

УДК 517.9

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ ФЕЙГЕНБАУМА

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, У. Р. Сатаев

Исследуется переход к хаосу в двух системах Фейгенбаума с однонаправленной связью в зависимости от трех параметров (управляющие параметры подсистем и константа связи). Продемонстрировано существование иерархии типов критического поведения по возрастающей коразмерности: имеются фейгенбаумовские критические поверхности, ограниченные трикритическими линиями и пересекающиеся по бикритической линии. В свою очередь, эти линии пересекаются в мультикритической точке нового типа. Обсуждаются динамические режимы вблизи указанных критических ситуаций; в частности, вблизи бикритической линии реализуется гиперхаос, а вблизи трикритической — мультистабильность. Дана таблица универсальных критических показателей.

В контексте задач нелинейной динамики под критическим поведением понимается совокупность явлений, возникающих при переходе динамических систем к хаосу и характеризующихся некоторыми свойствами масштабной инвариантности (скейлинга) в пространстве управляющих параметров. Простейший и наиболее изученный тип критического поведения связан с переходом к хаосу по Фейгенбауму через последовательность бифуркаций удвоения периода, и ему присущ однопараметрический скейлинг с универсальной масштабной константой $\delta = 4,66920$ [1].

Чрезвычайно интересной с точки зрения критических явлений оказывается задача о поведении двух систем Фейгенбаума при наличии однонаправленной связи между ними, когда первая система воздействует на вторую, а вторая не влияет на первую [2]. В настоящей работе мы покажем, что глобальный анализ пространства всех существенных параметров задачи вскрывает целую иерархию типов критического поведения, характеризующихся одно-, двух- и трехпараметрическим скейлингом. Этот анализ позволяет понять закономерности сосуществования и взаимного расположения критических точек, линий и поверхностей различного типа в пространстве параметров. Некоторые из рассматриваемых типов критического поведения оказываются связанными с возникновением мультистабильности, что позволяет изучать и классифицировать мультистабильные состояния в рамках теории критических явлений.

С точки зрения физических приложений, системы с однонаправленной связью ассоциируются, в частности, с проблемой турбулентности, развивающейся вниз по потоку [3]. Они могут также конструироваться искусственно, например, в радиотехнике и оптике с целью создания устройств с новыми функциональными возможностями (генераторы шума, бистабильные и мультистабильные элементы памяти и т. д.).

1. Модельные уравнения. Двойная фейгенбаумовская точка. Как обычно при изучении критических явлений, обратимся к модельной системе, которая в нашем случае конструируется из двух логистических отображений

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - \lambda y_n^2 - Bx_n^2, \quad (1)$$

где x, y - динамические переменные, характеризующие состояния первой и второй подсистем, λ и λ - управляющие параметры, B - константа связи.

Если положить $B = 0$, то система (1) распадается на две несвязанные системы Фейгенбаума, демонстрирующие удвоения периода и переход к хаосу при изменении соответствующих управляющих параметров λ и λ . Пусть значения этих параметров таковы, что в обеих подсистемах реализуются устойчивые циклы периода 2^k . Тогда составная

система обладает 2^k состояниями, отличающимися сдвигом колебаний в подсистемах друг относительно друга на целое число единиц дискретного времени. Эти режимы модифицируются, но остаются устойчивыми и при включении связи, если величина ее достаточно мала.

Таким образом, в системе (1) заведомо имеется мультистабильность (хотя обсуждаемый механизм ее возникновения не единственный, см. ниже). Геометрически за формированием мультистабильных состояний можно проследить, рассматривая трансформацию плоскости параметров (λ, B) при увеличении λ . Когда λ переходит через бифуркационное значение $\lambda_1 =$

$0,75$, первая подсистема претерпевает первое удвоение периода. Начиная с этого момента на плоскости (λ, B) появляется точка сборки $(\lambda_1, 0)$, в которой сходятся две линии складок, ограничивающих область сосуществования двух разных 2-циклов составной системы. Плоскость (λ, B) можно представить теперь состоящей из двух частично перекрывающихся листов 1 и 2 (рис. 1а), соответствующих упомянутым двум циклам. Скачок с первого листа на второй имеет место при переходе через левую, а обратно -

