительной модели, а  $\hbar/mv_{Te}$  — длина де Броиля. Отметим сразу, что в большинстве реальных случаев  $\rho_{\text{т. в.}}, \rho_{\text{п}} \gg \hbar/mv_{Te}$  и  $\hbar\omega < KT_e$ , поэтому  $\rho_{\text{т. в.}}$  заведомо больше  $\rho_{\text{п}}$  (в случае переходов  $2S-2P$  для водородоподобных ионов это справедливо вплоть до  $kT_e \sim 10^{-6}z^4$  эВ, где  $z$  — спектроскопический символ иона).

Интеграл в (12) по  $\omega_1$  во второй области интегрирования по  $\mathbf{k}$  дает

$$\Gamma \approx \frac{8n_e e^2 |d_{01}|^2}{\pi \hbar^2 v_{Te}} \int_{1/r_D}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \left[ \arctg \left( \frac{\omega + kv_{Te}}{\gamma} \right) - \arctg \left( \frac{\omega - kv_{Te}}{\gamma} \right) \right]. \quad (13)$$

По аналогии с [14] в (13) можно выделить мнимую часть фазы рассеяния  $\varphi_1(\rho)$  при отдельном столкновении, усредненную по направлениям вектора прицельного параметра  $\rho$  и скорости  $v_{Te}$ , введя замену переменной интегрирования  $\rho \rightarrow 1/k$ :

$$\text{Im} \varphi_1(\rho) = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha_e}{\rho v_{Te}} \right)^2 \left[ \arctg \left( \frac{\omega + v_{Te}/\rho}{\gamma} \right) - \arctg \left( \frac{\omega - v_{Te}/\rho}{\gamma} \right) \right], \quad (14)$$

где введено обозначение  $\alpha_e = ed_{01}/\hbar$ .

Введем также обозначения  $x = 2\rho\omega/v_{Te}$  и  $\beta_e = \alpha_e\omega/v_{Te}^2$  (аналог так называемого параметра Месси, разграничитывающего адиабатически медленные ( $\beta_e \gg 1$ ) и быстрые ( $\beta_e \ll 1$ ) столкновения). Выражение (14) перепишется в виде

$$\text{Im} \varphi_1(x) = -8 \frac{\beta_e^2}{x^3} \left\{ \arctg \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( 1 + \frac{2}{x} \right) \right] - \arctg \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( 1 - \frac{2}{x} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

и его асимптотика

$$\text{Im} \varphi_1(x) = -\beta_e^2 \begin{cases} 32/\pi & \gamma/\omega x^3, \quad x \gg 1 \\ 8/x^2, & \quad \quad \quad x \ll 1 \end{cases}. \quad (16)$$

Для случая  $\beta_e \gg 1$  из (16) можно определить радиус Вейскопфа  $\rho_{\text{в.}}$  из условия  $2|\text{Im} \varphi_1(\rho)| \sim 1$ :

$$\rho_{\text{в.}} = \frac{2}{\pi^{1/3}} \beta_e^{2/3} \left( \frac{\gamma}{\omega} \right)^{1/3} \frac{v_{Te}}{\beta_e}, \quad (17)$$

Выражение (13) можно при этом переписать в следующем стандартном виде:

$$\Gamma = n_e v_{Te} \sigma(v_{Te}),$$

$$\sigma(v_{Te}) = 2\pi \int_{\rho_0}^{r_D} [-2 \operatorname{Im} \varphi_1(\rho)] \rho d\rho. \quad (18)$$

Как было показано в [14, 15], основной вклад в  $\Gamma$  при  $(\gamma/\omega)/\beta_e \gg 1$  дают пролеты частиц с  $\rho > \rho_B$  и поэтому усреднение в экспоненте (4) для этого случая оправдано. Из (18), полагая  $\rho_0 = \rho_B$ , получаем

$$\Gamma = 8\pi^{1/3} n_e \frac{\gamma^{2/3} v_{Te}^{1/3} \alpha_e^{4/3}}{\omega^{4/3}}, \quad (19)$$

что отличается от правильного результата [14] слагаемым порядка  $\rho_B^2$ , связанным с пролетами частиц с прицельным параметром  $\rho < \rho_B$ , (в [14] численный коэффициент в  $\Gamma$  равен  $\pi^{5/3}\Gamma(1/3) \simeq 19$ , а в [15] —  $3,6\pi \simeq 11,3$ ).

В противоположном случае быстрых частиц плазмы ( $\beta_e \ll 1$ ) радиус Вейскопфа заведомо много меньше радиуса обрезания по теории возмущений ( $\rho_B \ll \rho_{t,v}$ ). Поэтому обрезание в интеграле (18) производится на  $\rho_0 \sim \rho_{t,v}$  и усреднение в экспоненте (4) оправдано во всей области интегрирования по  $\rho$  в (18). Интегрирование в этом случае дает известный парселловский результат [11] с логарифмической точностью:

$$\Gamma \simeq 4\pi n_e (\alpha_e^2/v_{Te}) \ln(1/\beta_e). \quad (20)$$

Интересно отметить, что в рамках нашего приближения получается также (с точностью до числового множителя  $\sim 2$ ) результат адиабатического приближения из [14], когда теория возмущений, вообще говоря, неприменима. В случае  $\beta_e \gg 1$ ,  $(\gamma/\omega)/\beta_e \ll 1$ , полагая снова  $\rho_0 = \rho_{t,v}$  и учитывая второе неравенство, получаем

$$\Gamma \simeq 16n_e (\alpha_e^{3/2}\gamma/\omega^{3/2}). \quad (21)$$

Вычислим далее вклад в ширину  $\Gamma$  за счет области интегрирования в (12) по  $k$  от нуля до  $1/r_D$ , где существенны поляризационные эффекты. А именно, вычислим вклад области прозрачности для ионных волн в неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ), используя подход работы [20] (см. также в [21], с. 239). При этом заметим, что аналогичный вклад от области прозрачности для ленгмюровских электронных волн в равновесной плазме экспоненциально мал.

Область прозрачности для ионных волн задается следующим образом [21]:

$$kv_{Ti} \ll \omega_i \ll kv_{Te}, \quad (22)$$

поэтому в (12) существен только первый, «электронный» член. В этой области выполняются также следующие соотношения [21]:

$$\frac{1}{|\epsilon_i|^2} \approx \frac{\pi}{|\operatorname{Im} \epsilon_i|} \delta(\operatorname{Re} \epsilon_i), \quad |\operatorname{Im} \epsilon_i| \ll |\operatorname{Re} \epsilon_i|,$$

$$\operatorname{Re} \epsilon_i = 1 - \Omega_i^2/\omega_i^2 + 1/k^2 r_{De}^2, \quad (23)$$

$$\operatorname{Im} \epsilon_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_i}{k^3} \left\{ \frac{\Omega_e^2}{v_{Te}^3} + \frac{\Omega_i^2}{v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega_i^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) \right\},$$

где  $\Omega_i = \sqrt{4\pi n_i e^2/M}$ ,  $\Omega_e = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$  — соответственно частоты ленгмю-

ровских ионных и электронных волн в плазме,  $r_{De} = \sqrt{KT_e/4\pi n_e e^2}$  — де-баевский радиус для электронов плазмы.

Как будет показано ниже, главный вклад от области прозрачности (22) вносит область интегрирования, где  $kr_{De} \gg 1$ , т. е. область ленгмюровских ионных волн. Поэтому членом  $1/k^2 r_{De}^2$  в аргументе  $\delta$ -функции в (23) мы можем пренебречь. После этого интегрирование первого члена в (12) в области прозрачности для ионных волн дает следующий вклад в общую ширину  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_i \approx & \frac{2\sqrt{2\pi} n_e e^2 |d_{01}|^2}{\hbar^2 v_{Te}} \left( \frac{\Omega_i}{\Omega_e} \right)^2 \left( \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \right)^3 \left[ \frac{\gamma \Omega_i}{\gamma^2 + (\omega - \Omega_i)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma \Omega_i}{\gamma^2 + (\omega + \Omega_i)^2} \right] \int_{(v_{Ti}/v_{Te})^2}^1 \frac{\sqrt{y} dy}{1 + \exp(-1/2y + L_1/2)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где введена замена переменной интегрирования  $y = k^2 v_{Ti}^2 / \Omega_i^2 = k^2 r_{De}^2$  и параметр  $L_1 = \ln((z_i^2 M/m)(T_e/T_i)^3) \gg 1$ .

Поскольку интеграл по  $y$  в (24) сходится при малых  $y$ , нижний предел интегрирования можно положить равным нулю. При этом главный вклад в интеграл дает область  $y < 1/L_1$ , поэтому его можно приблизенно вычислить. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_i \approx & \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \alpha_e^2 n_e \left[ \frac{\gamma \Omega_i}{\gamma^2 + (\omega - \Omega_i)^2} + \frac{\gamma \Omega_i}{\gamma^2 + (\omega + \Omega_i)^2} \right] \times \\ & \times \left( \frac{\Omega_i}{\Omega_e} \right)^2 \left( \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \right)^3 \frac{1}{(L_1)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

В существенной для интеграла (24) области  $y \sim 1/L_1$ , поэтому  $kr_{De} \sim (T_e z_i / T_i L_1) \gg 1$ , что при достаточно сильной степени неизотермичности соответствует сделанному ранее предположению. Вдали от резонанса (наиболее реальный случай  $\omega \gg \Omega_i$ ) из (25) имеем

$$\Gamma_i \approx \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} \frac{\alpha_e^2 n_i}{v_{Ti}} \frac{T_e}{T_i} \frac{\gamma}{\omega} \frac{\Omega_i}{\omega} \frac{1}{(L_1)^{3/2}}. \quad (26)$$

Критерием применимости формул (25) и (26) следует считать условие  $\gamma \gg \Gamma_i$ , а также более строгое условие применимости теории возмущений:  $\langle E^2 \rangle^{1/2} d_{01} / \hbar \ll \omega_{01}$ , где  $\langle E^2 \rangle^{1/2}$  — средняя напряженность колективного плазменного поля. Для уровней  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  водородоподобных ионов ( $\omega_{01} = \omega_L = 1,6 \cdot 10^9 z^4 \ln(43/z) \text{ c}^{-1}$  — лэмбовский сдвиг) это условие имеет следующий вид:  $\langle E^2 \rangle^{1/2} \ll 0,4 z^5 \ln(43/z) \text{ В/см}$ . Условие сохранения микроструктуры уровней при взаимодействии с плазменными полями (т. е. когда штарковскими сдвигами можно пренебречь) значительно более слабое. Даже для статических полей оно имеет вид  $E \ll 475 z^5 \text{ В/см}$  [22].

Укажем также, что учет усреднения по скоростям в (11) приводит к появлению в (25), (26) дополнительного множителя  $\gamma/2\pi$ .

Интересно сравнить вклад от ионных волн (26) с бинарностолкновительным в случае, когда  $\beta_e \ll 1$ ,  $(\gamma/\omega)/\beta_i > 1$ , что реализуется, например, для случая магниевой плазмы, полученной лазерным облучением твердотельной мишени [15].

Как указывалось в [15], разрушение метастабильного состояния  $2S$  водородоподобных ионов  $Mg XII$  в такой плазме в бинарностолкновительной модели происходит в основном за счет адиабатически медленных  $(\gamma/\omega)/\beta_i > 1$ ) столкновений с ними бесструктурных ионов плаз-

мы (см. формулу (19)). Такому механизму отвечает поляризационное перемешивание состояний  $2P_{1/2}$  и  $2S_{1/2}$ , что приводит к появлению в спектре запрещенной линии  $2S-1S$ , практически не отличимой в эксперименте от разрешенной линии  $2P_{1/2}-1S$ . Появление этой линии приводит к аномальному увеличению измеряемого отношения интенсивностей компонент тонкой структуры линии  $L_\alpha$  водородоподобных ионов  $\kappa = I(2P_{1/2}-1S) / I(2P_{3/2}-1S)$ .

Однако, как показывает сравнение формул (19) и (26), в неизотермической плазме при соотношении параметров

$$\beta_i^{2/3} \frac{T_e}{T_i} > 3,6 \left( \frac{\gamma}{\omega} \right)^{-1/3} \frac{\omega}{\Omega_i} (L_1)^{3/2} \quad (27)$$

появление линии  $2S-1S$  в основном должно происходить за счет взаимодействия атомной системы с коллективным полем ионных волн. Для случая магниевой плазмы из [15]:  $T_e = 0,8$  кэВ,  $n_i = 10^{20}$  см $^{-3}$ ,  $\gamma = -6,25 \cdot 10^8 z^4 = 1,3 \cdot 10^{13}$  с $^{-1}$ ,  $\omega_L = 1,6 \cdot 10^9 z^4 \ln(43/z) \approx 4,5 \cdot 10^{13}$  с $^{-1}$ , откуда  $(\gamma/\omega)^{-1/3} \sim 1,5$ ,  $\omega/\Omega_i \sim 5$ ,  $\beta_i^{2/3} \approx 34$  при  $T_e/T_i = 100$  и  $\beta_i^{2/3} \approx 56$  при  $T_e/T_i = 200$ ,  $L_1^{3/2} \approx 160$ . Видно, что коллективный вклад для плазмы с указанными параметрами сравнивается с бинарностолкновительным при  $T_e/T_i = 100 \div 200$ .

Условие (27) становится менее жестким при больших плотностях плазмы (особенно вблизи резонанса  $\omega_L \sim \Omega_i$ ), а также для плазм с надтепловым уровнем коллективных полей. Последнее обстоятельство характерно как раз для лазерной плазмы. Поэтому причиной экспериментально наблюдаемой аномальной величины  $\kappa$  может служить также, кроме двух вышеназванных причин — поляризационного механизма при столкновениях и сильной неизотермичности ( $T_e/T_i \sim 10^3$ ) — взаимодействие метастабильной системы с турбулентными полями в плазме. В частности, эффективное взаимодействие метастабильных систем с высокочастотными турбулентными полями в плазме должно приводить к появлению сателлитных структур [4, 5], которые в [15] не наблюдались. К тому же, ленгмюровская частота в плазме [15]  $\Omega_e \sim 0,6 \cdot 10^{15}$  с $^{-1}$  сравнима с величиной тонкого расщепления  $2P$ -уровня иона Mg XII —  $\omega_{t,c} \sim 1,4 \cdot 10^{15}$  с $^{-1}$ , поэтому за счет сдвига частоты линии  $2S-1S$  на величину  $\pm \Omega_e$  дополнительного существенного вклада в интенсивность линии  $2P_{1/2}-1S$  сателлитные линии давать не должны. Указанные обстоятельства свидетельствуют, по-видимому, о неэффективности данного механизма разрушения метастабильности применительно к условиям [15]. Случай взаимодействия с низкочастотными турбулентными полями заслуживает отдельного рассмотрения.

В заключение отметим, что важная роль поляризационных плазменных эффектов в интеграле электрон-электронных столкновений впервые была отмечена в работе [20]. Для атомных процессов в плазме на важность аналогичных эффектов при вычислении интегралов столкновений было указано в [23], где рассмотрена задача об уширении нелинейных спектральных резонансов при взаимодействии ионов через ионные волны. Проведенное выше рассмотрение затухания метастабильных состояний в неизотермической плазме при взаимодействии с полем ионных волн, по сути, аналогично подходам указанных работ [20, 23]. Таким образом, полученные нами результаты свидетельствуют в пользу еще одного возможного проявления поляризационных эффектов в неизотермической плазме.

## ЛИТЕРАТУРА

- Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме. — М.: Мир, 1978.
- Кузнецов В. И., Щеглов Д. А. Методы диагностики высокотемпературной плазмы. — М.: Атомиздат, 1980.
- Ойрингель И. М., Клейман Е. Б. Излучение атомов в космической плазме. — Новосибирск.: Наука, 1984.
- Окс Е. А. Спектроскопия плазмы с квазимохроматическими электроническими плями. — М.: Энергоатомиздат, 1990.

5. Вагангер М., Мозер В. // Phys. Rev. 1961. V. 25. P. 25.
6. Виноградов А. В., Юков Е. А. // Физика плазмы. 1975. Т. 1. № 5. С. 860.
7. Перельман И. Ф., Мосяк А. А. // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 1231.
8. Каллан С. А., Клейман Е. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 2. С. 305.
9. Собельман И. И., Фейнберг Е. Л. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 494.
10. Kleiman E. B., Ojringel I. M. // Sov. Sci. Rev. E. Astrophys Space Phys. 1988. V. 6. P. 547.
11. Purcell E. M. // Astrophys. J. 1952. V. 116. P. 457.
12. Seaton M. J. // Proc. Phys. Soc. 1955. V. A68. P. 457.
13. Гуревич А. И., Дубовик В. М., Сатаров Л. М. // В сб.: Вопросы теории атомных столкновений. — М.: Атомиздат, 1970. С. 83.
14. Коган В. И., Лисица В. С., Селидовкин А. Д. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 152.
15. Бейгман И. Л., Бойко В. А. и др. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 975.
16. Клейман Е. Б., Ойрингель И. М. // Докл. на X Международной конф. по явлениям в ионизованных газах. — Минск, 1981.
17. Окс Е. А., Шолин Г. В. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 974.
18. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. — М.: Наука, 1974. С. 652.
19. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. — М.: Наука, 1980. С. 256.
20. Силин В. П. // Ядерный синтез. 1962. Т. 2. С. 125.
21. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. С. 239.
22. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: Физматгиз, 1960. С. 378.
23. Раутян С. Г., Смирнов Г. И., Шапиро Д. А. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 600.

Восточно-Сибирский филиал  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
18 августа 1989 г.,  
после доработки  
10 мая 1990 г.

## DAMPING OF ATOMIC METASTABLE STATES IN AN EQUILIBRIUM NONISOTHERMAL PLASMA

E. B. Klejman, I. M. Ojringel', E. G. Stupko

The life-time problem for metastable atomic states in a nonisothermal plasma is discussed. A special attention is paid to the interaction of the atomic system with plasma ionic waves. In this case the analytical expression for the width of metastable state is obtained. A comparison of this width with collisional ones shows a region of plasma parameters where plasma polarization effects are most important. Some experimental implications of the results obtained for the case of dense laser plasma are also considered.

УДК 535.211+533.6

## ФАКТОР ТЕПЛОВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ МНОГОЧАСТОТНОГО ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА

*A. H. Кучеров, Н. К. Макашев, Е. В. Устинов*

Исследован эффект теплового самовоздействия оптического многочастотного пучка в поперечном потоке слабопоглощающего газа в рамках геометрической и параксиальной волновой оптики. С помощью линеаризованного решения, полученного в пределе геометрической оптики, выявлен фактор теплового самовоздействия (функция от протяженности трассы и параметров подобия), который определяет основные характеристики исследуемого эффекта в случае коллимированного и сфокусированых пучков. Доказательство проведено с помощью численных расчетов в рамках параксиальной волновой оптики для стационарных дозвукового и сверхзвукового газодинамических режимов самовоздействия.

Нелинейный эффект самопреломления пучка вследствие поглощения средой его энергии (тепловое самовоздействие) достаточно хорошо исследован для монохроматических пучков [1, 2]. Однако существуют генераторы оптического излучения, спектр которого содержит целый набор длин волн ( $\lambda_\omega \approx \lambda$ ,  $\omega = 1, \dots, \Omega$ ), укладывающихся в относительно узкий диапазон [3–5]. В таких пучках дифракционные эффекты будут одинаковы для различных частот, но вследствие сильного различия коэффициентов поглощения  $\alpha_\omega$  [6] эффекты самовоздействия и ослабления требуют специального изучения.

Рассмотрим распространение многочастотного пучка вдоль оси  $z$  в перпендикулярном потоке слабопоглощающего газа, невозмущенная скорость которого  $V_0$  направлена вдоль оси  $x$ . В предположении, что длина волны  $\lambda$  гораздо меньше характерного поперечного размера пучка  $R$ , а характерная длина трассы  $L$  гораздо больше величины  $R$ , можно записать для комплексной функции поля  $u_\omega$  частоты  $\omega$  известное уравнение параксиальной оптики:

$$\begin{aligned} & 2iF \frac{\partial u_\omega}{\partial z} + \nabla_1^2 u_\omega + [2F^2 N \rho_1(x, y, z; M, G_\omega) - \\ & - iN_{\alpha\omega} F] u_\omega = O \left[ \frac{R^2}{L^2} \left( 1 + [N + \frac{N}{F}] \right) \right], \quad \omega = 1, \dots, \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

В правой части указаны порядки опущенных членов. Здесь координаты  $x$ ,  $y$  отнесены к  $R$ , координата  $z$  — к  $L$ , функция поля  $u_\omega$  — к амplitude  $A_{0\omega}$  ( $A_{0\omega}^2$  — максимальное значение интенсивности излучения частоты  $\omega$  в начальном сечении),  $F = 2\pi R^2 / (\lambda L)$  — число Френеля (можно считать приблизительно одинаковым для всех частот);  $N_{\alpha\omega} = \alpha_\omega L$  — параметр поглощения (существенно изменяется при малых изменениях частоты);  $N = (L/L_t)^2$  — параметр самовоздействия,  $L_t = R/\gamma\varepsilon(n_0 - 1)/n_0$  — длина теплового самовоздействия;  $\varepsilon \ll 1$  — масштаб возмущения газодинамических величин,  $\rho_1 = (\rho - \rho_0) / (\varepsilon\rho_0)$  — безразмерная функция возмущения плотности газа,  $\rho_0$  — плотность невозмущенного газа,  $n_0$  — показатель преломления (можно считать не зависящим от частоты [7]). Функция поля  $u_\omega$  должна удовлетворять начальному и краевым условиям

$$u_\omega|_{z=0} = u_{0\omega}(x, y), \quad u_\omega|_{x, y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Функция плотности  $\rho_1$  для стационарного дозвукового режима [8, 9] описывается следующим уравнением с краевыми условиями [10–12]:

$$\left[ (1 - M^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = - \sum_{\omega=1}^{\Omega} G_{\omega} \nabla_{\perp}^2 (u_{\omega} u_{\omega}^*) ,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{x,y \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0, \quad \rho_1 \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad M < 1,$$

$$(3)$$

$$M = \frac{V_0}{a}, \quad G_{\omega} = \frac{\alpha_{\omega} A_{0\omega}^2}{\alpha_* A_*^2}, \quad \alpha_* A_*^2 = \max_{\omega} \{ \alpha_{\omega} A_{0\omega}^2 \} .$$

Здесь  $M$  — число Маха,  $a$  — скорость звука в невозмущенном газе,  $G_{\omega}$  — относительный вклад в тепловыделение различных частот излучения. Максимальное тепловыделение  $\alpha_* A_*^2$  на частоте  $\omega_*$  использовали для получения масштаба газодинамических величин  $\varepsilon = (x-1) \alpha_* A_*^2 R / (\kappa p_0 V_0)$ , где  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $p_0$  — давление в невозмущенном газе. Заметим, что функция возмущения плотности  $\rho_1$  одинакова для всех частот, так как обусловлена суммарной поглощенной энергией пучка  $q = \sum_{\omega} G_{\omega} u_{\omega} u_{\omega}^*$ .

Для стационарного сверхзвукового газодинамического режима функция  $\rho_1$  описывается соотношением

$$\rho_1 = \sum_{\omega=1}^{\Omega} G_{\omega} \int_{-\infty}^x \left\{ -I_{\omega}(x', y, z) + \frac{M^2}{2\beta^2} \left[ I_{\omega}\left(x', y - \frac{x-x'}{\beta}, z\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + I_{\omega}\left(x', y + \frac{x-x'}{\beta}, z\right) \right] \right\} dx' ,$$

$$\beta^2 = M^2 - 1, \quad M > 1, \quad I_{\omega} = u_{\omega} u_{\omega}^*. \quad (4)$$

Таким образом, задача теплового самовоздействия сводится к совместному решению  $\Omega$  уравнений оптики (1) и одного уравнения газодинамики (3) или (4) (в общем нестационарном случае — системы линеаризованных уравнений газодинамики [13]). Безразмерные параметры (подобия) задачи: число Френеля  $F$ , число Маха  $M$ , параметр самовоздействия  $N$ , параметры поглощения  $N_{\alpha\omega}$  ( $\Omega$  штук) и параметры  $G_{\omega}$  относительного вклада в тепловыделение той или иной частоты (всего  $\Omega-1$  штук, так как  $G_* \equiv 1$ ). Вместо параметров  $N$ ,  $G_{\omega}$  можно использовать  $\Omega$  параметров  $N_{\omega} = G_{\omega} N$ .

Докажем одно очень важное для процесса построения решения утверждение. Если все начальные распределения функций  $u_{\omega}$  подобны (т. е.  $u_{\omega} = u_{\omega}(x, y)$  не зависят от частоты, от частоты зависит только амплитуда  $A_{0\omega}$ ) и известно решение для одной какой-либо частоты (допустим, для  $\omega = \omega_*$ ), тогда для всех других частот функцию поля можно найти простым пересчетом  $u_{\omega} = u_{\omega_*} \exp[(N_{\alpha_*} - N_{\alpha\omega})z/2]$ . Действительно, подстановка этого выражения в уравнения (1), (3) или (4) дает замкнутую задачу для единственной частоты  $\omega_*$ , так как функция тепловыделения принимает вид  $q = u_{\omega_*} u_{\omega_*}^* \sum_{\omega=1}^{\Omega} G_{\omega} \exp[(N_{\alpha_*} - N_{\alpha\omega})^2]$ .

Задача свелась к хорошо известному случаю самовоздействия монохроматического пучка [1, 2, 8–13].

Однако далеко не всегда начальные распределения для различных частот излучения являются подобными.

Для одночастотного случая очень полезными оказались приближенные решения в пределе геометрической оптики  $F \rightarrow \infty$  [14, 8, 9, 11]. Рассмотрим такой предел в случае многочастотного пучка, причем особое внимание уделим двухчастотному пучку с сильно ( $N_{\alpha_1} \gg 1$ ) и слабо ( $N_{\alpha_2} \ll 1$ ) поглощаемыми в газе компонентами. Делая замену  $u_{\omega} = A_{\omega} \exp(-iF_{\Phi_{\omega}})$  (где  $A_{\omega}$  — амплитуда,  $\Phi_{\omega}$  — фаза), из уравнения (1) для интенсивности  $I_{\omega} = A_{\omega}^2$  и угла отклонения  $\theta_{\omega} = \nabla_{\perp} \Phi_{\omega}$  получим следующую систему уравнений (вместе с начальными и краевыми условиями из (2)):

$$\frac{1}{I_{\omega}} \frac{\partial I_{\omega}}{\partial z} + \left( \frac{\nabla_{\perp} I_{\omega}}{I_{\omega}}, \theta_{\omega} \right) + (\nabla_{\perp}, \theta_{\omega}) = -N_{\alpha_{\omega}}; \quad (5)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\theta_{\omega}, \nabla_{\perp}) \right] \theta_{\omega} = N \nabla_{\perp} \rho_1(x, y, z; M, G_{\omega}); \quad (6)$$

$$I_{\omega}|_{z=0} = I_{0\omega}(x, y), \quad \theta_{\omega}|_{z=0} = \theta_{0\omega}(x, y); \quad (7)$$

$$\theta_{\omega}, I_{\omega}|_{x, y \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Систему (5), (6) можно получить также из общих уравнений Максвелла [15–17] с помощью подстановки для вектора электрического поля  $E = A \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_0 L S \right) \right]$  (где  $A$  — амплитуда,  $S = z + (R^2/L^2)\psi$  — фаза). Промежуточным результатом являются известные уравнения эйконала и сохранения энергии, которые, вводя лучевой вектор  $\eta = \nabla S = i_z + (R/L)\theta$ , можно привести к виду (5), (6).

При слабом самовоздействии ( $N \ll 1$ ) можно получить приближенные выражения для угла отклонения  $\theta_{\omega}$  и интенсивности  $I_{\omega}$  пучка.

А) Для коллимированного пучка ( $\theta_{\omega}|_{z=0} = 0$ ) [14]  
 $N \ll 1$ :

$$\rho_1(x, y, z; M, G_{\omega}) \simeq \sum_{\omega} G_{\omega} D_{\omega}(x, y) \exp(-N_{\alpha_{\omega}} z); \quad (9)$$

$$D_{\omega}(x, y) = \begin{cases} - \int_{-\infty}^x I_{0\omega}(x', y) dx', & M \ll 1, \\ \int_{-\infty}^x \left\{ -I_{0\omega}(x', y) + \frac{M^2}{2\beta^2} \left[ I_{0\omega}\left(x', y - \frac{x-x'}{\beta}\right) + I_{0\omega}\left(x', y + \frac{x-x'}{\beta}\right) \right] \right\} dx', & M > 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1};$$

$$\theta_{\omega} \equiv \theta(x, y, z) = N \sum_{\omega} (G_{\omega}/N_{\alpha_{\omega}}) [1 - \exp(-N_{\alpha_{\omega}} z)] \nabla_{\perp} D_{\omega}(x, y); \quad (11)$$

$$I_{\omega}(x, y, z) = I_{0\omega}(x, y) \exp \left\{ -N_{\alpha_{\omega}} z - N \sum_{\nu} \frac{G_{\nu}}{N_{\alpha_{\nu}}^2} (z N_{\alpha_{\nu}} - 1 + \exp(-N_{\alpha_{\nu}} z)) \times \right. \\ \left. \times \left[ \nabla_{\perp}^2 D_{\nu}(x, y) + \left( \frac{\nabla_{\perp} I_{0\omega}(x, y)}{I_{0\omega}(x, y)}, \nabla_{\perp} D_{\nu}(x, y) \right) \right] \right\}. \quad (12)$$

Здесь в (9) и (10) использованы известные решения для конвективного и сверхзвукового режимов, которые в условиях первоначально гауссова распределения интенсивности ( $I_{0\omega} = \exp(-x^2 - y^2)$ ) позволяют выписать следующие относительно простые решения [14, 9]

$N \ll 1$

$$I_\omega(x, y, z) = \exp(-x^2 - y^2 - N_{\alpha_1} z) \exp \left\{ -N f(x, y) \times \right. \\ \left. \times \sum_v \frac{G_v}{N_{\alpha_v}^2} [z N_{\alpha_v} - 1 + \exp(-N_{\alpha_v} z)] \right\}, \quad (13)$$

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \quad \xi = x - \beta y, \quad \eta = x + \beta y,$$

$$h(x)^{\text{опр}} = \int_{-\infty}^x \exp(-x'^2) dx' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + \operatorname{erf}(x)];$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2[2x \exp(-x^2 - y^2) + (1 - 4y^2) \exp(-y^2) h(x)], & M \ll 1, \\ 2 \left[ (1 - 4y^2) \exp(-y^2) h(x) + \left( \frac{2\eta^2}{\beta M} - \frac{M}{2\beta} \right) \exp \left[ -\left( \frac{\eta}{M} \right)^2 \right] h \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{x\beta - y}{M} \right) + \left( \frac{2\xi^2}{\beta M} - \frac{M}{2\beta} \right) \exp \left[ -\left( \frac{\xi}{M} \right)^2 \right] h \left( \frac{x\beta + y}{M} \right) \right], & M > 1. \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим двухчастотный случай. Пусть  $N_{\alpha_1}$  велико, а  $N_{\alpha_2}$  мало по сравнению с единицей. Тогда решение для суммарной интенсивности можно записать в виде

$$I_{\text{физ}} \simeq \exp(-x^2 - y^2) [A_{01}^2 \exp(-N_{\alpha_1} z) + A_{02}^2] \exp \left\{ -f(x, y) \times \right. \\ \left. \times \left[ 2 \frac{N_1}{N_{\alpha_1}} + N_2 \frac{z^2}{2} + \dots \right] \right\}, \quad (15)$$

$$N_\omega = \frac{L^2}{R^2} \frac{(x-1)\alpha_\omega A_{0\omega}^2 R}{xp_0 V_0} \frac{n_0 - 1}{n_0}, \quad \omega = 1, 2.$$

Возможны два предельных варианта, когда преобладает либо первое, либо второе слагаемое в квадратных скобках показателя экспоненты. Интерес представляет случай, когда  $N_1/N_{\alpha_1} \gg N_{\alpha_2}$  или  $A_{01}^2/A_{02}^2 \gg N_{\alpha_2}$  (в другом предельном варианте будем иметь самовоздействие одночастотного пучка с частотой  $\omega_2$ ). Как следует из решения (15), параметром самовоздействия и характерной длиной теплового самовоздействия при этом будут следующие величины:

$$\hat{N} = \frac{N_1}{N_{\alpha_1}} \equiv \frac{L}{R} \frac{(x-1)A_{01}^2(n_0 - 1)}{xp_0 V_0 n_0}, \\ z_T = \frac{R}{A_{01}^2} \frac{n_0}{n_0 - 1} \left( \frac{xp_0 V_0}{x-1} \right). \quad (16)$$

Коэффициент поглощения  $\alpha_1$  не входит в эти величины, хотя самовоздействие обусловлено поглощением энергии пучка. Другая интересная особенность этого варианта заключается в том, что параметр теплового самовоздействия пропорционален первой степени отношения характерной длины трассы к длине теплового самовоздействия, а не квадрату этого отношения, как это было в случае одночастотного из-

лучения (см. второе слагаемое в показателе экспоненты в формуле (15)).

Б) Для сфокусированного на расстояние  $z_f$  пучка  $\left(\theta|_{z=0} = -\frac{r}{z_f}\right)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $I_\omega|_{z=0} = I_{0\omega}(r^2)$  в отсутствие теплового самовоздействия выражения для угла отклонения и интенсивности пучка можно записать следующим образом:

$$\theta^0(x, y, z) = -\frac{r}{z_f - z}, \quad I_\omega^0(x, y, z) = \frac{\exp(-N_{\alpha_\omega} z)}{(1-z/z_f)^2} I_{0\omega}\left(\frac{r^2}{(1-z/z_f)^2}\right). \quad (17)$$

При получении главных членов возмущенных величин в условиях теплового самовоздействия удобно использовать преобразование координат Таланова [18, 10]:  $\tilde{x} = x/(1-z/z_f)$ ,  $\tilde{y} = y/(1-z/z_f)$ ,  $\tilde{z} = z$ . В этих переменных решение имеет вид

$N \ll 1$ :

$$\theta(x, y, z) = \theta^0 + Nz_f/(1-z/z_f) \sum_\omega G_\omega B_{1\omega}(z) \nabla_\perp D_\omega(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (18)$$

$$B_{1\omega}(z) \text{ опр. } \int_0^z \frac{\exp(-N_{\alpha_\omega} z')}{(z_f - z')} dz' = \exp(-N_{\alpha_\omega} z_f) \times$$

$$\times \{E_i(N_{\alpha_\omega} z_f) - E_i(N_{\alpha_\omega}(z_f - z))\};$$

$$I_\omega(x, y, z) = I_\omega^0(x, y, z) \exp\left\{-Nz_f^2 \sum_\omega G_\omega B_{2\omega}(z) \times\right.$$

$$\left. \times \left[ \nabla_\perp^2 D_\omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \left( \frac{\nabla_\perp I_{0\omega}(\tilde{x}, \tilde{y})}{I_{0\omega}(\tilde{x}, \tilde{y})}, \frac{\nabla_\perp D_\omega(\tilde{x}, \tilde{y})}{I_{0\omega}(\tilde{x}, \tilde{y})} \right) \right] \right\},$$

(19)

$$B_{2\omega}(z) \text{ опр. } \int_0^z \frac{B_{1\omega}(z')}{(z_f - z')^2} dz' = B_{1\omega}(z) \left[ \frac{1}{z_f - z} - N_{\alpha_\omega} \right] +$$

$$+ \frac{1}{z_f} - \frac{\exp(-N_{\alpha_\omega} z)}{z_f - z}.$$

Здесь  $E_i(t) = \text{в. п. } \int_{-\infty}^t (e^{t''}/t'') dt''$  — интегральная показательная функция [19]. В случае первоначально гауссова распределения можно получить конкретный вид решения. Например, для конвективного и сверхзвукового стационарных газодинамических режимов будем иметь

$N \ll 1$ :

$$\theta(x, y, z) = -\frac{r}{z_f - z} + \frac{Nz_f}{1-z/z_f} \sum_\omega G_\omega B_{1\omega}(z) [i_x \varphi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + i_y \varphi_2(\tilde{x}, \tilde{y})],$$

$\varphi_1 =$

$$= \begin{cases} -\exp(-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2), & M \ll 1, \\ \frac{\exp(-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)}{\beta^3} + \frac{M^2}{\beta^3} \int_{-\infty}^x \exp(-x'^2) \left[ \left( \tilde{y} - \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right) \exp \left[ -\left( \tilde{y} - \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \left( \tilde{y} + \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right) \exp \left[ -\left( \tilde{y} + \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right)^2 \right] \right] dx', & M > 1, \end{cases} \quad (20)$$

$\varphi_2 =$

$$= \begin{cases} 2\tilde{y}\exp(-\tilde{y}^2)h(x), & M \ll 1 \\ 2\tilde{y}\exp(-\tilde{y}^2)h(x) - \frac{M^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^x \exp(-x'^2) \left[ \left( \tilde{y} - \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ -\left( \tilde{y} - \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right)^2 \right] + \left( \tilde{y} + \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right) \exp \left[ -\left( \tilde{y} + \frac{\tilde{x} - x'}{\beta} \right)^2 \right] \right] dx', & M > 1 \end{cases}$$

$$I_\omega(x, y, z) = \exp \left[ -N_{\alpha_\omega} z - \frac{r^2}{(1-z/z_f)^2} \right] \left( 1 - \frac{z}{z_f} \right)^{-2} \times \quad (21)$$

$$\times \exp \left\{ -N z_f^2 \sum B_{2\omega}(z) G_\nu f(\tilde{x}, \tilde{y}) \right\}.$$

Предположим, что пучок излучения содержит только две частоты, одна из которых хорошо поглощается газом ( $N_{\alpha_1} \gg 1$ ), другая — практически не поглощается ( $N_{\alpha_2} \ll 1$ ). Используя асимптотические соотношения для функции  $B_{2\omega}(z)$ , найдем

$$I_\omega(x, y, z) = \gamma^2 \exp [(-N_{\alpha_\omega} z) - (\gamma r)^2] \exp \left\{ -f(\tilde{x}, \tilde{y}) \times \right. \\ \left. \times \left[ \hat{N} z \gamma + N_2 z^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma - 1)^2} [\gamma (\ln \gamma - 1) + 1] + \dots \right] \right\}, \quad (22)$$

где  $\gamma = 1/(1-z/z_f)$  — «степень фокусировки». По сравнению с коллинированным пучком фокусировка приводит к увеличению показателя в экспоненте, описывающей самовоздействие, для хорошо поглощаемой частоты в  $\gamma$  раз, для плохо поглощаемой — в  $\frac{2\gamma^2}{(\gamma - 1)^2} [\gamma (\ln \gamma - 1) + 1]$  раз.

Как и в случае коллинированного пучка, возможны два предельных варианта: в первом ( $\hat{N} \gg N_2$  или  $A_{01}^2/A_{02}^2 \gg N_{\alpha_2}$ ) основной вклад в самовоздействие дает сильно поглощаемое излучение с частотой  $\omega_1$ , хотя при этом его доля в суммарной мощности пучка может быть и незначительной ( $A_{10}^2$  может быть меньше по порядку величины  $A_{02}^2$ ); во втором ( $\hat{N} \ll N_2$  или  $A_{01}^2 \ll A_{02}^2 N_{\alpha_2}$ ) имеем фактическое самовоздействие слабо поглощаемого одночастотного пучка с частотой  $\omega_2$ .

Из структуры решений (19), (21) следует, что функция  $B(z) = N \sum_\omega G_\omega B_{2\omega}(z) z_f^2$  (которая при  $z_f \rightarrow \infty$  переходит в соответствующее выражение  $N \sum_\omega G_\omega [z N_{\alpha_\omega} - 1 + \exp(-N_{\alpha_\omega} z)] / N_{\alpha_\omega}^2$  из формул (12), (13) для коллинированного пучка), является определяющим фактором

теплового самовоздействия в фиксированном сечении  $z=\text{const}$ . Она задает амплитуду (или масштаб) возмущения интенсивности, а функция  $f(x, y)$  дает картину изофот. Для самовоздействия одночастотного пучка этот факт отмечен в обзоре [11]\*.

Вышесказанное наводит на мысль, что и для строгого численного решения уравнений волновой оптики (1) при достаточно больших, но конечных числах Френеля функция  $B(z)$  может определять некоторые интегральные характеристики теплового самовоздействия. В справедливости этого предположения убеждают данные расчетов, выполненных для двухчастотного пучка с первоначально гауссовым распределением интенсивности излучения. На рис. 1 (см. на вклейке) приведены зависимости от параметра  $B(1)$  следующих величин: смещения центра тяжести пучка  $\Delta x_{\text{ц.т.}}/R_f = \frac{\bar{R}}{2W} \int_{-\infty}^{+\infty} \int I(x, y, 1) x dx dy$

$$\left( \text{где } 2W = \int_{-\infty}^{+\infty} \int I(x, y, 1) dx dy \right)$$

— суммарная мощность невозмущенного пучка и мощности  $W' = \iint_{x^2+y^2 < \ln 2 \cdot \bar{R}^2} I(x, y, 1) dx dy$ , приходящейся на область, включающую

половину мощности невозмущенного пучка. Эта область есть круг радиуса  $\sqrt{\ln 2 / \bar{R}}$ , где  $R = R/R_f$  есть обратная величина от безразмерного экспоненциального радиуса  $R_f/R = \sqrt{(1 - 1/z_f)^2 + 1/F^2}$ , сфокусированного на расстояние  $z_f$  невозмущенного пучка, взятого в конце трассы при  $z=1$ . Приведены результаты для вариантов: 1 — коллимированный пучок,  $\bar{R}=0,98$ ; 2 — сфокусированный вдвое (невозмущенный) пучок,  $R=2$ ,  $z_f=1,84$ ; 3 — сфокусированный в пять раз пучок,  $R=5$ ,  $z_f=1$ . Число Френеля  $F=5$ ; число Маха  $M=0,7$  (сплошные и штрих-пунктирные кривые) и  $M=2$  (штриховые); параметры поглощения  $N_{\alpha_1}=7$  и  $N_{\alpha_2}=0,05$ ; параметры самовоздействия  $N_1=4,42$ ,  $N_2=0,168$  ( $G_2=0,0375$ ). Для сверхзвукового режима значения смещения  $\Delta x_{\text{ц.т.}}/R$  составляют менее 0,1 (на рисунке не приведены). Для дозвукового режима значительное уменьшение величины  $W'$  с ростом фактора теплового самовоздействия  $B(1)$  вызвано, в первую очередь, смещением пучка как целого навстречу потоку газа. Построенные дополнительно на рис. 1 зависимости для мощности  $W'' = \iint_{(x-x_{\text{ц.т.}})^2+y^2 < \ln 2 \cdot R^2} I(x, y, 1) dx dy$

(штрихпунктирные кривые), приходящейся на область, охватывающую половину мощности невозмущенного пучка, номещенную в точку центра тяжести возмущенного пучка, показывают уменьшение мощности только за счет теплового самовоздействия. Таким образом, на дозвуковом режиме поворотом пучка на угол  $\Delta x_{\text{ц.т.}}/L$  можно добиться увеличения интегральной энергетической характеристики  $W'$  приблизительно вдвое.

Бесспорный факт, что все семейства кривых 1, 2, 3 на рис. 1 ведут себя подобным образом, что кривые 1, 2, 3 отличаются друг от друга незначительно как для величин  $W'$ ,  $W''$ , так и для смещения  $\Delta x_{\text{ц.т.}}$ , как для сверхзвукового, так и для дозвукового режимов, подтверждает справедливость предположения о том, что фактор  $B(z)$  является определяющим в общем случае волновой оптики ( $F \sim 1$ ) и сильного теплового самовоздействия ( $N \sim 1$ ), хотя в явном виде был получен в пределе геометрической оптики ( $F \rightarrow \infty$ ) для слабого самовоздействия ( $N \rightarrow 0$ ).

\* В упомянутой работе для сфокусированного пучка приводится ошибочное выражение, описывающее фактор теплового самовоздействия  $B(z)$  (см. [11], пункт II.Е, параметр  $N_f$ ). Анализ показывает, что при линеаризации уравнения (6) для угла  $\theta_\omega$  был опущен порядковый член.

Значения фактора теплового самовоздействия  $B(1) = N \sum_{\omega=1}^{\infty} G_{\omega} B_{2\omega}(1) z_f^2$   
 при различной степени фокусировки  $\bar{R} = \frac{R}{R_f} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{z_f}\right)^2 + \frac{1}{F^2}}$   
 в зависимости от весовой доли хорошо поглощаемой компоненты излучения  
 $g_{01} = A_{01}^2 / (A_{01}^2 + A_{02}^2)$

$\bar{R}$	$g_{01}$					
	0	0,04	0,08	0,16	0,32	0,5
0,98 (коллимир.)	0,098	0,232	0,365	0,631	1,164	1,763
2	0,303	0,604	0,905	1,507	2,711	4,065
5	1,233	2,04	2,85	4,46	7,69	11,32

Были выполнены также расчеты для различных значений параметров подобия (например,  $N_{\alpha_1}=0,1$ ;  $N_{\alpha_2}=5$  и  $N_{\alpha_1}=0,161$ ;  $N_{\alpha_2}=3,45$ ), выбранных таким образом, чтобы фактор  $B(1)$  при этом оставался неизменным и равным, к примеру, одному из значений, приведенных в табл. 1. И в этом случае отличия величин  $\Delta x_{\text{дт}}$  практически отсутствовали, а для величин  $W'$ ,  $W''$  отличия составляли всего несколько процентов. Таким образом, фактор  $B(z)$  действительно является определяющим для интегральных характеристик теплового самовоздействия многочастотного пучка.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Зуев В. Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере. — М.: Радио и связь, 1981.
- Распространение лазерного пучка в атмосфере / Под ред. Д. Стробена. — М.: Мир, 1981.
- Манн М. М. // Ракетная техника и космонавтика. 1976. Т. 14. № 5. С. 8.
- Емануэль Г., Соен Н., Jacobs T. A. // J. Quantitative Spectroscopy Radiative Trans 1973. V. 13. P. 1365.
- Басов Н. Г., Казакевич В. С., Ковш И. Б. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 4. С. 763.
- Справочник по лазерам / Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. Т. 1.
- Таблицы физических величин / Под ред. И. К. Киконна. — М.: Атомиздат, 1976.
- Коган М. Н., Кучеров А. Н. // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 3. С. 575.
- Коган М. Н., Кучеров А. Н. // Изв. вузов. Физика. 1983. № 2. С. 104.
- Fleck J. A., Morris J. R., Feit M. D. // Appl. Phys. 1976. V. 10. № 2. P. 129.
- Smith D. C. // Proc. IEEE. 1977. V. 65. № 12. P. 1679. (Смит Д. // ТИИЭР. 1977. Т. 65. № 12. С. 59).
- Кучеров А. Н., Устинов Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 3. С. 299.
- Воробьев В. В., Коган М. Н. и др. // Опт. атмосферы. 1989. Т. 2. № 2. С. 164.
- Gebhardt F. G., Smith D. C. // IEEE J. Quantum Electronics. 1971. V. QE-7. № 2. P. 63.
- Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
- Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1971.
- Луговой В. Н., Прохоров А. М. // УФН. 1973. Т. 111. Вып. 2. С. 203.
- Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. Вып. 6. С. 303.
- Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. — М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию  
8 сентября 1989 г.

УДК 539.219.3:621.382

## ДИФФУЗИЯ ЧЕРЕЗ РЕЗКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ.

## I. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

A. N. Малахов

Рассмотрен процесс нестационарной одномерной диффузии через потенциальные барьеры, имеющие вид последовательности резких ступенек произвольной величины и знака. Получено точное решение и показано, что процесс нестационарной диффузии описывается многократной суперпозицией гауссовых плотностей вероятности. Приведен ряд примеров и дана физическая интерпретация полученных результатов.

Проблема анализа нестационарного процесса диффузии через потенциальные барьеры возникает в большом числе разнообразных физических ситуаций. Прежде всего, это касается диффузии вещества из одной среды в другую, когда диффундирующими частицам приходится преодолевать энергетический барьер, возникающий на границе раздела двух сред (см., например, [1, 2]). С этой ситуацией сталкиваются также при рассмотрении химических реакций, когда именно темп диффузии взаимодействующих частиц через потенциальные барьеры определяет скорость химических реакций (см., например, [3]). Наконец, процессу диффузии может подвергаться величина, вообще не связанная с веществом, — например фаза колебания. Так в системах автоматического регулирования явление срыва слежения связано с переходом диффундирующей фазой потенциального барьера (см., например, [4]).

Проблема диффузии через потенциальные барьеры рассматривалась, по-видимому, впервые в работе Крамерса [5], и похоже, что эта работа, изложенная также в монографии Чандрасекара [6] — единственный первоисточник. В приближении квазистационарности Крамерс определил отнесенную к единице времени вероятность преодоления диффундирующей частицей достаточно высокого и гладкого потенциального барьера.

Отметим, что вследствие математических трудностей и на сегодняшний день отсутствуют точные характеристики процесса диффузии через потенциальный барьер произвольной формы.

В настоящей работе получены точные решения для процесса диффузии через потенциальные барьеры, имеющие вид резких ступенек. Рассмотрен ряд примеров и дана физическая интерпретация полученных результатов.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

1. Рассмотрим процесс одномерной диффузии в поле сил с потенциалом  $U(x)$  как броуновское движение диффундирующей частицы. Координата броуновской частицы  $x(t)$  является случайным марковским процессом, описываемым стохастическим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{dU(x)}{dx} + \xi(t), \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  — стационарный гауссов, дельта-коррелированный процесс (белый шум) с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = D\delta(\tau)$ . Коэффициент  $D$  пропорционален энергетической

температура диффундирующих частиц,  $\delta(x)$  — дельта-функция, определенная как производная от единичной функции  $\mathbf{1}(x)$ , равной нулю для  $x < 0$  и единице для  $x > 0$ .

Как известно (см., например, [7]), уравнению (1) соответствует кинетическое уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП) для плотности вероятности  $W(x, t)$  координаты броуновской частицы

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{dU(x)}{dx} W(x, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

При начальном условии  $W(x, 0) = \delta(x)$  плотность вероятности  $W(x, t)$  совпадает с плотностью вероятности переходов  $W(0, 0|x, t)$  броуновской частицы из точки  $x=0$  в момент  $t=0$  в точку  $x$  к произвольному моменту  $t$ . Границные условия имеют вид

$$W(-\infty, t) = W(+\infty, t) = 0.$$

Упомянутая выше математическая трудность связана с тем, что для произвольной потенциальной функции  $U(x)$  нестационарное решение уравнения диффузии (2) неизвестно.

2. Рассмотрим потенциальный профиль, изображенный на рис. 1а (см. на вклейке).  $N$  — скачков потенциала как слева  $\bar{U}_k$ , так и справа  $\bar{U}_k$  от точки  $x=0$ , где сосредоточена начальная плотность вероятности, могут иметь любую величину и любой знак. Для такого профиля уравнение ЭФП принимает вид

$$B \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ F(x) W(x, t) \right] + \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Здесь

$$F(x) = \sum_{k=1}^N \beta_k \delta(x - l_k) - \sum_{k=1}^N \bar{\beta}_k \delta(x + \bar{l}_k), \quad B = 2/D,$$

$\beta_k = \frac{2U_k}{D}$ ,  $\bar{\beta}_k = \frac{2\bar{U}_k}{D}$  — безразмерные высоты скачков потенциалов.

Перейдем от плотности вероятности  $W(x, t)$  к ее изображению по Лапласу:

$$Y(x) = Y(x, p) = \int_0^\infty W(x, t) e^{-pt} dt.$$

При принятом начальном условии  $W(x, 0) = \delta(x)$  функция  $Y(x)$  подчиняется дифференциальному уравнению в обыкновенных производных:

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx} [F(x) Y(x)] - \gamma^2 Y(x) = -B\delta(x), \quad (4)$$

где обозначено  $\gamma^2 = 2p/D = Bp$ .

Перенося слагаемое с  $F(x)$  в правую часть (4) и используя функцию Грина уравнения  $Y'' - \gamma^2 Y = 0$ , равную  $\gamma^{-1} \operatorname{Sh} \gamma(x-u)$ , можно от (4) перейти к интегральному уравнению для  $Y(x)$ :

$$Y(x) = Y_0(x) - \frac{1}{\gamma} \int_0^x \frac{d}{du} [F(u) Y(u)] \cdot \operatorname{Sh} \gamma(x-u) du,$$

где

$$Y_0(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} - \frac{B}{2\gamma} \operatorname{Sh} \gamma |x| =$$

$$= \begin{cases} y_0(x) = \left( C_1 - \frac{B}{4\gamma} \right) e^{\gamma x} + \left( C_2 + \frac{B}{4\gamma} \right) e^{-\gamma x}, & x \geq 0 \\ y_0(x) = \left( C_2 - \frac{B}{4\gamma} \right) e^{-\gamma x} + \left( C_1 + \frac{B}{4\gamma} \right) e^{\gamma x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

есть решение уравнения (4) при  $F(x) \equiv 0$ . Произвольные постоянные  $C_1, C_2$  определяются из граничных условий для уравнения (4):

$$Y(+\infty, p) = Y(-\infty, p) = 0.$$

Беря последний интеграл по частям (предполагая  $l_{k+1} \geq l_k, l_1 > 0; \bar{l}_{k+1} \geq \bar{l}_k, \bar{l}_1 > 0$ ), получаем окончательное интегральное уравнение

$$Y(x) = Y_0(x) - \int_0^x F(u) Y(u) \operatorname{Ch} \gamma(x-u) du. \quad (5)$$

3. Обсудим общий вид функции  $Y(x)$ . Если  $-\bar{l}_1 < x < l_1$ , то интеграл в правой части (5) равен нулю, и в этой области  $Y(x) = Y_0(x)$ . При возрастании  $x$  и переходе через точку  $x = l_1$  указанный интеграл скачком изменяет свою величину от нуля до  $\beta_1 \Delta_1 \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1)$ , где  $\Delta_1$  — некоторая постоянная величина. Поэтому  $Y(x)$  для  $x > 0$  при переходе через точку  $x = l_1$  скачком изменяет свою величину от  $y_0(x)$  до  $y_1(x) = y_0(x) - \beta_1 \Delta_1 \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1)$ . При дальнейшем росте  $x$  происходит еще один скачок при  $x = l_2$  и  $Y(x)$  изменяется от  $y_1(x)$  до  $y_2(x) = y_1(x) - \beta_2 \Delta_2 \operatorname{Ch} \gamma(x-l_2)$  и т. д. Аналогичные скачки будут иметь место и при  $x = -\bar{l}_1, -\bar{l}_2$ , и т. д. Таким образом, функция  $Y(x)$  имеет следующую общую структуру:

$$Y(x) = \begin{cases} y_0(x); & 0 \leq x < l_1, \\ y_1(x); & l_1 < x < l_2, \\ y_2(x); & l_2 < x < l_3, \\ \dots \\ y_{N-1}(x); & l_{N-1} < x < l_N, \\ y_N(x); & x > l_N \end{cases} \quad Y(x) = \begin{cases} \bar{y}_0(x); & -\bar{l}_1 < x \leq 0, \\ \bar{y}_1(x); & -\bar{l}_2 < x < -\bar{l}_1, \\ \bar{y}_2(x); & -\bar{l}_3 < x < -\bar{l}_2, \\ \dots \\ \bar{y}_{N-1}(x); & -\bar{l}_N < x < -\bar{l}_{N-1}, \\ \bar{y}_N(x); & x < -\bar{l}_N. \end{cases}$$

В последующем, записывая конкретные значения  $y_k(x)$  и  $\bar{y}_k(x)$ , мы для краткости не будем приводить указанные области разбиения.

Итак, стоящая под интегралом в (5) функция  $Y(u)$  испытывает скачки как раз в точках сингулярностей функции  $F(u)$ , т. е. при  $n = l_k, -\bar{l}_k$ . Это обстоятельство не позволяет находить данный интеграл каким-либо примитивным способом, например, используя выкальвающее свойство дельта-функций, а требует для своего вычисления учета «когерентности»  $Y(u)$  и  $F(u)$ , поскольку именно дельта-функции, входящие в  $F(u)$ , и порождают скачки функции  $Y(x)$ .

4. Найдем величину скачка функции  $Y(x)$ , например, в точке  $x = l_1$ . Интегральное уравнение

$$Y(x) = y_0(x) - \beta_1 \int_0^x \operatorname{Ch} \gamma(x-u) \delta(u-l_1) Y(u) du \quad (6)$$

может быть решено различными методами. А. И. Саичев предложил найти величину скачка функции  $Y(x)$ , рассматривая (6) в малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x = l_1$ . Мы продемонстрируем другой путь — метод итераций, дающий тот же результат. Так, после второй итерации, учитывая непрерывность гиперболического косинуса, получим

$$Y(x) = y_0(x) + y_0(l_1) \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1) [-\beta_1 \int_0^x \delta(u_1 - l_1) du_1 + \beta_1^2 \int_0^x \delta(u_1 - l_1) du_1 \times \\ \times \int_0^{u_1} \delta(u_2 - l_1) du_2 - \\ - \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1) \beta_1 \int_0^x \delta(u_1 - l_1) du_1 \int_0^{u_1} \delta(u_2 - l_1) du_2 \int_0^{u_2} \delta(u_3 - l_1) du_3] Y(u_3) du_3,$$

Совершая многократные итерации, придем к бесконечному ряду

$$Y(x) = y_0(x) - \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1) y_0(l_1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_1^n}{n!} \left[ \int_0^x \delta(u-l_1) du \right]^n,$$

сумма которого равна

$$Y(x) = y_0(x) - y_0(l_1) [1 - e^{-\beta_1(x-l_1)}] \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1).$$

Отсюда, во-первых, четко видна взаимосвязь скачка решения с порождающей этот скачок дельта-функцией, и, во-вторых, из полученного решения следует, что при переходе  $x$  через значение  $x=l_1$  функция  $Y(x)$  испытывает скачок от значения  $y_0(l_1)$  до  $y_0(l_1) = y_0(l_1) e^{-\beta_1}$ . Тем самым, мы нашли функцию  $y_1(x)$ :

$$y_1(x) = y_0(x) - y_0(l_1) [1 - e^{-\beta_1}] \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1).$$

5. Аналогичным образом определяются и остальные скачки, и мы получаем следующее общее решение уравнения (4). Для положительных  $x$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \left( C_1 - \frac{B}{4\gamma} \right) e^{\gamma x} + \left( C_2 + \frac{B}{4\gamma} \right) e^{-\gamma x}, \\ y_1(x) &= y_0(x) - y_0(l_1) [1 - e^{-\beta_1}] \operatorname{Ch} \gamma(x-l_1), \\ y_2(x) &= y_1(x) - y_1(l_2) [1 - e^{-\beta_2}] \operatorname{Ch} \gamma(x-l_2), \\ &\dots \\ y_N(x) &= y_{N-1}(x) - y_{N-1}(l_N) [1 - e^{-\beta_N}] \operatorname{Ch} \gamma(x-l_N), \end{aligned} \tag{7a}$$

Для отрицательных  $x$

$$\begin{aligned} \bar{y}_0(x) &= \left( C_2 - \frac{B}{4\gamma} \right) e^{-\gamma x} + \left( C_1 + \frac{B}{4\gamma} \right) e^{\gamma x}, \\ \bar{y}_1(x) &= \bar{y}_0(x) - \bar{y}_0(-l_1) [1 - e^{-\bar{\beta}_1}] \operatorname{Ch} \gamma(x+l_1), \\ \bar{y}_2(x) &= \bar{y}_1(x) - \bar{y}_1(-l_2) [1 - e^{-\bar{\beta}_2}] \operatorname{Ch} \gamma(x+l_2), \\ &\dots \\ \bar{y}_N(x) &= \bar{y}_{N-1}(x) - \bar{y}_{N-1}(-l_N) [1 - e^{-\bar{\beta}_N}] \operatorname{Ch} \gamma(x+l_N). \end{aligned} \tag{76}$$

Вместе с этим, как уже отмечалось, в интервале  $-l_1 < x < l_1$

$$Y(x) = Y_0(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} - \frac{B}{2\gamma} \operatorname{Sh} \gamma |x|. \tag{7b}$$

Для отыскания решения, удовлетворяющего вышеуказанным граничным условиям, следует произвольные постоянные выбрать так, чтобы  $y_N(+\infty) = y_N(-\infty) = 0$ . Найдя эти произвольные постоянные и подставив их в (7), мы придем к следующему окончательному виду решения уравнения (4). В интервале  $-\bar{l}_1 < x < l_1$

$$Y(x) = Y_0(x) = \frac{B}{2\gamma} \left[ e^{-\gamma|x|} + \frac{1}{\Delta} \left( d^{\dagger} d e^{\gamma x} + d^{\dagger} d e^{-\gamma x} \right) \right]. \quad (8a)$$

Для положительных  $x$

$$y_0(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} (d^1 e^{\gamma x} + d^0 e^{-\gamma x}),$$

$$y_1(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 (d_1^1 e^{\gamma x} + d_1^0 e^{-\gamma x}),$$

$$y_2(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \cdot \Pi_2 (d_2^1 e^{\gamma x} + d_2^0 e^{-\gamma x}),$$

• • • • • • • • • •

$$y_{N-1}(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \dots \cdot \Pi_{N-1} (d_{N-1}^1 e^{ix} + d_{N-1}^0 e^{-ix}),$$

$$y_N(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \dots \cdot \Pi_N e^{-\gamma x}.$$

Для отрицательных  $x$ :

$$\bar{y}_0(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{d_t}{\Delta} (d^1 e^{-\gamma x} + d^0 e^{\gamma x}),$$

$$\bar{y}_1(x) = \frac{B}{2\gamma\Delta} \frac{d_t}{d_i} \Pi_1 (\bar{d}_1^1 e^{-\gamma x} + \bar{d}_1^0 e^{\gamma x}),$$

$$\bar{y}_2(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{d_t}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \cdot \bar{\Pi}_2 (\bar{d}_1^1 e^{-\gamma x} + \bar{d}_2^0 e^{\gamma x}),$$

• • • • • • • • • •

$$\bar{y}_{N-1}(x) = \frac{B}{2\gamma \Delta} d_t \bar{\Pi}_1 \cdot \bar{\Pi}_2 \cdot \dots \cdot \bar{\Pi}_{N-1} (\bar{d}_{N-1}^1 e^{-\gamma x} + \bar{d}_{N-1}^0 e^{\gamma x}),$$

$$\bar{y}_N(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{d_t}{\Delta} \Pi_1 \cdot \bar{\Pi}_2 \cdot \dots \cdot \bar{\Pi}_N e^{rx}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Pi_k = 1 - R_k, \quad R_k = \frac{1 - e^{-\beta_k}}{1 + e^{-\beta_k}}, \quad \bar{\Pi}_k = 1 - \bar{R}_k, \quad \bar{R}_k = \frac{1 - e^{\beta_k}}{1 + e^{\beta_k}},$$

$$d_t = d^0 + d^1 \quad \bar{d}_t = \bar{d}^0 + \bar{d}^1, \quad |\Delta| = d^0 \bar{d}^0 - d^1 \bar{d}^1,$$

(9)

$$d^0 = 1 + \sum_{i>j}^{C_N^2} r_{ij} + \sum_{i>j>n>m}^{C_N^4} r_{ijnm} + \sum_{i>j>n>...>k}^{C_N^6} r_{i_1i_2...i_6} + \dots,$$

$$d^1 = \sum_{i=1}^N r_i + \sum_{i>j>n} C_N^3 r_{ijn} + \sum_{i>l>\dots>l_5} C_N^5 r_{i_1 i_2 \dots i_5} + \dots,$$

где

$$r_i = R_i e^{-2\gamma l_i}, \quad r_{ij} = R_i R_j e^{-2\gamma(l_i - l_j)}, \quad r_{ijn} = R_i R_j R_n e^{-2\gamma(l_i - l_j + l_n)}, \\ r_{ijnm} = R_i R_j R_n R_m e^{-2\gamma(l_i - l_j + l_n - l_m)}, \dots$$

Заменяя  $R_k$  на  $\bar{R}_k$ ,  $l_k$  на  $\bar{l}_k$ , вместо  $r_i, r_{ij}, r_{ijn}, \dots$ ;  $d^0, d^1$  мы получим соответственно  $\bar{r}_i, \bar{r}_{ij}, \bar{r}_{ijn}, \dots$ ;  $\bar{d}^0, \bar{d}^1$ . Таким образом, различные коэффициенты без черты сверху связаны с поведением профиля  $U(x)$  при  $x > 0$ , а те же коэффициенты с чертой сверху отражают влияние потенциального профиля при  $x < 0$ . Если  $N$  четно, то последняя сумма в  $d^0$  состоит из одного слагаемого  $r_{N(N-1)(N-2)\dots}$ , а последняя сумма в  $d^1$  имеет  $C_N^{N-1}$  слагаемых. Если же  $N$  нечетно, то одно слагаемое  $r_{N(N-1)(N-2)\dots}$  имеет последняя сумма в  $d^1$ , в то время как последняя сумма в  $d^0$  имеет  $C_N^{N-1}$  слагаемых.

Величины  $d_1^0$  и  $d_1^1$  есть значения  $d^0$  и  $d^1$ , взятые при  $R_1 = 0$ ;  $d_2^0$  и  $d_2^1$  — значения  $d^0$  и  $d^1$ , взятые при  $R_1 = R_2 = 0$ , и т. д. Это же относится и к соответствующим величинам с чертой сверху (в этом случае  $\bar{R}_1 = 0$ ,  $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$  и т. д.).

Приведем для дальнейшего значения  $d^0$  и  $d^1$  при  $N = 1, 2, 3$ . Если  $N = 1$ , то

$$d^0 = \bar{d}^0 = 1, \quad d^1 = r_1, \quad \bar{d}^1 = \bar{r}_1, \quad d_1^0 = \bar{d}_1^0 = 1, \quad d_1^1 = \bar{d}_1^1 = 0. \quad (10a)$$

Если  $N = 2$ , то

$$d^0 = 1 + r_{21}, \quad \bar{d}^0 = 1 + \bar{r}_{21}, \quad d^1 = r_1 + r_2, \quad \bar{d}^1 = \bar{r}_1 + \bar{r}_2,$$

$$d_1^0 = \bar{d}_1^0 = 1, \quad d_2^0 = \bar{d}_2^0 = 1, \quad d_1^1 = r_2, \quad d_2^1 = 0, \quad \bar{d}_1^1 = \bar{r}_2, \quad \bar{d}_2^1 = 0. \quad (10b)$$

Если  $N = 3$ , то

$$d^0 = 1 + r_{21} + r_{31} + r_{32}, \quad \bar{d}^0 = 1 + \bar{r}_{21} + \bar{r}_{31} + \bar{r}_{32}, \\ d^1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_{321}, \quad \bar{d}^1 = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \bar{r}_{321}, \quad (10b)$$

$$d_1^0 = 1 + r_{32}, \quad d_2^0 = d_3^0 = 1, \quad \bar{d}_1^0 = 1 + \bar{r}_{32}, \quad \bar{d}_2^0 = \bar{d}_3^0 = 1,$$

$$d_1^1 = r_2 + r_3, \quad d_2^1 = r_3, \quad d_3^1 = 0, \quad \bar{d}_1^1 = \bar{r}_2 + \bar{r}_3, \quad \bar{d}_2^1 = \bar{r}_3, \quad \bar{d}_3^1 = 0.$$

Отметим, что полученное решение (8), как и должно быть, удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) dx = 1/p = B/\gamma^2$ .

6. Возвратимся к искомой плотности вероятности  $W(x, t)$ , определяемой уравнением (3). Решениям  $y_k(x)$  в (8) для вышеуказанных интервалов оси  $x$  соответствуют для тех же интервалов плотности вероятности  $W_k(x, t)$ , являющиеся прообразами  $y_k(x, p)$ . Так как преобразование Лапласа идет по временной переменной, то скачкам функции  $Y(x)$  соответствуют скачки  $W(x, t)$  в тех же точках. Эти скачки имеют место при любых  $t > 0$  и определяются только значениями  $\beta_k, \bar{\beta}_k$  (см. также [8]):

$$W(l_k + 0, t) = W(l_k - 0, t) e^{-\beta_k}, \quad \bar{W}(-\bar{l}_k - 0, t) = \bar{W}(-\bar{l}_k + 0, t) e^{-\bar{\beta}_k}.$$

В то же время, исходя из полученного решения (8), нетрудно обнаружить, что значения потока вероятности в окрестности слева и справа от точки скачка совпадают. Следовательно, совпадают и производные  $\partial W(x, t)/\partial x$  при любом значении  $t > 0$ . Таким образом, при наличии скачков потенциала плотность вероятности также испытывает соответствующие скачки, сохраняя свой градиент непрерывным.

Общий вид эволюции плотности вероятности  $W(x, t)$  для различных моментов времени показан на рис. 1б.

Можно ли, исходя из (8), сказать что-либо о виде функции  $W(x, t)$ ? Если принять во внимание, что параметры  $d, \Delta$ , как это видно из (9), зависят от  $\gamma = \sqrt{B\rho}$  различным образом для разных  $U(x)$ , то, казалось бы, трудно сказать что-либо конкретное об общей структуре  $W(x, t)$ . Тем не менее можно дать четкий ответ. Плотности вероятности  $W_k(x, t)$  представляют собой на основании соотвествия

$$y(x) = y(x, p) = \frac{B_1}{2\gamma_1} e^{-\gamma_1 x} \leftrightarrow W_k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} \quad (11)$$

в общем случае сложные суперпозиции гауссовых плотностей вероятности  $W_k(x, t)$ , описывающих свободную диффузию. Из последующих примеров будет виден способ построения этих суперпозиций.

7. В заключение раздела рассмотрим вероятность пребывания диффундирующих из точки  $x=0$  частиц в областях между точками скачков и их образы по Лапласу (см. рис. 1б):

$$P_k(t) = \int_k W_k(x, t) dx, \quad \hat{P}_k(p) = \int_k y_k(x) dx. \quad (12)$$

Можно ли судить о закономерностях временной эволюции  $W_k(x, t)$  или  $P_k(t)$  по их изображениям по Лапласу  $y_k(x)$ ,  $\hat{P}_k(p)$ ? Ответ на этот вопрос дают предельные теоремы преобразования Лапласа (см., например, [8]):

$$\begin{aligned} W(x, 0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p Y(x, p), \quad P(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \hat{P}(p), \\ W(x, \infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p Y(x, p), \quad P(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{P}(p), \end{aligned} \quad (13)$$

если существуют  $W(x, 0)$ ,  $W(x, \infty)$ ,  $P(0)$ ,  $P(\infty)$ . Эти соотношения будут нам в дальнейшем весьма полезны для получения информации о временных характеристиках эволюции вероятностей.

Приведем пример использования соотношений (13). Пусть  $N=3$  (рис. 1). При  $t=0$ , как очевидно,  $P_0(0)=1$ ,  $P_1(0)=P_2(0)=P_3(0)=\bar{P}_1(0)=\bar{P}_2(0)=\bar{P}_3(0)=0$ : все диффундирующие частицы находятся в начале координат. При  $t=\infty$  при конечных значениях  $\beta$ ,  $\bar{\beta}$  из (8), (12), (13) можно получить

$$\begin{aligned} P_0(\infty) &= P_1(\infty) = P_2(\infty) = \bar{P}_1(\infty) = \bar{P}_2(\infty) = 0, \\ P_3(\infty) &= \frac{e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}}{e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} + e^{-(\bar{\beta}_1+\bar{\beta}_2+\bar{\beta}_3)}}, \quad \bar{P}_3(\infty) = \frac{e^{-(\bar{\beta}_1+\bar{\beta}_2+\bar{\beta}_3)}}{e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} + e^{-(\bar{\beta}_1+\bar{\beta}_2+\bar{\beta}_3)}}, \end{aligned} \quad (14)$$

За бесконечное время все диффундирующие частицы независимо от высоты (конечной) и знака потенциальных барьеров покинут центральную область и выйдут на плато краевых областей, где будут уходить в  $\pm \infty$ . Формулы (14) отчетливо показывают пропорции количеств-

ва частиц (вероятности), вышедших на плато. Чем выше одно плато по сравнению с другим, тем меньшая доля диффундирующих частиц попадает на него. Из (14) также следует, что для  $P_3(\infty)$  и  $\bar{P}_3(\infty)$  важна лишь суммарная высота барьеров. Поскольку все полученные результаты справедливы при любых знаках конечных  $\beta$ ,  $\bar{\beta}$ , то полученные значения  $P_3(\infty)$  и  $\bar{P}_3(\infty)$  остаются прежними, если, например,  $\beta_1 = -\mu_1 < 0$ ,  $\bar{\beta}_1 = -\bar{\mu}_1 < 0$ , но суммы  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ ,  $\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_3$  не изменились. В этом случае наличие перед барьерами  $\beta_2$  и  $\bar{\beta}_2$  потенциальных ям не повлияет на финальные значения  $P_3$  и  $\bar{P}_3$ .

Таким образом, при конечных барьерах процесс диффузии будет нестационарным при любых  $t$ . То же будет и при наличии одного бесконечно высокого барьера слева или справа от начала координат. Если же и справа, и слева от точки  $x=0$  имеются бесконечно высокие барьеры, то диффундирующие частицы никогда не выйдут за эти барьеры, а плотность вероятности будет стремиться к стационарному значению  $W_{ct}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t)$ , равному (см., например, [7])

$$W_{ct}(x) = e^{-u(x)} / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(x)} dx,$$

где  $u(x) = 2U(x)/D$  — безразмерная потенциальная функция.

### ПРИМЕРЫ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЙ

1. Рассмотрим нестационарную диффузию через единственный потенциальный барьер (рис. 2). Для этого случая  $N=1$ ,  $l_1=l$ ,  $\bar{l}_1=\infty$ ,  $\beta_1=\beta$ ,  $\bar{\beta}_1=0$ . Из (8) — (10) следует, что

$$Y_0(x) = \frac{B}{2\gamma} [e^{-\gamma|x|} + R e^{-\gamma(2l-x)}], \quad y_1(x) = \frac{B}{2\gamma} \Pi e^{-\gamma x}.$$

С помощью (11) находим искомую плотность вероятности (рис. 2)

$$W(x, t) = \begin{cases} W_0(x, t) = W_r(x, t) + R W_r(2l-x, t), & x < l, \\ W_1(x, t) = \Pi W_r(x, t), & x > l. \end{cases} \quad (15)$$

Слева от барьера ( $x < l$ ) мы имеем суперпозицию слагаемого  $W_r(x, t)$ , соответствующего свободной диффузии и  $R W_r(2l-x, t)$ , представляющего собой отраженное с коэффициентом  $R$  первое слагаемое, перемещенное из точки  $x=0$  в точку  $x=2l$ . В области за барьером ( $x > l$ ) то же самое первое слагаемое умножается на коэффициент  $\Pi=1-R$ . Следовательно, мы можем ввести понятия коэффициента отражения диффундирующих частиц от потенциального барьера и коэффициента прохождения диффундирующими частицами потенциального барьера:

$$R = \frac{1 - e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}} \equiv R(\beta), \quad \Pi = 1 - R = \frac{2e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}} \equiv \Pi(\beta).$$

Если барьер имеет бесконечную высоту ( $\beta \rightarrow +\infty$ ), то ему соответствуют  $R=1$ ,  $\Pi=0$ . Для этого случая (15) принимает вид

$$W(x, t) = \begin{cases} W_r(x, t) + W_r(2l-x, t), & x < l, \\ 0, & x > l \end{cases},$$

совпадающий с известным результатом (см., например, [1, 2]) для отражающей границы. Таким образом, бесконечно высокому барьера соответствует отражающая граница с  $R=1$ ,  $\Pi=0$ .

Пусть теперь  $\beta=-\mu<0$ , что описывает диффузию в яму, имеющую глубину  $\mu$ . Для этого случая по-прежнему справедлива формула (15), где теперь

$$R=R(-\mu) = -\frac{e^\mu - 1}{e^\mu + 1} = -R(\mu) < 0, \quad \Pi(-\mu) = \frac{2e^\mu}{e^\mu + 1} = \Pi(\mu)e^\mu.$$

Для сколь угодно глубокой ямы ( $\mu \rightarrow +\infty$ )  $R=-1$ ,  $\Pi=2$  и (15) примет вид

$$W(x, t) = \begin{cases} W_r(x, t) - W_r(2l-x, t), & x < l, \\ 2W_r(x, t), & x > l \end{cases}$$

совпадающий с известным результатом (см., например, [1, 2]) для поглощающей границы, в непосредственной близости от которой плотность вероятности равна нулю:  $W(l-0, t) = W_0(l, t) = 0$ .

Следовательно, изменяя высоту барьера  $\beta$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , мы прослеживаем полный диапазон изменения характера границы от поглощающей границы ( $\beta=-\infty$ ,  $R=-1$ ,  $\Pi=2$ ), через ее отсутствие ( $\beta=0$ ,  $R=0$ ,  $\Pi=1$ ) до отражающей границы ( $\beta=+\infty$ ,  $R=1$ ,  $\Pi=0$ ).

Что касается финальных распределений частиц при  $t \rightarrow \infty$ , то можно показать, на основании вышесказанного, что независимо от знака  $\beta$  наверху барьера частиц будет в  $e^{-|\beta|}$  раз меньше, чем внизу

$$P_{\text{ниж}}(\infty) = \frac{1}{1 + e^{-|\beta|}}, \quad P_{\text{верх}}(\infty) = \frac{e^{-|\beta|}}{1 + e^{-|\beta|}}.$$

2. В качестве второго примера рассмотрим прохождение диффундирующими частицами потенциального барьера конечной ширины (рис. 3). Этому барьери соответствует  $N=2$ ,  $l_1=l$ ,  $l_2=l+L$ ,  $\bar{l}_1=\bar{l}_2=\infty$ ,  $\beta_1=\beta$ ,  $\beta_2=-\beta$ ,  $\beta_1=\beta_2=0$ . Из (8)–(10) следует, что

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{B}{2\gamma} \left\{ e^{-\gamma|x|} + \frac{R(\beta)}{\Delta} \left[ e^{-\gamma(2l-x)} - e^{-\gamma(2l+2L-x)} \right] \right\}, \quad x < l; \\ y_1(x) &= \frac{B}{2\gamma} \frac{\Pi(\beta)}{\Delta} \left[ e^{-\gamma x} - R(\beta) e^{-\gamma(2l+2L-x)} \right], \quad l < x < l+L; \\ y_2(x) &= \frac{B}{2\gamma} \frac{\Pi(\beta)\Pi(-\beta)}{\Delta} e^{-\gamma x}, \quad x > l+L, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Delta = 1 + R(\beta)R(-\beta)e^{-2\gamma L} = 1 - R^2(\beta)e^{-2\gamma L} = 1 - \frac{\text{Ch}\beta - 1}{\text{Ch}\beta + 1} e^{-2\gamma L}.$$

Чтобы найти плотности вероятности  $W_k(x, t)$ , являющиеся прообразами  $y_k(x)$ , примем во внимание, что

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{1 - R^2(\beta)e^{-2\gamma L}} = \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n}(\beta) e^{-2\gamma n L}. \quad (17)$$

Тогда на основании (11) без труда находим, например,

$$W_2(x, t) = \Pi(\beta)\Pi(-\beta) \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n}(\beta) W_r(x+2nL, t), \quad x > l+L.$$

Физический смысл этого разложения очевиден: плотность вероятности

является бесконечной суперпозицией многократно переотраженных гауссовых плотностей вероятности от переднего и заднего фронтов барьера. В самом деле, рассмотрим три первых слагаемых

$$W_2(x, t) = \Pi(\beta) \Pi(-\beta) [W_r(x, t) + R^2(-\beta) W_r(x+2L, t) + \\ + R^4(-\beta) W_r(x+4L, t) + \dots].$$

Первое слагаемое есть плотность вероятности  $W_r(x, t)$ , «прошедшая» через две границы с коэффициентами прохождения  $\Pi(\beta)$  и  $\Pi(-\beta)$ . Второе слагаемое учитывает дополнительное однократное отражение внутри барьера от двух его границ с коэффициентами  $R(-\beta)$ . Третье слагаемое учитывает еще одно отражение внутри барьера от его границ и т. д. В стилизованном виде эта ситуация также изображена на рис. 3.

Если вместо барьера высотой  $\beta$  взять потенциальную яму глубиной  $\mu = -\beta$ , то в выражениях для  $Y_0(x)$  и  $y_1(x)$  в (16) коэффициент отражения  $R(\beta)$  заменится на  $-R(\beta)$ , а  $y_2(x)$  и, следовательно,  $W_2(x, t)$  не изменятся. Это означает, что диффундирующими частицам в конечном счете безразлично, преодолевать ли сначала барьер «вверх», а затем «спускаться вниз» или наоборот.

Рассмотрение финальных вероятностей  $P_0, P_1, P_2$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $|\beta| < \infty$  показывает, что  $P_0(\infty) = P_2(\infty) = \frac{1}{2}$ . В конце концов, все

диффундирующие частицы «расползутся» по оси  $x$  влево и вправо от барьера или ямы независимо от их высоты или глубины.

3. Рассмотрим теперь диффузию частиц из симметричной потенциальной ямы:  $u(x) = \beta$  при  $|x| > l$ ,  $u(x) = 0$  при  $|x| < l$ , для которой  $N = 1$ ,  $l_1 = \bar{l}_1 = l$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1 = \beta$ . В этом случае

$$Y_0(x) = \frac{B}{2\gamma} \left[ e^{-\gamma|x|} + R(\beta) \frac{e^{-\gamma(2l-x)} + e^{-\gamma(2l+x)}}{1 - R(\beta)e^{-2\gamma l}} \right], \quad |x| < l, \\ (18)$$

$$y_1(x) = \bar{y}_1(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\Pi(\beta) e^{-\gamma|x|}}{1 - R(\beta)e^{-2\gamma l}}, \quad |x| > l.$$

Применяя разложение, аналогичное (17), на основании соответствия (11) легко найти следующее выражение для плотности вероятности:

$$W(x, t) = \begin{cases} W_r(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\beta) [W_r(x-2ln, t) + W_r(x+2ln, t)], & |x| < l, \\ (1-R(\beta)) \{W_r(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\beta) W_r(|x|+2ln, t)\}, & |x| > l. \end{cases}$$

Здесь бесконечная суперпозиция гауссовых плотностей вероятности обусловлена многократными переотражениями от потенциальных барьеров, расположенных в точках  $x = \pm l$ . При конечной глубине ямы за бесконечное время все диффундирующие частицы выйдут из ямы равновероятно влево и вправо от начала координат:  $P_0(\infty) = 0$ ,  $P_1(\infty) = \bar{P}_1(\infty) = \frac{1}{2}$ .

Если  $\beta = \infty$  ( $R = 1$ ,  $\Pi = 0$ ), мы приходим к случаю диффузии в ограниченном пространстве  $x \in [-l, +l]$ , для которого существует стационарная плотность вероятности  $W_{ct}(x)$ . На основании (12), (13), (18) нетрудно получить

$$W_{ct}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_0(x, t) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma^2}{B} Y_0(x, \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{2} \left[ 1 + \frac{2}{2\gamma l} \right] = \frac{1}{2l}.$$

4. В качестве заключительного примера рассмотрим диффузию через потенциальный барьер конечной ширины из полуограниченного пространства:  $u(x)=0$  при  $-l < x < l$  и при  $x > l+L$ ,  $u(x)=\beta$  при  $l < x < l+L$ . В точке  $x = -l$  находится отражающая граница — бесконечно высокий барьер. Для этого случая  $N=2$ ,  $l_1=l_1=l$ ,  $l_2=l+L$ ,  $l_2=\infty$ ,  $\beta_1=-\beta_2=\beta$ ,  $\beta_1=\infty$ ,  $\beta_2=0$ . На основании (8) — (10) имеем

$$Y_0(x) = \frac{B}{2\gamma} \left[ e^{-\gamma|x|} + \frac{1}{\Delta} \left( d^1 \bar{d}_t e^{\gamma x} + \bar{d}^1 d_t e^{-\gamma x} \right) \right], \quad |x| < l,$$

$$y_1(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \Pi(\beta) \left[ -R(\beta) e^{-2\gamma(l+L)} e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} \right], \quad l < x < l+L,$$

$$y_2(x) = \frac{B}{2\gamma} \frac{\bar{d}_t}{\Delta} \left[ 1 - R^2(\beta) \right] e^{-\gamma x}, \quad x > l+L.$$

Здесь

$$\Delta = 1 - R^2 e^{-2\gamma L} - R e^{-4\gamma l} (1 - e^{-2\gamma L}), \quad d^1 = R e^{-2\gamma l} (1 - e^{-2\gamma L}),$$

$$\bar{d}^1 = e^{-2\gamma L}, \quad d_t = 1 - R^2 e^{-2\gamma L} + R e^{-2\gamma l} (1 - e^{-2\gamma L}), \quad \bar{d}_t = 1 + e^{-2\gamma l}.$$

Чтобы перейти отсюда к плотностям вероятности, следует разложить  $1/\Delta$  в тройной ряд по степеням  $R^2 e^{-2\gamma L}$ ,  $R e^{-4\gamma l}$ ,  $R e^{-2\gamma(2l+L)}$ , а затем воспользоваться соответствием (11).

В результате, например, для  $W_2(x, t)$  можно получить

$$W_2(x, t) = (1-R^2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k C_n^k C_k^m (-1)^m R^{2n-k} \times \\ \times \{ W_r[x + (n-k+m)2L + 4kl, t] + \\ + W_r[x + (n-k+m)2L + (1+2k)2l, t] \}.$$

Тем самым, плотности вероятности  $W_k(x, t)$  являются сложной суперпозицией переотражений гауссовых плотностей вероятности от трех скачков потенциальной функции, расположенных в точках  $x = \pm l$ ,  $l+L$ . Как следует из (14), при конечной высоте барьера все диффундирующие частицы со временем выйдут за потенциальный барьер в сторону положительных  $x$ :  $P_0(\infty)=0$ ,  $P_1(\infty)=0$ ,  $P_2(\infty)=1$ .

В следующей статье (часть II) будут рассмотрены временные характеристики нестационарной диффузии: времена выхода диффундирующих частиц за потенциальные барьеры, из потенциальных ям, их зависимости от высоты барьера или глубины ямы и пр.

В заключение автор выражает искреннюю признательность А. И. Саичеву за проявленный интерес к работе, плодотворные обсуждения полученных результатов и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Болтакс Б. И. Диффузия в полупроводниках. — М.: Физматгиз, 1961.
- Старк Дж. П. Диффузия в твердых телах. — М.: Энергия, 1980.
- Christiansen J. A. // J Phys Chem. 1936. V. B-33. P. 145
- Обрезков Г. В., Разевиг В. Д. Методы анализа срыва слежения. — М.: Сов. радио, 1977.
- Kramers H. A. // Physica. 1940. V. 7. P. 284.
- Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: ИЛ, 1947.

7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970.
9. Risken H. The Fokker-Planck equation. Springer-Verlag. Berlin. 1984. Р. 113.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11 июля 1990 г.

DIFFUSION OVER THE SHARP POTENTIAL BARRIERS.  
Part 1. THE EXACT SOLUTION

A. N. Malakhov

The process of a nonstationary one-dimensional diffusion over potential barriers, which are represented by a sequence of the sharp steps with arbitrary values and sign, is studied. The exact solution is given and it is shown that the nonstationary diffusion process has the form of a multiplex superposition of the Gaussian probability density. Set of examples and their physical interpretation are considered.

---

УДК 535.36

**МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ  
И КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО  
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ВОЛН В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ**

*B. C. Филинов*

Развито новое представление функции Грина волнового стохастического уравнения в виде модифицированных интегралов по траекториям. Рассмотрен предельный переход данных интегралов в интегралы Фейнмана, соответствующие параболическому приближению и его уточнению. С помощью комплексного метода Монте-Карло- в развитом приближении проведены расчеты энергетического коэффициента прозрачности плоского слоя хаотически расположенных трехмерных дискретных рассеивателей. Полученные результаты согласуются с соответствующими расчетами в параболическом приближении для малых величин относительной диэлектрической проницаемости рассеивателей. Увеличение относительной диэлектрической проницаемости приводит к возникновению коллективных резонансных явлений в рассеянии волн при условии, когда длина волн, среднее расстояние между рассеивателями и их размер соизмеримы. Это явление не отмечается в параболическом и квазиклассическом приближении и исчезает в системе поглощающих рассеивателей в развитом приближении. Численные результаты хорошо согласуются с аналитическими формулами вне области резонансных явлений.

Проблема распространения волн в среде со случайными неоднородностями привлекает к себе значительное внимание в связи с целым рядом различных научных и прикладных задач. Однако даже в простейшем приближении стохастического волнового уравнения решение проблемы наталкивается на серьезные трудности. Использование простых или модифицированных вариантов теории возмущений функции Грина, учитывающих бесконечное число членов ряда, ограничено условием малости флуктуаций диэлектрической проницаемости и условием малости флуктуаций поля [1-3]. Целый ряд ограничений возникает при использовании как самого параболического приближения, так и ряда дополнительных предложений, необходимых для практического решения задач [1, 4-7]. Применение уравнений переноса к исследованию распространения волн в дисперсных средах не позволяет достаточно полно учесть волновые свойства излучения, что может приводить к существенным погрешностям [8]. В связи с этим возникает необходимость в развитии численных методов решения стохастического уравнения, так как их использование требует, как правило, существенно меньше дополнительных условий, ограничивающих область применимости результатов. Однако быстродействие современных компьютеров не позволяет за разумное время получить решение трехмерного стохастического волнового уравнения с помощью конечно-разностных методов и тем более усреднить решение по ансамблю случайных неоднородностей. Численный подход, позволяющий тем не менее весьма эффективно получать уже усредненное решение, был предложен в [9-11], где комплексный метод Монте-Карло использовался для расчета функции Грина, представленной в виде интеграла Фейнмана. В [10, 11] развито сферическое параболическое приближение, позволяющее учесть многократные рассеяния назад, и с помощью комплексного метода Монте-Карло [9] проведены расчеты энергетического коэффициента прозрачности плоского слоя хаотически расположенных трехмерных дискретных рассеивателей.

В данной работе получено новое представление функции Грина волнового стохастического уравнения в виде интеграла по траекториям, позволяющее полностью учесть как многократные, так и однократные рассеяния в условиях, когда длина волны излучения меньше размера неоднородности. Обсуждается предельный подход полученного представления в интеграл Фейнмана, соответствующий параболическому приближению функции Грина и его возможные уточнения. В развитом приближении с помощью комплексного метода Монте-Карло проведены расчеты энергетического коэффициента прозрачности плоского слоя хаотически расположенных трехмерных дискретных рассеивателей в тех же условиях, что и в [11]. Полученные результаты согласуются с [11] в условиях, когда различие диэлектрических проницаемостей рассеивателей и содержащей их среды мало. Исследуется влияние поглощения. Если же различие диэлектрических проницаемостей велико, то результаты данной работы указывают на возникновение коллективных резонансных явлений, когда длина волны меньше или порядка размера рассеивающих диэлектрических шариков и расстояния между ними. В сферическом параболическом приближении это явление не отмечалось [11]. В случае поглощающих рассеивателей резонансные явления в расщеплении отсутствуют. Численные результаты сопоставлены с аналитическими выражениями, полученными в квазиклассическом приближении. Отмечается согласие численных и аналитических результатов вне области резонансных явлений.

**1. Интегралы Фейнмана и преобразование Лапласа.** В приближении крупномасштабных неоднородностей система векторных уравнений Максвелла распадается на одинаковые скалярные уравнения для компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  [1, 2]. Обозначая любую из компонент электромагнитного поля через  $\exp(-i\omega t)\phi(\mathbf{r})$ , приходим в квазистационарном приближении к скалярному стохастическому волновому уравнению [1, 2, 12]

$$\Delta\phi + (\epsilon\omega^2/c^2)\phi = 0. \quad (1)$$

Диэлектрическую проницаемость неоднородного вещества можно представить в виде

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0(\omega)(1 + \delta\epsilon(\mathbf{r}, \omega)),$$

тогда получаем

$$[-(1/2)\Delta + \delta\epsilon] = \phi/2, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}$  выражено в единицах  $k^{-1}$ ,  $k^2 = \epsilon_0\omega^2/c^2$ ,  $\epsilon_0(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость пространства, содержащего рассеиватели.

Будем считать, что пространство хаотически заполнено дискретными взаимодействующими друг с другом рассеивателями нескольких сортов ( $a = 1, \dots, \tilde{L}$ ), отличающихся величиной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_a(\omega)$  ( $\mu_a \equiv 1$ ) и характерным размером  $\sigma_a$ . В дальнейшем, для простоты, будем считать, что рассеиватели сферически симметричны (учет формы и ориентации рассеивателей возможен, но приводит к излишней громоздкости формул). Пространственное расположение отдельного рассеивателя будем характеризовать радиусом-вектором его центра тяжести  $\mathbf{R}_{ja}$ . Для нескольких типов ( $a = 1, \dots, \tilde{L}$ ) рассеивателей достаточно общим видом зависимости  $\delta\epsilon$  является [12]

$$\delta\epsilon(\mathbf{r}, \omega)/\epsilon_0 = \sum_a \sum_{ja=1}^{N_a} V_a(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ja}|/\sigma'_a), \quad (3)$$

где  $N_a$  — полное число рассеивателей типа  $a$ , а  $V_a$  — финитные функции, обращающиеся в нуль при  $|\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ja}| > \sigma'_a$  и скачком принимаю-

щие значение  $\xi_a = -(\epsilon_a - \epsilon_0)/2\epsilon_0$  при  $|r - R_{ja}| < \sigma'_a$ . Для физических величин, усредненных по положениям и сортам рассеивателей, как будет видно из дальнейшего, важны интегральные характеристики от функции  $V_a(|r - R|/\sigma'_a)$ , поэтому нет необходимости в слишком детальной конкретизации вида  $V_a(|r - R|/\sigma'_a)$ , если заданы  $\sigma'_a$  и  $\xi_a$ ,  $\sigma_a = 2\sigma'_a$ .

Используя (3), перепишем уравнение (2) в виде

$$[-(1/2)\Delta + \sum_a \sum_{ja} V_a(|r - R_{ja}|/\sigma'_a) - z]\varphi = 0, \quad (4)$$

где  $z = 1/2$ ,  $\sigma_a = 2\sigma'_a$ ,  $\varphi$  параметрически зависит от координат рассеивателей  $R_{ja}$ , а  $r$ , как и в (1), выражено в единицах  $\hbar^{-1}$ . Подход к решению уравнения (4), используемый в дальнейшем для исследования распространения электромагнитных волн в неоднородных средах, в одинаковой степени применим и к решению уравнения Шредингера в квантовой механике [2, 5, 13], если  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , а  $V_a(|r - R_{ja}|/\sigma'_a)$  — потенциал взаимодействия квантовой частицы массы  $m$  и энергии  $E$  с классическим рассеивателем сорта  $a$ .

Известно [13–15], что функция Грина уравнения (4)  $G(r, r', z)|_{z=1/2}$ , являющаяся полем точечного источника в точке  $r'$  и зависящая от переменных  $R_{ja}$ , может быть выражена через преобразование Лапласа

$$G(r, r', z) = \int_0^\infty G(r, r', l) \exp(izl) dl \quad (5)$$

от функции Грина  $G(r, r', l)$  уравнения

$$i \frac{d\varphi}{dl} = \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)\Delta + \sum_a \sum_{ja} V_a\left(\frac{|r - R_{ja}|}{\sigma'_a}\right) \right] \varphi, \quad (6)$$

где дополнительный параметр  $l$  играет роль «фиктивного времени» в «нестационарном» уравнении (6) для функции  $\varphi(r, l)$ . Отметим, что уравнение (6) формально совпадает с нестационарным уравнением Шредингера. Функцию Грина  $G(r, r', l)$  уравнения (6) можно записать в виде интеграла Фейнмана [13], конечномерная аппроксимация которого имеет вид

$$G(r, r', l) = i\theta(l)(2\pi i\tau)^{-Mv/2} \int \dots \int \exp\{i\tau^{-1} S[r_0, \dots, r_M]\} d\{r_m\}. \quad (7)$$

В (7) траектории аппроксимированы ломанными линиями с вершинами в точках  $r_m$  в «моменты времени»  $l_m = \tau m$ ,  $\tau = l/M$ ,  $m = 0, \dots, M$ ,  $r_0 = r'$ ,  $r_M = r$ ,  $d\{r_m\} = dr_1, \dots, dr_{M-1}$ ,  $v$  — размерность пространства. Для  $S$  имеем

$$S[r_0, \dots, r_M] = \sum_{m=0}^{M-1} \{(r_{m+1} - r_m)^2 - \tau^2 V(r_m, R_{ja})\} = \langle \tilde{r} | \tilde{K} | \tilde{r} \rangle - \quad (8)$$

$$- \tau^2 \sum_{m=0}^{M-1} V(r_m, R_{ja}),$$

где  $V(r_m, R_{ja}) = \sum_a \sum_{ja} V_a(|r - R_{ja}|/\sigma'_a)$ ,  $|\tilde{r}\rangle = (M+1)^v$  — мерный

вектор с компонентами  $r_0, \dots, r_M$ ,  $\langle \tilde{r} | \tilde{K} | \tilde{r} \rangle$  — квадратичная форма,  $\tilde{K}$  — соответствующая ей матрица. Интегрирование по вершинам ломанных  $d\{r_m\}$  соответствует суммированию по всевозможным траекториям, «начинающимся» в точке  $r_0$  и «заканчивающимся» в точке  $r_M$ . Выражение  $\tau^{-1} S$  (8) является конечно-разностной аппроксимацией ин-

теграла действия для фиктивной частицы единичной массы, совершающей переход за «время  $l$ » из точки  $r_0$  в точку  $r_M$ . Известно [13], что главный вклад в интеграл (7) дают траектории из окрестностей экстремальных траекторий, на которых  $S$  имеет экстремум. «Размер» этих окрестностей может быть весьма велик в условиях, когда неприменимо квазиклассическое приближение (приближение геометрической оптики). Суммирование вкладов этих траекторий позволяет учесть эффекты, связанные с дифракцией и интерференцией.

**2. Усреднение по положениям рассеивателей.** Обычно физический интерес представляют функции Грина или их произведения, усредненные по положениям рассеивателей, так как через них выражаются наблюдаемые величины [1]. Рассмотрим  $\overline{G(r, r', l)}$ , усредненную по положениям рассеивателей, конфигурации которых описываются плотностью вероятности

$$p(\mathbf{R}_{j_a}) = Q^{-1} \exp\{-\beta U[\mathbf{R}_{j_a}]\},$$

$$Q = \int \dots \int_{a_j}^{\infty} d\mathbf{R}_{j_a} \exp\{-\beta U[\mathbf{R}_{j_a}]\},$$

где  $U[\mathbf{R}_{j_a}]$  — энергия взаимодействия рассеивателей между собой. Как следует из (3), функции  $V(|r - R|/\sigma')$  являются короткодействующими, что позволяет существенно упростить выражение для  $\overline{G(r, r', l)}$  [16, 17]:

$$\begin{aligned} G(r, r', l) &= \int \dots \int_{a_j}^{\infty} d\mathbf{R}_{j_a} p(\mathbf{R}_{j_a}) G(r, r', l) = \\ &= l^0 (l((2\pi i\tau)^{-M/2}) \int \dots \int d\{r_m\} \exp \left[ l^{n-1} \langle \tilde{r} | \tilde{K} | \tilde{r} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\{m_a\}} \left( \prod_{a=1}^L \frac{n_a}{m_a} ! \right)^W \{m_a\} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\{m_a\}$  — мультииндекс,  $m_a = 1, \dots, \infty$ ,  $n_a$  — плотность рассеивателей сорта  $a$ ,  $W_{\{m_a\}}$  — групповые интегралы, явные выражения для которых можно найти из решения соответствующих систем алгебраических уравнений [16, 17]. В качестве примера приведем несколько первых членов ряда при  $L=2$ :

$$\begin{aligned} W_{00} &= 1, \quad W_{01} = \int d\mathbf{R}_1 f_1^1, \quad W_{10} = \int d\mathbf{R}_1 f_1^2, \\ W_{02} &= \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 f_1^2 f_2^2 (g_{12}^{02} - 1), \quad W_{20} = \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 f_1^1 f_2^1 (g_{12}^{11} - 1), \quad (10) \\ W_{11} &= \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 f_1^1 f_2^1 (g_{12}^{11} - 1), \dots, \end{aligned}$$

где  $f_j^\alpha = \exp[-it \sum_m V_a(|r_m - R_j|/\sigma'_a)] - 1$ ,  $g_{12}^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(|R_1 - R_2|)$  — парные коррелятивные функции рассеивателей одного и того же сорта или же разных сортов ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ). Последующие члены ряда содержат более высокие степени  $f_j^\alpha$  и, соответственно, алгебраические комбинации, включающие коррелятивные функции более высокого порядка. Сходимость ряда связана с расщеплением многочастичных коррелятивных функций на коррелятивные функции меньшего порядка [17]. Для газа идеальных невзаимодействующих рассеивателей все коррелятивные функции тождественно равны единице и в ряду (9) отличны от нуля  $L$  членов с  $m_1 + \dots + m_L = 1$  ( $m_a > 0$ ). В дальнейшем для простоты ограничимся случаем некоррелированных рассеивателей одного сорта ( $L=1$ ), что позволяет в (9) оборвать ряд на первом групповом интеграле  $W_1$ . Данное приближение справедливо для низких плотностей рассеивателей ( $n \ll 1$ ).

3. Интегралы по траекториям и функция Грина волнового уравнения. В соответствии с (5), (9) функция Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z)$  может быть записана в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z|_{z=1/2}) = i(2\pi i/M)^{-Mv/2} \int \dots \int d\{\mathbf{r}_m\} \int_0^\infty dl \times \quad (11)$$

$$\times \exp[iz(l + M\langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle / (2l) + i0,5z^{-1}Mv \ln(l))] \times \\ \times \exp[n \int dRf] |_{z=1/2}.$$

В (11) изменен порядок интегрирования. Пользуясь условием малости плотности рассеивателей, при котором справедливо выражение (11), можно приближенно вычислить внутренний интеграл по  $dl$ . Действительно, в показателе первой экспоненты в (11) стоит функция  $\varphi(l) = l + M\langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle / l + iMv \ln(l)$ , имеющая две перевальные точки на комплексной плоскости  $l$ :

$$l_\pm = \pm \sqrt{M\langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle - (Mv/2)^2 - iMv/2}. \quad (12)$$

Поскольку  $M\langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = L^2$ , то при  $L \gg Mv/2$  точки хорошо разнесены на комплексной плоскости  $l$  и  $l_\pm \sim L$ . Для вычисления интеграла по (11) достаточно контур интегрирования деформировать таким образом, чтобы он проходил через одну из этих точек. Из (11) и вида  $\varphi(l)$  следует, что главный вклад в интеграл по  $dl$  дает окрестность перевальной точки  $l_+$ , если  $M\langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle \sim L \gg 1$ . Выбор точки  $l_+$  обеспечивает также в дальнейшем при проверке результата правильный предельный переход к параболическому приближению. Выбор  $l_+$  соответствует также условию излучения на бесконечности. Оценим поведение функций  $n \int dRf$  и  $\varphi(l)$  на комплексной плоскости  $l$  в окрестности перевальной точки  $l_+$ . Функцию  $n \int dRf$  можно вынести из-под знака интеграла по  $dl$  в точке  $l_+$  при выполнении условия

$$\gamma |\partial^2 \varphi / \partial l^2|_{l=l_+} \gg |\partial(n \int dRf) / \partial l|_{l=l_+}$$

или в буквенном виде

$$2^{3/2} \gg \pi n \sigma^3 (L/\sigma) \exp(\operatorname{Im}(\xi)\sigma) / \sqrt{L}, \quad (13)$$

$$\gamma \sqrt{2} \gg \pi n \sigma^3 \sqrt{L/\sigma} |\xi \sigma| / \sqrt{\sigma}$$

соответственно для  $|\xi \sigma| \gg 1$  и  $|\xi \sigma| \ll 1$ . Оставшийся интеграл точно выражается через функцию Ганкеля первого рода  $H_v^1$  [14, 18], индекс которой  $v$  может быть сделан полуцелым за счет выбора  $M$  при  $v=3$  и  $v=1$ . Воспользовавшись известными выражениями для  $H_{n+1/2}^1$  [18], окончательно получаем

$$\overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 1/2) = i \sqrt{M} \int \dots \int d\{\mathbf{r}_m\} (2\pi i \zeta)^{-(Mv-1)/2} \times \quad (14)$$

$$\times \exp\{i\zeta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle + n \int dRf^+ + \ln(s(z))\},$$

где функционал  $z^2 = M\langle \tilde{\mathbf{r}} | \tilde{K} | \tilde{\mathbf{r}} \rangle$ ,  $\zeta = z/M$ ,  $s(z) = \sum_{q=0}^{n-1} (-2iz)^{-q} \times \times (n+q-1)!/(q!(n-q-1)!)$ ,  $n = (Mv-1)/2-1$ . Для  $v=2$  разложение функционала  $s(z)$  по  $z$ , строго говоря, не обрывается и ряд по  $q$  является асимптотическим [18].

4. Параболическое приближение и его уточнения. Для больших  $z(z \gg 1)$  в ряду для  $s(z)$  можно ограничиться первым членом ( $s(z) \approx 1$ ),

при этом выражение (14) имеет структуру интеграла Фейнмана (9), в котором роль времени играет функционал  $\tau$ . Возможные упрощения (14) связаны с использованием большого параметра  $M \langle \tilde{r} | K | \tilde{r} \rangle \sim |x - x'| \sim L \gg 1$  (ось  $x$  направим из  $\tilde{r}'$  в  $\tilde{r}$ ) в методе перевала для частичного вычисления интеграла (14) по совокупности переменных  $x_1, \dots, x_{M-1}$ . При этом для выражения  $z = \zeta^{-1} \langle \tilde{r} | \tilde{K} | \tilde{r} \rangle$  следует воспользоваться разложением

$$z = \sqrt{M} (\langle \tilde{x} | \tilde{K} | \tilde{x} \rangle) + \langle \tilde{\rho} | \tilde{K} | \tilde{\rho} \rangle / (2 \langle \tilde{x} | K | \tilde{x} \rangle + \dots) \quad (15)$$

по степеням малости отношения  $\langle \tilde{\rho} | \tilde{K} | \tilde{\rho} \rangle / \langle \tilde{x} | \tilde{K} | \tilde{x} \rangle$ , в котором вектор  $|\tilde{x}\rangle$  состоит из совокупности координат вершин траекторий  $x_0, \dots, x_M$ , а вектор  $|\tilde{\rho}\rangle$  — из аналогичной совокупности координат  $(y_m, z_m)$  ( $m=0, \dots, M$ ),  $\langle \tilde{x} | K | \tilde{x} \rangle M \sim L^2$ ,  $\langle \tilde{\rho} | \tilde{K} | \tilde{\rho} \rangle M = |\rho_m - \rho_0|^2 \ll L^2$ . Перевальная точка в пространстве  $\{x_m\}$ , определяемая первым членом в (15)

$L \sqrt{M \langle \tilde{x} | \tilde{K} | \tilde{x} \rangle / L^2} = L f(\tilde{x})$  ( $f(\tilde{x}) \sim 1$ ), и соответствует эквидистантному расположению точек  $x_1^0, \dots, x_{M-1}^0$  на оси  $x$  между  $\tilde{r}'$  и  $\tilde{r}$ , при этом

$\sqrt{M \langle \tilde{x} | \tilde{K} | \tilde{x} \rangle} = L = |\tilde{r}' - \tilde{r}| = |x_M - x_0|$ . В результате интегрирования по  $d\{x_m\}$  можно получить как обычное параболическое приближение для  $G(r, r', 1/2)$ , так и ряд его возможных уточнений.

**5. Расщепление средних.** Для корреляции двух полей в точках  $r'$  и  $r''$ , создаваемых точечными источниками, расположенными в точках с координатами  $r'_0$  и  $r''_0$ , также можно получить выражение в виде интеграла по траекториям, которое для некоррелированных рассеивателей выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} G(r', r'_0, z' |_{z'=1/2}) G^*(r'', r''_0, z'' |_{z''=1/2}) &= \int_0^\infty dl' \int_0^\infty dl'' \times \\ &\times \exp(iz'l') \exp(-iz''l'') \theta(l') \theta(l'') (2\pi i \tau')^{-Mv/2} \times \\ &\times (-2\pi i \tau'')^{-Mv/2} \int \dots \int d\{r_m'\} \times \\ &\times \exp[i \langle \tilde{r}' | \tilde{K} | \tilde{r}' \rangle / \tau' - i \langle \tilde{r}'' | \tilde{K} | \tilde{r}'' \rangle / \tau'' + n \int dR \tilde{f}] |_{z'=1/2} |_{z''=1/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\tilde{f} = \exp[-i\tau' \sum_m V(|r_m - R|) + i\tau'' \sum_m V^*(|r_m - R|)] - 1$$

для  $\tilde{L} = 1$ . Для функционала  $\tilde{f}$  имеет место следующее тождество:

$$\tilde{f} = f' + f'' + f'f'', \quad (17)$$

где

$$f' = \exp[-i\tau' \sum_m V(|r'_m - R|)] - 1,$$

$$f'' = \exp[i\tau'' \sum_m V^*(|r''_m - R|)] - 1.$$

Если минимальное расстояние между траекториями  $\{r'_m\}$  и  $\{r''_m\}$  больше  $\sigma$ , то перекрестный член  $f'f''$  тождественно равен нулю. Вклад члена  $n \int dR f'f''$  также можно пренебречь, если области главных вкладов в  $G(r', r'_0, l')$  и  $G''(r'', r''_0, l'')$  удалены друг от друга на рас-

стояние, большее  $\sigma$ , тогда

$$\overline{G(r', r'_0, 1/2) G^*(r'', r''_0, 1/2)} \simeq \overline{G(r', r'_0, 1/2)} \cdot \overline{G^*(r'', r''_0, 1/2)}.$$

Аналогичное расщепление возможно в практически интересном случае, когда  $r' = r''$ , а точки  $r'_0$  и  $r''_0$  находятся в области порядка зоны Френеля в плоскости, удаленной от точки  $r' = r''$  на расстояние  $L$ . В этом случае  $|r'_0 - r''_0| \simeq \sqrt{2\pi L}$  ( $\sqrt{2\pi L}$  — размер зоны Френеля), при этом буквенная оценка неравенства  $|n \int dR f' f''| \ll 1$  имеет следующий вид

$$\sqrt{L} \ll \sqrt{2\pi} / |n \sigma^3 f' f''|, \quad (18)$$

где в качестве  $f'$  и  $f''$  берут их характерные значения, причем модули  $|f'|$  и  $|f''|$  порядка единицы для  $|\xi\sigma| \geq 1$  и порядка  $|\xi\sigma|$  для  $|\xi\sigma| \ll 1$ . Расщепление невозможно, если на концы траекторий наложить более жесткое ограничение  $|r'_0 - r''_0| \leq \sigma$ , которому, однако, отвечает по сравнению со случаем  $|r'_0 - r''_0| \sim \sqrt{2\pi L}$  следующий параметр малости  $\sigma/\sqrt{2\pi L} \ll 1$ , возникающий из геометрического рассмотрения соответствующих этим ограничениям мер на плотности, содержащей  $r'_0$  и  $r''_0$ . Таким образом, расщепление возможно, если

$$\sqrt{\sigma/2\pi} \ll \sqrt{L}/\sigma \ll \sqrt{2\pi/\sigma} / |n \sigma^3 f' f''|. \quad (19)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть средние от произведений, не содержащих комплексно-сопряженные функции Грина  $G^*(r, r'l)$ , а также проанализировать соответствующие средние для взаимодействующих рассеивателей.

**6. Среднее поле и средняя интенсивность.** Для возможности сопоставления предлагаемого в данной работе приближения со сферическим параболическим приближением [10] рассмотрим поле излучателя, расположенного в плоскости  $x=0$  и имеющего распределение комплексной амплитуды  $\varphi_0(\rho)$ , где  $r = (x, \rho)$ , а  $\varepsilon(\omega, r)=0$  при  $x<0$ . Уравнение (1) дополним граничным условием  $\varphi(0, \rho) = \varphi_0(\rho)$  и условием излучения на бесконечности при  $x>0$ . Решение данной задачи, как показано в [4], выражается в виде

$$\varphi(x, \rho) = 2 \int_{x=0} d\rho' \varphi_0(\rho') \partial G(x, \rho; x'|, \rho') \partial/x', \quad (20)$$

где  $G$  — функция Грина уравнения (1) в бесконечном пространстве с симметричным относительно плоскости  $x=0$  случайным расположением рассеивателей. Условие зеркальной симметрии в положении рассеивателей относительно плоскости  $x=0$  как любое граничное условие вносит в интегральные характеристики, а именно в усредненное без данного условия поле  $\varphi$ , погрешность порядка  $b/L$ , где  $b$  — радиус корреляции рассеивателей [19].

Заметим, что средняя интенсивность поля при  $x>0$   $\overline{\varphi(r)\varphi^*(r)}$  выражается через средние от произведения  $\overline{G(r, r_0, 1/2) G^*(r, r_0, 1/2)}$  типа (16)

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(r)\varphi^*(r)} &= 4 \int d\rho \int d\rho' \varphi_0(\rho) \varphi_0^*(\rho') \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x'_0} \left( \overline{(G(r, x_0|, \rho_0, 1/2) G^*(r, x'_0|, \rho'_0, 1/2))} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

Главный вклад в интеграл (21) дает область порядка зоны Френеля  $|r'_0 - r'_0| \simeq \sqrt{2\pi}L$ , где  $L = |x|$  — расстояние от точки до плоскости  $x=0$  [1]. При выполнении неравенства (19) среднее от произведения расщепляется на произведение средних  $\overline{GG^*} \simeq \bar{G} \cdot G^*$  и для средней интенсивности, равной в случае нормального падения плоской волны  $\exp(ix)$  энергетическому коэффициенту прозрачности  $T$  слоя толщины  $L$ , получаем оценку

$$T = \overline{\varphi(r)\varphi^*(r)} \simeq \overline{\varphi(r)} \cdot \overline{\varphi^*(r)}. \quad (22)$$

Данное приближение позволяет существенно упростить задачу и значительно сэкономить время расчета на ЭВМ, так как вместо четырехкратного интеграла по  $\int d\rho \int d\rho'$  требуется теперь рассчитать двухкратный интеграл по  $\int d\rho$ . Расчет  $\bar{G}(r; 0, \rho; 1/2)$  при фиксированном  $r$  для каждого  $\rho$  проводится с помощью комплексного метода Монте-Карло [9, 11].

**7. Квазиклассическое и одночастичное приближения.** Показатель экспоненты в (14) зависит от интегральной характеристики  $n \int dR f$  рассеивающего потенциала  $V(|r - R|)$ , поэтому можно ожидать, что чувствительность  $G$  к конкретной форме  $V(|r - R|)$  будет слабой при фиксированных характерных буквенных параметрах  $\xi$  и  $\sigma$ . Для простоты возьмем в качестве рассеивателей одинаковые шарики с диаметром  $\sigma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ . Используя метод перевала по параметру  $\sigma \gg 1$  [10] для интеграла  $n \int dR f$ , легко получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} n \int dR f &= n\sigma^3 (L/\sigma) \pi f(\eta) + 2\pi i \sigma^{-3} (4\xi/\sigma)^{-1} n\sigma^3 \times \\ &\times \{(L/M) \sum_{n=0}^{M-1} [\exp(-i(l_+/M) \cdot \sum_m V(|r_m - e_n|)) - \exp(-i\eta)]\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\eta = l_+ \xi \sigma / L, f(\eta) = 0.5 (\exp(-i\eta) (i\eta + 1) - 1) / \eta^2 - 1/4, \quad L = |r - r'|,$$

$\{r_m\}$  — траектория, соединяющая точки  $r$  и  $r'$ , а  $\{e_n\}$  — прямая, соединяющая эти же точки. Данное выражение используется в дальнейшем в качестве эффективного «самовоздействующего потенциального поля» при расчетах функции Грина  $\bar{G}$ .

В квазиклассическом приближении ( $\sigma \gg 1$ ) главный вклад в интеграл  $n \int dR f$  дает прямолинейная траектория, что соответствует первому слагаемому в (23). Для  $\bar{G}(r, r_0, 1/2)$  можно получить простое аналитическое выражение, и тогда из (20) имеем

$$\varphi(L) = i \exp[(i + B/\sigma)L], \quad (24)$$

где  $B = n\sigma^3 \pi f(\eta)$  (см. (23)),  $L = |x|$  — расстояние до границы  $x=0$ , а  $T \simeq \overline{\varphi(L)} \cdot \overline{\varphi^*(L)}$ .

Для малых плотностей рассеивателей в условиях, когда  $\lambda \ll n^{-1/3}$ , справедлива независимая буквенная оценка энергетического коэффициента прозрачности  $T$  [20–22]:

$$T = \overline{\varphi(L)} \overline{\varphi^*(L)} = \exp[-nLQ], \quad (25)$$

где  $Q$  — одночастотное сечение рассеяния на шаре, которое может быть точно рассчитано по теории Ми.

Таким образом, энергетический коэффициент прозрачности  $T$  для малых плотностей рассеивателей  $n\sigma^3 \ll 1$  может быть рассчитан че-

тырьмя способами. Первые два способа используют численный метод Монте-Карло (ММК) для расчета функции Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 1/2)$  в сферическом параболическом приближении [11] и приближении (14). Аналитический расчет проводится в квазиклассическом приближении (24) и одночастичном приближении (25).

8. Результаты расчетов. Переходим к обсуждению полученных результатов. На рис. 1 (см. на вклейке) для малых плотностей рассеивателей  $\sigma^3 = 0,005$  и  $\sigma^3 = 0,05$  представлены результаты расчета энергетического коэффициента прозрачности  $T$  в функции от отношения дифракционного параметра  $\rho = k\sigma/2$  к  $2\pi$  при  $\xi = -0,75$  и  $L = 2,25\sigma$ . Для плотности  $\sigma^3 = 0,005$  результаты расчета ММК в приближении (14) представлены светлыми кружками 1. Линии 4 и 5 соответствуют расчетам в квазиклассическом приближении (24) и одночастичном приближении (25). Имеет место хорошее совпадение указанных методов расчета. Результаты ММК, полученные в сферическом параболическом приближении [11], практически совпадают с квазиклассическим приближением (24).

Для плотности  $\sigma^3 = 0,05$  точки 2 (на рис. 1 — темные кружки), полученные с помощью ММК, ложатся на осциллирующие линии для  $\xi = -0,75$ . В случае поглощающих рассеивателей для  $\xi = -0,75 - 0,5i$  в результате расчетов ММК точки 3 (на рис. 1 — крестики), практически не осциллируют. Линии 6 и 7 соответствуют квазиклассическому приближению (24), соответственно, для  $\xi = -0,75$  и  $\xi = -0,75 - 0,5i$ . Одночастичное приближение (25) представлено линией 8. Заметим, что в этом случае среднее расстояние между краями шариков равно полутора диаметрам и результаты ММК приближаются к одночастичному приближению (25) и приближению (24), когда  $\lambda \ll n^{-1/3}$ .

Существенное усиление осциляций, соответствующих результатам ММК в приближении (14), по сравнению с аналитической формулой (25), по-видимому, связано с усилением резонансных явлений в рассеянии волн на системе диэлектрических шариков. Известно, что крупномасштабные осцилляции  $Q$  и, соответственно,  $T$  связаны с существованием поляризационных резонансов в рассеянии волн при определенных отношениях  $\lambda/(\sigma/2)$  и обусловлены расположением полюсов фаз рассеяния на плоскости комплексного  $k$  [3]. Плотностные поправки, как правило, приводят к приближению части полюсов к действительной оси и, соответственно, к более резкому изменению  $G$  в их окрестности и усилению резонансных явлений [3].

Поглощение энергии в случае, когда  $\text{Im}(\xi) < 0$ , препятствует развитию резонансных явлений и точки, рассчитанные ММК, ложатся на очень плавную линию 3 для  $\xi = -0,75 - 0,5i$ . В результате поглощение энергии в достаточно тонких слоях может приводить к «просветлению», которое физически, по-видимому, можно объяснить сужением индикаторы рассеяния вперед [20]. Собственно поглощение энергии можно оценить из того, что в квазиклассическом приближении линия 7 всегда расположена немного ниже линии 6. Заметим, что расчеты ММК величины  $T$  в сферическом параболическом приближении весьма близки к квазиклассическому приближению (24) и не улавливают заметных колебаний при  $\xi = -0,75$  [11].

Рассмотрим расчеты при больших плотностях рассеивателей, когда выполнение условий применимости обеспечивается за счет малости  $\xi$ . На рис. 2—4 представлены расчетные зависимости энергетического коэффициента прозрачности  $T$  от  $\text{Re}(\xi)$  при  $\sigma^3 = 0,4$ ,  $L = 2,25\sigma$  и, соответственно, для отношений  $\lambda/(\sigma/2)$ , равных  $0,25$  ( $\rho = 8\pi$ ),  $0,5$  ( $\rho = 4\pi$ ) и  $1$  ( $\rho = 2\pi$ ). Линии 1 и 2 соответствуют результатам ММК и квазиклассическому приближению (24) для  $\text{Im}(\xi) = 0$ . Аналогично линии 3 и 4 представляют результаты расчетов для  $\text{Im}(\xi) = -0,025$ . Линии 1 и 2 на рис. 2—4 достаточно хорошо воспроизводят результаты, полученные в сферическом параболическом приближении в [11], находясь в качественном соответствии с экспериментальными данными и об-

щими закономерностями, известными для рассеивающих дисперсионных фильтров [21, 22]. Более подробно этот вопрос обсуждается в [11].

Роль поглощения иллюстрируется поведением линий 3 и 4. Как и ранее, существование поглощения может приводить к «просветлению» и «помутнению» хаотической системы шариков в зависимости от соотношений между параметрами системы. Заметим, что расхождение между расчетом ММК и квазиклассикой уменьшается с ростом  $\sigma/\lambda$ .

Автор благодарит Л. И. Подлубного, В. И. Татарского и Ю. Н. Барabanenкова за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. Т. 2.
2. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А. и др. // УФН. 1970. Т. 102. № 1. Вып. 3. С. 3.
3. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
4. Кляцкин В. И., Татарский В. И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 2. С. 624.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
6. Лутовинов В. С., Чечеткин В. Р. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 5(11). С. 1602.
7. Рожнов Г. В. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 50.
8. Барабаненков Ю. Н. // УФН. 1975. Т. 117. Вып. 1. С. 49.
9. Филинов В. С. // ЖВММФ. 1986. Т. 26. Вып. 1. С. 35.
10. Филинов В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 11. С. 1368.
11. Филинов В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 12. С. 1506.
12. Рязанов М. И. Электродинамика конденсированного вещества. — М.: Наука, 1984.
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
14. Проблемы математической физики / Под ред. М. Ш. Бирман. — Л.: Гос. ун-т, 1967. Вып. 2.
15. Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П. и др. Электронная теория неупорядоченных полупроводников. — М.: Наука, 1981.
16. Рюэль Д. Статистическая механика. — М.: Мир, 1971.
17. Зеленер Б. В., Норман Г. Э., Филинов В. С. Теория возмущений и псевдолептонтенциал в статистической термодинамике. — М.: Наука, 1981.
18. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978.
19. Фишер И. З. Статистическая теория жидкостей. — М.: Физматгиз, 1961.
20. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. — М.: ИЛ, 1961.
21. Верещагин В. Г., Понявина А. Н. // ЖПС. 1985. Т. 43. Вып. 4. С. 645.
22. Верещагин В. Г., Сильванович Н. И. // ЖПС. 1986. Т. 44. Вып. 6. С. 1017.

Институт высоких температур  
АН СССР

Поступила в редакцию  
16 октября 1989 г.

## MODIFIED PATH INTEGRALS AND COMPLEX MONTE CARLO METHOD IN THE STATISTICAL THEORY OF WAVE PROPAGATION IN DISPERSIVE MEDIA

V. S. Filinov

A new representation of the Green function of wave equation is developed as modified path integrals. The transition of these integrals into Feynman integrals is examined. The transparency coefficient of a layer chaotically distributed three-dimensional scatterers with a complex dielectric permeability is calculated by the complex Monte Carlo method. Collective resonance phenomena in wave scattering have been detected.

УДК 537.86:519.2

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ПОДХОД  
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

*M. A. Гузев*

Рассматривается скалярная нестационарная задача о падении плоской волны на слой случайной среды. В пространственно-временном представлении получено уравнение для среднего поля, решение которого дается квадратурой. Решена обратная задача о восстановлении интенсивности флуктуаций и радиуса корреляции по обратно-рассеянному полю.

**1.** Задача о распространении нестационарных волновых процессов в линейных средах с пространственными флуктуациями является одной из центральных в общей теории волн. Во многих случаях эти процессы описываются классическим волновым уравнением с заданными краевыми условиями. Традиционный способ исследования состоит в применении преобразования Фурье и дальнейшем анализе стационарной задачи (см., например, [1-3]). Краевой характер задачи не позволяет применить аппарат теории марковских процессов [4]. В связи с этим были развиты методы формулировки вспомогательной задачи с начальными условиями, к которой марковское приближение применимо непосредственно, поскольку задача с начальными данными обладает свойством динамической причинности [5-7].

В пространственно-временном или  $xt$ -представлении изучение статистических характеристик волн во флуктуирующих линейных средах еще не проводилось. В данной работе предлагается соответствующая техника  $xt$ -анализа, которая используется для вычисления среднего волнового поля во флуктуирующей среде и решения обратной задачи о восстановлении интенсивности флуктуаций и радиуса корреляции по обратнорассеянному полю. Результаты статьи кратко изложены в [8].

**2.** Будем рассматривать скалярную нестационарную задачу о падении плоской волны на слой флуктуирующей среды. Слой занимает часть пространства  $L_0 \leq x \leq L$ , и справа на него падает плоская волна  $\varphi = \varphi(\omega t + \omega(x-L)/c_0)$ , где  $\omega$  определяет временной масштаб, а  $c_0$  — скорость распространения волны в однородном пространстве. В слое волновое поле  $u = u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) u = 0, \quad (1)$$

в котором  $c = c(x) = c_0 / (1 + \varepsilon(x))$  — локальная скорость волны, определяющаяся диэлектрической проницаемостью или показателем преломления среды, а  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  предполагается гауссовым случайным процессом с нулевым средним и корреляционной функцией  $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle = \sigma^2 \exp(-\lambda|x-x'|)$ , где скобки обозначают операцию статистического усреднения,  $\sigma^2 \ll 1$  характеризует интенсивность флуктуаций,  $r_c = 1/\lambda$  — радиус корреляции. Падающая волна взаимодействует со средой, так что поле  $u(x, t)$  в областях  $x \geq L$  и  $x \leq L_0$  имеет, соответственно, вид

$$u(x, t) = \varphi(\omega t + \omega(x-L)/c_0) + R(\omega t - \omega(x-L)/c_0),$$

$$u(x, t) = T(\omega t + \omega(x-L_0)/c_0).$$

Требуя непрерывность  $u(x, t)$  и пространственных производных на границах слоя, имеем краевые условия для уравнения (1):

$$\left( \partial_x + \frac{1}{c_0} \partial_t \right) u(x, t) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \partial_t \varphi(\omega t), \quad \left( \partial_x - \frac{1}{c_0} \partial_t \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (2)$$

Задача ставится следующим образом: нужно найти усредненное по «шуму»  $\varepsilon(x)$  среднее волновое поле  $\langle u \rangle$ , определяемое решением задачи (1), (2). Данная задача является краевой, поэтому нельзя воспользоваться марковским приближением без дополнительных предположений. С этой целью перейдем от поля  $u$  к паре новых полей  $(u_+, u_-)$ , для которых марковское приближение оказывается справедливым с некоторой точностью по  $\sigma^2$ .

Сперва введем безразмерные переменные: характерный временной масштаб задается  $1/\omega$ , а характерный пространственный масштаб определяется  $c_0/\omega$ , тогда  $u$  удовлетворяет уравнению (1), в котором  $c=1/(1+\varepsilon)$ , при этом корреляционная функция  $\langle \varepsilon(x) \varepsilon(x') \rangle = -\sigma^2 \exp(-p|x-x'|)$ ,  $p=\lambda c_0/\omega$ , а краевые условия записываются в виде  $(\partial_x + \partial_t) u(x, t) \Big|_{x=L} = 2\partial_t \varphi(t)$ ,  $(\partial_x - \partial_t) u(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0$ . Перейдем от поля  $u$  к новой паре полей  $(u_+, u_-)$  по формулам

$$u(x, t) = \sqrt{c(x)} (u_+(x, t) + u_-(x, t)), \quad (3)$$

$$\partial_x u(x, t) = 1/\sqrt{c(x)} \partial_t (u_+(x, t) - u_-(x, t)).$$

Несложные преобразования дают уравнения для  $u_+$ ,  $u_-$  и условия к ним:

$$(\partial_x \mp (1+\varepsilon) \partial_t) u_\pm = (\xi/2) u_\mp, \quad \xi = \partial_x \ln (1+\varepsilon); \quad (4)$$

$$u_+(x, t) \Big|_{x=L} = \frac{2\sqrt{1+\varepsilon(L)}}{2+\varepsilon(L)} + \frac{\varepsilon(L)}{2+\varepsilon(L)} u_-(L, t), \quad (5)$$

$$u_-(x, t) \Big|_{x=L_0} = \frac{\varepsilon(L_0)}{2+\varepsilon(L_0)} u_+(L_0, t).$$

Искомым объектом является среднее поле  $\langle u \rangle$ , а  $u$  определяется соотношением (3). Функции  $u_+$ ,  $u_-$  как решения задачи (4), (5) являются функционалами от случайных процессов  $\varepsilon$ ,  $\xi$ , поэтому статистическое усреднение в  $\langle \dots \rangle$  проводится по всем их реализациям. Коррелятор  $\langle \sqrt{c} u_\pm \rangle$  вычисляем с помощью известной формулы расщепления корреляций [9]: для функционалов  $F(u)$ ,  $G(u)$ , зависящих от случайного процесса  $u$ ,

$$\langle F(u) G(u) \rangle = \langle \Omega(1, i\delta u) R(u) \rangle, \quad (6)$$

$$\Omega(v) = \frac{\langle F(u) \exp[i \int dt u(t)v(t)] \rangle}{\langle \exp[i \int dt u(t)v(t)] \rangle}.$$

Выбирая  $u = (\varepsilon, \xi)$ ,  $F = \sqrt{c}$ ,  $G = u_\pm$  и разлагая первый множитель в правой части (6) по степеням дифференциального оператора, получаем ряд для  $\langle u \rangle$  по  $\sigma^2$ . В нем мы будем контролировать члены  $\sim 1$ ,  $\sigma^2$ , пренебрегая старшими степенями по  $\sigma^2$ , что соответствует удержанию членов  $\sim 1$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  в  $\sqrt{c}$ . В этом случае  $\langle u \rangle$  определяется  $\langle u_\pm \rangle$ ,  $\langle \delta u_\pm \rangle$ , где  $\delta$  обозначает вариационную производную по  $\varepsilon$  или  $\xi$ . Последняя входит в  $\langle u \rangle$  через комбинацию вида  $\langle \varepsilon(x) \varepsilon(s) \rangle \langle \delta u_\pm(x, t) / \delta \varepsilon(s) \rangle$ ,  $\langle \varepsilon(x) \xi(s) \rangle \times \langle \delta u_\pm(x, t) / \delta \xi(s) \rangle$ , в которой по повторяющейся переменной  $s$  подразумевается сверка (интегрирование) на интервале  $[L_0, L]$ . Корреляторы  $\langle \varepsilon \varepsilon \rangle$ ,  $\langle \varepsilon \xi \rangle$  имеют порядок  $\sigma^2$  (см. (9)), поэтому вариационные производ-

ные  $\langle \delta u_{\pm} \rangle$  следует вычислять в ведущем порядке по  $\sigma^2$ , что соответствует пренебрежению членами  $\sim \varepsilon, \xi$  в уравнении (4). С другой стороны, для каждой из функций  $\langle u_+ \rangle, \langle u_- \rangle$  поставлено начальное условие (5) с точностью до членов порядка  $\sigma^2$ , такой же порядок имеет вклад правой части (4) в решение  $\langle u_{\pm} \rangle$ , поэтому задача (4), (5) обладает динамической причинностью с точностью до  $\sigma^2$ . Отсюда следует, что свертка  $\langle \delta u_{\pm} \rangle, \langle \delta u_+ \rangle$  с корреляторами выполняется на интервалах  $[L_0, x]$  и  $[x, L]$  соответственно.

Предложенное приближение для вычисления среднего поля естественно назвать диффузионным (марковским) приближением. Следующий раздел посвящен его реализации.

3. Уравнение для  $\langle u_{\pm} \rangle$  следует из (4):

$$(\partial_x \mp \partial_t) \langle u_{\pm} \rangle \mp \langle \varepsilon u_{\pm} \rangle = \frac{1}{2} \langle \xi u_{\pm} \rangle. \quad (7)$$

Корреляции  $u_+, u_-$  с  $\varepsilon, \xi$  вычисляются с помощью справочной формулы (6), в которой следует  $F \rightarrow \varepsilon, \xi, G \rightarrow u_+, u_-$ , тогда

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x) u_{\pm} \rangle &= \langle \varepsilon(x) \varepsilon(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_{\pm}}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle + \langle \varepsilon(x) \xi(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_{\pm}}{\delta \xi(s)} \right\rangle, \\ \langle \xi(x) u_{\pm} \rangle &= \langle \xi(x) \varepsilon(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_{\pm}}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle + \langle \xi(x) \xi(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_{\pm}}{\delta \xi(s)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Напомним, что по повторяющейся переменной  $s$  проводится интегрирование: для  $u_+$  оно выполняется на интервале  $[x, L]$ , а для  $u_-$  —  $[L_0, x]$ . Тогда корреляционные функции процессов  $\varepsilon, \xi$  с точностью до членов порядка  $\sigma^2$  включительно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x) \xi(s) \rangle &= \sigma^2 \partial_s \exp(-p|x-s|), \quad \langle \xi(x) \varepsilon(s) \rangle = \sigma^2 \partial_x \exp(-p|x-s|), \\ \langle \xi(x) \xi(s) \rangle &= \sigma^2 p [\delta(x-s) - p \exp(-p|x-s|)]. \end{aligned} \quad (9)$$

В рассматриваемой задаче присутствуют два безразмерных параметра:  $\sigma^2$ , характеризующий интенсивность флуктуаций, и  $p$ , равный отношению характерной длины волны  $c_0/\omega$  к радиусу корреляции  $1/\lambda$ . Предполагаем, что выполнено условие  $\sigma^2 \ll 1/p \ll 1$ . В решении мы контролируем члены  $\sim 1, \sigma^2$ , пренебрегая старшими вкладами по  $\sigma^2$ . Граница «выхода» за  $\sigma^2$  определяется параметром  $1/p$ , так как отбрасываемые члены  $\sim \sigma^4$  значительно меньше тех, которые имеют порядок  $\sigma^2/p$ . Поэтому для  $\langle u_{\pm} \rangle$  строим двойное асимптотическое разложение: вариационные производные в (8) вычисляем в ведущем порядке по  $\sigma^2$ , а свертки разложим в ряд по  $1/p$ , проводя интегрирование по частям и оставляя члены при нулевой и первой степени  $1/p$ , что соответствует учету вкладов  $\sim \sigma^2, D = \sigma^2/p$  в (8) ( $D$  имеет смысл безразмерного коэффициента диффузии). Для простоты вычислений рассмотрим полупространство ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ), тогда

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x) \varepsilon(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_+}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle &= -D e^{-p(s-x)} \left\langle \frac{\delta u_+}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle \Big|_x^L, \\ \langle \varepsilon(x) \xi(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_+}{\delta \xi(s)} \right\rangle &= e^{-p(s-x)} (\sigma^2 + D \partial_s) \left\langle \frac{\delta u_+}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle \Big|_x^L, \\ \langle \varepsilon(x) \varepsilon(s) \rangle \left\langle \frac{\delta u_-}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle &= D \left\langle \frac{\delta u_-}{\delta \varepsilon(x)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

а остальные свертки можно записать аналогично.

Неизвестными функциями остаются вариационные производные  $\langle \delta u_{\pm} \rangle$ . Они, как следует из (4), с нужной точностью удовлетворяют уравнению  $(\partial_x \mp \partial_t) \langle \delta u_{\pm} \rangle = 0$ , решение которого при начальных условиях  $\langle \delta u_{\pm}(x, t) / \delta \varepsilon(x) \rangle = -\partial_t \langle u_{\pm}(x, t) \rangle$ ,  $\langle \delta u_{\pm}(x, t) / \delta \xi(x) \rangle = \mp(1/2) \langle u_{\mp}(x, t) \rangle$  дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta u_{\pm}(x, t)}{\delta \varepsilon(s)} \right\rangle &= -\partial_t \langle u_{\pm}(x, t) \rangle, \\ \left\langle \frac{\delta u_{\pm}(x, t)}{\delta \xi(s)} \right\rangle &= \mp \frac{1}{2} \langle u_{\mp}(x, t \pm 2(x-s)) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Комбинируя (7)–(11), получаем укороченные уравнения для средних полей  $\langle u_- \rangle$ ,  $\langle u_+ \rangle$ :

$$\begin{aligned} (\partial_x - (1 - (\sigma^2/2)) \partial_t + D(2 - e^{-p(L-x)}) \partial_{tt}) \langle u_+(x, t) \rangle &= 0, \\ (\partial_x + (1 - (\sigma^2/2)) \partial_t - 2D \partial_{tt}) \langle u_-(x, t) \rangle + & \\ + (\sigma^2/4)(p - 2\partial_t) e^{-p(L-x)} \langle u_-(x, t+2(x-L)) \rangle + & \\ + D e^{-p(L-x)} \partial_{tt} \langle u_-(x, t+2(x-L)) \rangle = & \\ = (D \partial_{tt} - \sigma^2(1 - (1/2)e^{-p(L-x)}) \partial_t) \langle u_+(x, t) \rangle. & \end{aligned} \quad (12)$$

Решение  $\langle u_{\pm} \rangle$  необходимо знать с точностью до членов  $\sim \sigma^2, D$  включительно, с такой же точностью следует поставить начальные условия для уравнения (12). Из (12) видно, что  $\langle u_- \rangle \sim \sigma^2 \langle u_+ \rangle$ , тогда усредняя в (5) и расщепляя корреляции  $u_-$ ,  $u_+$  с  $\varepsilon$ , получаем  $\langle u_+ \rangle|_{x=L} = (1 + \sigma^2/8 + D/2\partial_t) \psi(t) \equiv \psi(t)$ ,  $\langle u_- \rangle|_{x \rightarrow \infty} = 0$ .

4. Ввиду линейности системы (12) сделаем преобразование Фурье по  $t$ , тогда уравнения для фурье-образов  $\langle \hat{u}_+ \rangle$ ,  $\langle \hat{u}_- \rangle$  приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} (\partial_x - ik\gamma_+ - Dk^2(2 - e^{-p(L-x)})) \langle \hat{u}_+ \rangle &= 0, \\ (\partial_x + ik\gamma_- + 2Dk^2 + (Dk^2 + (\sigma^2/4)(p - 2ik)) e^{-(p+2ik)(L-x)}) \langle \hat{u}_- \rangle &= \\ = -(Dk^2 + ik\sigma^2(1 - (1/2)e^{-p(L-x)})) \langle \hat{u}_+ \rangle, & \\ \gamma_+ = 1 - (\sigma^2/2), \quad \gamma_- = 1 + (\sigma^2/2), & \end{aligned} \quad (13)$$

начальные условия  $\langle \hat{u}_+ \rangle|_{x=L} = \hat{\psi}$ ,  $\langle \hat{u}_- \rangle|_{x \rightarrow \infty} = 0$ . Интегрирование первого уравнения (13) дает

$$\langle \hat{u}_+ \rangle = \hat{\psi} \exp \left[ -(2Dk^2 + ik\gamma_+) (L-x) + \frac{Dk^2}{p} (1 - e^{-p(L-x)}) \right]. \quad (14)$$

Ясно, что второй член в показателе экспоненты (14) можно положить равным нулю с нужной точностью, тогда, выполняя обратное преобразование Фурье, имеем следующее интегральное представление для  $\langle u_+ \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle u_+ \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int dt_1 \psi(t_1) e^{-\varphi^2/4\Gamma}, \\ \varphi &= t - t_1 - \gamma_+(L-x), \quad \Gamma = 2D(L-x). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение для  $\langle \hat{u}_- \rangle$  запишем в виде  $\langle \hat{u}_- \rangle = u_0 e^F$ . Отсюда и из (13) следует

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\hat{\psi} \left[ Dk^2 + ik\sigma^2 \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-p(L-x)} \right) \right] \times \quad (16)$$

$$\times \exp[-F - (2Dk^2 + ik\gamma_+) (L-x)],$$

$$F = (2Dk^2 + ik\gamma_-) (L-x) + \exp[-(p+2ik)(L-x)] [Dk^2 + \newline + \sigma^2(p-2ik)/4] / (p+2ik).$$

Поскольку  $u_0$  имеет порядок  $\sigma^2$ , то последним слагаемым в  $F$  можно пренебречь при построении решения для  $u_0$  с нужной точностью. Вычисляя квадратуру от правой части (16), имеем

$$\langle u_- \rangle = -\hat{\psi} \left[ \frac{Dk + i\sigma^2/2}{2(2Dk+i)} + \frac{ik\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{2(2Dk^2+ik)} - \right. \right. \quad (17)$$

$$\left. \left. - \frac{e^{-p(L-x)}}{4Dk^2+2ik+p} \right) \right] \exp[-(2Dk^2+2ik\gamma_+) (L-x)].$$

Выражение в фигурных скобках запишем в виде суммы простых множителей и для каждого из них воспользуемся интегральным представлением  $1/(1+\alpha i) = \int_0^\infty ds \exp[-s(1+\alpha i)]$ ,  $\alpha$ —вещественное число. После этого выполним обратное преобразование Фурье, изменяя последовательность интегрирования по  $k$ ,  $s$  и вычисляя гауссов интеграл по  $k$ , получаем

$$\langle u_- \rangle = -\frac{1}{8\sqrt{\pi\Gamma}} \int dt_1 \Psi(t_1) \left[ \exp\left(-\frac{\varphi^2}{4\Gamma}\right) - \int_0^\infty ds \left( (1-2\sigma^2) \times \right. \right. \quad (18)$$

$$\times \exp\left[-\frac{(\varphi+2Ds)^2}{4\Gamma} - s\right] + \frac{\sigma^2}{2D(z+y)} \left\{ y \exp\left[-\frac{(\varphi+s)^2}{4\Gamma} - sy\right] - \right. \\ \left. \left. - z \exp\left[-\frac{(\varphi-s)^2}{4\Gamma} - sz\right] \right\} \exp[-p(L-x)] \right],$$

где  $z(y)$  — положительная (отрицательная) мнимая часть корней квадратного уравнения  $4Dk^2+2ik+p=0$ , а параметры  $\varphi$ ,  $\Gamma$  определены в (15).

Формулы (15), (18) — окончательное выражение для средних полей  $\langle u_+ \rangle$ ,  $\langle u_- \rangle$ . Зная  $\langle u_\pm \rangle$ ,  $\langle \delta u_\pm \rangle$  (см. (11)), вычисляем среднее поле  $\langle u \rangle$ :

$$\langle u \rangle = \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{8} - \frac{D}{4} (1 - 2e^{-p(L-x)}) \partial_t \right] \langle u_+ \rangle + \langle u_- \rangle. \quad (19)$$

Физически интересным (с точки зрения приложения) является случай  $\psi(t) = \theta(t) [(1+\sigma^2/8) \cos t - (D/2) \sin t]$ . Такой выбор  $\psi$  соответствует рассмотрению задачи о мгновенном включении тонального источника, расположенного на границе  $x=L$ . Эталонный интеграл для  $\langle u_+ \rangle$  имеет вид  $\int_0^\infty dt_1 \exp(-\varphi^2/4\Gamma + i\mu t_1)$ ,  $\mu = \pm 1$ . Выполним в нем комплексную замену переменной  $t_1 \rightarrow t_1 + i\mu\sqrt{\Gamma}$  и учтем, что подынтег-

ральная функция является аналитической по  $t_1$ , тогда кривую интегрирования выберем так, чтобы она проходила параллельно вещественной и мнимой осям. После несложных преобразований имеем

$$\langle u_+ \rangle = \frac{1}{2} e^{-\Gamma} (1 + \operatorname{erf}(a_+)) \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8} \right) \cos 2\sqrt{\Gamma} a_+ - \frac{D}{2} \sin 2\sqrt{\Gamma} a_+ \right] - \\ - e^{-\Gamma} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8} \right) \operatorname{es}(\sqrt{\Gamma}) - \frac{D}{2} \operatorname{ec}(\sqrt{\Gamma}) \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{es}(\sqrt{\Gamma}) \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\Gamma}} ds e^{s^2 - a_+^2} \left\{ \begin{array}{l} \sin 2a_+(\sqrt{\Gamma} - s) \\ \cos 2a_+(\sqrt{\Gamma} - s) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

где  $a_+ = \varphi_+/2\sqrt{\Gamma}$ ,  $\varphi_+ = t - \gamma_+(L - x)$ ,  $\operatorname{erf}(a) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^a ds \exp(-s^2)$  — интеграл вероятности ошибок.

Среднее поле  $\langle u_- \rangle$  дается формулой (18), в которой интегрирование по  $t_1$  проводится по положительной полуоси. Запишем правую часть (18) через однократный интеграл. С этой целью сделаем замену переменной  $\varphi + 2Ds \rightarrow s$  в первом внутреннем интеграле и  $\varphi \pm s \rightarrow s$  во втором внутреннем интеграле, затем интегрируем по частям по переменной  $t_1$ :

$$\begin{aligned} \langle u_- \rangle &= -\frac{1}{8\sqrt{\pi\Gamma}} \left\{ \int_0^\infty dt_1 e^{(-\varphi^2/4\Gamma)} (2\sigma^2 \cos t_1 + 2D(1 + \exp[-p(L-x)] \sin t_1) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{15}{8} \sigma^2 \right) \int_{\varphi_+}^\infty dt_1 \exp \left( -\frac{t_1^2}{4\Gamma} - \frac{t_1}{2D} + \frac{\varphi_+}{2D} \right) - \sigma^2 \exp[-p(L-x)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \int_{-\varphi_+}^\infty dt_1 \exp \left[ -\frac{t_1^2}{4\Gamma} - (t_1 + \varphi_+)z \right] + \int_{\varphi_+}^\infty dt_1 \exp \left[ -\frac{t_1^2}{4\Gamma} - y(t_1 + \varphi_+) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Первый интеграл в (21) можно преобразовать способом, описанным для  $\langle u_+ \rangle$ , а оставшиеся сводятся к интегралам вероятности ошибок. В итоге получим

$$\begin{aligned} \langle u_- \rangle &= -\frac{\sigma^2}{4} e^{-\Gamma} [(1 + \operatorname{erf}(a_+)) \cos 2\sqrt{\Gamma} a_+ - 2\operatorname{es}(\sqrt{\Gamma})] - \\ &\quad - \frac{D}{4} e^{-\Gamma} (1 + e^{-p(L-x)}) [(1 + \operatorname{erf}(a_+)) \sin 2\sqrt{\Gamma} a_+ + 2\operatorname{ec}(\sqrt{\Gamma})] + \\ &\quad + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{15}{8} \sigma^2 \right) (1 - \operatorname{erf}(a_-)) \exp \left[ \frac{2t + \sigma^2(L-x)}{4D} \right] + \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{8} (1 + \operatorname{erf}(s_1)) \exp[(\Gamma z^2 - z\varphi_+ - p(L-x))] + \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{8} (1 - \operatorname{erf}(s_2)) \exp[(\Gamma y^2 - y\varphi_+ - p(L-x)], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $a_- = \varphi_- / 2\sqrt{\Gamma}$ ,  $\varphi_- = t + \gamma_-(L-x)$ ,  $s_1 = (\varphi_+ - 2z\Gamma) / 2\sqrt{\Gamma}$ ,  $s_2 = (\varphi_+ + 2y\Gamma) / 2\sqrt{\Gamma}$ .

Из (19), (20), (22) сразу следует выражение для обратнорассеянного поля  $R(t) = u(L, t) - \varphi(t)$  на границе  $x=L$ :

$$R(t) = \frac{\sigma^2}{4} \exp(-zt) - \frac{\sigma^2}{4} \cos t - D \sin t. \quad (23)$$

«Режущая» экспонента характеризует переходные процессы на границе слоя. Поскольку  $z \cong p/2 = \lambda c_0 / 2\omega$ , то стационарный режим устанавливается быстрее для длинноволновых процессов.

Соотношение (23) позволяет решать обратную задачу о восстановлении статистических характеристик среды. Действительно, зная  $-\partial_t R|_{t=0} \cong z\sigma^2/4$  и  $\partial_{tt} R|_{t=0} \cong (z\sigma)^2/4$ , сразу получаем

$$\lambda = -\frac{2\omega}{c_0} \partial_t \ln \partial_t R|_{t=0}, \quad \sigma^2 = 4 \frac{(\partial_t R)^2}{\partial_{tt} R}|_{t=0}.$$

Автор благодарит В. И. Кляцкина за полезные обсуждения результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980 Т. 23. № 4. С. 442.
2. Шевцов Б. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 25. № 4. С. 434.
3. Burridge R., Papanicolaou G., White B. // SIAM J Appl. Math. 1987. V. 47. № 1. Р. 146.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. Ч. 2. — 463 с.
5. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986. — 256 с.
6. Малахов А. Н., Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 9. С. 1368.
7. Малахов А. Н., Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976 Т. 19. № 10. С. 1559.
8. Гузев М. А. Тезисы докл. 15-й Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике. — Владивосток, 1989. С. 11.
9. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980. — 336 с.

Тихоокеанский океанологический институт  
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию  
3 ноября 1989 г.

УДК 551.463.21

**РАССЕЯНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ  
НА ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ.  
УЧЕТ МНОГОКРАТНЫХ РАССЕЯННЫХ ВОЛН**

С. З. Дунин, Г. А. Максимов

Рассматривается задача о рассеянии скалярных полей на абсолютно отражающих (мягкой и жесткой) статистически шероховатых поверхностях. Получены выражения для коэффициентов отражения среднего поля, учитывающие многократно рассеянные на поверхности волны. Найдено дисперсионное уравнение, определяющее возможность существования локализованных у шероховатой поверхности волн. Установлено, что в обоих случаях мягкой и жесткой слабошероховатых поверхностей поверхностные волны существовать не могут. Показано, что отличие этого вывода от известных результатов связано с более сложной структурой среднего поля, чем это предполагалось ранее Исследована структура среднего поля.

Исследованию влияния шероховатости поверхности на параметры рассеянного поля уделяется значительное внимание в связи с актуальностью этого вопроса для широкого круга практических задач (см., например, [1-4]). Существуют различные подходы к решению этой проблемы, подробный обзор которых можно найти в работах [1-6]. Наибольшее распространение получили метод малых возмущений (ММВ) и метод касательной плоскости (приближение Кирхгофа) [1-5], описывающие различные предельные случаи рассматриваемого явления. В рамках этих подходов были вычислены средние (по реализациям случайной поверхности) моменты отраженного поля.

В ряде задач (например при исследовании возможности существования локализованных у шероховатой поверхности волн) требуется учитывать многократно рассеянные волны. Такой учет в рамках ММВ был проведен в [1, 7, 8]. При этом предполагалось, что среднее поле может быть представлено в виде

$$\langle U(r, z) \rangle = \exp(i\mathbf{k}_0 r - iv_0 z) + V(\mathbf{k}_0) \exp(i\mathbf{k}_0 r + iv_0 z), \quad (1)$$

где  $V(\mathbf{k}_0)$  — коэффициент отражения среднего поля, для которого в случае абсолютно мягкой  $V_D(\mathbf{k}_0)$  и абсолютно жесткой  $V_N(\mathbf{k}_0)$  поверхностей получены выражения [1, 8]

$$V_D(\mathbf{k}_0) = -\frac{1-v_0\zeta_D(\mathbf{k}_0)/K}{1+v_0\zeta_D(\mathbf{k}_0)/K}, \quad (2)$$

$$V_N(\mathbf{k}_0) = \frac{v_0/K - \zeta_N(\mathbf{k}_0)}{v_0/K + \zeta_N(\mathbf{k}_0)},$$

где  $\zeta_D(\mathbf{k}_0) \ll 1$  — адmittанс шероховатой поверхности, определяемый выражениями [1, 8]

$$\zeta_D(\mathbf{k}_0) = K\sigma^2 \left\{ K - i \int_0^\infty d\rho \frac{e^{iK\rho}}{\rho} \frac{d}{d\rho} [W(\rho) J_\varphi(\mathbf{k}_0 \rho)] \right\},$$

$$\zeta_N(\mathbf{k}_0) = v_0^2 \sigma^2 - i \frac{\sigma^2}{K} \int_0^\infty d\rho \frac{e^{iK\rho}}{\rho} \left\{ \left[ (iK^2 \rho - k_0^2) J_0(k_0 \rho) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_0}{\rho} (1 - ik_0 \rho - k_0^2 \rho^2) J_1(k_0 \rho) \right] \frac{dW(\rho)}{d\rho} - k_0 v_0^2 J_1(k_0 \rho) W(\rho) \right\},$$

где  $K$  — полное волновое число ( $K^2 = k_0^2 + v_0^2$ ),  $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \eta(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}') \rangle / \sigma^2$  — корреляционная функция,  $\sigma^2 = \langle \eta^2(\mathbf{r}) \rangle$  — дисперсия высот шероховатостей поверхности.

Из приведенных выражений следует, что в случае применимости ММВ ( $\sigma^2 v_0^2 \ll 1$ ) вдоль абсолютно мягкой поверхности поверхность волна не распространяется, а вдоль абсолютно жесткой поверхности такая волна может распространяться при условии  $v_0 = -\zeta_N(\mathbf{k}_0)K$  ([1], с. 78). Однако, как показано в работе [9], уравнения, определяющие поле или его нормальную производную на границе соответственно для жесткой и мягкой поверхностей, имеют сходную структуру и по существу отличаются только видом свободного члена. Следовательно, решения этих уравнений, учитывающие многократное перерассеяние волн на поверхности, также должны иметь одинаковую структуру. А так как, согласно теореме Грина, поле в полупространстве выражается через его значение или значение его нормальной производной на границе, то и коэффициенты отражения, определяемые из асимптотики этого поля, должны иметь сходную структуру особенностей. Последнее противоречит выражениям (2) и сделанным на их основе выводам [1, 8]. В связи с этим возникает необходимость разобраться в причинах такого противоречия.

Кроме того представляет интерес получить выходящее за рамки ММВ и приближения Кирхгофа выражение для коэффициента отражения, учитывающее многократно рассеянные на поверхности волны. В рамках приближения гипотезы Рэлея учет многократно рассеянных волн и перенормировка коэффициентов отражения были проведены в работе [10], где, к сожалению, содержится ряд неточностей. Отметим, что исправление этих неточностей приводит к расходящимся выражениям и выводу о неприменимости для таких целей подхода, использующего гипотезу Рэлея. Имеется также ряд работ [4, 11–13], в которых учитывается вклад волн низких кратностей рассеяния в коэффициент отражения. При этом перенормировка последнего не проводилась.

В настоящей работе на основе последовательного подхода [9] вычислены коэффициенты отражения среднего поля с учетом их перенормировки вследствие многократного рассеяния волн на шероховатой поверхности. Показано, что возможность существования локализованных у поверхности волн определяется одним и тем же условием в случае мягкой и жесткой абсолютно отражающих поверхностей. В частном случае малых неровностей  $\sigma^2 v_0^2 \ll 1$  поверхность волны на обоих типах поверхностей существовать не могут.

Согласно теореме Грина [14] поле  $U(\mathbf{r}, z)$  в полупространстве, ограниченном шероховатой поверхностью  $z = \eta(\mathbf{r})$ , выражается через его значение на границе  $U_N(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r}))$ , если поверхность абсолютно жесткая, или через производную по нормали к границе  $V_D((\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r})) = \left( \frac{\partial}{\partial z} - \nabla \eta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_{z=\eta(r)} U_D(\mathbf{r}, z)$ , если поверхность абсолютно мягкая:

$$U_D(\mathbf{r}, z) = U_0(\mathbf{r}, z) - \int dr' V_D(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r})) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z - \eta(\mathbf{r}')) ; \quad (4a)$$

$$U_N(\mathbf{r}, z) = U_0(\mathbf{r}, z) + \int dr' U_N(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r}')) \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial z'} - \nabla \eta(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \right) \Big|_{z'=\eta(r')} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z - z') . \quad (4b)$$

Здесь  $U_0(r, z) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - iv_0 z)$  — поле падающей волны,  $G(r, z) = \frac{1}{4\pi} \exp(iK\sqrt{r^2+z^2})/\sqrt{r^2+z^2}$  — функция Грина свободного пространства, которую, используя разложение Вейля сферических волн по плоским [14], представим в виде

$$G(r, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{2\pi} \int d\mathbf{k} \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ivz)}{v}, \quad v = \sqrt{K^2 - k^2}, \text{ при } K > k,$$

$$v = \sqrt{k^2 - K^2}, \text{ при } K < k.$$

Тогда для значения поля  $U_N(r, \eta(r))$  и нормальной производной  $V_D(r, \eta(r))$  на поверхности можно получить уравнения [9]

$$V_D(r, \eta(r)) = 2V_0(r, \eta(r)) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk \int dr' \exp[i\mathbf{k}(r - r')] \times$$

$$\times V_D(r', \eta(r')) \exp(iv|\eta(r) - \eta(r')|) \left( \operatorname{sgn}(\eta(r) - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k} \nabla \eta(r)}{v} \right); \quad (5a)$$

$$U_N(r, \eta(r)) = 2U_0(r, \eta(r)) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk \int dr' \exp[i\mathbf{k}(r - r')] \times$$

$$\times U_N(r', \eta(r')) \exp(iv|\eta(r) - \eta(r')|) \left( \operatorname{sgn}(\eta(r) - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k} \nabla \eta(r')}{v} \right), \quad (5b)$$

где  $\operatorname{sgn}(z=0)=0$ .

Для решения этих уравнений в [9] была использована итерационная процедура. При этом учет трех первых членов итерационного ряда дал возможность одновременно описать как результаты приближения Кирхгофа, так и ММВ. В данной работе для решения уравнений (5a), (5b) мы воспользуемся методом среднего поля [1, 15, 16], который, как можно показать, эквивалентен учету многократно рассеянных волн в приближении Буррэ. Для этого перепишем уравнения (5a), (5b) в символьическом операторном виде:

$$U(r) = U_0(r) + L(r, r') U(r'). \quad (6)$$

Выражения для источника  $U_0$  и интегрального оператора  $L$  легко определяются из сравнения (6) с выражениями (5a) и (5b). Если известна функция Грина  $G(r, r')$ , удовлетворяющая уравнению

$$G(r, r') = \delta(r - r') + L(r, r'') G(r'', r'), \quad (7)$$

то решение уравнения (6) может быть выражено через свертку

$$U(r) = G(r, r') U_0(r'). \quad (8)$$

В уравнении (7) для функции Грина удобно перейти к ее фурье-представлению  $G(q, q')$ :

$$G(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq_1 \exp(iq_1 \cdot r) \int dq_2 \exp(iq_2 \cdot r') G(q_1, q_2),$$

$$G(q_1, q_2) = \int d\mathbf{r}_1 \exp(-iq_1 \cdot \mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 \exp(-iq_2 \cdot \mathbf{r}_2) G(r_1, r_2).$$

Тогда это уравнение в явном виде запишется следующим образом:

$$G_D(q, q') = (2\pi)^3 \delta(q + q') + \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \int dq_1 \int dr \int dr' \times$$

$$\times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \exp(-iqr+iq_1r') \exp[i\nu|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|] \times \\ \times \left[ \operatorname{sgn}(\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')) - \frac{\mathbf{k}}{\nu} \left\{ \frac{\nabla \eta(\mathbf{r})}{\nabla \eta(\mathbf{r}')}\right\} \right] G_D(q_1, q'). \quad (9)$$

Для определения функции Грина  $G(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  воспользуемся методом среднего поля, считая, что интегральный оператор  $L(\mathbf{q}, q_1)$  является малым. Условия, при которых это предположение справедливо, рассматривались в [9] и заключаются в отсутствии затенений падающего поля, а также в малости параметров  $\sigma/a \ll 1$ ,  $K\sigma^2/a \ll 1$ , характеризующих средний наклон шероховатостей и значение параметра Френеля для точек поверхности ( $a$  — корреляционный радиус шероховатости). Представляя функцию Грина в виде суммы средней  $\bar{G}$  и случайной  $G'$  компонент ( $G = \bar{G} + G'$ ) и учитывая, что  $\langle L(\mathbf{q}, q_1) \rangle = 0$  (для гауссова процесса случайных реализаций поверхности в этом можно убедиться непосредственно), после усреднения (9) получим

$$\bar{G}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') + \langle L(\mathbf{q}, q_1) G'(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}') \rangle. \quad (10a)$$

Вычитание этого уравнения из (9) дает

$$G'(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = L(\mathbf{q}, q_1) \bar{G}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}') + \langle L(\mathbf{q}, q_1) G'(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}') - \langle L(\mathbf{q}, q_1) G'(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}') \rangle \rangle. \quad (10b)$$

Приближение среднего поля состоит в отбрасывании членов, стоящих в скобках в правой части выражения (10b). После этого подстановка (10b) в (10a) приводит к уравнению для среднего поля

$$\bar{G}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') - \langle L(\mathbf{q}, q_1) L(\mathbf{q}_1, q_2) \rangle \bar{G}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}') = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \quad (11)$$

Производя усреднение выражения  $\langle L(\mathbf{q}, q_1) L(\mathbf{q}_1, q_2) \rangle$  и учитывая, что получаемое в результате подынтегральное выражение будет зависеть только от положения точек поверхности относительно друг друга (из-за однородности поверхности в среднем), интегральное уравнение (11) сведем к алгебраическому, решение которого можно записать в виде

$$\bar{G}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{(2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q})}{\Lambda(\mathbf{q})}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{q}) = 1 & - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{p}_1 + \\ & + i(\mathbf{k}' - \mathbf{q})\mathbf{p}_2] \left\langle \exp(i\nu |\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)| + i\nu' |\eta(\mathbf{r}_2) - \right. \\ & \left. - \eta(\mathbf{r}')|) \left( \operatorname{sgn}(\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)) - \frac{\mathbf{k}}{\nu} \left\{ \frac{\nabla \eta(\mathbf{r}_1)}{\nabla \eta(\mathbf{r}_2)} \right\} \right) \times \right. \\ & \times \left[ \operatorname{sgn}(\eta(\mathbf{r}_2) - \eta(\mathbf{r}')) - \frac{\mathbf{k}'}{\nu'} \left\{ \frac{\nabla \eta(\mathbf{r}_2)}{\nabla \eta(\mathbf{r}')}\right\} \right] \left\rangle \right\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

и  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'$ . Случайная компонента функции Грина выражается через ее среднее значение согласно (10b), так что полная функция Грина может быть представлена в виде

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^2 \frac{\delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') + L(\mathbf{q}, q_1)\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}')}{\Lambda(-\mathbf{q}')}. \quad (14)$$

Знаменатель  $\Lambda(q)$  учитывает перенормировку функции Грина за счет многократного рассеяния поля на поверхности. Нули знаменателя  $q_n: \Lambda(q_n) = 0$ , определяют возможность существования локализованных у шероховатой поверхности волн. Переходя в (14) от фурье-образа  $G(q, q')$  к пространственному представлению функции Грина  $G(r, r')$ , получим для последнего следующее явное выражение:

$$G_D(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \frac{1}{\Lambda(q)} \exp\left[iq(r - r')\right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \times \\ \times \int dq \frac{1}{\Lambda(q)} \int d\mathbf{k} \int dr_1 \exp\left[iqr + iq r' + i(\mathbf{k} - q)r_1 + \right. \\ \left. + iv|\eta(r_1) - \eta(r')|\right] \left[ \operatorname{sgn}(\eta(r_1) - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k}}{v} \left\{ \frac{\nabla \eta(r)}{\nabla \eta(r')} \right\} \right].$$

Подставляя это выражение в (8), а затем в (4а) и (4б), для полей в полупространстве будем иметь следующие выражения:

$$U_N(r, z) = U_0(r, z) \mp \left[ \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \int d\mathbf{k} \int dr' \int dr_2 \exp[i\mathbf{k}r + \right. \\ \left. + i(q - \mathbf{k})r'] \exp[i(\mathbf{k}_0 - q)r_2] \exp[iv|z - \eta(r')| - iv\eta(r_2)] \times \right. \\ \left. \times \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{v_0}{v} + \frac{\mathbf{k}_0}{v} \nabla \eta(r_2) \right) \\ \left[ \operatorname{sgn}(z - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k}}{v} \nabla \eta(r') \right] \end{array} \right\} + \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \int dr' \times \right. \\ \left. \times \int dr_1 \int dr_2 \exp[i\mathbf{k}r + i(q - \mathbf{k})r' + i(\mathbf{k}' - q)r_1] \times \right. \\ \left. \times \exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}')r_2] \exp[-iv_0\eta(r_2) + iv|z - \eta(r')| + \right. \\ \left. + iv|\eta(r_1) - \eta(r_2)|] \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{v_0}{v} + \frac{\mathbf{k}_0}{v} \nabla \eta(r_2) \right) \\ \left[ \operatorname{sgn}(z - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k}}{v} \nabla \eta(r') \right] \end{array} \right\} \times \right. \\ \left. \times \left[ \operatorname{sgn}(\eta(r_1) - \eta(r_2)) - \frac{\mathbf{k}'}{v'} \left\{ \frac{\nabla \eta(r_1)}{\nabla \eta(r_2)} \right\} \right]. \right] \quad (15)$$

Усредняя (15) по случайным реализациям поверхности и учитывая однородность поверхности в среднем, запишем

$$\langle U_N(r, z) \rangle = U_0(r, z) \mp \exp(i\mathbf{k}_0 r) \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \frac{1}{\Lambda(q)} \int d\mathbf{p} \times \right. \\ \times \exp[i(q - \mathbf{k}_0)\mathbf{p}] \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + \frac{\mathbf{k}_0 \Delta \eta(r_s)}{v_0} \right) \\ \left[ \operatorname{sgn}(z - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k}_0 \nabla \eta(r')}{v_0} \right] \end{array} \right\} \times \\ \times \exp[iv_0|z - \eta(r')| - iv_0\eta(r_2)] \left. \right\} + \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \times$$

$$\times \int d\mathbf{k} \int d\rho_1 \int d\rho_2 \exp[i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\rho_1 + i(\mathbf{k}_0-\mathbf{q})\rho_2] \times$$

$$\times \langle \exp[i\nu_0|z - \eta(\mathbf{r}')|] \exp[-i\nu_0\eta(\mathbf{r}_2) + i\nu|\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)|] \rangle \times$$

(16)

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + \frac{\mathbf{k}_0 \nabla \eta(\mathbf{r}_2)}{\nu_0} \right) \\ \left[ \text{sgn}(z - \eta(\mathbf{r}')) - \frac{\mathbf{k}_0 \nabla \eta(\mathbf{r}')}{\nu_0} \right] \end{array} \right\} \left[ \text{sgn}(\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)) - \frac{\mathbf{k}}{\nu} \left\{ \nabla \eta(\mathbf{r}_1) \right\} \right],$$

где  $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_2$ ,  $\rho_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\rho_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'$ .

Для гауссова процесса случайных реализаций поверхности аналитические выражения для средних можно получить из (13) и (16), если разложить экспоненту вида  $\exp[i\nu|\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)|]$  и учитывать слагаемые до второго порядка малости по совокупности параметров  $\nabla \eta(\mathbf{r})$ ,  $\nu|\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)|$ . Как показано в [9], это возможно при выполнении условий  $\sigma/a \ll 1$ ,  $K\sigma^2/a \ll 1$  ( $a$  — корреляционный радиус шероховатости). Первое из этих условий означает малость средних наклонов неровностей, а второе — что вторично рассеянное на поверхности поле можно рассматривать в приближении Фраунгофера. Выражение для  $\Lambda(\mathbf{k}_0)$  в этом случае примет вид

$$\Lambda(\mathbf{k}_0) = 1 - \left\{ \sigma^2 \nu_0^2 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \int d\rho \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\rho] \times \right.$$

$$\times \left[ (\nu^2 - \nu\nu_0) W(\rho) + i\mathbf{k}_0 \nabla W(\rho) + i\frac{\nu}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \nabla W(\rho) - \right.$$

$$\left. \left. - i\frac{\nu_0}{\nu} \mathbf{k}_0 \nabla W(\rho) - \frac{(\mathbf{k}_0 \nabla)(\mathbf{k}_0 \nabla) W(\rho)}{\nu\nu_0} \right] \right\}. \quad (17a)$$

Проинтегрировав по частям слагаемые, содержащие градиенты корреляционной функции, выражение (17a) можно записать в более компактном виде:

$$\Lambda(\mathbf{k}_0) = 1 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left[ \nu\nu_0 + \frac{(K^2 - \mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2}{\nu\nu_0} \right], \quad (17b)$$

где  $W(\mathbf{k}) = \int d\rho \exp(i\mathbf{k}\rho) W(\rho)$  — фурье-спектр корреляционной функции. Из (17a) следует, что выражение  $1 - \Lambda(\mathbf{k}_0)$  совпадает (с точностью до знака) с коэффициентом отражения трехкратно рассеянных на поверхности волн в случае слабой шероховатости  $\sigma^2 \nu_0^2 \ll 1$  [9]. Однако условия, накладываемые на (17a), менее жесткие:  $\sigma/a \ll 1$ ,  $K\sigma^2/a \ll 1$ . Далее, поскольку выражение для  $\Lambda(\mathbf{q})$  одинаково для абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностей, то и возможность существования поверхностных волн, определяемая условием  $\Lambda(\mathbf{q}) = 0$ , в этих случаях также одинаковая. В частности, в случае слабой шероховатости,  $\sigma^2 \nu_0^2 \ll 1$ , уравнение  $\Lambda(\mathbf{q}) = 0$  решений не имеет. Следовательно, в этом случае локализованные у поверхности волны распространяться не могут, что противоречит выводам работ [1, 8] для абсолютно жесткой поверхности. Это противоречие связано с некорректностью использованного в [1, 8] представления среднего поля в виде (1) в окрестности шероховатой поверхности. В действительности структура среднего поля оказывается значительно более сложной. Продемонстрируем это на примере первого из усредняемых выражений в (16), учитывая слагаемые нулевого порядка по параметрам  $\sigma/a$ ,  $K\sigma^2/a$  (оставшиеся слагаемые, как можно показать, являются малыми более высоких порядков по этим параметрам):

$$\begin{aligned}
\langle U_D^0(r, z) \rangle &= \exp(i k_0 r - i v_0 z) \mp \exp(i k_0 r + i v_0 z) \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\
&\times \int d\rho \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \exp[i(q - k_0)\rho] \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 v_0^2 (1 + W(\rho))}{2} - \right. \\
&\left. - \frac{z^2}{2\sigma^2} - i v_0 z W(\rho) \right] \left\{ \exp \left[ \frac{[z + i \sigma^2 v_0 (1 + W(\rho))]^2}{2\sigma^2} \right] \times \right. \\
&\times \operatorname{erfc} \left[ -\frac{z + i \sigma^2 v_0 (1 + W(\rho))}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] \pm \exp \left[ \frac{[z - i \sigma^2 v_0 (1 - W(\rho))]^2}{2\sigma^2} \right] \times \\
&\left. \times \operatorname{erfc} \left[ \frac{z - i \sigma^2 v_0 (1 - W(\rho))}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] \right\}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Если  $\Lambda(q)$  является плавной функцией в сравнении с быстро осциллирующей экспонентой  $\exp(iq\rho)$  (как, например, в случае слабошероховатой поверхности), то ее можно вынести в точке  $q = k_0$ , и интегрирование по  $q$  дает дельта-функцию  $(2\pi)^2\delta(\rho)$ , так что для среднего поля получаем

$$\begin{aligned}
\langle U_D^0(r, z) \rangle &= \exp(i k_0 r - i v_0 z) \mp \exp(i k_0 r + i v_0 z) \times \\
&\times \frac{1}{2\Lambda(k_0)} \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right) \left\{ \exp \left[ \frac{(z + 2i\sigma^2 v_0)^2}{2\sigma^2} \right] \operatorname{erfc} \left( -\frac{z + 2i\sigma^2 v_0}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \pm \right. \\
&\left. \pm \exp \left( \frac{z^2}{2\sigma^2} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right\}. \tag{19}
\end{aligned}$$

Это выражение с точностью до множителя  $\Lambda^{-1}(k_0)$  совпадает с результатом [9], полученным для однократно рассеянных волн. Если интересоваться поведением поля вдали от рассеивающей поверхности  $z \gg \sigma$ ,  $z \gg \sigma^2 v_0$  (зона Фраунгофера), то можно воспользоваться асимптотиками  $\operatorname{erfc}(z) = \exp(-z^2)/(z\sqrt{\pi})$  при  $z \rightarrow \infty$  и  $\operatorname{erfc}(z) = 2 - \exp(-z^2)/(-z\sqrt{\pi})$ ,  $z \rightarrow -\infty$ . Для положительных  $z$  из (18) будем иметь

$$\begin{aligned}
\langle U_D^0(r, z) \rangle &= \exp(i k_0 r - i v_0 z) \mp \exp(i k_0 r + i v_0 z) \times \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \exp[i(q - k_0)\rho] \exp[-\sigma^2 v_0^2 (1 + W(\rho))].
\end{aligned}$$

Пренебрегая многократно рассеянными волнами, так что  $\Lambda(q) = 1$ , получим стандартное выражение для среднего поля в приближении Кирхгофа [1]:

$$\langle U_D^0(r, z) \rangle = \exp(i k_0 r - i v_0 z) \mp \exp(i k_0 r + i v_0 z) \exp(-2v_0^2 \sigma^2).$$

Для больших отрицательных  $z$  при учете однократно рассеянных волн  $\Lambda(q) = 1$  из (19) следует

$$\langle U_D^0(r, z) \rangle = \exp(i k_0 r - i v_0 z) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{i\sigma^2 v_0}{z^2} \\ \frac{\sigma}{(-z)} \end{array} \right\}.$$

т. е. среднее поле при учете однократно рассеянных волн представляет из себя падающую волну, экспоненциально затухающую с глубиной.

В окрестности средней плоскости  $z=0$ , при  $z \ll \sigma$ ,  $z \ll \sigma^2 v_0$  при учете только однократно рассеянных волн выражение для среднего поля принимает вид

$$\langle U_D^0(r, z) \rangle = \exp(i\mathbf{k}_0 r - i\nu_0 z) \mp \frac{1}{2} [\pm \exp(i\mathbf{k}_0 r - i\nu_0 z) + \\ + \exp(i\mathbf{k}_0 r + i\nu_0 z) \exp(-2\sigma^2 \nu_0^2) \operatorname{erfc}(-i\sqrt{2} \sigma \nu_0)],$$

т. е. среднее рассеянное поле представляет собой падающую волну половинной амплитуды и зеркально отраженную волну с амплитудой, зависящей от параметра Рэлея и меняющейся в пределах от  $1/2$  до  $0$  при изменении этого параметра от  $0$  до  $\infty$ . Наличие падающей волны в среднем рассеянном поле в окрестности  $z=0$  принципиально не учитывается в представлении (1). В частном случае малых неровностей  $\sigma \nu_0 \ll 1$  амплитуда среднего рассеянного поля на плоскости  $z=0$  для мягкой поверхности стремится к  $-1$ , а для жесткой — стремится к нулю. Последнее полностью не учитывается в (1), (2) и показывает качественное отличие этих результатов для абсолютно жесткой поверхности. Это в итоге и привело авторов работ [1, 8] к ошибочному выводу о возможности существования поверхностных волн, локализованных у жесткой слабошероховатой поверхности.

Асимптотическое поведение поля при  $z \gg \sigma^2 v_0$ ,  $z \gg \sigma$  в случае слабошероховатой поверхности  $\sigma^2 v_0^2 \ll 1$  с точностью до величин второго порядка по  $\sigma \nu_0$  нетрудно получить непосредственно из (16), произведя там соответствующие разложения:

$$\langle U_D(r, z) \rangle = \exp(i\mathbf{k}_0 r - i\nu_0 z) \mp \exp(i\mathbf{k}_0 r + i\nu_0 z) \times \\ \times \left\{ 1 - \sigma^2 \nu_0^2 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \int d\rho \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\rho] \left[ (\nu^2 - \nu_0 \nu) \times \right. \right. \\ \times W(\rho) + i\mathbf{k} \nabla W(\rho) + i \frac{\nu}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \nabla W(\rho) - i \frac{\nu_0}{\nu} \mathbf{k} \nabla W(\rho) - \\ - \frac{(\mathbf{k}_0 \nabla)(\mathbf{k} \nabla) W(\rho)}{\nu_0 \nu} \pm \left( - i \frac{\nu}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \Delta W(\rho) + i \frac{\nu_0}{\nu} \mathbf{k} \nabla W(\rho) + \right. \\ \left. \left. + \frac{(\mathbf{k}_0 \nabla)(\mathbf{k} \nabla) W(\rho)}{\nu \nu_0} \right) \right] \right\}.$$

Это выражение полностью совпадает с результатом, полученным в рамках теории возмущений [1, 17].

В случае же, когда высота неровностей не является малой:  $\sigma^2 \nu_0^2 \gtrsim 1$  (но они достаточно пологие:  $\sigma/a \ll 1$ ,  $K\sigma^2/a \ll 1$ ), асимптотика поля при  $z \gg \sigma^2 v_0$ ,  $z \gg \sigma$  также может быть вычислена аналитически, но получающиеся при этом выражения становятся очень громоздкими. Приведем выражение только для абсолютно мягкой поверхности:

$$\langle U_D(r, z) \rangle = \exp(i\mathbf{k}_0 r - i\nu_0 z) + V_D(\mathbf{k}_0) \exp(i\mathbf{k}_0 r + i\nu_0 z),$$

где

$$V_D(\mathbf{k}_0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \exp[i(q - \mathbf{k}_0)\rho] \left( 1 + i \frac{\mathbf{k}_0 \nabla}{\nu_0^2} \right) \times \\ \times \exp[-\sigma^2 \nu_0^2 (1 + W(\rho))] + \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dq}{\Lambda(q)} \int d\mathbf{k} \int d\rho_1 \int d\rho_2 \times \\ \times \exp[i(\mathbf{k} - q)\rho_1 + i(\mathbf{k}_0 - q)\rho_2] C(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}, \rho_1, \rho_2).$$

$$\begin{aligned}
C(k_0, k, \rho_1, \rho_2) = & \left[ 1 + i \frac{k_{\nabla_1}}{\nu^2} + i \frac{k_0 \nabla_2}{\nu_0(\nu + \nu_0)} - \frac{(k_{\nabla_1})(k_0 \nabla_2)}{\nu_0 \nu^2 (\nu_0 + \nu)} \right] \times \\
& \times \langle \Theta(\eta(r_1) - \eta(r_2)) \exp[-i\nu_0 \eta(r') - i(\nu + \nu_0) \eta(r_2)] \rangle + \\
& + \left[ -1 - i \frac{k_{\nabla_1}}{\nu^2} + i \frac{k_0 \nabla_2}{\nu_0(\nu - \nu_0)} - \frac{(k_{\nabla_1})(k_0 \nabla_2)}{\nu_0 \nu^2 (\nu - \nu_0)} \right] \langle \Theta(\eta(r_2) - \eta(r_1)) \exp[-i\nu_0 \eta(r') - i(\nu_0 - \nu) \eta(r_2)] \rangle + \left[ i \frac{k_0 \nabla_2}{\nu_0(\nu_0 + \nu)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu_0 \nu^2} \left( \frac{1}{\nu + \nu_0} - \frac{1}{\nu_0} \right) (k_{\nabla_1})(k_0 \nabla_2) \right] \langle \Theta(\eta(r_1) - \eta(r_2)) \times \\
& \times \exp(-i\nu_0 \eta(r') - i\nu_0 \eta(r_1)) \rangle + \left[ -i \frac{k_0 \nabla_2}{\nu_0(\nu - \nu_0)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu_0 \nu^2} \left( \frac{1}{\nu - \nu_0} + \frac{1}{\nu_0} \right) (k_{\nabla_1})(k_0 \nabla_2) \right] \langle \Theta(\eta(r_2) - \eta(r_1)) \times \\
& \times \exp[-i\nu_0 \eta(r') - i\nu_0 \eta(r_1)] \rangle + \left( -i \frac{k_{\nabla_1}}{\nu^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(k_{\nabla_1})(k_0 \nabla_2)}{\nu^2 \nu_0^2} \right) [\langle \Theta(\eta(r_1) - \eta(r_2)) \exp[-i\nu_0 \eta(r') - i\nu_0 \eta(r_2)] \rangle - \\
& - \langle \Theta(\eta(r_2) - \eta(r_1)) \exp[-i\nu_0 \eta(r') - i\nu_0 \eta(r_2)] \rangle].
\end{aligned}$$

Здесь усредняемые выражения имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \begin{cases} \Theta(\eta_1 - \eta_2) \\ \Theta(\eta_2 - \eta_1) \end{cases} \exp(i\nu_0 \eta_0 + i\nu_1 \eta_1 + i\nu_2 \eta_2) \right\rangle = \\
& = -\frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 \nu_0^2 D}{2(1 - W_{12}^2)} \right] \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{4(1 + W_{12})} [(\nu_1 + \nu_2) \times \right. \\
& \times (1 + W_{12}) + \nu_0 (W_{10} + W_{20})]^2 \left. \right\} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{4(1 - W_{12})} \times \right. \\
& \times [(v_2 - v_1)(1 - W_{12}) - \nu_0(W_{10} - W_{20})]^2 \left. \right\} \operatorname{erfc} \left\{ \pm \frac{i\sigma}{2\sqrt{1 - W_{12}}} \times \right. \\
& \left. \times [(v_2 - v_1)(1 - W_{12}) - \nu_0(W_{12} - W_{20})] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь через  $W_{ij}$  обозначена корреляционная функция  $W(r_i - r_j)$ , а выражение для  $D$  имеет вид

$$D = 1 - W_{01}^2 - W_{02}^2 - W_{12}^2 + 2W_{01}W_{12}W_{20}.$$

В заключение подведем некоторые итоги. На основе последовательного подхода в работе получено выражение для среднего поля, отраженного от шероховатой поверхности, учитывающее многократно рассеянные волны. Полученное выражение содержит в себе как предельные случаи результаты ММВ и приближения Кирхгофа. Среднее поле в окрестности границы имеет сложную структуру, существенно отличную от использованной в работах [1, 8], что привело авторов этих работ к неверному выводу о существовании поверхностных волн на не-

ровной абсолютно жесткой поверхности. В действительности, как показано в настоящей работе, поверхностные волны на слабошероховатых абсолютно отражающих поверхностях существовать не могут. Таким образом, построена последовательная и достаточно полная теория первого момента поля, отраженного от поверхности с пологими неровностями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
2. Шмелев А. Б. // УФН. 1972. Т. 106. № 3. С. 459
3. Бреховских Л. М., Лыагин Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
4. De Santo J. A., Brown G. S. // Progr. Opt. 1986. V 23. P. 1.
5. Brown G. S. // Wave Motion. 1985. № 7. P. 195.
6. Воронович А. Г. // В сб.: Акустические волны в океане / Под ред. А. М. Бреховских. — М.: Наука, 1987. С. 121.
7. Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 1. С. 98.
8. Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 1. С. 104.
9. Дунин С. З., Максимов Г. А. Препринт МИФИ № 018-89. М., 1989.
10. Hill N. R., Lerche J. // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 78 № 3 P. 1081.
11. Воронович А. Г. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 7. С. 117.
12. Кузнецова Е. П. // Акуст. журн. 1986. Т. 89. № 32. С. 272.
13. Nieto-Vesperinas M., Garcia N. // Optica Acta. 1981. V. 28. № 12. P. 1651.
14. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958. Т. 1.— 640 с.
15. Апресян Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 2. С. 165.
16. Howe M. S. // J. Fluid Mech. 1971. V. 45. № 4. P. 769.
17. Дунин С. З., Максимов Г. А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 2. С. 276.

Московский инженерно-физический  
институт

Поступила в редакцию  
12 декабря 1989 г.

## THE SCATTERING OF SCALAR FIELDS BY THE ROUGH SURFACES. ACCOUNT OF THE MULTISCATTERING WAVES

S. Z. Dunin, G. A. Maximov

The problem of scalar field scattering by the absolutely reflecting (soft and hard) statistically rough surfaces is considered. The expressions for the mean field reflecting coefficient, accounting the multiscattering waves on the surface, is obtained. The dispersion equation, determining the possibility of the wave localized near rough surface is found. The fact, that the surface waves are not existed for both cases of soft and hard surfaces, is established. It is shown that the difference of this conclusion from the known results is connected with more complicated mean field structure than it was assumed before.

УДК 621.391

## РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА—КОЛМОГОРОВА

*С. В. Соколов*

Решение параболического дифференциального уравнения плотности распределения марковского процесса — уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) — представлено в рекуррентной интегральной форме, определяемой статистическим соответствием уравнения ФПК стохастическому дифференциальному уравнению марковского диффузионного процесса, решаемому методом последовательных приближений. Полученная форма позволяет эффективно осуществлять численное решение уравнения ФПК и связанные с ним уравнения Стратоновича при наличии граничных условий — различных экранов, особенно в многомерном случае. Доказана сходимость рассмотренной рекурсии к решению уравнения ФПК, дана оценка верхней границы скорости сходимости, рассмотрен пример, иллюстрирующий возможность эффективного использования предложенного подхода.

**1. Постановка задачи.** Основной характеристикой диффузионных марковских процессов, играющих центральную роль при исследовании вопросов передачи, прохождения и приема радиотехнических сигналов, является нестационарная функция плотности распределения, описываемая известным дифференциальным уравнением параболического типа — уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) [1, 2]. Существующие различные методы решения уравнения ФПК работоспособны лишь для частных представлений моделей сигналов и не эффективны при наличии ограничений на область существования переменных, естественных для большинства практических приложений.

Это существенно ограничивает область возможного анализа характеристик марковских процессов, вынуждая к использованию различных аппроксимаций плотности распределения марковского процесса [3], что далеко не всегда оправдано [1, 2] и, как правило, не позволяет доказать вероятностную сходимость найденного решения к искомому, тем более оценить его отклонение от истинного решения. В связи с этим ниже рассмотрена возможность решения уравнения ФПК и вытекающего из него интегродифференциального уравнения Стратоновича, за счет использования стохастического аналога метода Пикара — метода последовательных приближений (МПП). В основу метода положено однозначное соответствие уравнению многомерного марковского диффузионного процесса  $Y_t$ .

$$\dot{Y}_t = f(Y, t) + g(Y, t) W_t, \quad Y(0) = Y_0, \quad (1)$$

где  $f(Y, t)$  — вектор-функция размерности  $n$ , удовлетворяющая на интервале  $t \in [0, \infty]$  условию Липшица,  $g(Y, t)$  — матричная функция размерности  $m \times n$ , на интервале интегрирования системы также удовлетворяющая условию Липшица [4],  $W_t$  —  $m$ -мерный белый гауссов шум с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей интенсивностей  $M\{\vec{W}_t, \vec{W}_\tau\} = D_t \delta(t - \tau)$  (здесь и далее используется симметризованная форма записи стохастических уравнений), уравнения плотности распределения  $\rho(\vec{Y}, t)$  — уравнения ФПК:

$$\frac{\partial \rho(Y, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \{a_i(Y, t)\rho(Y, t)\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \times$$

(2)

$$\times \{b_{ij}(Y, t)\rho(Y, t)\}, \quad \rho(Y, t_0) = \rho_0,$$

где  $a(Y, t)$  — вектор-столбец коэффициентов сноса процесса  $Y_t$ .

$$a_i(Y, t) = f_i(Y, t) + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n \sum_{j=1}^n D_K g_{jk}(Y, t) \frac{\partial}{\partial y_j} g_{ik}(Y, t),$$

$b(Y, t)$  — матрица коэффициентов диффузии  $Y_t$ ,  $b_{ij}(Y, t) = -\sum_{K=1}^n D_K g_{ik}(Y, t)g_{jk}(Y, t)$ . Предложенный подход, позволяющий сформировать искомое решение в виде рекуррентной последовательности интегралов с нелинейным ядром, инвариантен к различным ограничениям на область существования переменных (отражающий и поглощающий экраны, диффузия по границе), а также позволяет доказать сходимость полученной рекуррентной последовательности к единственному решению уравнения (2).

**2. Решение уравнения ФПК.** Использование МПП при поиске решения системы уравнений (1) определяет на  $i$ -м шаге итерации следующее представление очередного векторного приближения к решению  $Y_t$  [4]:

$$Y_i(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t f(Y_{i-1}, s)ds + \int_{t_0}^t g(Y_{i-1}, s)W_s ds, \\ Y_0(t) = Y(0) = Y_0, \quad M(Y_0 Y_0^T) < \infty,$$

или в дифференциальной форме

$$\dot{Y}_i(t) = f(Y_{i-1}, t) + g(Y_{i-1}, t)W_t. \quad (3)$$

При условии фиксированного  $(i-1)$ -го приближения  $Y_{i-1}(t)$  уравнение (3) определяет диффузионный марковский процесс  $Y_i(t)$ , плотность распределения которого, представляющая собой решение соответствующего уравнения ФПК, является гауссовой:

$$\rho(Y_i, t | Y_{i-1}(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t) = (2\pi)^{-(n/2)} \det K_{ii}^{-(1/2)} \times \\ \times \exp[-(1/2)(Y_i - M_{it})^T K_{ii}^{-1} (Y_i - M_{it})], \quad (4)$$

где матричные функции  $M_{it}$  и  $K_{it}$  определяются следующими выражениями:

$$M_{it} = \int_{t_0}^t f(Y_{i-1}, s)ds + M_0, \quad M_0 = M[Y_i(0)] = M(Y_0),$$

$$K_{it} = M[(Y_0 - M_0)(Y_0 - M_0)^T] + \int_{t_0}^t g(Y_{i-1}, s)D_s g^T(Y_{i-1}, s)ds.$$

Обозначая условную плотность распределения (4)  $\forall Y \in [-\infty, \infty]$  как

$$\rho_N(Y_i, Y_{i-1}, f, g, D, t),$$

определим плотность распределения  $\rho(Y_i, t)$   $i$ -го приближения процесса (1) как

$$\rho(Y_i, t) = \int_{Y_{i-1}} \rho(Y_{i-1}, t) \rho_N(Y_i, Y_{i-1}, f, g, D, t) dY_{i-1}, \quad (5)$$

$$\rho(Y_0, t) = \rho_0.$$

Интегральная рекурсия (5) определяет последовательные приближения к решению уравнения (2), стремящиеся, как показано далее, при  $i \rightarrow \infty$  к единственному решению уравнения ФПК. Необходимо отметить, что, в отличие от ныне существующих подходов, наличие различных ограничений на область определения вектора  $Y_t$ , допускающих аналитическую модификацию исходной плотности распределения, приводит к несущественному изменению рекурсии (5) и не требует дополнительного использования специальных методов решения краевых задач.

Например, существование отражающего экрана по произвольной компоненте  $y_{(K)}(t)$  вектора  $Y_t$ :

$$y_{(K)}^0(t) = \begin{cases} y_{(K)}(t), & \text{если } y_{(K)}(t) \leq C, \\ \hat{y}_{(K)}(t), & \text{если } y_{(K)}(t) > C, \end{cases}$$

где  $\hat{y}_{(K)}(t)$  — отраженный процесс [2], приводит к появлению новой плотности распределения

$$\begin{aligned} \rho_0(Y, t) &= \rho(Y, t) + \rho(y_{(1)}, \dots, 2C_K - y_{(K)}, \dots, y_{(n)}, t), \\ \rho_0(y_{(1)}, \dots, C_K, \dots, y_{(n)}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\rho(Y, t)$  — исходная плотность вектора  $Y_t$ .

В этом случае, учитывая действие экрана для всех приближений  $y_i(t)$   $K$ -й компоненты, запишем рекурсию (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(Y_i, t) &= \int_{Y_{(1)}} \dots \int_{Y_{(K)}} \dots \int_{Y_{(n)}} [\rho(Y_{i-1}, t) + \rho(y_{(1)i-1}, \dots, 2C_K - \\ &\quad - y_{(K)i-1}, \dots, y_{(n)i-1}, t)] [\rho_N(Y_i, Y_{i-1}, f, g, D, t) + \\ &\quad + \rho_N(y_{(1)i}, \dots, 2C_K - y_{(K)i}, \dots, y_{(n)i}, y_{i-1}, f, g, D, t)] dY_{i-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Данное рекуррентное соотношение совместно с (6) позволяет определить с заданной точностью решение уравнения ФПК при наличии отражающего экрана по произвольной переменной.

При поглощающем экране по произвольной  $K$ -й компоненте процесса  $Y_t$ , рассуждая аналогично [2], запишем вновь образованную плотность распределения следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}(Y, t) &= \rho(Y, t) - \rho(y_{(1)}, \dots, 2C_K - y_{(K)}, \dots, y_{(n)}, t) + \\ &\quad + A_K \delta(C_K - y_{(K)}), \quad \rho(y_{(1)}, \dots, C_K, \dots, y_{(n)}, t) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_K &= A(y_{(1)}, \dots, y_{(K-1)}, y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)}, t) = \\ &= - \int_{C_K}^{\infty} \rho(y_{(1)}, \dots, y_{(K)}, \dots, y_{(n)}, t) dy_{(K)}. \end{aligned}$$

Для подобного ограничения рекуррентное соотношение для плотности распределения формируется согласно (7). Частным случаем рассмотренного решения является плотность распределения процесса  $Y_t$ ,  $K$ -я компонента  $y_{(K)}$  которого проходит через нелинейный усилитель-ограничитель:

$$y_{(K)}(t) = \begin{cases} y_{(K)}(t), & \text{если } y_{(K)}t < C \\ C, & \text{если } y_{(K)}t \geq C \end{cases}$$

Следуя [2], подобное ограничение можно охарактеризовать как диффузию по границе. Плотность распределения такого процесса отлич-

чается от (8) отсутствием второго члена —  $\rho(y_{(1)}, \dots, 2C_K - y_{(K)}, \dots, y_{(n)}, t)$ , вероятность пребывания на границе равна

$$A(y_{(1)}, \dots, y_{(K-1)}, y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)}, t).$$

Представляет также интерес решение многомерного уравнения ФПК при наличии экранов по  $N \leq n$  переменным, в настоящее время не исследованное.

Для возможности использования предложенного подхода представим исходную  $n$ -мерную плотность  $\rho(Y, t)$  вектора  $Y_t$ , являющуюся решением уравнения ФПК без ограничений на область существования переменных, как

$$\begin{aligned} \rho(Y, t) &= \rho(y_{(1)}, t/y_{(2)}, \dots, y_{(n)}) \rho(y_{(2)}, t/y_{(3)}, \dots, y_{(n)}) \dots \rho(y_{(n)}, t) = \\ &= \prod_{K=1}^n \rho(y_{(K)}, t/y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)}). \end{aligned}$$

Для отражающего экрана по каждой переменной плотность  $\rho(Y, t)$  модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_0(Y, t) &= \prod_{K=1}^n [\rho(y_{(K)}, t/y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)}) + \\ &+ \rho(2C_K - y_{(K)}, t/y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)})], \\ \rho(y_{(K)}) &> C_K, t/y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \rho_0(Y, t) &= \prod_{K=1}^n \frac{\rho(y_{(K)}, \dots, y_{(n)}, t) + \rho(2C_K - y_{(K)}, y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)}, t)}{\rho(y_{(K+1)}, \dots, y_{(n)}, t)} = \\ &= \prod_{K=1}^n \times \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\int \dots \int \{\rho(Y, t) + \rho(y_{(1)}, \dots, y_{(K-1)}, 2C_K - y_{(K)}, \dots, y_{(n)}, t)\} dy_{(1)} \dots dy_{(K-1)} \\ &\times \frac{\int \dots \int \rho(Y, t) dy_{(1)} \dots dy_{(K)}}{\int \dots \int \rho(Y, t) dy_{(1)} \dots dy_{(K)}}. \end{aligned}$$

Подынтегральные выражения числителя и знаменателя каждого  $k$ -го сомножителя произведения (9) определяются согласно (7). Решение краевой задачи подобным образом в принципе инвариантно к ее размерности, влияющей лишь на объем вычислительных затрат при решении.

В заключение следует отметить, что исходная рекурсия (5) может быть непосредственно получена из уравнения Смолуховского, определяющего более широкий класс марковских процессов, нежели уравнение (2). Действительно, рассматривая процесс  $Y_t$  не на множестве аргумента  $t$ , а при фиксированном  $t$  на множестве приближений  $Y_i(t)$ ,  $i=0, 1, \dots$ , нетрудно установить (3), что последовательность  $Y_0(t)$ ,  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$ , ... является марковской и для нее справедливо уравнение Смолуховского, записанное следующим образом:

$$\pi(Y_t, t/Y_0, t_0) = \int_{Y_{t-1}} \pi(Y_t, t/Y_{t-1}, t) \pi(Y_{t-1}, t/Y_0, t_0) dY_{t-1},$$

где  $\pi(\dots)$  — соответствующая плотность вероятности перехода. Умножая обе части последнего уравнения на  $\rho_0 = \rho(Y_0, t_0)$  и интегрируя по  $Y_0$ , с учетом равенства  $\pi(Y_t, t/Y_{t-1}, t) = \rho_N(Y_t, Y_{t-1}, g, D, t)$  и принятых выше обозначений

$$\rho(Y_K, t) = \int_{Y_0} \pi(Y_K, t/Y_0, t_0) \rho(Y_0, t_0) dY_0,$$

приходим к рекурсии (5), что и требовалось доказать.

**3. Решение уравнения Стратоновича.** Уравнение Стратоновича описывает пространственно-временное изменение апостериорной плотности распределения  $\rho(Y, t/Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t)$  процесса  $Y_t$  (1) при наблюдателе  $Z_t$ , описываемом уравнением

$$Z_t = C(Y, t) + h_t V_t, \quad (10)$$

где  $C(Y, t)$  — вектор-функция размерности  $k \leq n$ , удовлетворяющая условию Липшица на интервале наблюдения,  $h_t$  — матричная функция размерности  $l \times k$ ,  $V_t$  —  $l$ -мерный белый гауссов шум с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей интенсивностей  $M\{V_t, V_t^\top\} = G_t \delta(t - \tau)$ , и является интегродифференциальным уравнением в частных производных [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(Y_t/Z_\tau)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \{a_i(Y, t)\rho(Y, t)\} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial Y_i \partial Y_j} \{b_{ij}(Y, t)\rho(Y, t)\} + [F(Y, t) - F(t)]\rho(Y, t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rho(Y, t_0) = \rho_0,$$

где

$$F(Y, t) = -\frac{1}{2} [Z_t - C(Y, t)]^\top G_t^{-1} [Z_t - C(Y, t)],$$

$$F_t = \int_Y F(Y, t)\rho(Y, t)dY.$$

Разработанные методы численного решения данного уравнения эффективны лишь при малой размерности наблюдаемого процесса (не выше 3) [1-3], их работоспособность при ограничениях на переменные как объекта, так и наблюдателя совершенно не исследовалась. Рассмотрим возможность формирования решения (11) рекуррентным путем, аналогичным (5).

Байесовский подход при высказанных выше предположениях о свойствах шумов  $Y_t$  и  $W_t$  позволяет записать связь априорной  $\rho(Y, t)$  и апостериорной  $\rho(Y, t/Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t)$  плотностей следующим образом (доказательство приведено в Приложении):

$$\rho(Y, t/Z_\tau) = \frac{\rho(Y, t)\rho(Z_t/Y_t)}{\int_Y \rho(Y, t)\rho(Z_t/Y_t)dY}. \quad (12)$$

Из приведенного соотношения видно, что решение уравнения (11) может быть легко получено элементарными преобразованиями решения уравнения ФПК при известной  $\rho(Z_t/Y_t)$ .

Последняя определяется из уравнения наблюдателя (10) и равна

$$\rho(Z_t/Y_t) = (2\pi)^{-(m/2)} \det h_{G_t}^{-(1/2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [Z_t - C(Y, t)]^\top h_{G_t}^{-1} [Z_t - C(Y, t)] \right\}. \quad (13)$$

Таким образом, в данном случае решение интегродифференциального уравнения (11) (в том числе и при ограничениях на вектор  $Y_t$ ) сводится к последовательному выполнению соответствующей рекурсии и по достижении заданных малых изменений  $\rho(Y_t, t)$  — к вычислению равенства (12) с учетом (13).

При прохождении составляющих измерительного сигнала  $Z_t$  через

блок усилителей-ограничителей, что характерно для большинства реальных радиотехнических комплексов, вместо (13) в соответствии с (9) необходимо использовать модифицированную плотность<sup>4</sup>

$$\rho_1(Z_t/V_t) = \prod_{K=1}^n \frac{[\rho(z_{(K)}(t), \dots, z_{(n)}(t)/V_t) + A_K \delta(C_K - z_{(K)}(t))]}{\rho(z_{(K-1)}(t), \dots, z_{(n)}(t)/V_t)},$$

где

$$A_K = \int_{C_K}^{\infty} \rho(z_{(K)}(t), \dots, z_{(n)}(t)/V_t) dz_{(K)},$$

$$\rho(z_{(1)}(t), \dots, z_{(K)}(t) > C_K, \dots, z_{(n)}(t)/V_t) = 0.$$

**4. Анализ сходимости.** Сходимость процесса стохастических приближений (3) к сильному решению  $Y_t$ , уравнения (1) определяется в смысле почти наверное [4]. Так как из сильной сходимости приближений почти наверное вытекает [4] их слабая сходимость по вероятности, т. е. сходимость распределений, то сходимость рекурсии (5) к плотности распределения  $Y_t$ , являющейся единственным сильным решением уравнения (2), можно считать доказанной.

Верхняя граница скорости сходимости рекуррентной последовательности (5) на каждом шаге итерации допускает оценку:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [t_0, \infty]} |\rho(Y_t, t) - \rho(Y_{t-1}, t)| &= \sup_{t \in [t_0, \infty]} \left| \int_{Y_{t-1}} \rho(Y_{t-1}, t) \times \right. \\ &\quad \times \rho_N(Y_t, Y_{t-1}, f, g, D, t) dV_{t-1} - \int_{Y_{t-2}} \rho(Y_{t-2}, t) \times \\ &\quad \times \rho_N(Y_t, Y_{t-2}, f, g, D, t) dV_{t-2} \left| = \sup_{t \in [t_0, \infty]} \left| \int_{Y_{t-2}} \rho(Y_{t-2}, t) \times \right. \right. \\ &\quad \times \rho_N(Y_{t-1}, Y_{t-2}, f, g, D, t) dV_{t-2} \left. \left. \right| = \sup_{t \in [t_0, \infty]} \left| \int_{Y_{t-1}} \rho(Y_{t-1}, t) \times \right. \right. \\ &\quad \times \rho_N(Y_{t-1}, Y_{t-2}, f, g, D, t) dV_{t-1} - \left. \left. \right| = \\ &\quad - \int_{Y_{t-2}} \rho(Y_{t-2}, t) \rho_N(Y_{t-1}, Y_{t-2}, f, g, D, t) dV_{t-2} \left| = \right. \\ &= \sup_{t \in [t_0, \infty]} \left| M_V \left\{ \int_{Y_{t-1}} \rho_N(Y_{t-1}, V, f, g, D, t) \rho_N(Y_t, Y_{t-1}, f, g, D, t) \times \right. \right. \\ &\quad \times dY_{t-1} - \rho_N(Y_{t-1}, V, f, g, D, t) \left. \right\} \left| \leqslant \right. \\ &\leqslant \sup_{t \in [t_0, \infty]} \left| M_V \left[ (2\pi)^{-n/2} \det K^{-1/2}(v, t) \right] \left( \int_{Y_{t-1}} (Y_t, Y_{t-1}, f, g, D, t) \times \right. \right. \\ &\quad \times dY_{t-1} - E_n \right) \left| \leqslant \begin{cases} (2\pi)^{-n/2} |\det K_{\min}^{-1/2}(t)|, & \text{если } |\det K_{\min}^{1/2}| > 2E_n \forall t, \\ (2\pi)^{-n} |\det K_{\min}^{-1/2}(t)| \left( \int_Y \det K^{-1/2}(Y, t) dY - E_n \right) \end{cases} \right. , \end{aligned}$$

если  $|\det K_{\min}^{-1/2}| < 2E_n \forall t$ ; где  $E_n$  — единичная матрица размерности  $n$ .

**5. Пример.** Для анализа возможности практического использования предложенного подхода к решению уравнения ФПК, т. е. оценки сходимости алгоритма и вычислительных затрат, с помощью рекурсии (5) численно определялось решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(y, t) = \alpha \frac{\partial}{\partial y} [\gamma \rho(y, t)] + \frac{\gamma^2 N}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(y, t), \quad (14)$$

$$\rho(y, 0) = \frac{10}{\sqrt{\pi N \gamma}} \exp \left[ -\frac{(y-m)^2}{(0, 1\gamma)^2 N} \right], \quad m = M(y_0),$$

где  $\alpha, N, m, \gamma$  — известные константы. Рекуррентное соотношение (5) для данного случая имеет вид

$$\rho(y_i, t) = \int_{y_{i-1}} \rho(y_{i-1}, t) \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma^2 N t}} \exp \left[ -\frac{(y_i - m + \alpha y_{i-1} t)^2}{\gamma^2 N t} \right] dy_{i-1},$$

$$\rho(y_0, t) = \rho(y, 0) = \frac{10}{\sqrt{\pi N} \gamma} \exp \left[ -\frac{(y_0 - m)^2}{(0, 1 \gamma)^2 N} \right].$$

Диапазон изменения переменной  $y$  был выбран равным  $[-30, 30]$  со 100 равноотстоящими узлами при интегрировании, константы определены как  $\gamma=1$ ,  $N=1$ ,  $\alpha=5 \cdot 10^{-6}$ ,  $m=0,1$ . Вычисление рекурсии осуществлялось для шести равноотстоящих отдельных моментов времени  $t_j$  интервала  $[101, 601]$  (с). Для каждого момента времени  $t_j$  ( $j=1, 6$ ) прекращение итеративной процедуры происходило по достижении неравенства

$$\max_y |\rho(y_i, t_j) - \rho(y_{i-1}, t_j)| < 10^{-7},$$

максимальное число итераций при этом для всех  $t_j$  не превышало трех. Сформированная таким образом функция плотности распределения сравнивалась во всех точках диапазона изменения  $y$  с аналитическим решением уравнения (14), полученным в [2]:

$$\rho(y, t) = (2\pi[\sigma^2(1-e^{-2\alpha t}) + (0,1\sigma)^2 e^{-2\alpha t}])^{-1/2} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{(y-m e^{-\alpha t})^2}{2[\sigma^2(1-e^{-2\alpha t}) + (0,1\sigma)^2 e^{-2\alpha t}]} \right], \quad \sigma^2 = \frac{\gamma^2 N}{4\alpha}.$$

Для всех исследованных моментов времени  $t_j$  сохранялось неравенство

$$\max_y \left| \frac{\rho(y, t_j) - \rho(y_{i_{\max}}, t_j)}{\rho(y, t_j)} \right| \leq 6,6 \cdot 10^{-2}.$$

Решение задачи осуществлялось на ЭВМ ЕС-1035, время решения для всех моментов времени не превышало 6 мин.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

При выводе уравнения для АПВ  $\rho(Y, t/Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t) = \rho(Y, t/Z_\tau)$  используем байесовский подход.

Совместный функционал распределения  $\{Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t\}$  и  $Y_t$  может быть определен как

$$\rho(Z_\tau, Y_t) = \rho(Y_t) \rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t | Y_t), \quad (\text{П.1})$$

где

$$\rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t | Y_t) = \rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau < t | Y_t) \rho(Z_t | Z_\tau, t_0 \leq \tau < t; Y_t),$$

причем

$$\begin{aligned} \rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau < t | Y_t) &= \frac{\rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau < t; Y_t)}{\rho(Y_t)} = \frac{\rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau < t) \rho(Y_t)}{\rho(Y_t)} = \\ &= \rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau < t) = \rho(Z_{\tau < t}). \end{aligned}$$

Из уравнения наблюдателя (10) очевидно, что при фиксированном  $Y_t Z_t$  от  $\{Z_\tau, t_0 \leq \tau < t\}$  не зависит:

$$\rho(Z_t | Z_\tau, t_0 \leq \tau < t; Y_t) = \rho(Z_t | Y_t).$$

С другой стороны, функционал  $\rho(Z_\tau, Y_t)$  равен

$$\rho(Z_\tau, Y_t) = \rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t) \rho(Y_t | Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t), \quad (\text{П.2})$$

где  $\rho(Y_t/Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t) = \rho(Y, t/Z_\tau)$  — искомая АПВ,

$$\begin{aligned}\rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t) &= \int_Y \rho(Z_\tau, t_0 \leq \tau \leq t; Y_t) dY = \int_Y \rho(Z_\tau, Y_t) dY = \\ &= \int_Y \rho(Y, t) \rho(Z_t/Y_t) \rho(Z_{\tau < t}) dY = \rho(Z_{\tau < t}) \int_Y \rho(Y, t) \rho(Z_t/Y_t) dY.\end{aligned}$$

Приравняв равенства (П.1) и (П.2), или, что то же самое, используя формулу Байеса, имеем следующее равенство для АПВ:

$$\rho(\vec{Y}, t/Z_\tau) = \frac{\rho(\vec{Y}, t) \rho(Z_t/\vec{Y}_t)}{\int_Y \rho(\vec{Y}, t) \rho(Z_t/\vec{Y}_t) d\vec{Y}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
3. Хугорцев В. В., Тарапан В. Н. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. Вып. 11. С. 2180.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. — 696 с.

Поступила в редакцию  
28 ноября 1989 г.

## THE RECURSIVE METHOD FOR FOKKER—PLANK—KOLMOGOROV EQUATION SOLUTION

S. V. Sokolov

The parabolic equation solution of the Markov process density distribution — the Focker—Plank—Kolmogorov equation (FPK) — has been presented in the recursive integral form determined by the statistical correspondence of the FPK equation to the stochastic differential equation of the Markov diffusive process solved by a successive approximation method. The obtained form allows effectively perform the numerical solution of the FPK equation and associated the Stratonovich equation for the given boundary conditions — different screens, especially in the multidimensional case. In this paper the convergence of the considered recursion to the FPK equation solution has been proved, an estimation to the upper bound speed of convergence has been given, an example illustrating the possibility of the effective use of the proposed approach has been considered.

УДК 537.874.6

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СЕТКЕ С КВАДРАТНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ

*B. A. Розов, A. A. Сочава*

Рассматривается дифракция цилиндрических электромагнитных волн на полуплоскости, образованной двумя перпендикулярными системами эквидистантных проводников. Задача решается методом факторизации с использованием усредненных граничных условий. Решение представлено в виде суперпозиции геометрооптических, краевых и поверхностных волн. Приведены результаты расчета амплитуд возбуждаемых волн.

Сетчатые экраны обладают рядом полезных электродинамических и конструктивных свойств, определяющих интерес к применению сеток в антенной технике и необходимость разработки методов их расчета. Для густых сеток эффективен метод усредненных граничных условий (УГРУ), с помощью которого изучены электродинамические характеристики неограниченных структур различной конструкции [1]. Следующим шагом можно считать сочетание методов УГРУ и факторизации, позволяющее исследовать полубесконечные сетки. Таким способом рассмотрены экраны из параллельных проводов [2, 3].

В настоящей работе рассматривается дифракция цилиндрических электромагнитных волн на полубесконечной сетке с квадратными ячейками. Контакты в узлах полагаются идеальными, проводимость проводов — конечной, а их ориентация по отношению к краю экрана — произвольной.

**1. Общие соотношения.** Расположение проводников сетки и источника — параллельной краю экрана (оси  $x$ ) нити синфазного электрического или магнитного тока — показано на рис. 1 (см. на вклейке). На поверхности сетки считаем выполненными усредненные граничные условия [1], которые в силу изотропности исследуемой структуры и независимости падающего поля от координаты  $x$  можно записать в виде

$$\mathbf{E}_x^i + \mathbf{E}_x = \begin{cases} -i\rho \frac{\alpha}{2} (1+F) j_x, & y>0 \\ \mathcal{E}_x & y<0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_y^i + \mathbf{E}_y = \begin{cases} -i\rho \frac{\alpha}{2} \left[ (1+F) j_y + \frac{1}{2k^3} \frac{d^2 j_y}{dy^2} \right], & y>0 \\ \mathcal{E}_y & y<0 \end{cases},$$

где  $\mathbf{E}^i$  — падающее поле,  $\mathbf{E}$  — вторичное поле,  $\mathcal{E}$  — полное поле на полуплоскости  $z=0$ ,  $y<0$ ;  $j$  — поверхностная плотность усредненного тока;  $\rho=\sqrt{\mu/\epsilon}$ ,  $\alpha=\frac{2b}{\lambda} \ln \frac{b}{2\pi a}$ ,  $a$  — радиус проводов,  $b$  — расстояние между ними,  $a \ll b \ll \lambda$ ; параметр  $F$  учитывает конечную проводимость проводов и определяется формулой

$$F \approx \sqrt{\frac{i}{2} \frac{d}{a}} \left( \ln \frac{b}{2\pi a} \right)^{-1},$$

в которой  $d = \sqrt{2/\omega\sigma'}$  — глубина проникновения поля,  $\sigma$  — удельная проводимость материала проводов,  $\mu'$  — его магнитная проницаемость. Отметим, что при высоких частотах для обычных материалов  $d \ll a$  и  $|F| \ll 1$ . Так, при  $\lambda = 1$  м для меди ( $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$  1/Ом·м)  $d = 3,8$  мкм, для железа ( $\sigma = 10^7$  1/Ом·м)  $d = 9$  мкм. При этом  $|F|$  имеет величину порядка  $10^{-3} - 10^{-2}$ . Кроме того, для густых сеток  $\alpha \ll 1$ .

Применим к (1) преобразование Фурье по координате  $y$ . Учитывая соотношения, связывающие вторичное поле с плотностью тока,

$$\mathbf{E} = ik_0 \left( \mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} \right), \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{i}{4} \int_0^\infty j(y') H_0^{(1)} \{k[z^2 + (y - y')^2]^{1/2}\} dy',$$

и считая, что при  $y \rightarrow 0$  значения  $j_x$  и  $dj_y/dy$  ограничены, а  $j_y(0) = 0$ , получим

$$\frac{\alpha}{2} (1 + F) \psi_1(w) \tilde{j}_x^+(w) = \frac{i}{\rho} (\tilde{E}_x^l - \tilde{\mathcal{E}}_x^-), \quad (3)$$

$$\frac{\alpha}{4} \frac{\gamma^2}{k^2} \psi_2(w) \tilde{j}_y^+(w) = \frac{i}{\rho} (\tilde{E}_y^l - \tilde{\mathcal{E}}_y^-) + \frac{\alpha}{2k^2} C,$$

где

$$\psi_1(w) = 1 + \frac{ik}{\alpha(1+F)\gamma}, \quad \psi_2(w) = 1 + \frac{2ik}{\alpha\gamma} + \frac{k^2(1+2F)}{\gamma^2},$$

$$\tilde{E}^l = \int_{-\infty}^{\infty} E^l e^{iwy} dy, \quad \tilde{j}^+ = \int_0^{\infty} j e^{iwy} dy, \quad \tilde{\mathcal{E}}^- = \int_{-\infty}^0 \mathcal{E} e^{iwy} dy,$$

$$\gamma = (k^2 - w^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Im} k, w > 0, \quad C = dj_y/dy|_{y=0},$$

$\tilde{j}^+$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}^-$  — функции  $w$ , аналитические, соответственно, в областях  $\operatorname{Im} w > 0$  и  $\operatorname{Im} w < 0$ .

Для решения системы уравнений (3) необходимо найти представление функций  $\psi_{1,2}$  в виде произведения  $\psi_{1,2}^+ \Psi_{1,2}^-$ . Такое представление (факторизация)  $\psi_1$  известно,  $\psi_2$  разлагается на множители, подобные  $\psi_1$ :

$$\psi_2 = \psi_3 \psi_4, \quad \psi_{3,4} = 1 + \frac{ik}{\gamma} \operatorname{sh} \sigma_{3,4}, \quad (4)$$

где  $\operatorname{sh} \sigma_{3,4} = (1 \pm \Delta)/\alpha$ ,  $\Delta = [1 + \alpha^2(1 + 2F)]^{1/2}$ , причем  $\operatorname{sh} \sigma_3 \approx 2/\alpha$ ,  $\operatorname{sh} \sigma_4 \approx -\alpha(1/2 + F)$  при  $\alpha \ll 1$ . Формула, определяющая функции  $\psi_i^+$ ,  $\psi_i^-$  ( $i = 1, 3, 4$ ), имеет вид [3]

$$\psi_i^+ = \left( \frac{\operatorname{ch} \sigma_i + \cos \tau}{1 + \cos \tau} \right)^{1/2} e^{i\xi_i(w)}, \quad \psi_i^-(w) = \psi_i^+(-w), \quad (5)$$

где

$$\xi_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\sigma_i}^{\tau+i\sigma_i} \frac{tdt}{\sin t}, \quad w = k \cos \tau, \quad \operatorname{sh} \sigma_i = [\alpha(1+F)]^{-1}.$$

Отметим, что  $\operatorname{Im} \xi_i = 0$  при вещественных  $\sigma_i$ , если  $\operatorname{Re} \tau = 0$  или  $\operatorname{Im} \tau = 0$ . Приведем также приближенные формулы:

$$\xi_i \approx \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} e^{-\sigma_i} [(\cos \tau + i \sin \tau)], \quad |\sigma_i| \gg 1,$$

$$\xi_i \approx \frac{\sigma_i \tau}{\pi \sin \tau}, \quad |\sigma_i| \ll 1, \quad (\operatorname{Re} \tau < \pi).$$

Решение системы уравнений (3) ищется далее с помощью обычных для метода факторизации операций, которые приводят к следующим выражениям:

$$\tilde{j}_x^+ = \frac{2}{i\rho\alpha(1+F)} \frac{\Phi_x^+}{\psi_1^+}, \quad \tilde{j}_y^+ = \frac{4k^2}{i\rho\alpha} \frac{\Phi_y^+}{(k+w)\psi_2^+}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_x^+(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{E}_x^i(w')}{\psi_1^-(w')} \frac{dw'}{(w'-w)},$$

$$\Phi_y^+(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{E}_y^i(w')}{(k-w')\psi_2^-(w')} \frac{dw'}{(w'-w)}, \quad \operatorname{Im} w > \operatorname{Im} w'.$$

Используя далее вытекающие из (2) соотношения

$$\tilde{A} = \frac{i}{2\gamma} e^{i\gamma|z_1|} \tilde{j}_x^+, \quad \tilde{E}_x = -\frac{k\rho}{2\gamma} e^{i\gamma|z_1|} \tilde{j}_x^+, \quad \tilde{H}_x = \frac{1}{2} e^{i\gamma|z_1|} \tilde{j}_y^+ \operatorname{sgn} z_2$$

и применяя обратное преобразование Фурье, находим проекции вторичного поля:

$$E_x = -\frac{k\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \tilde{j}_x^+ \exp(i\gamma|z_2| - iw y_2) dw, \quad (7)$$

$$H_x = \frac{1}{4\pi} \operatorname{sgn} z_2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{j}_y^+ \exp(i\gamma|z_2| - iw y_2) dw.$$

2. Возбуждение нитью электрического тока  $I_s$ . В рассматриваемом случае  $E_y^i = 0$  фурье-образ проекции падающего поля

$$\tilde{E}_x^i = -\frac{k\rho}{2\gamma} I_s \exp(i\gamma|z_1| + iw y_1). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и учитывая тождество

$$(w'-w)^{-1} = i \int_0^{\infty} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w-w')) \exp[i(w-w')y] dy,$$

приведем (7) к виду

$$E_x = \frac{ik^2 \rho I_s}{8\pi^2 \alpha(1+F)} J_E, \quad (9)$$

где

$$J_E = \int_0^{\infty} M_1(y) M_2(y) dy = 2\pi M_0 + \int_0^{-\infty} M_1(y) M_2(y) dy,$$

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\gamma(|z_1| + |z_2|) - iw(y_2 - y_1)] \frac{dw}{\gamma^2 \psi_1(w)},$$

$$M_s = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\gamma(|z_s| - iw(y_s - y))] \frac{dw}{\gamma \psi_1^+(w)}, \quad s=1,2.$$

Положим для определенности  $y_{1,2} > 0$ , а  $y < 0$  и вычислим интегралы  $M_{0,1,2}$  методом перевала. Переходя к новой переменной с помощью подстановки  $w = k \cos \tau$  (рис. 2) и вводя полярные координаты

$$\begin{aligned} r_0 &= [(y_2 - y_1)^2 + (|z_1| + |z_2|)^2]^{1/2}, \quad \sin \varphi_0 = (|z_1| + |z_2|)/r_0, \\ \cos \varphi_0 &= (y_2 - y_1)/r_0, \quad r'_s = [(y_s - y)^2 + z_s^2]^{1/2}, \\ \sin \varphi'_s &= |z_s|/r'_s, \quad \cos \varphi'_s = (y_s - y)/r'_s, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{\alpha(1+F)}{k} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi i}{kr_0}} e^{ikr_0} R_0 + O[(kr_0)^{-3/2}] \right\}, \\ M_s &= \sqrt{\frac{2\pi}{ikr'_s}} e^{ikr'_s [\psi_1^+ [k \cos(\pi - \varphi'_s)]]^{-1}} + O[(kr'_s)^{-3/2}], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $R_0 = -[1 - i\alpha(1+F)\sin \varphi_0]^{-1}$  — коэффициент отражения от бесконечной сетки ( $R_0^h$  в обозначениях работы [1]),  $kr_0 \rightarrow \infty$ ,  $kr'_s \rightarrow \infty$ .

Интеграл по переменной  $y$  в (9) вычисляется методом стационарной фазы. В итоге приходим к следующему результату:

$$E_x^2 = E_x^l + E_x(12) + E_x(1P2), \quad (11)$$

где

$$E_x^l = B_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad E_x(12) = B_0 R_0 \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \chi(\varphi_0 - \varphi_2),$$

$$E_x(1P2) = B_0 D_0 \frac{\exp[ik(r_1 + r_2)]}{k\sqrt{r_1 r_2}},$$

$$B_0 = -\frac{k_0 I_0}{2\sqrt{2\pi i}}, \quad \chi(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi > 0 \\ 0, & \varphi < 0 \end{cases},$$

$$D_0 = \frac{1}{\alpha(1+F)} \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{1}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} \frac{\sqrt{v} \bar{K}(v)}{\psi_1^+(-k \cos \varphi_1) \psi_1^+(-k \cos \varphi_2)},$$

$$\bar{K}(v) = e^{-iv} \int_v^{\infty} e^{ix} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad v = k(r_1 + r_2 - r_0),$$

$$r_s = (y_s^2 + z_s^2)^{1/2}, \quad \sin \varphi_s = |z_s|/r_s, \quad \cos \varphi_s = y_s/r_s.$$

Полученный результат справедлив всюду в области углов  $0 < \varphi_s < \pi$ ,  $s=0, 1, 2$ .

3. Возбуждение нитью магнитного тока  $I_M$ . В этом случае  $E_x^l = 0$ ,

$\tilde{E}_y^t = -\frac{1}{2} I_M \exp(i\gamma|z_1| + i\omega y_1) \operatorname{sgn} z_1$  и проекция  $H_x$  рассеянного поля определяется выражением

$$H_x = -\frac{k^2 I_M}{4\pi^2 \rho \alpha} \operatorname{sgn}(z_1 z_2) J_M, \quad (12)$$

где

$$J_M = \int_0^\infty N_1(y) N_2(y) dy = 2\pi N_0 + \int_0^\infty N_1(y) N_2(y) dy,$$

$$N_0 = \int_{-\infty}^\infty \exp[i\gamma(|z_1| + |z_2|) - i\omega(y_2 - y_1)] \frac{dw}{\gamma^2 \psi_2(w)},$$

$$N_s = \int_{-\infty}^\infty \exp[i\gamma(|z_s| - i\omega(y_s - y))] \frac{dw}{(k + w)\psi_2^+(w)}.$$

При асимптотическом вычислении  $N_0$  необходимо учесть наличие полюсов подынтегральной функции (нулей  $\psi_2$ ), расположенных в плоскости  $\tau$  в точках  $\tau_1 = -i\sigma_4$  и  $\tau_2 = \pi + i\sigma_4$ , причем  $\sigma'_4 = \operatorname{Re} \sigma_4 \leq 0$ ,  $\sigma''_4 = \operatorname{Im} \sigma_4 \leq 0$  (при  $\alpha \ll 1$  и  $|F| \ll 1$   $\sigma'_4 \simeq -\alpha/2$ ,  $\sigma''_4 \simeq -\alpha \operatorname{Im} F$ ). Полюс  $\tau_1$  оказывается расположенным на линии наискорейшего спуска, когда  $\varphi_0 = \pi - \delta - \sigma'_4$ , полюс  $\tau_2$  — когда  $\varphi_0 = \delta + \sigma'_4$ , где  $\delta = -\operatorname{arctg} \operatorname{sh} \sigma'_0 \simeq \alpha/2$ . Предполагая, что полюсы не близки к седловой точке  $\tau_0 = \pi - \varphi_0$ , получим

$$N_0 = \frac{\alpha}{2ik} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{ikr_0}} e^{ikr_0} R_M + \frac{i\pi a \operatorname{th} \sigma_4}{k\Delta} \exp[k \operatorname{sh} \sigma_4 (|z_1| + |z_2|)] \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \times \exp[ik \operatorname{ch} \sigma_4 |y_2 - y_1|] [\chi(\delta + \sigma''_4 - \varphi_0) + \chi(\delta + \sigma''_4 + \varphi_0 - \pi)] + O([kr_0]^{-3/2}) \right\},$$

где

$$R_M = \left[ 1 - \frac{i\alpha}{\sin \varphi_0} (1 + F - 0.5 \cos^2 \varphi_0) \right]^{-1}$$

— коэффициент отражения для рассматриваемой поляризации ( $R_M^*$  в работе [1]).

Подынтегральная функция в  $N_s$  имеет полюс (нуль функции  $\psi_2^+$ ) в точке  $\tau_2 = \pi + i\sigma_4$ , этот полюс дает вклад в значение  $N_s$  при  $\varphi'_s \leq \delta + \sigma'_4$ :

$$N_s = \sqrt{\frac{2\pi}{ikr'_s}} e^{ikr'_s} \frac{\operatorname{ctg}(\varphi'_s/2)}{\psi_2^+[k \cos(\pi - \varphi'_s)]} + \frac{i\pi\alpha}{\Delta} \operatorname{th} \sigma_4 \operatorname{ch} \frac{\sigma_4}{2} \times \quad (14)$$

$$\times \psi_2^+(k \operatorname{ch} \sigma_4) \exp(k \operatorname{sh} \sigma_4 |z_s|) \exp[ik \operatorname{ch} \sigma_4 (y_s - y)] \times$$

$$\times \chi(\delta + \sigma''_4 - \varphi'_s) + O([kr'_s]^{-3/2}).$$

Можно показать (см. [2]), что формулы (13), (14) справедливы при выполнении условий  $\sqrt{2kr_0} \left| \cos \frac{1}{2} (\tau_{1,2} + \varphi_0) \right| \gg 1$ ,  $\sqrt{2kr'_s} \left| \cos \frac{1}{2} (\tau_2 + \varphi'_s) \right| \gg 1$ , которые при  $\alpha \ll 1$  приводят к неравенствам  $\alpha \sqrt{kr_0} \gg 1$ ,  $\alpha \sqrt{kr'_s} \gg 1$ . Будем считать эти условия выполненными. Тогда (13),

(14) можно упростить, заменив на единицу множители  $[\chi(\delta + \sigma_4'' - \varphi_0) + \chi(\delta + \delta_4'' + \varphi_0 - \pi)]$  и  $\chi(\delta + \sigma_4'' - \varphi_s')$ .

Подставляя (13), (14) в (12) и вычисляя интеграл по  $y$ , получим

$$H_x^\Sigma = H_x^l + H_x(12) + H_x(1P2) + H_x(1\pi 2) + \\ + H_x(1\pi P2) + H_x(1P\pi 2) + H_x(1\pi P2), \quad (15)$$

где

$$H_x^l = B_m \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad H_x(12) = B'_m R_m \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \chi(\varphi_0 - \varphi_2), \\ H_x(1P2) = B'_m D_m \frac{\exp[ik(r_1 + r_2)]}{k\sqrt{r_1 r_2}},$$

$$H_x(1\pi 2) = B'_m K_\pi \exp(k \operatorname{sh} \sigma_4(|z_1| + |z_2|)) \exp(i k \operatorname{ch} \sigma_4 |y_2 - y_1|) \chi(y_1) \chi(y_2),$$

$$H_x(1\pi P2) = B'_m K_\pi t(\varphi_2) \exp(k \operatorname{sh} \sigma_4(|z_1|)) \exp(i k \operatorname{ch} \sigma_4 y_1) \frac{e^{ikr_2}}{\sqrt{kr_2}} \chi(y_1),$$

$$H_x(1\pi P2) = B'_m K_\pi t(\varphi_1) \frac{e^{ikr_1}}{\sqrt{kr_1}} \exp(k \operatorname{sh} \sigma_4(|z_2|)) \exp(i k \operatorname{ch} \sigma_4 y_2) \chi(y_2),$$

$$H_x(1\pi P2) = B'_m K_\pi \Gamma \exp[k \operatorname{sh} \sigma_4(|z_1| + |z_2|)] \times \\ \times \exp[i k \operatorname{ch} \sigma_4(y_1 + y_2)] \chi(y_1) \chi(y_2),$$

$$B_m = -\frac{kI_m}{2\rho\sqrt{2\pi i}}, \quad B'_m = B_m \operatorname{sgn}(z_1 z_2),$$

$$D_m = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2i}{\pi}} \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_1/2) \operatorname{ctg}(\varphi_2/2)}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} \frac{\sqrt{v} \bar{K}(v)}{\varphi_2^+(-k \cos \varphi_1) \psi_2^+(-k \cos \varphi_2)},$$

$$K_\pi = -\frac{1}{\Delta} \sqrt{2\pi i} \operatorname{th} \sigma_4, \quad \Gamma = \frac{\alpha}{\Delta} \operatorname{th} \sigma_4 \operatorname{ch}^4 \frac{\sigma_4}{2} [\psi_2^+(k \operatorname{ch} \sigma_4)]^2,$$

$$t(\varphi_s) = -\sqrt{\frac{2i}{\pi}} \operatorname{ch}^2 \frac{\sigma_4}{2} \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_s/2)}{\cos \varphi_s + \operatorname{ch} \sigma_4} \frac{\psi_2^+(k \operatorname{ch} \sigma_4)}{\psi_2^+(-k \cos \varphi_s)}.$$

**4. Анализ результатов.** Из формул (11) и (15) видно, что структура поля, возбуждаемого сеткой, существенно зависит от поляризации падающей волны. При возбуждении нитью электрического тока суммарное поле представляет собой суперпозицию геометрооптических и краевой волн, причем при  $z_1 z_2 > 0$  второе слагаемое в (11) определяет отраженную волну, а при  $z_1 z_2 < 0$  сумма двух первых слагаемых дает прошедшую сквозь сетку волну, амплитуда которой пропорциональна коэффициенту прохождения  $T_3 = 1 + R_3$ . Амплитуда краевой волны  $E_x(1P2)$  определяется коэффициентом дифракции  $D_3$ .

Такой же физический смысл имеют первых три слагаемых в формуле (15) при возбуждении нитью магнитного тока. Коэффициент прохождения в этом случае  $T_m = 1 - R_m$ . Результаты расчета  $|T_3|$  и  $|T_m|$  приведены на рис. 3 (подробные графики для  $|R_{3,m}|$  имеются в [1]).

Зависимость  $|D_3|$  и  $|D_m|$  от угла  $\varphi_2$  показана на рис. 4. Значения  $|D_{3,m}|$  резко возрастают при приближении  $\varphi_2$  к  $\pi - \varphi_1$  — к границам области свет—тень и области существования отраженного луча:

$$D_{3,m} \rightarrow \frac{1}{2} R_{3,m} \sqrt{\frac{kr_1 r_2}{r_1 + r_2}} \operatorname{sgn}(\pi - \varphi_1 - \varphi_2).$$

При этом сумма геометрооптических и краевой волн остается непрерывной. В частности, на границе свет—тень

$$E_x^{\Sigma} = E_x^i \left( 1 + \frac{R_s}{2} \right), \quad H_x^{\Sigma} = H_x^i \left( 1 - \frac{R_m}{2} \right).$$

В случае  $\alpha \ll 1$  коэффициенты дифракции  $D_{s,m}$  совпадают с соответствующими величинами для идеально проводящей полуплоскости:

$$D_s^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \frac{\sin(\varphi_1/2) \sin(\varphi_2/2)}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} V \bar{v} K(v),$$

$$D_m^0 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i}} \frac{\cos(\varphi_1/2) \cos(\varphi_2/2)}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} V \bar{v} \bar{K}(v).$$

Остальные слагаемые в (15) связаны с возбуждением поверхностных волн. Составляющая  $H_x(1p2)$  — поверхностная волна, возбуждаемая источником;  $H_x(1Pp2)$  — пространственная краевая волна, возбуждаемая ребром при падении на него поверхностной волны;  $H_x(1Pp2)$  — результат преобразования падающей на ребро пространственной волны в поверхностную;  $H_x(1Pp2)$  — отраженная ребром поверхностная волна. Поверхностные волны распространяются вдоль поверхности сетки с фазовой скоростью  $v_f \approx c/\operatorname{ch} \sigma_4 \approx c(1-\alpha^2/8)$  и экспоненциально убывают при удалении от нее. Коэффициент затухания по координате  $z$  равен  $-\operatorname{Re}(k \operatorname{sh} \sigma_4) \approx k\alpha/2$ . При наличии потерь в проводах амплитуды поверхностных волн убывают и при удалении от источника возбуждения по координате  $y$ :  $\operatorname{Re}(ik \operatorname{ch} \sigma_4) \approx -\alpha^2 |F| / 2\sqrt{2}$ . При  $\alpha \ll 1$  коэффициенты  $K_n$ ,  $\Gamma$ ,  $t$ , определяющие амплитуды этих волн, имеют вид

$$K_n \approx \sqrt{\frac{\pi i}{2}} \alpha, \quad \Gamma \approx -\frac{ai}{2},$$

$$t(\varphi_s) \approx -\sqrt{\frac{i}{\pi}} \frac{\sin \varphi_s}{(1+\alpha^2/8 + \cos \varphi_s) \sqrt{1+\alpha^2/8 - \cos \varphi_s}}.$$

В этом случае амплитуда волны  $H_x(1p2)$  пропорциональна  $\alpha$ , волны  $H_x(1pP2)$  —  $\alpha^2$ , амплитуды волн  $H_x(1pP2)$  и  $H_x(1Pp2)$  пропорциональны  $\alpha$  при всех углах  $\varphi_s$  кроме  $\varphi_s = \pi - \alpha/2$ , где  $|t|$  имеет максимум:

$$|t|_{\max} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha}, \quad \text{а } |K_n t| \approx 1.$$

Графики  $|K_n|$ ,  $|\Gamma|$ ,  $|t|$  приведены на

рис. 5, 6.

Таким образом, рассмотренный сетчатый экран качественно отличается от сплошного металлического экрана тем, что над поверхностью сетки существуют поверхностные волны. В отличие от сетки из параллельных проводов [3] поверхностные волны возбуждаются здесь только при одной поляризации падающего поля и исчезают при увеличении густоты сетки ( $\alpha \rightarrow 0$ ). Отметим также, что при идеальном контакте в узлах результаты не зависят от ориентации проводов относительно края экрана.

## ЛИТЕРАТУРА

- Конторович М. И., Астракан М. И. и др. Электродинамика сетчатых структур. — М.: Радио и связь, 1987. — 136 с.
- Розов В. А., Третьяков С. А. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 5.
- Розов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 4. С. 454.

УДК 621.371:519.64

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ  
НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ  
С НЕОДНОРОДНЫМ  
МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ**

*B. N. Кисель, A. I. Федоренко*

Рассеяние электромагнитной волны на металлическом цилиндре с неоднородным магнитодиэлектрическим покрытием рассмотрено на основе комбинированного использования объемных и поверхностных интегральных уравнений (ИУ). Обсуждены вопросы численного решения системы ИУ, приведены результаты тестовых расчетов и оценки погрешности.

Потребности практики обусловили интерес исследователей к использованию магнитодиэлектрических покрытий для изменения рассеивающих свойств металлических объектов. Однородные и многослойные из однородных слоев покрытия [1, 2], как правило, эффективно работают на плоских и слабоискривленных поверхностях в узком секторе углов падения электромагнитной волны. Применение же неоднородных покрытий, несмотря на их потенциально высокую эффективность работы на объектах сложной формы, сдерживается отсутствием методик строгого расчета характеристик соответствующих структур. Особого внимания заслуживает анализ дифракционных процессов на металло-диэлектрических кромках. Результаты такого анализа могут быть непосредственно использованы, например, для уменьшения паразитного рассеяния от несущих конструкций, расположенных в раскрывах зеркальных антенн.

В работе авторов [3] предложен достаточно универсальный способ решения задач дифракции плоской волны на металлическом цилиндре, полностью или частично покрытом неоднородным диэлектриком. Алгоритм основан на комбинированном использовании объемного и поверхностного ИУ. Рассмотрим особенности применения этой методики к расчету характеристик рассеяния металлического цилиндра с неоднородной магнитодиэлектрической насадкой (покрытием).

**Постановка задачи.** В свободном пространстве находится идеально проводящий цилиндр произвольного поперечного сечения с неоднородным покрытием. Образующая цилиндра параллельна оси  $OZ$  декартовой системы координат. Параметры покрытия  $\epsilon_a = \epsilon_a(x, y)$ ,  $\mu_a = \mu_a(x, y)$  от  $z$  не зависят. Плоская электромагнитная волна падает перпендикулярно  $OZ$  под углом  $\phi_0$  к оси  $OX$ . Требуется найти рассеянное поле в произвольной точке пространства  $P$ .

**Интегральные уравнения задачи.** Рассмотрим случай  $E$ -поляризации падающей волны  $E^n = i_z E_z^n$ . Если ввести электрический и магнитный токи поляризации

$$\mathbf{J}^{\text{э. пол.}} = i\omega (\epsilon_a - \epsilon_0) \mathbf{E} = i_z J_z^{\text{э. пол.}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{J}^{\text{м. пол.}} = i\omega (\mu_a - \mu_0) \mathbf{H} = i_x J_x^{\text{м. пол.}} + i_y J_y^{\text{м. пол.}},$$

то получим задачу возбуждения металлического цилиндра полем па-

дающей волны  $\mathbf{E}^n$  и полем токов поляризации  $\mathbf{E}_z^{\text{пол}}$ , которое учитывается правой частью ИУ для тока на контуре поперечного сечения проводящего цилиндра  $C$

$$\frac{kW}{4} \int_C H_0^{(2)}(k\rho) J_z^s(v') dv' = E_z^n + E_z^{\text{пол}}. \quad (2)$$

В выражениях (1), (2)  $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ ,  $v' = v'(x', y')$  — точка интегрирования,  $v = v(x, y) \in C$ ,  $H_0^{(2)}(k\rho)$  — функция Ханкеля,  $W = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,  $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства,  $\omega$  — частота падающего поля.

Пусть  $V$  — объем, занимаемый диэлектриком. Тогда в общем случае

$$E_z^{\text{пол}} = -i\omega\mu_0 A_z^{\text{э. пол}} + \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div}(i_z A_z^{\text{э. пол}}) - \operatorname{rot}(i_x A_x^{\text{м. пол}} + i_y A_y^{\text{м. пол}}),$$

где  $A^{\text{э.м.пол.}} = \int_V J^{\text{э.м.пол.}} G dV$ ,  $G$  — функция Грина свободного пространства, или, с учетом отсутствия зависимости от координаты  $z$ ,

$$E_z^{\text{пол}} = \frac{k^2}{i\omega\epsilon_0} \int_V J_z^{\text{э.пол.}} G dV - \frac{\partial}{\partial x} \int_V J_y^{\text{м.пол.}} G dV + \frac{\partial}{\partial y} \int_V J_x^{\text{м.пол.}} G dV.$$

Заменив  $J^{\text{э.м.пол.}}$  полными полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  посредством (1), получим вместо (2)

$$\begin{aligned} & \frac{kW}{4} \int_C H_0^{(2)}(k\rho) J_z^s(v') dv' - k^2 \int_V (\epsilon - 1) E_z G dV - \\ & - \frac{k^2}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_V (\mu - 1) H_y G dV + \frac{k^2}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_V (\mu - 1) H_x G dV = E_z^n \quad (v \in C), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}$ ,  $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости покрытия.

Пусть теперь точка наблюдения  $v$  находится в объеме  $V$ . Пользуясь принципом суперпозиции, запишем

$$E_z = E_z^n + E_z^{\text{пов}} + E_z^{\text{пол}}, \quad (4)$$

$$H_{x, y} = H_{x, y}^n + H_{x, y}^{\text{пов}} + H_{x, y}^{\text{пол}}, \quad v \in V,$$

где  $H_{x, y}^{\text{пов}}$ ,  $E_z^{\text{пов}}$  — поле в области  $V$ , возбуждаемое поверхностными токами  $J_z^s$  на контуре металлического цилиндра  $C$ ,

$$E_z^{\text{пов}} = -\frac{kW}{4} \int_C H_0^{(2)}(k\rho) J_z^s(v') dv', \quad (5)$$

$$H_{x, y}^{\text{пов}} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot}(i_z E_z^{\text{пов}}).$$

С учетом (1)

$$\begin{aligned} E_z^{\text{пов}} = k^2 \int_V (\epsilon - 1) E_z G dV + \frac{k^2}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_V (\mu - 1) H_y G dV - \\ - \frac{k^2}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_V (\mu - 1) H_x G dV. \end{aligned} \quad (6)$$

Объединив (3) и (4) с учетом (5) и (6), получаем систему уравнений, которую удобно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} E_z \\ \mu H_x \\ \mu H_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\beta & -\beta\partial/\partial y & \beta\partial/\partial x & 1 \\ -\alpha\partial/\partial y & \partial^2/\partial y^2 & -\partial^2/\partial x\partial y & -\partial/\beta\partial y \\ \alpha\partial/\partial x & -\partial^2/\partial x\partial y & \partial^2/\partial x^2 & \partial/\beta\partial x \\ \alpha\beta & -\beta\partial/\partial y & \beta\partial/\partial x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_e E_z \\ L_\mu H_x \\ L_\mu H_y \\ L J_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^n \\ H_x^n \\ H_y^n \\ E_z^n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\alpha = i\omega\epsilon_0, \quad \beta = i\omega\mu_0, \quad L_e E = \int_V (\epsilon - 1) EG dV,$$

$$LJ = \frac{i\kappa}{4} \int_C H_0^{(2)}(k\rho) J dv', \quad L_\mu H = \int_V (\mu - 1) HG dV.$$

По найденным из решения (7) распределениям  $E_z, H_x, H_y, J_z^0$  определяется рассеянное поле в произвольной точке пространства  $P$ ,

$$E_z^{\text{рас}} = E_z^{\text{пол}} + E_z^{\text{пов}},$$

с использованием тех же соотношений (5), (6), где точка наблюдения  $v(x, y)$  заменяется точкой  $P$ , находящейся в свободном пространстве.

Рассмотрим случай  $H$ -поляризации  $\mathbf{H}^n = i_z H_z^n$ . При этом

$$J^{\text{э. пол.}} = i\omega(\epsilon_a - \epsilon_0) \mathbf{E} = i_x J_x^{\text{э. пол.}} + i_y J_y^{\text{э. пол.}},$$

$$J^{\text{м. пол.}} = i\omega(\mu_a - \mu_0) \mathbf{H} = i_z J_z^{\text{м. пол.}}.$$

В качестве уравнения для эквивалентного поверхностного тока на цилиндре удобно использовать интегральное уравнение магнитного поля, которое в данном случае принимает вид

$$\frac{1}{2} J_v^0 + \int_C [(y - y') \sin \theta' + (x - x') \cos \theta'] \frac{i\kappa}{4\rho} H_1^{(2)}(k\rho) J_v^0 dv' = -(H_z^n + H_z^{\text{пол.}}).$$

Здесь  $\theta'$  — угол наклона нормали в точке  $v'$  к оси  $0X$ ,  $\cos \theta' = (n(v'), i_x)$ ,  $i_v = i_y \cos \theta - i_x \sin \theta$  — орт криволинейной координаты  $v(x, y) \in C$ ,  $(i_v, n) \equiv 0$ ,  $[n, i_v] \equiv i_z$ .

Поступая аналогично случаю  $E$ -поляризации, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} H_z \\ \epsilon E_x \\ \epsilon E_y \\ -(1/2) J_v^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha\partial/\partial y & -\alpha\partial/\partial x & -1 \\ \beta\partial/\partial y & \partial^2/\partial y^2 & -\partial^2/\partial x\partial y & -\partial/\alpha\partial y \\ -\beta\partial/\partial x & -\partial^2/\partial x\partial y & \partial^2/\partial x^2 & \partial/\alpha\partial x \\ \alpha\beta & \alpha\partial/\partial y & -\alpha\partial/\partial x & -1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} L_\mu H_z \\ L_e E_x \\ L_e E_y \\ \tilde{L} J_v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_z^n \\ E_x^n \\ E_y^n \\ H_z^n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\text{где } \tilde{L} J = \int_C [(y - y') \sin \theta' + (x - x') \cos \theta'] \frac{i\kappa}{4\rho} H_1^{(2)}(k\rho) J dv'.$$

**Численное решение систем ИУ.** Обычно при решении объемных ИУ для неоднородных диэлектрических тел операторы дифференцирования вносят под знак интеграла, однако при совпадении точек наблю-

дения и интегрирования эта процедура не является корректной. Поэтому приходится тщательно выделять особенность ядер ИУ, а в случае скачкообразного изменения параметров диэлектрика (например на границе диэлектрик — свободное пространство) — иметь дело с нагруженным ИУ [4].

В работе [5] предложен иной подход. Объем  $V$  разбивается на цилиндрические элементы с сечением, близким к квадратному, а затем каждый элемент заменяется круговым цилиндром той же площади по перечного сечения. Для удовлетворительной аппроксимации эта площадь должна выбираться достаточно малой. Тогда, считая поля и параметры диэлектрика по объему элементарного цилиндра постоянными, удается выполнить интегрирование аналитически, что снимает трудности последующего вычисления производных. В [6] указывается, что такой подход обеспечивает удовлетворение граничных условий по всему объему  $V$ .

Ключевым моментом применения описанной методики к решению систем ИУ (7), (8) является вычисление интеграла вида

$$\int_{V_a} G(v, v') dV, \quad (9)$$

где  $V_a$  — объем, ограниченный цилиндрической поверхностью радиуса  $a$ .

Пусть ось этого цилиндра совпадает с осью  $OZ$  цилиндрической системы координат. Используя запись функции Грина в этой системе координат [7]

$$G(v, v') = \frac{1}{8\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} \begin{cases} H_n^{(2)}(vr') J_n(vr) \\ J_n(vr') H_n^{(2)}(vr) \end{cases} dh,$$

где верхняя строка соответствует случаю  $v \in V_a$  (точка наблюдения находится на оси элементарного цилиндра), а нижняя —  $v \notin V_a$  (точки наблюдения и интегрирования не совпадают), получим для (9)

$$\int_{V_a} G(v, v') dV = \frac{\pi a}{2ik} \begin{cases} H_1^{(2)}(ka) J_0(k\rho) - (2i/\pi ka), & v \in V_a \\ J_1(ka) H_0^{(2)}(k\rho), & v \notin V_a \end{cases}. \quad (10)$$

Отметим, что при  $v \notin V_a$  предельный переход  $\rho \rightarrow 0$  в (10) следует проводить после вычисления производных в (7), (8). В остальном процедура сведения систем ИУ к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) особенностей не имеет и выполняется, например, методом Крылова—Боголюбова [4] с учетом возможности перестановки операторов дифференцирования  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  и интегрирования по контуру  $C$ . Свойства матриц полученных СЛАУ позволяют применить методы учета возможной симметрии исследуемых объектов с целью сокращения числа неизвестных [4], необходимо лишь иметь в виду смешанный характер ядер. Так, при учете симметрии относительно плоскости  $XOZ$  все ядра будут симметричными за исключением содержащих однократное дифференцирование по  $y$ , которые будут антисимметричными.

**Результаты расчетов.** Для тестирования разработанных вычислительных программ использовались результаты расчетов методом собственных функций двухпозиционных диаграмм рассеяния кругового металлического цилиндра радиуса  $kR$  с однородным покрытием толщиной  $kd$  (рис. 1, 2; см на вклейке), а также результаты работы [8], где методом прямых исследовался круговой цилиндр с двумерно неоднородным диэлектриком (рис. 3). На рис. 1  $kR=1,0$ ,  $kd=0,5$ ,  $\epsilon=2,0-i0,2$ ,  $\mu=1,5-i0,5$ ; 1 — тест, 2 —  $ka=0,6$ , 3 —  $ka=0,3$ . На рис. 2  $kR=1,0$ ,  $kd=0,6$ ,  $\epsilon=2,0-i0,2$ ,  $\mu=1,5-i0,5$ ; 1 — тест, 2 —  $ka=0,6$ , 3 —  $ka=0,3$ . На рис. 3  $kR=2,0$ ,  $kd=1,0$ ,  $\epsilon=2kr-4-0,2e^{i\Psi/\pi}$ ,  $\mu=1$ ; 1 — тест,

$2 - ka = 0,5$ . Пример разбиения объема  $V$  на элементы в виде цилиндрических секторов приведен на рис. 4. Рассеянное поле в дальней зоне характеризуется нормированной к длине волны эффективной поверхностью рассеяния

$$\sigma/\lambda = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} (2\pi r_0/\lambda) (|E^{\text{рас}}|^2/|E^{\text{n}}|^2).$$

Установлено, что для достаточно точного представления поля следует выбирать  $ka \approx (0,3 \div 0,4)/\sqrt{|\epsilon\mu|}$ , при этом погрешность расчетов не превысит 0,5 дБ. Однако в ряде случаев (например при наличии существенных потерь в диэлектрике) размер  $ka$  может быть увеличен. Подтверждением тому служат результаты расчета диаграмм обратного рассеяния (ДОР) металлодиэлектрической полосы конечной толщины (рис. 5, 6; все размеры указаны в электрических единицах). Несмотря на выбор  $ka \approx 0,19$  при параметрах диэлектрика  $\epsilon_1 = 7,4 - i4,2$ ,  $\mu_1 = -6,5 - i1,8$  результаты, полученные по описанной выше методике (кривая 1) и с использованием метода поверхностных ИУ (кривая 2), находятся в хорошем соответствии.

На этих же рисунках для сравнения приведены ДОР металлической полосы без диэлектрика (кривая 3), а также металлической полосы с неоднородной насадкой. Расчет проведен для двух вариантов выполнения насадки. В первом случае (кривая 4) плотность диэлектрика почти линейно возрастает вдоль длины от кромки ( $\epsilon = 1,5 \div i0,1$ ,  $\mu = 1,1 \div i0,05$ ) к стыку с металлом ( $\epsilon = \epsilon_1$ ,  $\mu = \mu_1$ ). Во втором случае (кривая 5) насадка состоит из трех слоев, причем закон распределения  $\epsilon$  и  $\mu$  во внешних слоях остается тем же, а внутренний слой имеет  $\epsilon = \epsilon_1$ ,  $\mu = \mu_1$ . Заметны существенные изменения уровня отраженного поля, особенно в секторе  $\phi = \phi_0 = 0 \div 30^\circ$ .

В заключение отметим, что возможности современных ЭВМ позволяют решать СЛАУ с числом уравнений порядка нескольких сотен, а применение итерационных методов линейной алгебры еще более увеличивает этот предел. Учитывая также возможность использования симметрии задачи с целью экономии ресурсов ЭВМ, удается без особых затруднений выполнять расчеты для объектов с характерным размером порядка нескольких длин волн. Так, расчет одной ДОР, изображенной на рис. 5, 6, требует около 10 мин счета ЭВМ ЕС1061.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Чечетка В. В., Федоренко А. И. // Радиотехника и электроника 1980. Т. 25. № 8. С. 1602.
- Васильев Е. Н., Федоренко А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 3. С. 351.
- Кисель В. Н., Федоренко А. И. // Тезисы докл. I Всесоюзной научно-технической конференции «Устройства и методы прикладной электродинамики». — М.: МАИ, 1988. С. 104.
- Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987. — 272 с.
- Richmond J. H. // IEEE Trans 1966 V. AP-14. № 2. P. 460
- Peters L. Jr., Richmond J. H. // Radio Science 1982. V. 17. № 5. P. 973
- Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн — М.: Радио и связь, 1983 — 296 с.
- Куваев В. М., Пермяков В. А. В кн.: Труды Московского энергетического института. — М.: МЭИ. 1978. Вып. 379. С. 105.

Таганрогский радиотехнический  
институт

Поступила в редакцию  
15 ноября 1989 г.

#### ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY A PERFECTLY CONDUCTING CYLINDER COVERED WITH THE INHOMOGENEOUS FERRITE-DIELECTRIC COATING

V. N. Kisel', A. I. Fedorenko

The paper deals with the problem of electromagnetic wave scattering by conducting cylinder covered with the inhomogeneous ferrite-dielectric coating. The solution is based on the application of combined volume and surface integral equations. The aspects of numerical solution of integral equation system, test results calculated and error bounds are also discussed.

УДК 621.385

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВИНТОВОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА СО ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНОЙ В ВОЛНОВОДЕ

*А. Ю. Дмитриев, Д. И. Трубецков, А. П. Четвериков*

В рамках нестационарного подхода рассмотрен процесс возникновения генерации и характер установившихся колебаний при взаимодействии слаборелятивистского винтового электронного пучка со встречной волной в волноводе (гиротрон со встречной волной). В линейном режиме (начало генерации) найдены инкременты нарастания. В нелинейном режиме показаны границы применимости стационарного подхода, численно решена нестационарная система уравнений и показано наличие режимов монохроматической, периодической и стохастической автомодуляции.

При взаимодействии винтового электронного пучка (ВЭП) с ТЕ-модами согласованного волновода реализуются режимы усиления (на частотах  $\omega \approx \omega_1$ ,  $\omega_1 - \beta_0(\omega_1)v_{\parallel} - \omega_c = 0$ ) и генерации ( $\omega \approx \omega_2$ ,  $\omega_2 + \beta_0(\omega_2)v_{\parallel} - \omega_c = 0$ ) электромагнитных колебаний [<sup>1-7</sup>]. Здесь  $\omega_c$  — циклотронная частота,  $v_{\parallel}$  — продольная (вдоль направления магнитного поля) скорость электронов. В последнем случае есть возможность перестройки частоты генерации за счет изменения статического магнитного поля  $B_0$  или продольной скорости электронов  $v_{\parallel}$ , что является отличительной и привлекательной особенностью такого типа взаимодействия по сравнению с возбуждением колебаний в резонаторе. Учитывая распределенный характер взаимодействия и считая, что фазировка электронов-осцилляторов винтового (поливинтового) пучка обусловлена релятивистской неизохронностью и, следовательно, имеет инерционный характер, естественно предположить, что генерируемые колебания могут быть не только монохроматическими, но и более сложными [<sup>8-12</sup>]. Об этом, в частности, свидетельствуют результаты исследования нестационарных процессов в МЦР-генераторе с низкой добротностью вблизи критической частоты электродинамической структуры, когда выполняется условие медленности изменения амплитуды поля за время проleta электронов через резонатор [<sup>13, 14</sup>].

В настоящей работе рассматриваются переходные процессы и особенности установившихся колебаний в МЦР с бегущей встречной волной в предположении, что можно пренебречь взаимодействием пучка с попутной волной («вдали» от критической частоты). Используемое одноволновое приближение [<sup>8</sup>] позволяет не накладывать никаких ограничений на соотношение между продольной скоростью электронов и групповой скоростью волны, что важно для системы, предусматривающей возможность электронной перестройки частоты.

**Модель. Уравнения и граничные условия.** Рассмотрим взаимодействие цилиндрического слаборелятивистского ВЭП с одной из ТЕ-мод волновода в рамках простой модели, считая, что: а) поле в поперечном сечении пучка однородное, б) можно пренебречь взаимодействием электронов с ВЧ составляющими магнитного поля и считать  $v_{\parallel} \approx \text{const}$ , в) нестационарный процесс является узкополосным, вследствие чего в рабочей полосе частот можно учитывать взаимодействие ВЭП только со встречной волной; причем уравнение, выражающее закон дисперсии, линеаризованное вблизи частоты синхронизма  $\omega_2$ , имеет вид:  $\omega \approx \omega_2 +$

$+(d\omega/d\beta_0)|_{\omega_2}(\beta_0(\omega)-\bar{\beta}_0)$ , где  $\bar{\beta}_0=\beta_0(\omega_2)$ ;  $(d\omega/d\beta_0)|_{\omega_2}=v_{\text{тр}}$  — групповая скорость волны на частоте  $\omega_2$ , г) разбросом скоростей в пучке и влиянием сил пространственного заряда на процесс взаимодействия можно пренебречь.

Система соответствующих уравнений, записанных в безразмерных переменных, состоит в этом случае из стандартного уравнения движения электронов слаборелятивистского ВЭП [5] и уравнения возбуждения встречной волны электронным потоком [8]. Ее можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \xi} - j\mu(1 - |\beta|^2)\beta = F, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta d\varphi_0, \quad (2)$$

где  $\beta=r/r_0$  — безразмерный комплексный «радиус» вращения электрона,  $r/r_0=Re^{j\Phi}$ ,  $r_0=r|_{\xi=0}$ ,  $F=F(\xi, \tau)$  — безразмерная медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля волны в сечении пучка ( $E(z, t)=\text{Re}\{F(\xi, \tau)E_0 \exp[j(\omega_2 t + \beta_0 z)]\}$ ),  $\xi=\bar{\beta}_0 Dz$  — безразмерная координата вдоль направления статического магнитного поля  $B_0$ ,  $\tau=\omega_2 D(t-z/v_{\parallel}) (1+v_{\parallel}/|v_{\text{тр}}|)^{-1}$  — безразмерное «время» в движущейся с продольной скоростью пучка  $v_{\parallel}$  системе координат,  $\omega_2$  — частота, удовлетворяющая условию  $\omega_2 + \beta_0 v_{\parallel} = \omega_c = 0$ , по которой проводится усреднение,  $c$  — скорость света,

$$D=\sqrt{\frac{I_0 R_{\text{св}}}{4V_0} \left(1 + \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\parallel}^2}\right)} \ll 1$$

— параметр взаимодействия,

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_0 c} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp 0}^2}{c^2} \right]$$

— циклотронная частота при  $\xi=0$ ,  $R_{\text{св}} = \frac{|E_0|^2}{2\bar{\beta}_0^2 P}$  — сопротивление связи,

$P$  — поток мощности электромагнитной волны,  $v_{\perp 0}$  — начальная поперечная скорость электронов,  $\mu=v_{\parallel}/cD$  — параметр неизохронности,  $\xi$  — безразмерная длина пространства взаимодействия, являющаяся для анализируемой системы бифуркационным параметром,  $I_0$  и  $V_0$  — постоянные составляющие тока и напряжения пучка.

Границные и начальные условия для уравнений (1), (2) определяются исходной моделью и могут быть записаны так:

$$F|_{\xi=\xi_1} = 0, \quad F|_{\tau=0} = F^0(\xi) \quad \text{— начальное распределение поля,}$$

$$\beta|_{\xi=0} = \beta_n = e^{j\Phi_0}, \quad \Phi_0 \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2) в общем случае интегрируется численно, однако в частных случаях возможен более простой анализ.

**Линейная теория переходного процесса. Инкременты нарастания.** При  $|F| \ll 1$  уравнения (1), (2) описывают начальный (переходный) процесс возбуждения колебаний, «запускаемый» либо фронтом импульса тока, либо шумами электронного пучка. (Вопрос о начальном уровне колебаний нуждается в особом рассмотрении и в настоящей работе не исследовался.). Линеаризуя уравнения в предположении  $\beta=\beta_n+\tilde{\beta}$ ,

$|\beta| \ll 1$ , получим

$$\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \xi} + j\mu \tilde{\beta} + j\mu \beta^2 \tilde{\beta}^* = F, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\beta} d\varphi_0. \quad (5)$$

Вводя выражение для высокочастотного «тока»  $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\beta} d\varphi_0$ , преобразуем уравнения (4), (5) к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} + j\mu F = \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \tau} = I, \quad (7)$$

причем

$$I|_{\xi=0} = 0, \quad (8a)$$

$$\partial I / \partial \xi|_{\xi=0} = 0, \quad (8b)$$

$$F|_{\xi=\xi_l} = 0, \quad (8c)$$

$$F|_{\tau=0} = F^0(\xi). \quad (8d)$$

Система уравнений (6), (7) с граничными условиями (8a)–(8c) представляет собой линейную краевую задачу третьего порядка, применение к которой метода разделения переменных приводит к следующему частному решению для поля  $F$ :

$$F(\xi, \tau) = T(\tau)X(\xi) = e^{x\tau} \sum_{k=1}^3 C_k e^{\delta_k \xi},$$

где  $\delta_{1,2,3}$  — корни характеристического уравнения

$$\delta^3 - x\delta^2 - \delta + j\mu = 0, \quad (9)$$

а  $C_{1,2,3}$  — постоянные, определяемые из условий (8a)–(8c). Использование граничных условий (8a)–(8c) позволяет также найти спектр собственных значений задачи как набор всех корней  $x_i$  ( $i=1, \infty$ ) трансцендентного уравнения

$$\begin{bmatrix} e^{\delta_1 \xi_l} & e^{\delta_2 \xi_l} & e^{\delta_3 \xi_l} \\ \delta_1 - x & \delta_2 - x & \delta_3 - x \\ \delta_1(\delta_1 - x) & \delta_2(\delta_2 - x) & \delta_3(\delta_3 - x) \end{bmatrix} = 0, \quad (10)$$

где  $\delta_i$  определяются из алгебраического уравнения (9).

Тогда общее решение для  $F$  при заданных значениях параметров  $\xi$  и  $\mu$  представляет собой суперпозицию всех линейных видов колебаний (собственных функций краевой задачи (6)–(8), соответствующих собственным значениям  $x_i$ ), т. е.

$$F(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{x_i \tau} V_i(\xi),$$

где  $V_i = \sum_{k=1}^3 C_{ik} \exp(\delta_{ik}\xi)$  — собственные функции задачи (виды коле-

баний), коэффициенты  $C_{ik}$  (амплитуды трех парциальных волн  $i$ -го вида колебаний) определяются граничными условиями (8а)–(8в), а начальные амплитуды  $A_i$  видов колебаний определяются начальным распределением поля (8г). Они могут быть найдены из уравнения  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i V_i = F^0(\xi)$ .

Однако интерес представляют только виды колебаний с амплитудами  $A_i e^{i\omega_i t}$ , нарастающими во времени ( $\operatorname{Re} \omega_i > 0$ ), так как амплитуды остальных не превышают начальный уровень. Как показало численное решение уравнений (9), (10), при реальных значениях  $\xi_l$  такими являются один-три низших вида. Причем для второго вида инкремент  $\operatorname{Re} \omega_2$  существенно ниже, чем у первого ( $\operatorname{Re} \omega_1$ ), а у третьего ниже, чем у второго даже при достаточно большом превышении величины  $\xi_l$  над пусковым значением. Пусковые значения  $\xi_l$  определяются из условия  $\operatorname{Re} \omega_i = 0$  и, естественно, совпадают с рассчитанными в рамках линейной теории стационарных колебаний [4]. С увеличением  $\mu$  пусковые значения  $\xi_{lp}$  монотонно уменьшаются из-за улучшения группировки.

**Нелинейный стационарный режим.** Если предположить, что генерируемые колебания являются монохроматическими, то необходимо положить  $F(\xi, t) = f(\xi) e^{ibt}$ , где  $b = (\omega + \beta_0(\omega) v_{||} - \omega_c)/k D v_{||}$  — параметр расстройки, определяющий установившуюся частоту генерации  $\omega$ , которая несколько отличается от частоты точного синхронизма  $\omega_2$ .

В результате этого система уравнений (1), (2) преобразуется к известным уравнениям нелинейной задачи о стационарных колебаниях [5]:

$$df/d\xi - jb f = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \beta d\varphi_0, \quad (11)$$

$$d\beta/d\xi - j\mu(1 - |\beta|^2\beta) = F. \quad (12)$$

$$f|_{\xi=0} = f_{\text{вых}}, \quad (13a)$$

$$f|_{\xi=\xi_l} = 0, \quad (13b)$$

$$\beta|_{\xi=0} = \exp(j\varphi_0), \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi]. \quad (13v)$$

Результаты численного решения этой системы уравнений изложены в [6], где приведены кривые распределения поля вдоль пространства взаимодействия при различных  $\mu$  и  $\xi_l$  и зависимость коэффициента преобразования поперечной кинетической энергии электронов в энергию поля  $\eta_{\perp} = |\tilde{f}_{\text{вых}}|^2$  от длины  $\xi_l$  при различных  $\mu$ . Показано, что максимальные значения  $\eta_{\perp}$  реализуются при  $\mu \approx 3-5$  и составляют  $\eta_{\perp \max} \approx 0.2$ . (Такая сравнительно низкая эффективность преобразования энергии при взаимодействии ВЭП со встречной волной объясняется инерциальным характером группировки и неблагоприятным для такого типа группировки распределением поля в системе со встречной волной.)

Если результаты решения системы уравнений (11)–(13) представить в виде линий равных значений  $\eta_{\perp}$  на плоскости параметров  $(\mu, \xi_l)$ , то оказывается, что ими занята очень узкая область этой плоскости. Значительную же ее часть занимает область, где стационарные монохроматические решения являются неустойчивыми. Для выяснения характера установившихся колебаний в этом случае требуется решать исходные уравнения без всяких упрощающих предположений.

**Нелинейный нестационарный режим.** Анализ системы уравнений (1), (2) в общем случае проводился с помощью численного решения этой системы по методике, аналогичной разработанной в [8]. Результаты для наиболее характерных режимов колебаний приведены на рис. 1 (см. на вклейке). Здесь представлены временные реализации модуля

амплитуды выходного сигнала  $|F(0, \tau)|$ , спектры выходного сигнала  $Sp = 20 \lg |S(\omega)|$  и автокорреляционные функции  $K$  от  $|F(0, \tau)|$ , для различных значений параметра  $\xi_l$  и при  $\mu=5$ , для которого эффективность преобразования энергии электронного пучка в энергию поля близка к оптимальной.

Из вида всех этих зависимостей следует, что при небольших превышениях  $\xi_l$  над пусковым значением (соответствующих области устойчивых стационарных колебаний) в системе реализуется режим одночастотных колебаний (рис. 1а), описанный ранее на основании уравнений (11), (12). При больших же длинах  $\xi_l$  реализуются различные режимы автомодуляции. Это гармоническая автомодуляция выходного сигнала (рис. 1б), более сложная периодическая автомодуляция (рис. 1в) с наличием в спектре гармоник и субгармоник основного тона автомодуляции, а также стохастическая автомодуляция (рис. 1г, д). О наличии стохастической автомодуляции свидетельствует усложнение формы реализации выходного сигнала, появление широкого непрерывного спектра и наличие спадающей автокорреляционной функции (АКФ). (В режиме стационарной генерации АКФ представляет собой прямую  $K=1$ , при периодической автомодуляции АКФ осциллирует с единичной амплитудой, а в стохастическом режиме АКФ всегда меньше единицы и спадает.) На рис. 2 показана пространственная эволюция электронного кольца для стохастического режима с большой длиной  $\xi_l$ . (Рис. 2а соответствует эволюции в заданном поле  $F = A_1 e^{j\omega_1 t} \xi + A_2 e^{j\omega_2 t} \xi$ ,  $A_1 = A_2 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 3$ . Рис. 2б соответствует эволюции в самосогласованном поле для случая  $\mu=5$ ,  $\xi_l=8$ . Окружность здесь характеризует начальное распределение электронов, а радиус-вектор — амплитуду и фазу поля в данном сечении пространства взаимодействия.) Переходы из режима в режим, а также расчет более тонких характеристик стохастических сигналов требуют специального анализа и в настоящей работе не проводились.

Возникновение автомодуляции и ее характер в подобных системах [8–12] успешно объясняется на основании модели генератора с запаздывающей обратной связью, в которой нелинейные свойства системы характеризуются некоторым сосредоточенным нелинейным элементом, а свойства распределенности — линейной обратной связью с задержкой, соответствующей длине обратной связи в исходной системе.

Кроме того, при достаточно большой длине системы в ней даже без влияния обратной связи (в заданном поле) вдоль пространства взаимодействия должна развиваться весьма сложная волна, поскольку электронное кольцо на большой длине претерпевает весьма сложную эволюцию (рис. 2). Эволюция конфигурации электронного кольца определяется индивидуальным движением составляющих его электронов. Каждый из них в заданном гармоническом поле  $F = A e^{j\Omega t}$  представляет собой нелинейный консервативный осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{\mu}{2} R^4 - (\mu - \Omega) R^2 + 2AR \sin \psi,$$

где  $\psi = \phi - \Omega t$ , и движется по своей фазовой траектории, определяемой начальными условиями. Если распределение поля вдоль  $\xi$  отлично от гармонического, то согласно [15] на фазовой плоскости появляются области стохастического движения. Для данной системы они достаточно широки, и в них по начальным условиям попадает значительная часть электронов. Там их движение является непериодическим и неустойчивым, что еще более усложняет эволюцию электронного кольца вплоть до перемешивания.

Представляется, что проявляющиеся на большой длине особенности индивидуального движения электронов-осцилляторов могут играть существенную роль в процессе генерации стохастического сигнала, причем не только в рассматриваемой системе, а в широком классе систем, где нелинейные электроны-осцилляторы взаимодействуют с электромагнитными волнами, однако этот вопрос требует более детального анализа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 3. С. 443.
2. Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 3. С. 450.
3. Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4. № 3. С. 547.
4. Шевчик В. Н. Взаимодействие электронных пучков с электромагнитными волнами.— Саратов: Гос. ун-т, 1963. С. 109.
5. Юллатов В. К. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1965. № 12. С. 15.
6. Юллатов В. К. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1965. № 12. С. 24.
7. Гиротрон. // Сб. научных трудов. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
8. Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. // Сб. Электроника ламп с обратной волной.— Саратов: Гос. ун-т, 1975. С. 135.
9. Безручко Б. П., Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. // Лекции по электронике СВЧ (4-я зимняя школа-семинар инженеров).— Саратов: Гос. ун-т, 1978. Кн. 5. С. 236.
10. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 7. С. 1037.
11. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. // Сб. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980.
12. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. // Сб. Релятивистская высокочастотная электроника.— Горький: ИПФ АН СССР. 1981. Вып. 2. С. 101.
13. Гинзбург Н. С., Завольский Н. А., Нусинович Г. С., Сергеев А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 166.
14. Гинзбург Н. С., Завольский Н. А., Нусинович Г. С. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 22. № 5. С. 1033.
15. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
16. Трубецков Д. И., Дмитриев А. Ю. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. Вып. 20. С. 1257.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 ноября 1988 г.,  
после переработки  
14 марта 1990 г.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 51—7 → 530.1

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

А. Н. Коваленко

В настоящее время при математическом моделировании полосковых структур на электродинамическом уровне широко используется численно-аналитический метод с учетом краевых особенностей поля. В работах [1-3] и многих других показана быстрая сходимость построенных на основе этого метода алгоритмов. При этом время счета одной точки дисперсионной кривой с учетом потерь не превышает одной секунды (на ЭВМ ЕС-1045). Однако для решения задач синтеза, которые, как правило, сводятся к многократному решению задач анализа, требуется разработка сверхбыстро действующих моделей (СБМ), затрачивающих на счет единицы миллисекунд. Одним из способов создания СБМ является «свертывание информации» путем анализа и обработки данных, полученных на основе электродинамического решения, и построение аппроксимирующих формул. В зарубежных изданиях опубликовано достаточно большое число приближенных формул для расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления микрополосковой линии (МПЛ). Как показала проверка [4], наиболее точными являются формулы, приведенные в работах [5, 6]. В данной работе наряду с аппроксимирующими формулами для коэффициента замедления и волнового сопротивления, которые имеют ряд преимуществ перед формулами работ [5, 6], приводятся также аналитические выражения для расчета потерь в МПЛ.

**1. Коэффициент замедления.** Коэффициент замедления  $n$  определяется выражением  $n = \beta/k_0$ , где  $\beta$  — коэффициент фазы,  $k_0 = \omega/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  — волновое число свободного пространства;

$$n = \sqrt{1 + (\epsilon - 1)q(\xi)}, \quad (1)$$

где  $\xi = k_0 c \sqrt{\epsilon}$ ,  $c$  — толщина подложки,  $\epsilon$  — относительная электрическая проницаемость подложки;

$$q(\xi) = 0,5 \{ 1 + 1 / \sqrt{1 + A_1 / [(d/c)[1 + (2,95 + 0,192(d/c)^{1,17})\xi^{\alpha_1}]]} \},$$

$$A_1 = 10,65 + 0,5 \ln(d/c) - 0,78 \ln(1 + 0,3/(d/c)^4) + 3,95e^{-0,45(d/c)},$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1,25 + 1/(2,35 + 0,354(d/c)), & \xi < 1 \\ 1,47 + 1/(1,78 + 2,84(d/c)), & \xi > 1 \end{cases},$$

$d$  — ширина полоскового проводника.

При  $\xi \leq 2$ ,  $\epsilon \geq 2$ ,  $0,1 \leq (d/c) \leq 10$  погрешность расчета коэффициента замедления по формуле (1) не превышает 0,5%.

Некоторая корректировка формулы (1) позволяет существенно повысить ее точность. При этом

$$n = \sqrt{1 + (\epsilon - 1)q_1 q(\xi_1)}, \quad (1a)$$

где

$$\xi_1 = \xi \sqrt{(1 - (1/\epsilon)\beta_1) / (1 - (1/9,6)\beta_1)}, \quad \beta_1 = 0,5 + 1 / (0,329 + 0,3214(d/c)),$$

$$q_1 = 1 + \frac{1 / [9,378 + 1,277(d/c) + \epsilon(14,82 + 1,645(d/c))] - 1 / (152,05 + 17,07(d/c))}{1 + ((d/c) / [3,02 + 0,311(d/c)^2]) \xi_1^{1+1/(d/c)}}.$$

При  $\xi \leq 1,05$  погрешность расчета коэффициента замедления по формуле (1a) не превышает 0,1%.

**2. Волновое сопротивление.** Волновое сопротивление  $W_{ll}$  определяется выражением  $W_{ll} = 2P/l^2$ , где  $P$  — мощность, переносимая основной волной через попереч-

ное сечение линии,  $I$  — амплитуда продольного тока на полосковом проводнике;

$$W_L = \frac{60 \ln \left( \frac{6}{d/c} + \sqrt{1 + \left( \frac{2}{d/c} \right)^2} \right)}{n \sqrt{1 + 8,6q(\xi_2)}} P(\xi_2), \quad (2)$$

где

$$\xi_2 = \xi \frac{1+B_2/\epsilon}{1+B_2/9,6}, \quad B_2 = \frac{C_2-1}{0,263-C_2/9,6},$$

$$C_2 = 1,07 - 0,17 \sqrt{1 - (1 - 0,05(d/c))^2},$$

$$P(\xi_2) = \begin{cases} 1 + 1,029 A_2 \xi_2^{\alpha_2} (\xi_2 - 0,125), & \xi_2 > 0,125 \\ 1, & \xi_2 < 0,125 \end{cases},$$

$$A_2 = 0,5[0,0973 + 0,0912(d/c)^{0,038} + 0,008 \ln(d/c)], \quad \alpha_2 = \begin{cases} 1,58 e^{-0,14(d/c)^{1,2}}, & \xi < 1 \\ 1,6 e^{-0,5(d/c)}, & \xi > 1 \end{cases}.$$

Погрешность расчета волнового сопротивления по формуле (2) не превышает 0,4% при  $\xi < 1,2(\epsilon-1)\epsilon$  и 1% при  $\xi < 1,7(\epsilon-1)/\epsilon$  ( $\epsilon \geq 2, 0,1 \leq d/c \leq 10$ ).

**3. Коэффициент затухания.** В случае малых потерь коэффициент затухания  $\alpha$  можно представить в виде суммы:  $\alpha = \alpha_n + \alpha_a + \alpha_d$ , где  $\alpha_n$  — коэффициент затухания, определяемый потерями в полосковом проводнике;  $\alpha_a$  — коэффициент затухания, определяемый потерями в экране;  $\alpha_d$  — коэффициент затухания, определяемый потерями в диэлектрике;

$$\alpha_n = 4,34 \frac{R_{sn}}{W_L d} K_n \left[ \frac{\Delta B}{m} \right], \quad (3)$$

где

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{c} \frac{1 + 2 \left( \frac{3}{c} \sqrt{1 + (2c/d)^2} \right)}{1 + \frac{1}{6} \frac{d}{c} \sqrt{1 + (2c/d)^2}} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \frac{c}{d} \left( \pi + \ln \frac{2b}{t} \right) \right], \quad (4)$$

$$b = \begin{cases} 2\pi d, & d/c \leqslant 1/2\pi \\ c, & d/c > 1/2\pi \end{cases},$$

$t$  — толщина полоскового проводника, составляющая не менее 3—4 скин-слоев,  $R_{sn}$  — поверхностное сопротивление;

$$\alpha_a = 4,34 \frac{R_{sa}}{W_L d} K_a \left[ \frac{\Delta B}{m} \right]; \quad (5)$$

$$K_a = q(\xi_3) / [1 + A_3 / [(d/c)(1 + B_3 \xi_3^{\beta_3})]], \quad (6)$$

$$\xi_3 = \xi \sqrt{[1 - (1/\epsilon)^{\beta_3}] / [1 - (1/9,6)^{\beta_3}]}, \quad \beta_3 = 0,3 + 1 / (0,605 + 0,155(d/c)),$$

$$A_3 = 3,125 + 0,0971 \left| \ln \frac{d/c}{2,25} \right| + 0,0143 \left| \frac{d}{c} - 2,25 \right|,$$

$$B_3 = A_3 \left( 0,5568 + 0,05 \frac{d}{c} \right) - 1, \quad \alpha_a = 1,275 + 0,11 \left| \ln \frac{d/c}{4,5} \right|;$$

$$\alpha_d = 27,3 \frac{\epsilon}{n} \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\lambda_0} K_d \left[ \frac{\Delta B}{m} \right]; \quad (7)$$

$$K_d = 0,5 \left[ 1 + 1 / \sqrt{1 + A_4 / \left( \frac{d}{c} \right) (1 + B_4 \xi_1^{\gamma_4})} \right], \quad (8)$$

$$A_4 = (1 + B_4) \left\{ 0,5 + \sqrt{d/c} / \left[ 0,76 + 0,3 \left( \frac{d}{c} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\},$$

$$B_4 = 5,9 + 0,64 \left( \frac{d}{c} \right)^{1,15}, \quad \alpha_d = 1,4 + 1 / \left( 2,311 + 0,2211 \frac{d}{c} \right).$$

При  $\xi < 1,2$  погрешность расчета коэффициента  $K_d$  по формуле (8) не превышает 2%, коэффициента  $K_a - 1\%$  ( $d/c \geq 0,3$ ), коэффициента  $K_b - 5\%$  ( $t/c \leq 0,04$ ). При построении аппроксимирующих формул использовались квазистатические выражения, приведенные в работах [7, 8], и результаты, полученные в [4, 9].

По сравнению с известными предложенная в данной работе СБМ регулярной МПЛ учитывает потери, работает в более широком диапазоне изменения параметров и обеспечивает более высокую точность. Приведенные выражения для коэффициентов  $K_p$  и  $K_a$  позволяют определить отношение потерь на верхней и нижней частях полоскового проводника и при необходимости учесть его многослойность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 188.
2. Коваленко А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 11. С. 1388.
3. Коваленко А. Н., Федоров А. Н. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. № 4. С. 683.
4. Коваленко А. Н., Козлов А. Ю. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ. М.: — МИРЭА, 1988. С. 28
5. Kirshning M. K., Jansen R. H. // Electron Lett. 1982. V. 18. № 6. P. 272.
6. Jansen R. H., Kirshning M. K. // AEU. 1983. V. 37. № 3—4. P. 108.
7. Hammerstad E, Jensen O // Proc. IEEE Int. Microwave Symp. 1980. P. 407.
8. Гупта К., Гард Дж., Чадха Р. Машинальное проектирование СВЧ устройств. — М.: Радио и связь, 1987.
9. Коваленко А. Н., Козлов А. Ю. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ — М.: — МИРЭА, 1989.

Московский институт  
радиотехники, электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
18 января 1990 г.

УДК 681.7.068

## ЭВОЛЮЦИЯ СОСТОЯНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМОДОВОМ ВОЛОКОННОМ СВЕТОВОДЕ

В. Н. Листвин

В одномодовых волоконных световодах (ОВС) при анизотропном рэлеевском рассеянии часть мощности рассеивается как вперед, так и назад в ортогональную поляризационную моду. Как показано в [1], рассеянная вперед мощность определяет предельное значение параметра сохранения состояния поляризации в ОВС  $h$ , а его величина пропорциональна параметру анизотропии рэлеевского рассеяния  $\rho$  и может быть определена по доле мощности, рассеянной назад в ортогональную поляризационную моду. Величина параметра  $\rho = 0,05$  была определена экспериментально в [2] методом временной поляризационной рефлектометрии. При этом интервал разрешения рефлектометра значительно превышал длину биений поляризационных мод  $L_b$  в ОВС, поэтому для расчета рассеянной назад мощности можно было ограничиться решением уравнения связанных мощностей.

Для наблюдения поляризационных эффектов в ОВС необходимо, чтобы интервал разрешения рефлектометра был мал по сравнению с длиной биений. В этом случае необходимо использовать более полное описание с помощью уравнения связанных волн для комплексных амплитуд поля в световоде. В нашей работе найдено решение уравнения связанных волн при наличии анизотропного рэлеевского рассеяния и получена зависимость рассеянной назад мощности от эволюции эллиптичности состояния поляризации света в ОВС.

Зависимость комплексной амплитуды рассеянной назад волны  $E_b$  от амплитуды волны, рассеянной вперед  $E_a$ , и координаты вдоль оси световода  $z$  определяется системой укороченных уравнений [3]:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_a - i m \hat{E}_a = i r \hat{E}_b ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_b + i m^* \hat{E}_b = - i r \hat{E}_a , \quad (2)$$

где  $m$  — матрица коэффициентов связи поляризационных мод,  $\hat{}$  означает операцию транспонирования,  $r$  — матрица коэффициентов связи встречных волн; вид ее будет конкретизирован ниже.

Комплексную амплитуду для прямой волны  $E_a(z) = \hat{M}(z)E_a(0)$  при начальном условии  $\hat{E}_b(L) = 0$  находим из (1), пренебрегая в первом порядке теории возмущений многократным рэлеевским рассеянием и, следовательно, правой частью в (1).

Комплексную амплитуду для встречной волны найдем из неоднородного дифференциального уравнения (2). Для этого домножим обе части уравнения (2) на  $M^*$  и, проинтегрировав его от  $z$  до  $z + \Delta z$ , получим

$$\hat{E}_b(0) = i\hat{M}_0^T \hat{C} \hat{M}_0 E_a(0), \quad (3)$$

где

$$\hat{C}(\beta z) = \int_z^{z+\Delta z} dz r \exp(i2\beta z), \quad (4)$$

$\hat{M}_0(z) = \hat{M}(z) \exp(-i2z\beta)$  — матрица, описывающая эволюцию медленных амплитуд;  $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — постоянные распространения поляризационных мод. При этом предполагалось, что интервал разрешения рефлектометра мал, так что  $\Delta z \ll L_b = 2\pi/(\beta_1 - \beta_2)$  и, соответственно, можно пренебречь зависимостью  $\hat{M}_0(z)$  и  $\hat{M}_0^T(z)$  от  $z$  на длине световода, равной  $\Delta z$ .

Представим  $\hat{C}$  в виде суммы матриц, описывающих изотропное и анизотропное рэлеевское рассеяние. Учитывая, что в приближении плоских волн матрица рассеяния  $r$  действительная и симметрична [3], имеем

$$\hat{C} = \delta I + \hat{R}(-\alpha) \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} \hat{R}(-\alpha), \quad (5)$$

где  $\delta$  и  $q$  — случайные функции  $\beta$  и  $z$  с равным нулю средним,  $\hat{R}(\alpha)$  — матрица поворота на угол  $\alpha$ ,  $\alpha$  — случайная функция  $\beta$  и  $z$ , распределенная равномерно на интервале  $0 - 2\pi$ .

В дальнейшем будем полагать, что выполняется условие  $\frac{d\beta}{dT} \Delta T \gg 1$ , где  $\Delta T$  — изменение температуры ОВС за время измерения. Тогда матрица  $\hat{C}$  будет меняться случайным образом в процессе измерения, и для описания результатов измерений целесообразно воспользоваться статистическим подходом. Полное описание случайного векторного колебания в рамках корреляционной теории дается корреляционной матрицей  $\hat{J} = \langle E_b E_b^+ \rangle$ , где «+» — знак эрмитова сопряжения [4],  $\langle \rangle$  означает усреднение по ансамблю статистически однородных ОВС. Для вычисления  $\hat{J}$  нам потребуются проекции вектора  $E_b$  на оси  $x$  и  $y$ .

Выбрав оси декартовой системы координат так, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль разрешенного направления линейного поляризатора на входе в ОВС  $E_x = E_a(0) = (0)$ ,  $E_y = (0)$  и учитывая, что в кварцевом волокне можно пренебречь затуханием на масштабе длины биений и полагать матрицу  $\hat{M}_0$  унитарной, имеем

$$E_{bx} = (E_x^+ E_b(0)) = iE_a(0) \hat{M}_0^T \hat{C} \hat{M}_0 E_a(0) = i\xi_1^T \hat{C} \xi_1, \quad (6)$$

$$E_{by} = (E_y^+ E_b(0)) = i\xi_2^T \hat{C} \xi_1,$$

где  $\xi_1 = \hat{M}_0 E_a(0) = \hat{R}(\theta) \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \\ i \sin \varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $(\xi_2 \xi_1) = 0$ ,  $\theta$  — азимут, а  $\varepsilon$  — угол эллиптичности состояния поляризации в точке  $z$ .

С помощью (6), полагая случайные процессы  $\delta$ ,  $q$  и  $\alpha$  независимыми, находим

$$\begin{aligned} \langle E_{bx} E_{bx}^* \rangle &= \langle \delta^2 \rangle \left[ \cos^2 2\varepsilon + \frac{\rho}{1-\rho} (1 + \sin^2 2\varepsilon) \right], \\ \langle E_{by} E_{by}^* \rangle &= \langle \delta^2 \rangle \left[ \sin^2 2\varepsilon + \frac{\rho}{1-\rho} \cos^2 2\varepsilon \right], \\ \langle E_{by} E_{bx}^* \rangle &= i \langle \delta^2 \rangle \frac{1-2\rho}{2(1-\rho)} \sin 4\varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho = \langle e_{12}^2 \rangle / \langle e_{11}^2 \rangle$  — доля мощности, рассеиваемая назад с единичного интервала в состоянии поляризации ортогональное падающему.

Корреляционный тензор  $J$ , определяемый соотношением (7), описывает частично поляризованное излучение. При изменении температуры световода различные виды поляризации на выходе световода изменяются случайным образом, и при усреднении по многим реализациям степень поляризации излучения на выходе световода будет меньше единицы.

В работе [5] с помощью когерентного частотного рефлектометра исследовалось изменение эллиптичности состояния поляризации излучения в ОВС с постоянным линейным двулучепреломлением. Если в таком световоде с равным весом возбудить обе поляризационные моды, то будут наблюдаться так называемые биения поляризационных мод. При этом волна будет последовательно проходить через все состояния поляризации от линейного до кругового. При отражении волны, поляризованной по кругу, состояние поляризации изменяется на ортогональное, и, следовательно, она не проходит обратно через линейный поляризатор, установленный на входе в световод. Поэтому для этих точек световода отклик рефлектометра должен обращаться в нуль. Однако наблюдаемая на эксперименте «видность» отклика [5] заметно отличается от единицы. Аналогичный эффект наблюдался и в работе [6].

Оценим с помощью (7) «видность» в отклике когерентного рефлектометра:

$$V = \frac{\langle |E_{b,x}|^2 \rangle_{\max}^{1/2} - \langle |E_{b,x}|^2 \rangle_{\min}^{1/2}}{\langle |E_{b,x}|^2 \rangle_{\max}^{1/2} + \langle |E_{b,x}|^2 \rangle_{\min}^{1/2}} = \frac{1 - \sqrt{2\rho}}{1 + \sqrt{2\rho}}. \quad (8)$$

При  $\rho=0,05$  получаем  $V=0,55$ , что хорошо согласуется с [5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Brinkmeijer E, Eickhoff W. // Electron Lett. 1983 V. 19. № 23
2. Tahada K., Okamoto K. et al. // J. Opt. Soc. Am. 1986. V. 3. № 10.
3. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. — М.: Радиосвязь, 1987.
4. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Наука, 1976. Ч. 1. С. 351.
5. Eickhoff W, Ulrich R. // Appl. Phys. Lett. 1981. V. 39. № 9.
6. Ross J. N // Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 348

Московский физико-технический  
институт

Поступила в редакцию  
11 марта 1990 г.

УДК 538.3

## ИЗЛУЧЕНИЕ МОДЕЛИ СВЕРХСВЕТОВОГО ИСТОЧНИКА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

C. B. Афанасьев

Известно [1], что переходное излучение возникает при изменении во времени электрических и магнитных свойств среды. Различные варианты таких изменений рассмотрены в [1]. Данная работа посвящена задаче об излучении сверхсветового источника, образованного равномерно заряженной нитью, пересекающей под некоторым углом границу раздела двух сред,  $\epsilon$  и  $\mu$ , которых скачком меняются во времени (рис. 1; см. на вклейке). Ранее излучение такого источника при  $\epsilon, \mu = \text{const}$  рассматривалось в [2].

В определенной спектральной области [3] расчет можно проводить для скачкообразного изменения  $\epsilon$  и  $\mu$  во времени, т. е. считать  $\epsilon_{1,2}^{(1)}, \mu_{1,2}^{(1)}, \epsilon_{1,2}^{(2)}, \mu_{1,2}^{(2)}$  постоянными для  $t < 0$  и  $t > 0$  соответственно, считая, что изменение («скакок»)  $\epsilon$  и  $\mu$  происходит в момент  $t=0$ .

Таким образом, необходимо найти решение уравнений поля при заданной плотности тока

$$j(r, t) = q\vartheta\delta(y) \int_{+\infty}^{-\infty} d\alpha \delta(x-\alpha)\delta(z-\alpha \operatorname{tg} \psi - vt), \quad (1)$$

т. е. найти поле во всем пространстве при  $t < 0$  и  $t > 0$ , при различных  $\epsilon$ ,  $\mu$ , а затем, добавляя к частному решению при  $t > 0$  решение соответствующего однородного уравнения, найти амплитуды поля излучения при  $t > 0$  из условия сшивки полученных решений при различных  $\epsilon$  и  $\mu$  в момент  $t=0$ .

Разлагая поля и ток (1) в интеграл Фурье по частоте и поперечной вектору

скорости нити составляющей волнового вектора  $\chi$ , замечаем, что  $j_{\chi \omega}(z)$  отличается множителем  $2\lambda(k_x - \omega/v_*)$ , где  $v_* = v/\tan \psi$ , от соответствующей плотности тока точечного заряда [1]. Тогда решение первой части задачи согласно [1] будет иметь вид

$$E_{\chi, \omega}^q(z) = -i \frac{q \mu_{1,2} (1 - (c^2/v^2) \epsilon_{1,2} \mu_{1,2}) \exp(i\omega z/v)}{\pi \omega (\epsilon_{1,2} \mu_{1,2} - c^2/v^2 - \chi^2 c^2/\omega^2)} \delta\left(k_x - \frac{\omega}{v_*}\right); \quad (2)$$

$$E_r^r(z) = i \frac{q}{\pi \omega} a_{1,2} \exp\left(\mp i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \frac{\chi^2 c^2}{\omega^2}} z\right) \delta\left(k_x - \frac{\omega}{v_*}\right), \quad (3)$$

где коэффициенты  $a_{1,2}$  находятся из условия непрерывности  $D_n$  и  $E_r$  на границе раздела сред и имеют вид

$$a_{1,2} = \mp \frac{v^2 c^2}{\epsilon \omega^2} \left( \epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \frac{\chi^2 c^2}{\omega^2}} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \frac{\chi^2 c^2}{\omega^2}} \right)^{-1} \times \\ \times \left( \frac{1 \mp v/c \sqrt{\epsilon_{2,1} \mu_{2,1} - \chi^2 c^2/\omega^2}}{1 - (v^2/c^2) \epsilon_{2,1} \mu_{2,1} - \chi^2 v^2/\omega^2} - \frac{\epsilon_{2,1}/\epsilon_{1,2} \mp v/c \sqrt{\epsilon_{2,1} - \chi^2 c^2/\omega^2}}{1 - (v^2/c^2) \epsilon_{1,2}/\mu_{1,2} + \chi^2 v^2/\omega^2} \right). \quad (4)$$

Теперь необходимо сшить полученные решения во всем пространстве при  $t=0$ . Для этого переходим от (2) и (3) к  $E_{k_z}(t)$ . Добавляя к найденным полям решение однородного уравнения при  $t>0$

$$E_{k_z}^0(t) = i \frac{qv_*}{\pi(k v_*)} \left[ A^+ \exp\left(-i \frac{kc}{\sqrt{\epsilon \mu}} t\right) + A^- \exp\left(i \frac{kc}{\sqrt{\epsilon \mu}} t\right) \right] \quad (5)$$

и используя условия сшивки для  $A_{\pm}$ , находим уравнения

$$C_{1,2}^{(1)} - D_{1,2}^{(1)} = C_{1,2}^{(2)} - D_{1,2}^{(2)} + \sqrt{\epsilon_{1,2}^{(2)} \mu_{1,2}^{(2)}} (A_{1,2}^+ - A_{1,2}^-), \\ \epsilon_{1,2}^{(1)} (C_{1,2}^{(1)} - D_{1,2}^{(1)}) = \epsilon_{1,2}^{(2)} (C_{1,2}^{(2)} - D_{1,2}^{(2)}) + \epsilon_{1,2}^{(2)} (A_{1,2}^+ + A_{1,2}^-), \\ C = \left[ \mu \left( 1 - \frac{c^2}{v^2} \epsilon \mu \right) \delta(k_z + k_x \frac{v_*}{v}) \right] \left( \epsilon \mu - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\chi^2 c^2}{(k v_*)^2} \right)^{-1}, \\ D = a \left( \omega = (k v_*) \delta(k_z \mp \frac{(k v_*)}{c} \sqrt{\epsilon \mu - \frac{\chi^2 c^2}{(k v_*)^2}}) \right). \quad (6)$$

Из (6) получим

$$A_{1,2}^{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_{1,2}^{(2)} \mu_{1,2}^{(2)}}} \left[ (C_{1,2}^{(1)} - D_{1,2}^{(1)}) \left( \pm \frac{kc}{(k v_*)} + \epsilon_{1,2}^{(1)} \sqrt{\frac{\mu_{1,2}^{(2)}}{\epsilon_{1,2}^{(2)}}} \right) - \right. \\ \left. - (C_{1,2}^{(2)} - D_{1,2}^{(2)}) \left( \pm \frac{kc}{(k v_*)} + \sqrt{\mu_{1,2}^{(2)} \epsilon_{1,2}^{(2)}} \right) \right]. \quad (7)$$

Следуя методу подсчета энергии излучения в [1], получим

$$W_{1,2}^{\text{tr}} = 2q^2 v_*^2 \int \epsilon_{1,2}^{(2)} \frac{k^2}{\chi^2 (k v_*)^3} (A_{1,2}^+(k) + A_{1,2}^-(k)) d^3 k. \quad (8)$$

Выражение (8) содержит энергию излучения, возникающего при трансформации собственного поля частиц — нити (пропорциональную  $|C|^2$ ) — и при трансформации поля переходного излучения (пропорциональную  $|D|^2$ ). Именно второе излучение «сверхсветового типа» и представляет для нас интерес.

Для простоты в (8) будем считать, что излучение рассматривается во второй среде при  $\epsilon_2^{(1)} - \epsilon_2^{(2)} = \epsilon_2$ , а изменение свойств происходит только в первой среде.

В итоге

$$\left. \frac{dW^{\text{tr}}}{dL} \right|_{\varphi=0} = \frac{q^2 v_*^2 c^2}{2v_*^4} \int_0^\infty \frac{dk}{k^3} (a_2^{(1)} - a_2^{(2)}) \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^3 \theta} \left( \varepsilon_2 \mu_2 + \frac{c^2}{v_*^2 \sin^2 \theta} \right) \delta \left( \cos \theta + \frac{v_*}{c} \sin \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2}{v_*^2}} \right).$$

В полученном выражении рассматривается излучение в плоскости  $x0z$ , где расположены нить и вектор  $v$ , т. е.  $\vec{k} = \{k_x, 0, k_z\}$ , а

$$\sqrt{\varepsilon \mu - \frac{\chi^2 c^2}{k_x^2 v_*^2}} = \sqrt{\varepsilon \mu - \frac{c^2}{v_*^2}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что поля не затухают по  $z$ , если  $v_* > c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ . В противном случае возникает поверхностная волна, бегущая по  $x$  и затухающая по  $z$ . Таким образом, в соответствующей среде до и после скачка возможно полное внутреннее отражение соответствующих волн. Возможность наблюдения поля излучения во второй среде при заданной величине скачка  $\varepsilon$  в первой среде существенно зависит от значения параметра  $v_*$ . После интегрирования по  $\theta$  получаем

$$\frac{dW^{tr}}{dL} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{q^2 c^2 v_*^2}{8\pi^3 \mu_2 v_*^4} \int_{v_*/\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} > 1} \frac{d\omega}{\omega} \frac{(a_2^{(1)} - a_2^{(2)})^2}{1 - (v_*^4/c^4)\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v_*^2}}. \quad (10)$$

Интенсивность при резком скачке свойств обратно пропорциональна частоте.

Полученная формула позволяет, например, проводить численные оценки интенсивности излучения во вторую среду при изменении свойств только первой среды при заданных  $v$ ,  $v_*$  и  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_2$ . На рис. 2 приведена зависимость относительной интенсивности  $\frac{dW^{tr}}{dL} / W_0$ , где  $W_0 = \frac{q^2 c^2 v_*^2}{8\pi^3 \mu_2 v_*^4} \int_{\omega} d\omega$ , от значения  $\varepsilon_1^{(2)}$  при следующих условиях:  $v=0,5 c$ ,  $v_*=c$ ,  $\varepsilon_2=\mu_2=1$ ,  $\varepsilon_1^{(1)}=1,5$ . Максимум интенсивности приходится на область значений  $\varepsilon_1^{(2)} \approx 2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное расщепление. — М.: Наука, 1984.
- Манева Г. М. // Вестник МГУ. Сер. Физика, астрономия. 1977. Т. 18. С. 9.
- Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е. // УФН. 1978. Т. 126. С. 311.

Калининский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
22 февраля 1990 г.

УДК 681.7.068.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА НА МНОГОМОДОВОМ СВЕТОВОДЕ

М. М. Быков, Б. Г. Горшков, И. К. Заслонко

В настоящее время значительный интерес представляет возможность построения волоконно-оптических кольцевых интерферометров (ВКИ) на многомодовом волоконном световоде. Переход к многомодовым волокнам существенно упрощает ввод излучения в световод, позволяет легко создать цельноволоконную конструкцию ВКИ, предотвращает эффекты, связанные с несохранением состояния поляризации в одномодовых волокнах, приводящие к нарушению работоспособности интерферометра. В связи с этим возникает необходимость рассмотреть круг вопросов, связанных с выявлением потенциальных возможностей многомодовых ВКИ.

В настоящей работе анализируется влияние связи мод на характеристики известных ВКИ, предлагается новый метод извлечения информации о вращении и разработан принцип построения корреляционного ВКИ на многомодовом световоде.

Известно [1], что фазовые сдвиги всех мод многомодового световода, вызванные вращением его, одинаковы, и не существует принципиальных отличий в проявлении эффекта Саньяка в ВКИ на одномодовых и многомодовых световодах.

Интенсивность излучения на выходе интерферометра выражается формулой [2]

$$I = I_0 [1 - \cos(8\pi A\Omega/\lambda c)], \quad (1)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения ВКИ,  $\lambda$  — длина волны излучения,  $c$  — скорость света,  $A$  — площадь волоконной петли ВКИ.

Однако при переходе к цельноволоконной конструкции ВКИ (замене дискрет-

ногого устройства оптического разделения волоконным направленным ответвителем) контрастность интерференционной картины падает, и зависимость суммарной интенсивности излучения на выходе ВКИ от угловой скорости его вращения практически (с точностью 2%) не проявляется.

Это связано с тем, что в реальном ВКИ на многомодовом световоде существенное влияние на фазы интерферирующих мод оказывает их связь, т. е. перераспределение энергии между модами в процессе распространения по волокну и в направленном ответвителе. Межмодовая связь приводит к нарушению полученных выше фазовых соотношений между модами. Эти соотношения с учетом связи можно получить, решив систему дифференциальных уравнений для связанных электромагнитных волн:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} &= j\beta_1 E_1 - jkE_2, \\ &\dots \\ \frac{\partial E_i}{\partial z} &= j\beta_i E_i - jk(E_{i-1} + E_{i+1}), \\ &\dots \\ \frac{\partial E_n}{\partial z} &= j\beta_n E_n - jkE_{n-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n$  — число всех мод, распространяющихся в многомодовом световоде ( $\sim 40$  для плоского световода),  $k$  — коэффициент связи (при моделировании  $k \approx 0,002/\lambda$ ).

Решением этой системы является набор  $E_i = \tilde{A}_i \exp(j\phi_i)$ , где  $\tilde{A}_i$ ,  $\phi_i$  — амплитуда и фаза  $i$ -й моды с учетом связи.

При отсутствии связи мод ( $k=0$ ) имеем систему дифференциальных уравнений, решение которой имеет вид  $E_i = A_i \exp(j\beta_i z)$ , т. е. получаем совокупность  $i$  мод, распространяющихся вдоль  $z$  с постоянными распространения  $\beta_i$  (несвязанных).

Введенное слагаемое с  $jk$  учитывает приток энергии в  $i$ -ю моду из соседних, причем мнимость коэффициента связи вытекает из закона сохранения энергии [4]. Поле на выходе ВКИ на многомодовом световоде с учетом связи мод представляется в виде

$$E_z = \sum_i (\tilde{A}_i \exp(j\phi_i) + A_i \exp(j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega/\lambda c))). \quad (3)$$

Тогда суммарную интенсивность излучения на выходе ВКИ можно получить в виде

$$\begin{aligned} I &= \int \int_x \int_y E_z E_z^* dx dy = \\ &= \int \int_x \left\{ \sum_i [\tilde{A}_i \exp(j\phi_i) + A_i \exp(j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega/\lambda c))] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_i [\tilde{A}_i \exp(j\phi_i) + A_i \exp(j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega/\lambda c))]^* \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

где знак \* означает операцию сопряжения.

Зависимость суммарной интенсивности излучения на выходе многомодового ВКИ от угловой скорости его вращения с учетом изменения фаз и амплитуд из-за наличия связи представлена на рис. 1 (кривая 1); см. на вклейке.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при условии наличия модовой связи, которая имеет место в реальном многомодовом волоконно-оптическом интерферометре, замена одномодового волокна на многомодовое в ВКИ, как это осуществляется в [2, 3, 5, 6], не позволяет получить высокую чувствительность.

В данной работе предлагается определять угловую скорость вращения интерферометра по изменению спектральной структуры интерференционной картины на выходе многомодового ВКИ.

Как описано в [7], будем рассматривать двумерное распределение интенсивности излучения в спектральной интерференционной картине на выходе интерферометра  $U(x, y, \Omega_0)$  ( $\Omega_0$  — начальная угловая скорость вращения ВКИ).

Вращение интерферометра со скоростью, отличной от  $\Omega_0$ , вызовет изменение расположения спектров в интерференционной картине и их размеров.

Это изменение можно охарактеризовать интегралом корреляции

$$K(\Delta\Omega) = \int \int_x \int_y U(x, y, \Omega_0) + U(x, y, \Omega) dx dy, \quad (5)$$

где  $U(x, y, \Omega)$  — двумерное распределение интенсивности излучения в интерференционной картине, соответствующее вращению интерферометра с угловой скоростью  $\Omega$ . Интегрирование ведется по всей выходной картине или значительной ее части.

Интеграл корреляции (5) с учетом связи мод в многомодовом ВКИ можно определить по формуле

$$\begin{aligned}
 K(\Delta\Omega) = & \iint_{xy} \left\{ \sum_i \tilde{A}_i \exp(j\tilde{\phi}_i) + A_i \exp j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega_0/\lambda c) \right\} \times \\
 & \times \left\{ \sum_i \tilde{A}_i \exp(j\tilde{\phi}_i) + A_i \exp j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega_0/\lambda c) \right\}^* \times \\
 & \times \left\{ \sum_i \tilde{A}_i \exp(j\tilde{\phi}_i) + A_i \exp j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega/\lambda c) \right\}^* \times \\
 & \times \left\{ \sum_i \tilde{A}_i \exp(j\tilde{\phi}_i) + A_i \exp j(\beta_i z + \pi + 8\pi A\Omega/\lambda c) \right\} dx dy,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\tilde{A}_i$ ,  $\tilde{\phi}_i$  — амплитуда и фаза  $i$ -й моды, полученные из решения системы (2). Результаты расчета интеграла корреляции приведены на рис. 1 (кривая 2). Анализ его вида показывает, что связь мод не оказывает существенного влияния на работоспособность многомодового ВКИ, основанного на оценке изменений в интерференционной картине, т. е. корреляционного, и подтверждает таким образом целесообразность его построения.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 2. Установка содержит ионный лазер 1 на криптоне ILK-120 с длиной волны излучения  $\lambda=0,647$  мкм, отрезок одномодового волоконного световода 2 с длиной волны отсечки  $\lambda_0=0,6$  мкм, благодаря которому излучение неподвижного лазера вводится во врачающийся чувствительный элемент интерферометра, капилляр 3, чувствительный элемент, представляющий собой направленный ответвитель 4 и катушку, на которую намотан многомодовый световод 5, телевизионную камеру 6, устройство для количественной оценки изменения интерференционной картины, аналогичное описанному [7], содержащее аналого-цифровой преобразователь 7, адресно-коммутирующую схему 8, оперативное запоминающее устройство 9, умножитель 10, интегратор 11, граffопостроитель 12. В экспериментальном макете использовался кварц-кварцевый световод длиной 500 м с диаметром сердцевины 60 мкм и ступенчатым профилем показателя преломления, с числовой апертурой 0,22, намотанный на катушку с радиусом 9 см. Направленный ответвитель был изготовлен свиванием и лазерной сваркой волокна катушки и обеспечивал деление мощности излучения в отношении 1:1.

При вращении макета ВКИ наблюдался эффект изменения спекловой структуры, суммарная мощность излучения изменялась при этом менее, чем на 1%, что согласуется с теоретическим обоснованием слабой чувствительности традиционных ВКИ при наличии связи мод.

Перед измерением угловой скорости вращения интерферометр был приведен во вращение с угловой скоростью  $\sim 20^\circ$  С, что соответствует возникновению сдвига фаз  $\pi/2$  между модами, распространяющимися по и против часовой стрелки, и было осуществлена запись в запоминающее устройство исходной спекловой картины  $U(x, y, \Omega_0)$ . После этого макет был приведен во вращение с угловой скоростью  $-10^\circ$  С, остановлен, вновь приведен во вращение со скоростью  $+10^\circ$  С, остановлен. Результаты экспериментального исследования интерферометра приведены на рис. 3, который иллюстрирует чувствительность ВКИ к вращению в прямом и обратном направлении. Как следует из эксперимента, значительное влияние на чувствительность корреляционного ВКИ оказывает изменение во времени распределения интенсивности излучения в интерференционной картине, не связанное с вращением интерферометра. Оно вызвано изменением геометрического положения световода в катушке, непостоянством температуры, а также нестабильностью частоты излучения лазера. Влияние медленного изменения этих факторов можно исключить, обновляя исходную спекловую картину в запоминающем устройстве от измерения к измерению. Уменьшает их влияние и переход к волокнам с минимальной межмодовой дисперсией (градиентным), интерференционная картина в которых в меньшей степени зависит от дестабилизирующих факторов.

Предложенный подход может быть положен в основу создания фазовых волоконно-оптических датчиков на многомодовых световодах, чувствительность которых не уступает чувствительности аналогичных датчиков на одномодовых световодах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ваганов Р. Б., Клевицкий Б. Р. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 3. С. 586.
2. Клевицкий Б. Р., Коршунов И. П. Препринт ИРЭ АН СССР № 13. М., 1983.
3. Базаров Е. Н. и др. // Кvantовая электроника. 1984. Т. 11. № 11. С. 2151.
4. Штейншлейгер В. Б. Волноводные линии передачи с малыми потерями. — М.: ИЛ, 1960. С. 430.
5. Бессонова С. В., Бородин А. А. // Кvantовая электроника. 1983. Т. 10. № 11. С. 2104.

6. Савельев А. М., Соловьева Г. И. // Зарубежная радиоэлектроника. 1982. № 6. С. 55.  
 7. Быков М. М., Горшков Б. Г. и др. // Квантовая электроника. 1989. № 1. С. 108.

Харьковский институт  
радиотехники

Поступила в редакцию  
14 сентября 1988 г.,  
после переработки  
14 сентября 1990 г.

УДК 533.951

## ВЛИЯНИЕ ПРИСТЕНОЧНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ МЕТАЛЛОМ

К. Н. Остриков

Наличие пристеночных переходных областей в неоднородных ограниченных плазменных волноведущих структурах может приводить к резонансному затуханию поверхностных волн (ПВ) за счет линейной трансформации в продольные волны [1-3]. При этом вблизи точек плазменных или гибридных резонансов происходит «разбухание» электрического поля, которое необходимо учитывать при исследовании нелинейных процессов в ограниченной плазме [4, 5]. В ряде случаев представляет интерес исследование влияния характера зависимости неоднородности плотности в резонансной области на проникновение электромагнитных волн в плазму [6-8] и на свойства поверхностных волн [9]. В [9] показано, что наличие неоднородного резонансного слоя приводит к существованию обратных электромагнитных ПВ на границе металл-изотропная плазма. В магнитоактивной плазме затухание ПВ может быть из-за неоднородности плотности плазмы и неоднородности внешнего магнитного поля [10].

В данном сообщении рассмотрим резонансное затухание ПВ, распространяющиеся поперек внешнего магнитного поля в плазменном слое, ограниченном металлическими поверхностями. Холодная магнитоактивная плазма занимает область  $-a < x < a$  и в плоскостях  $x = \pm a$  ограничена металлом. Внешнее магнитное поле  $H_0$  направлено вдоль оси  $z$ . Будем рассматривать ПВ, распространяющиеся поперек  $H_0$  (вдоль оси  $y$ ) на границах плазмы с металлом. Зависимость всех волновых возмущений от координаты  $y$  и времени  $t$  выбираем в виде  $\exp[i(k_2 y - \omega t)]$ . Возле металлических стенок имеются две переходные области:  $-a < x < -b$  (I) и  $b < x < a$  (III). В этих областях плотность плазмы  $n_0$  и магнитное поле  $H_0$  зависят от координаты  $x$ , т. е.  $n_0 = n_0(x)$ ,  $H_0 = H_0(x)$ . При этом предполагается симметричный характер распределения плотности и магнитного поля в пристеночных областях, т. е.  $n_0(x) = n_0(-x)$ ,  $H_0(x) = H_0(-x)$ . В области  $-b < x < b$  (II) плотность плазмы и магнитное поле постоянны. Толщина переходных областей  $d = a - b = b - (-a)$  предполагается малой по сравнению с длиной волны и глубиной проникновения ПВ в однородной плазме, т. е.  $k_2 d \ll 1$ ,  $x_1(b) d \ll 1$ ,  $x_1^2(x) = k_2^2 - k_\perp^2(x)$ ,  $k_\perp^2(x) = k^2(\epsilon_1^2(x) - \epsilon_2^2(x))\epsilon_1^{-1}(x)$ ,  $k = \omega/c$ ,  $\epsilon_1(x)$ ,  $\epsilon_2(x)$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной многоактивной плазмы [3]. В [11] показано, что в однородной плазме исследуемые волны, локализованные вблизи разных границ слоя, являются односторонними и распространяются в противоположных направлениях. Поскольку в диапазонах частот существования интересующих нас волн  $\epsilon_1(b) > 0$ , то направления их распространения (знак  $k_2$ ) определяются знаком  $\epsilon_2(b)$  для ПВ на границе  $x = -a$  и  $-\epsilon_2(b)$  для ПВ на границе  $x = a$ . При этом волны, имеющие максимальные амплитуды на разных границах слоя, являются независимыми, а дисперсионное уравнение исследуемой волноведущей структуры разбивается на произведение двух уравнений для ПВ на границах  $x = \pm a$  [12].

Уравнение для  $H_z$ -компоненты магнитного поля ПВ имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{k_\perp^2(x)} \left( \frac{dH_z}{dx} + \frac{\epsilon_2(x)}{\epsilon_1(x)} k_2 H_z \right) \right] = \left( \frac{k_2^2}{k_\perp^2(x)} - 1 \right) H_z + \frac{k_2}{k_\perp^2(x)} \frac{\epsilon_2(x)}{\epsilon_1(x)} \frac{dH_z}{dx}. \quad (1)$$

При  $H_0 = \text{const}(x)$ ,  $n_0 = \text{const}(x)$  (1) переходит в соответствующее уравнение в случае однородной плазмы [14]. Ввиду условий малости толщины переходных слоев уравнение (1) решалось в областях I и III методом последовательных приближений [3]. Можно получить следующие выражения для  $H_z$ - и  $H_y$ -компонент полей ПВ:

$$\left. \begin{aligned} H_z^I &= B_1 \left( 1 - \int_a^x k_2 \epsilon_2(x') \epsilon_1^{-1}(x') dx' \right) \\ E_y^I &= iB_1 \frac{\epsilon_2(x)}{\epsilon_1^2(x) - \epsilon_2^2(x)} \frac{k_2}{k} \int_a^x \epsilon_2(x') \epsilon_1^{-1}(x') dx' \end{aligned} \right\} \begin{matrix} -a < x < -b; \\ b < x < a \end{matrix} \quad (2)$$

$$H_z^{II} = A \exp(-\kappa_1(b)x) + C \exp(\kappa_1(b)x)$$

$$E_y^{II} = -\frac{i}{k(\varepsilon_1^2(b) - \varepsilon_2^2(b))} [D_1(\omega, k_2)A \exp(-\kappa_1(b)x) + D_3(\omega, k_2)C \exp(\kappa_1(b)x)]$$

где

$$D_1(\omega, k_2) = k_2 \varepsilon_2(b) - \kappa_1(b) \varepsilon_1(b), \quad D_3(\omega, k_2) = k_2 \varepsilon_2(b) + \kappa_1(b) \varepsilon_1(b),$$

$$H_z^{III} = B_3 \left( 1 - \int_a^x k_2 \varepsilon_2(x') \varepsilon_1^{-1}(x') dx' \right)$$

$$E_y^{III} = i B_3 \frac{\varepsilon_2(x)}{\varepsilon_1^2(x) - \varepsilon_2^2(x)} \frac{k_2^2}{k} \int_a^x \varepsilon_2(x') \varepsilon_1^{-1}(x') dx'$$

Во всех трех областях  $E_x$  компонента связана с  $H_z$  и  $E_y$  соотношением

$$E_x = (k \varepsilon_2(x))^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial x} - i \varepsilon_1(x) \varepsilon_2^{-1}(x) E_y. \quad (5)$$

Решение (2) удовлетворяет граничному условию  $E_y^I(-a) = 0$ , а (4) —  $E_y^{III}(a) = 0$ . Кроме того, полученные решения (2)–(4) удовлетворяют граничным условиям  $E_y^I(-b) = E_y^{II}(-b)$ ,  $H_z^I(-b) = H_z^{II}(-b)$ ,  $E_y^{II}(b) = E_y^{III}(b)$ ,  $H_z^{II}(b) = H_z^{III}(b)$  на границах переходных областей, в силу чего получаем дисперсионное уравнение ПВ в исследуемой структуре:

$$D_1(\omega, k_2) D_3(\omega, k_2) = -\varepsilon_2(b) k_{20}^{(1),(3)} [(D_{30} \xi_1 + D_{10} \xi_3) - (D_{10} \xi_1 + D_{30} \xi_3) \exp(-4\kappa_1(b)b)] [1 - \exp(-4\kappa_1(b)b)]^{-1}, \quad (6)$$

где

$$D_{10} = D_1(\omega, k_{20}^{(1),(3)}), \quad D_{30} = D_3(\omega, k_{20}^{(1),(3)}), \quad D_{10}(\omega, k_{20}^{(1)}) = 0,$$

$$D_{30}(\omega, k_{20}^{(3)}) = 0, \quad \xi_1 = k_{20}^{(1),(3)} \int_{-a}^{-b} \varepsilon_2(x') \varepsilon_1^{-1}(x') dx',$$

$$\xi_3 = k_{20}^{(1),(3)} \int_a^b \varepsilon_2(x') \varepsilon_1^{-1}(x') dx',$$

$k_{20}^{(1),(3)}$  — волновые числа ПВ на границах  $x = -a(k_{20}^{(1)})$  и  $x = a(k_{20}^{(3)})$  в однородном плазменном слое,  $k_{20}^{(1)} = k \sqrt{\varepsilon_1(b) \varepsilon_2(b) |\varepsilon_2(b)|^{-1}} = -k_{20}^{(3)}$ . В правой части (6) выбираются индексы 1 или 3 в зависимости от того, для какой из волн ищется решение.

При  $n_0 = \text{const}(x)$ ,  $H_0 = \text{const}(x)$  во всем слое (6) переходит в дисперсионное уравнение для двух независимых ПВ, локализованных вблизи разных границ структуры (в этом случае правая часть уравнения (6) обращается в нуль). При наличии переходных слов правая часть уравнения (6) отлична от нуля. Можно показать, что первые два слагаемых в правой части отвечают за изменение дисперсионных свойств ПВ, локализованных вблизи границ  $-a$  и  $a$  соответственно. Это изменение обусловлено наличием близлежащих переходных слов (области I для волны на границе  $x = -a$  и области III для волны на границе  $x = a$ ). Третье и четвертое слагаемые представляют собой параметр связи волн, локализованных вблизи разных границ структуры, поскольку отвечают за изменение дисперсии ПВ, связанное с наличием переходных слов, лежащих вблизи противоположных границ слоя (области III для волны на границе  $x = -a$  и области I для волны на границе  $x = a$ ). Таким образом, при наличии переходных слов появляется связь волновых возмущений, локализованных вблизи разных границ структуры. Такая связь отсутствовала в однородном плазменном слое. Этот результат аналогичен полученному для двухслойной полупроводниковой структуры, ограниченной металлом [12]. Наличие множителей, пропорциональных  $\exp(-4\kappa_1(b)b)$ , говорит о том, что для исследуемых ПВ появляется слабая зависимость дисперсионных свойств от размеров структуры. При  $4\kappa_1(b)b \gg 1$  параметр связи волн мал и взаимодействием ПВ, локализованных вблизи разных границ структуры, можно пренебречь.

Не нарушая общности, рассмотрим волну, для которой  $D_{10}(\omega, k_{20}^{(1)}) = 0$  (граница  $x = -a$ ). При наличии в переходных слоях резонансных точек, где  $\varepsilon_1(x_j) = 0$ , имеет место затухание ПВ за счет возбуждения верхне- и нижнегибридных колебаний. Можно показать, что затухание ПВ в диапазоне частот  $\omega > \omega_1(b)$  ( $\omega_1(x)$  — верхняя гибридная частота) в областях верхнего гибридного резонанса  $\omega = \omega_1(x_1) = \omega_1(x_3)$

( $-a < x_1 < -b$ ,  $b < x_3 < a$ ) реализуется при  $H_0(x_j) > H_0(b)$ ,  $n_0(x_j) > n_0(b)$ ,  $j = 1, 3$ , в разреженной плазме, в неоднородном магнитном поле при условии  $H_0(x_j) < H_0(b)$  имеет место затухание ПВ в диапазоне  $\omega < \omega_e(b)$  ( $\omega_{i,e}(x)$  — ионная и электронная циклотронные частоты). Выполнение условий  $H_0(x_j) > H_0(b)$ ,  $n_0(x_j) > n_0(b)$  является необходимым для реализации резонансного затухания ПВ в диапазоне  $\omega_2(b) < \omega < \omega_e(b)$  ( $\omega_2(x)$  — нижняя гибридная частота) в условиях нижнего гибридного резонанса  $\omega = \omega_2(x_j)$ . Трансформация ПВ в нижнегибридные продольные колебания возможна и для волн  $\omega < \omega_1(b)$  в неоднородном магнитном поле при условии  $H_0(x_j) < H_0(b)$ . Решение для волнового числа ПВ ищем в виде  $k_2^{(1)} = k_{20}^{(2)} + \Delta_1$ ,

где  $\Delta_1 = \Delta_1' + i\Delta_1''$  — малая комплексная добавка к  $k_{20}^{(1)}$ . Из (6) получим следующие выражения для  $\Delta_1'$  и  $\Delta_1''$ , справедливые при  $4x_1(b)b \sim 1$  или  $4x_1(b)b \gg 1$ ,

$$\Delta_1' = \alpha k_{20}^{(1)} (\xi_1' + (\xi_1' - \xi_3') \exp(-4x_1(b)b)); \quad (7)$$

$$\Delta_1'' = \alpha k_{20}^{(1)} (\xi_1'' + (\xi_1'' - \xi_3'') \exp(-4x_1(b))), \quad (8)$$

где

$$\alpha = \varepsilon_2^2(b) [\varepsilon_1^2(b) - \varepsilon_2^2(b)]^{-1}, \quad \xi_j'' = \pi |k_{20}^{(1)} \varepsilon_2(x_j) \eta_j|.$$

$$\varepsilon_1(x_j) = 0, \quad \eta_j = \left( \frac{\partial \varepsilon_1(x)}{\partial x} \Big|_{x_j} \right)^{-1}, \quad j = 1, 3,$$

$$\xi_1' = k_{20}^{(1)} \int_{-a}^{-b} \varepsilon_2(x') \varepsilon_1^{-1}(x') dx', \quad \xi_3' = k_{20}^{(1)} \int_a^b \varepsilon_2(x') \varepsilon_1^{-1}(x') dx'$$

(штрих на знаке интеграла означает интегрирование в смысле главного значения),  $\Delta_1'$  — сдвиг волнового числа в неоднородной плазме,  $\Delta_1''$  — коэффициент резонансного затухания ПВ в переходных слоях. Затухание исследуемой ПВ определяется линейной трансформацией в ближнем переходном слое (область I), поскольку член в (8), ответственный за затухание ПВ в области III в  $\exp(4x_1(b)b)$  раз меньше  $\xi_1'$ . В заключение отметим, что закон изменения энергии электромагнитного поля в резонансных областях имеет тот же характер, что и полученный в [3].

Таким образом, в настоящем сообщении рассмотрено влияние пристеночных переходных областей на распространение поверхностной волны в ограниченном металлом слое магнитоактивной плазмы. Показано, что учет неоднородности плотности плазмы или магнитного поля в переходных областях приводит к появлению связи между ПВ, распространяющимися поперек магнитного поля и локализованными вблизи разных границ структуры. Эта связь отсутствует в однородном плазменном слое. Рассмотрено резонансное затухание ПВ за счет трансформации в продольные колебания в областях гибридных резонансов. Получены выражения для сдвига волнового числа и коэффициента затухания ПВ.

Автор выражает глубокую благодарность Н. А. Азаренкову и А. Н. Кондратенко за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Романов Ю. А. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. № 6. С. 2119.
2. Степанов К. Н. // ЖТФ. 1965. Т. 35. № 6. С. 1002.
3. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Атомиздат, 1976. — 232 с.
4. Bagakate A. R., Dolgopolov V. V., El-Siragay N. M. // Plasma Physics. 1975. V. 17. № 1. P. 89.
5. Куклин В. М., Панченко И. П., Черноусенко В. М. // ДАН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1988. № 9. С. 52.
6. Кондратьев И. Г., Миллер М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 1. С. 34.
7. Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Фрайман Г. М. // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. № 7. С. 433.
8. Бакунов М. И., Денисов Н. Г., Зелексон Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 4. С. 408.
9. Бакунов М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 1. С. 25.
10. Тимофеев А. В. // УФН. 1973. Т. 110. № 3. С. 329.
11. Азаренков Н. А., Кондратенко А. Н. и др. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 11. С. 2195.
12. Азаренков Н. А., Кондратенко А. Н., Остриков К. Н. В кн.: Взаимодействие электромагнитных волн с полупроводниками и полупроводниково-диэлектрическими структурами. — Саратов: Гос. ун-т. 1988. С. 67.

К ст. Ю. М. Брука

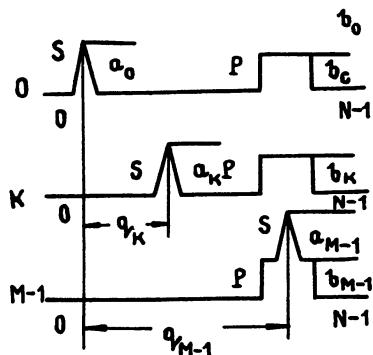


Рис. 1.

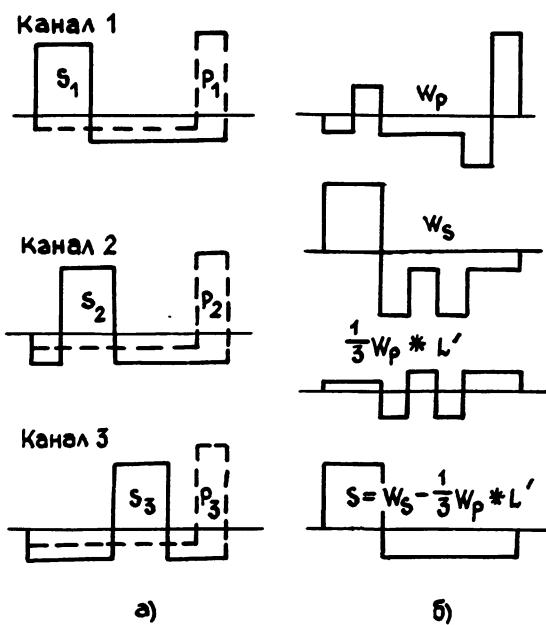
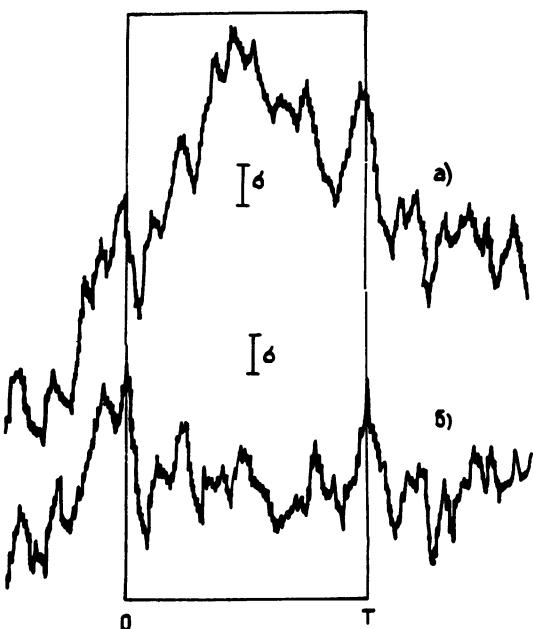
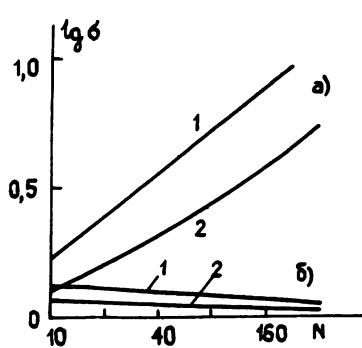


Рис. 2.

Рис. 3, 4.



К ст. А. В. Кукушкина

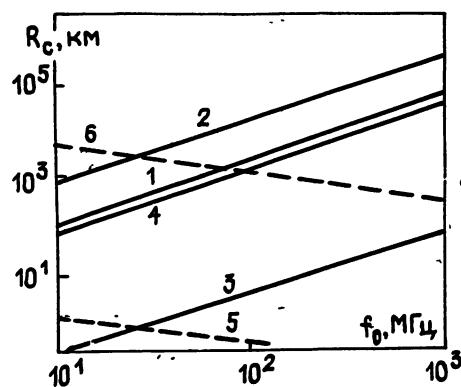


Рис. 1.

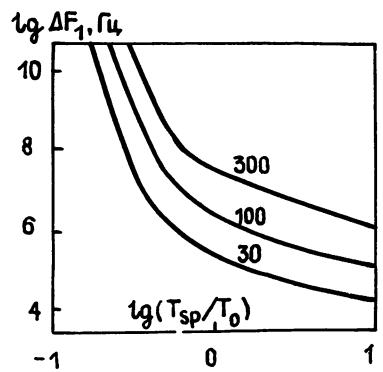


Рис. 2.

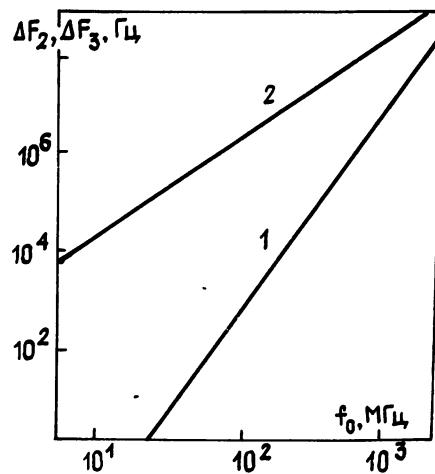


Рис. 3.

К ст. В. Н. Киселя и др.

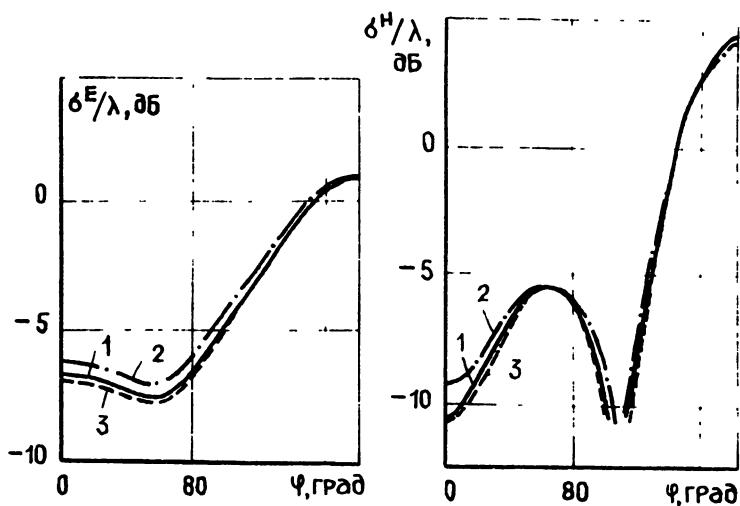


Рис. 1, 2.

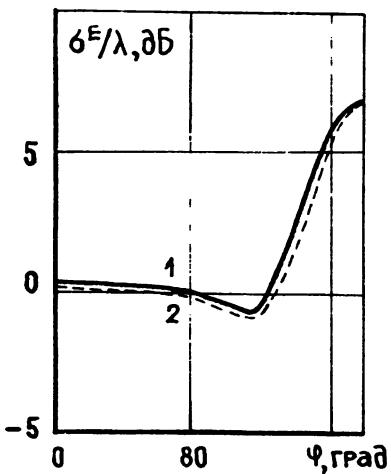


Рис. 3, 4.

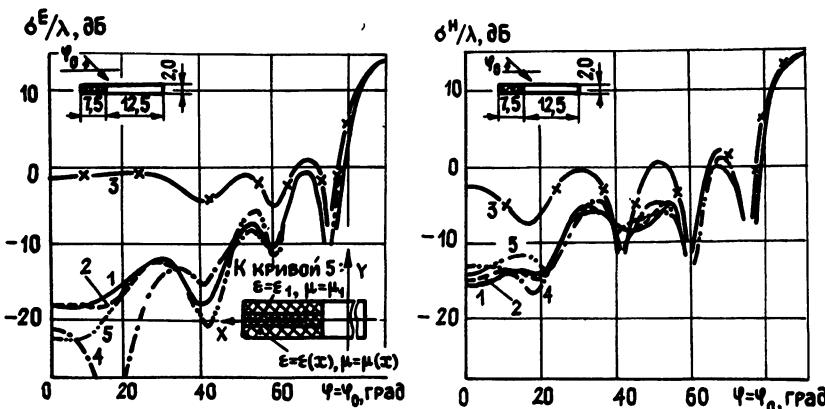


Рис. 5, 6.

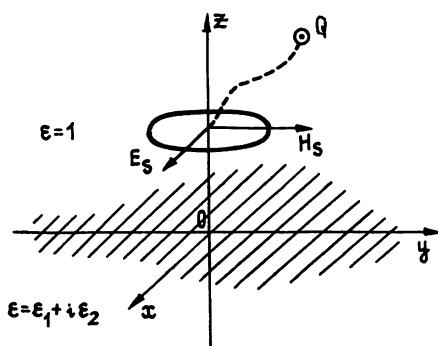


Рис. 1.

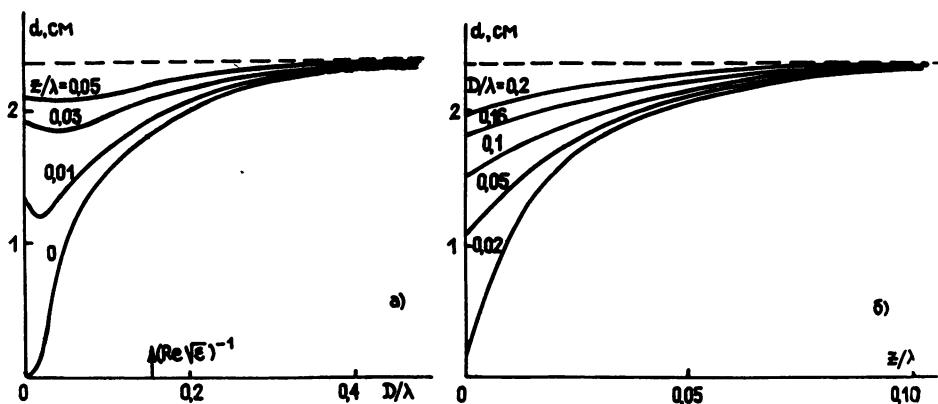


Рис. 2.

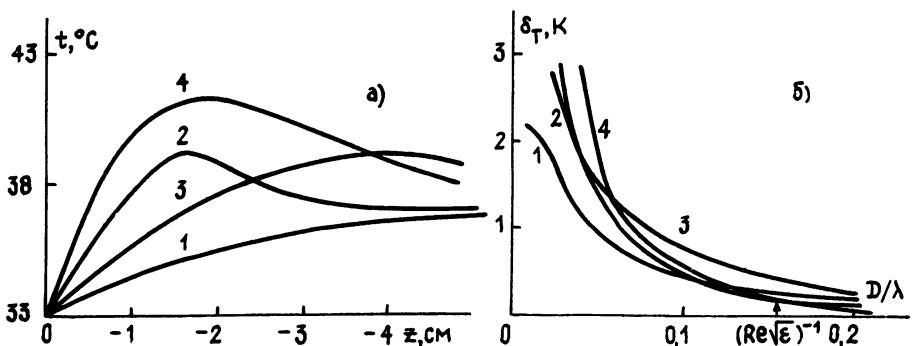


Рис. 3.

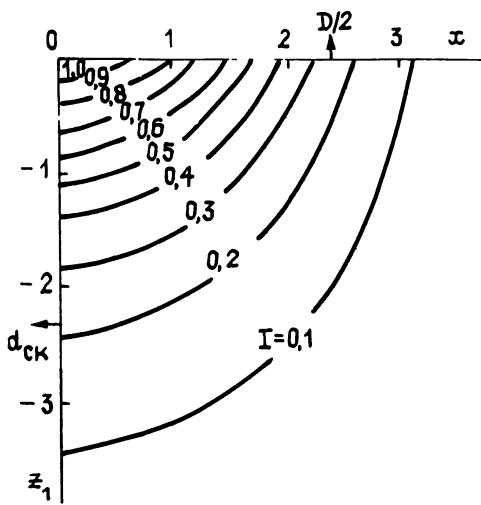


Рис. 4.

К ст. А. Л. Вольнова и др.

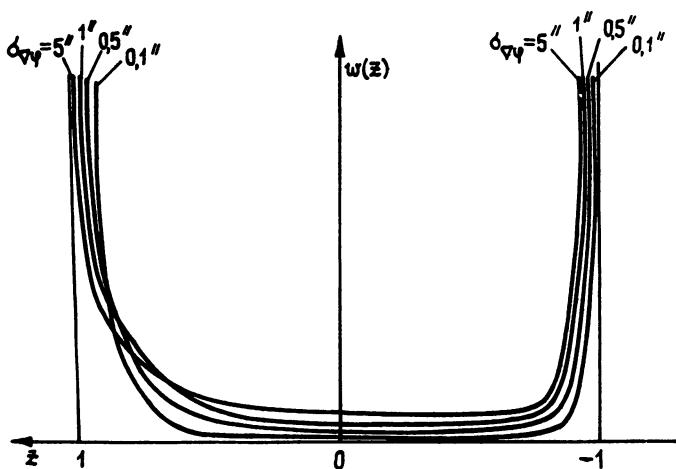


Рис. 1.

К ст. В. С. Филинова

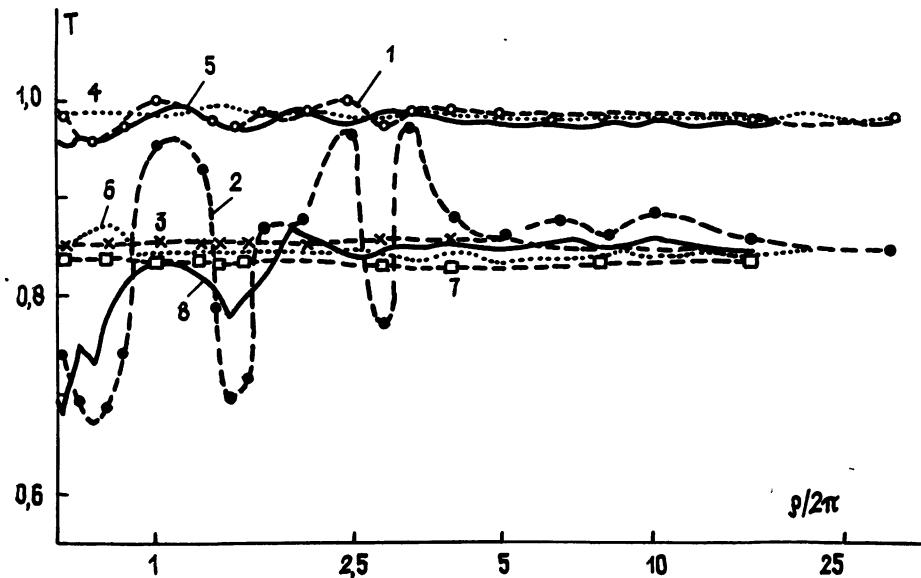


Рис. 1.

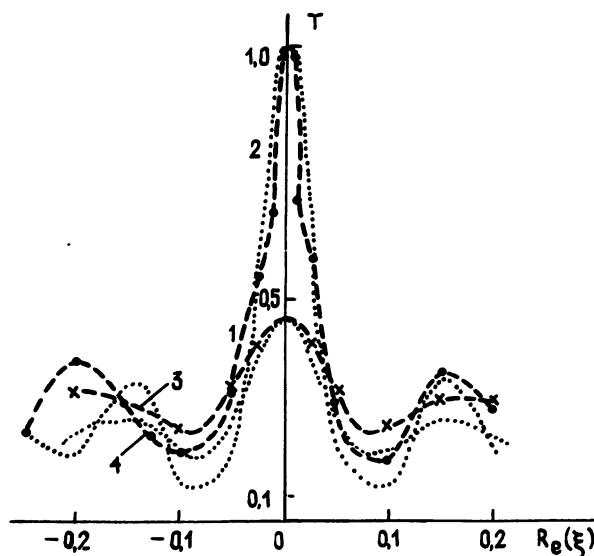


Рис. 2.

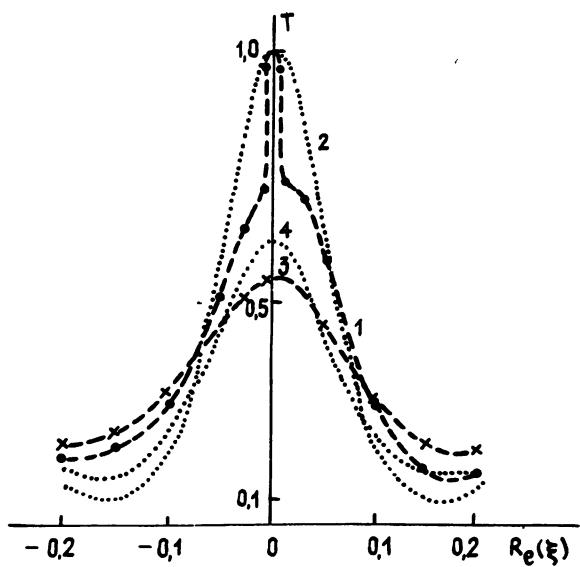


Рис. 3.

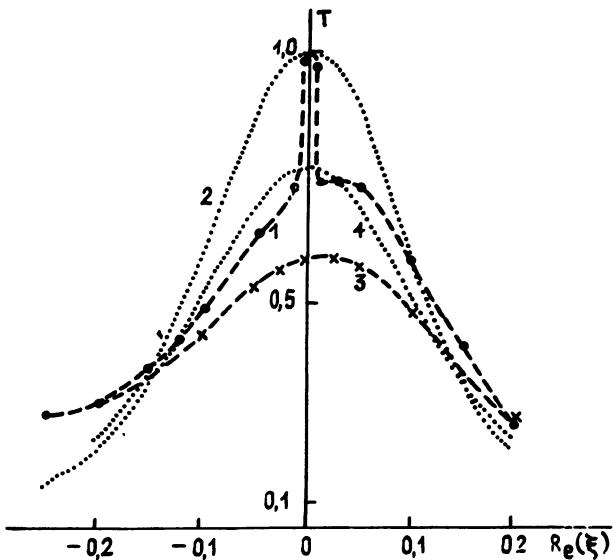


Рис. 4.

К ст. В. А. Розова и др.

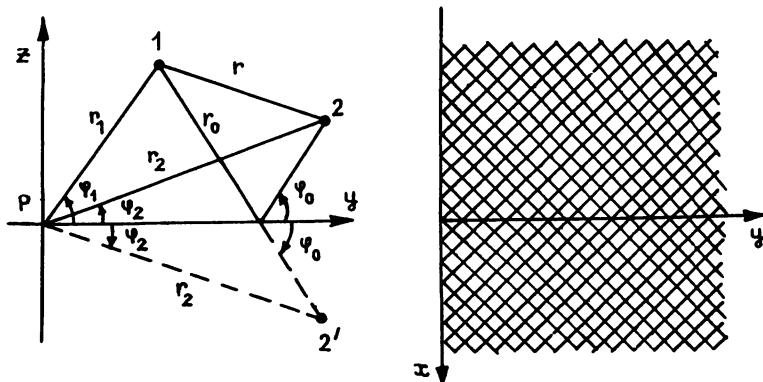


Рис. 1.

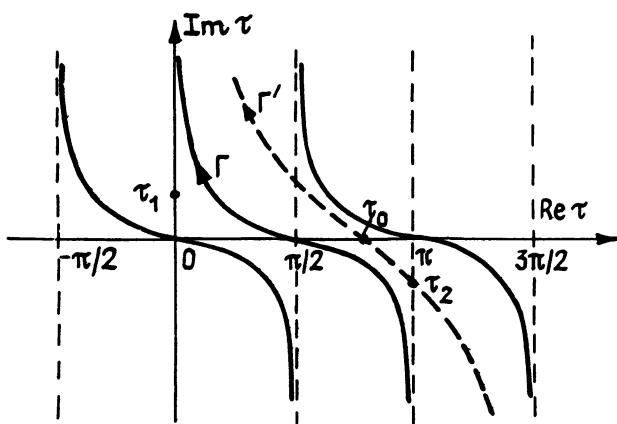


Рис. 2.

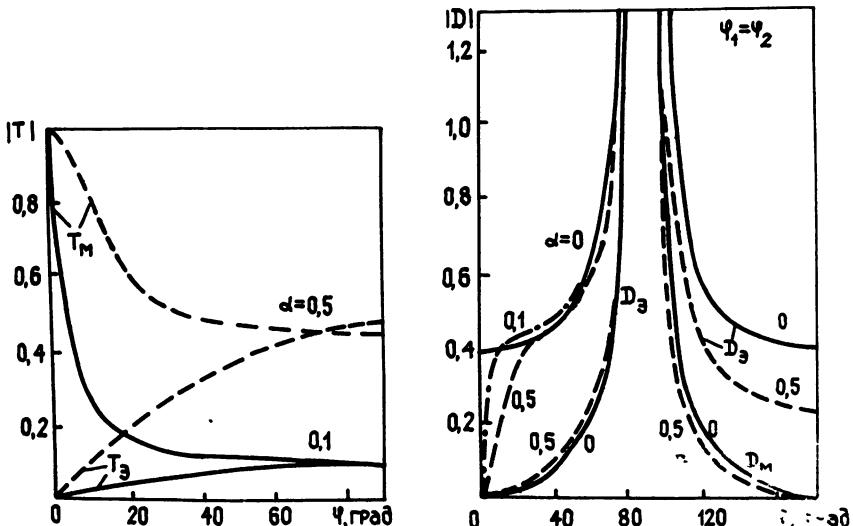


Рис. 3, 4.

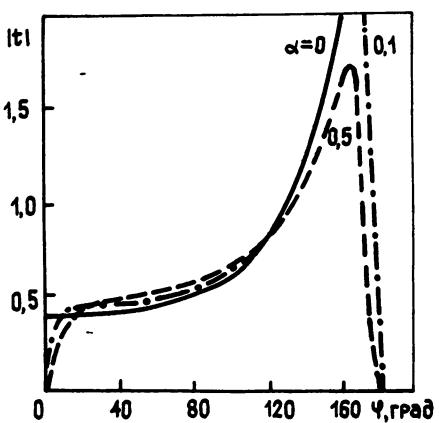
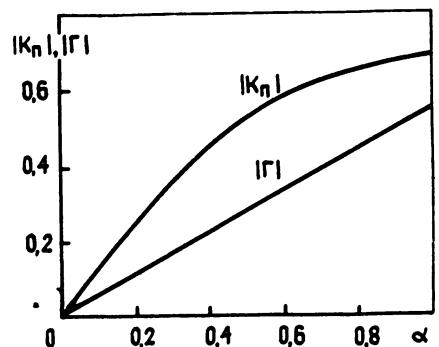


Рис. 5, 6.

К ст. А. Н Кучерова и др.

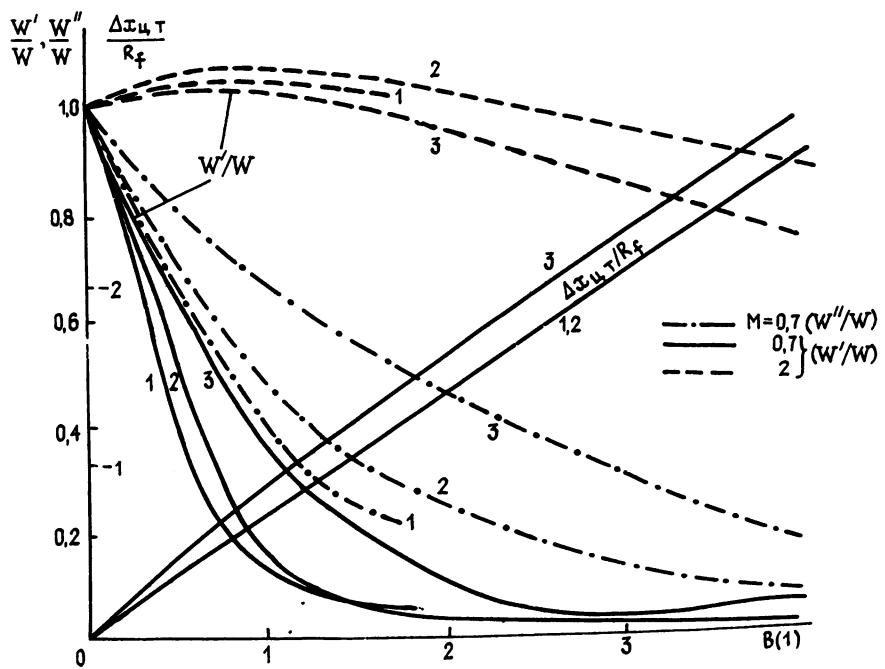


Рис. 1.

К ст. С. В. Афанасьева

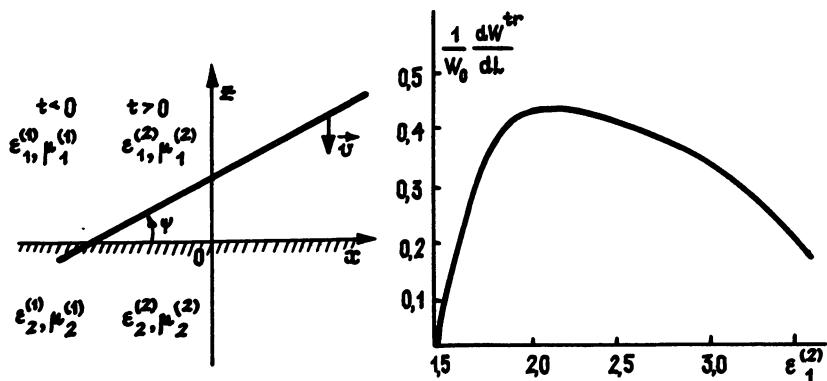


Рис. 1, 2.

К ст. М. М. Быкова

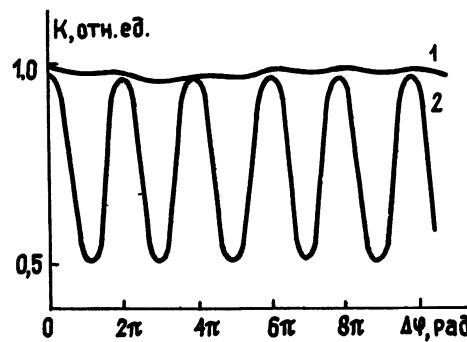


Рис. 1.

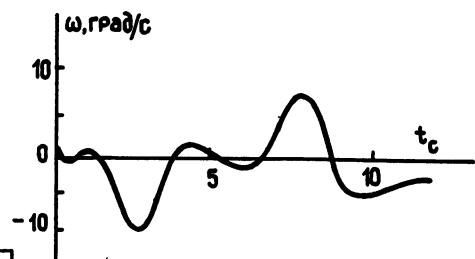
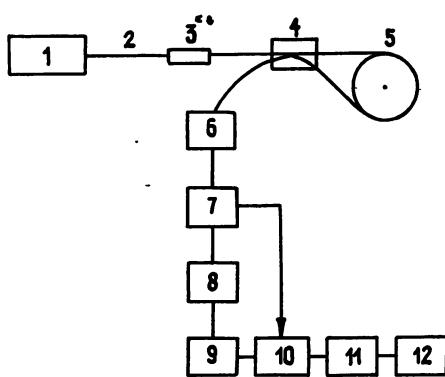


Рис. 2, 3.

К ст. А. Н. Малахова

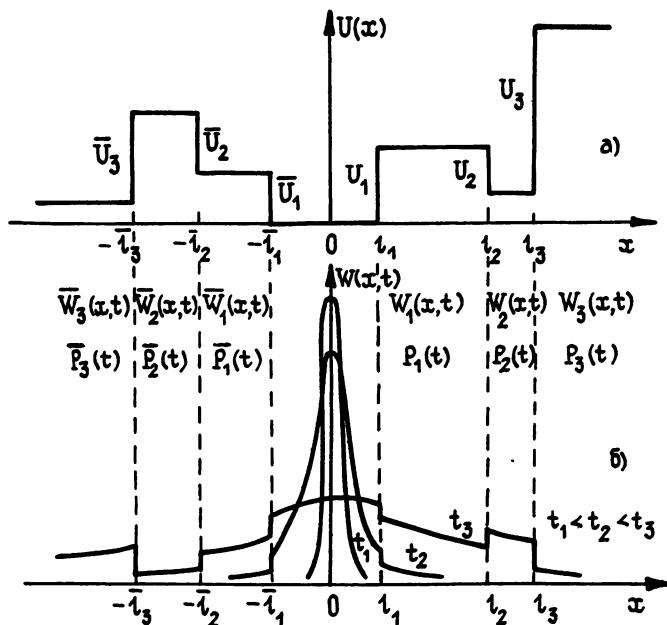


Рис. 1.

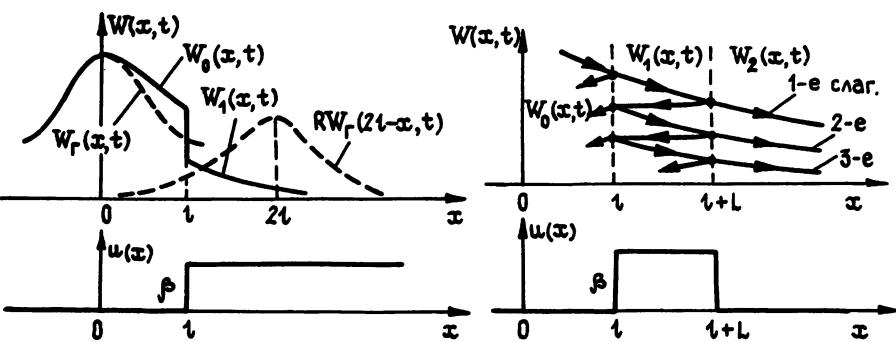


Рис. 2, 3.

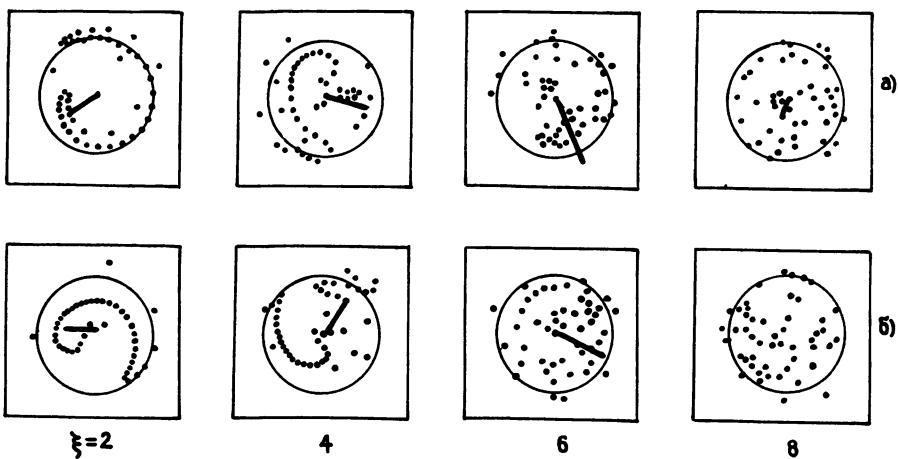


Рис. 1.

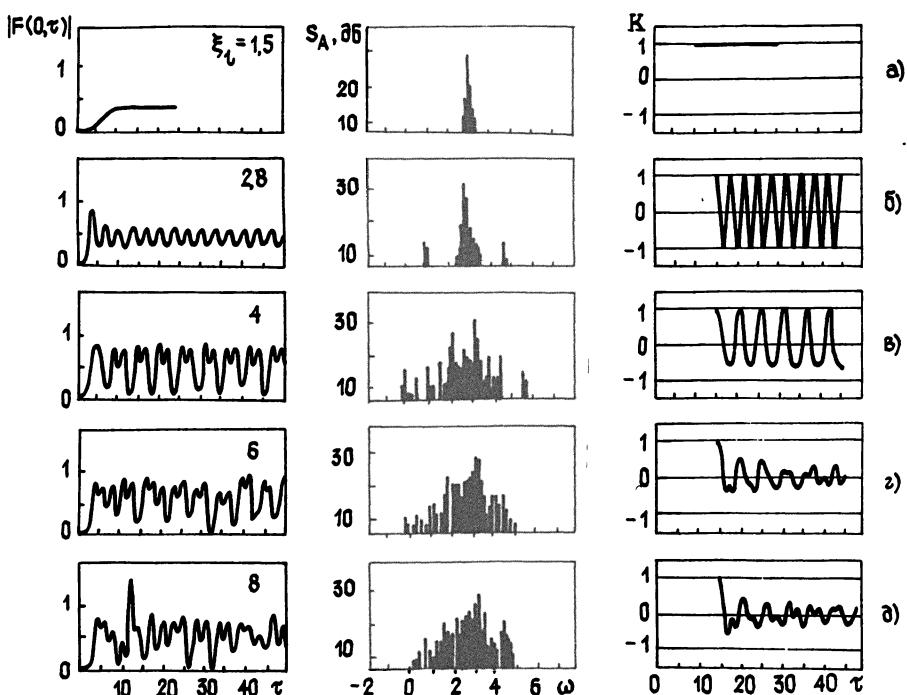


Рис. 2.