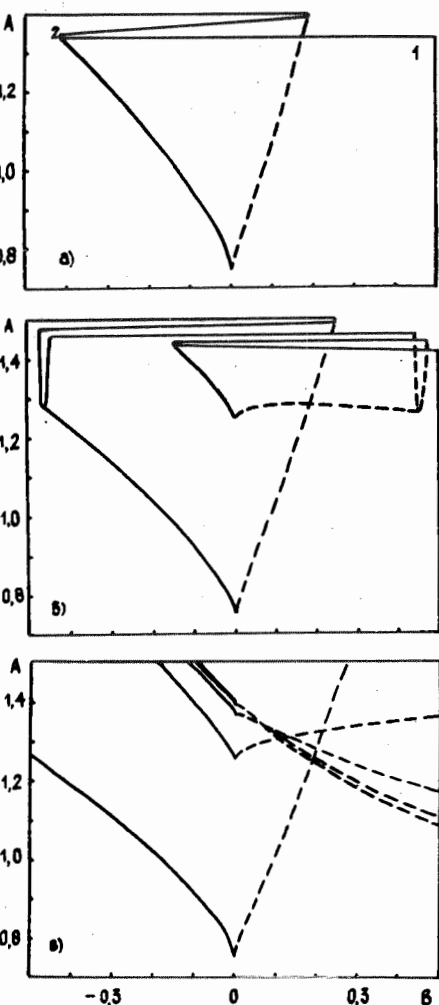


Рис. 1.

при переходе через правую линию складок. После следующей бифуркации удвоения в первой подсистеме каждый из двух листов, в свою очередь, раздваивается. На каждом из них появляется точка сборки $(\lambda_2, 0)$, в которой соединены друг с другом вновь возникшие листы и сходятся линии складок, являющиеся их краями (рис. 1б). При дальнейшем увеличении параметра λ процесс формирования новых соборок и раздвоения листов продолжается и при $\lambda_c = 1,401155$ число листов и

точек сборки бесконечно. Сборки накапливаются в пределе к точке $(\lambda_c, \lambda_c, 0)$ в пространстве параметров (λ, A, B) , которую будем называть *двойной фейгенбаумовской точкой* и обозначать DF . В том же смысле, в каком удвоения периода связаны с критической точкой индивидуального отображения, описанный процесс размножения мультистабильных состояний ассоциируется с двойной фейгенбаумовской точкой.

Перемещаясь по любому из листов, можно наблюдать разнообразные режимы и бифуркации. Далее ограничимся изучением одного выделенного листа, который образует лицевую сторону поверхностей, показанных на рис. 1, и который будем называть *синфазным листом*. Терминология объясняется тем, что при продолжении по параметрам в точку нулевой связи режимы, отвечающие этому листу, превращаются в синфазные колебания несвязанных подсистем.

Скейлинговые свойства окрестности двойной фейгенбаумовской точки на синфазном листе вытекают из ренормгруппового анализа, проведенного в [3,4]. Структура пространства трех параметров инвариантна относительно изменения масштабов по собственным направлениям $\Lambda_1 = \lambda$, $\Lambda_2 = A + B$, $\Lambda_3 = B$, соответственно, в $\delta_1 = \delta_2 = 4,66920$ и $\delta_3 = 2$ раза.

2. Трикритическое поведение. Проведенное обсуждение и рис. 1 дает лишь предварительное представление о структуре пространства параметров. Обратимся к более детальному рассмотрению и начнем вновь с ситуации, когда в первой подсистеме реализуется 2-цикл.

На рис. 2а показана карта динамических режимов на плоскости (A, B) при $\lambda = 0,85$ (синфазный лист). На рисунке можно видеть линии бифуркаций удвоения периода, накапливающиеся к фейгенбаумовским критическим линиям F - границам возникновения хаоса. В области существования 4-циклов располагается новая точка сборки S_2 . В ней сходятся линии складок - края новых листов, на которые раздвоился синфазный лист. В области между линиями складок система имеет два различных устойчивых режима, а на самих линиях происходит жесткий переход между этими режимами. Фрагмент карты, показанный на рис. 2б и изображающий в увеличенном виде окрестность точки S_2 , демонстрирует множество сборок и складок на базе циклов периода $8, 16, 32, \dots$. При этом линии удвоений периода разного порядка огибают разные точки сборки и перестают поэтому сходиться к фейгенбаумовской линии, которая, следовательно, обрывается в некоторой точке. Эта точка служит пределом определенной последовательности точек сборки (табл. 1) и называется *трикритической точкой*. Трикритические точки были введены в рассмотрение в работе [5] при анализе одномерного двухпараметрического отображения четвертой степени. Наша задача может быть преобразована к этой форме в случае, когда период колебаний в первой подсистеме равен двум.

Таблица 1

Точки сборки, сходящиеся к трикритической точке T_1 при $\lambda = 0,85$

N	A_N	B_N	Y_N	$\frac{A_\infty - A_N}{A_\infty - A_{2N}}$	Y_N / Y_{2N}
4	1,283293	0,891207	0,113696		
8	1,330607	0,716126	-0,070483	-0,466	1,613
16	1,314539	0,701132	0,043617	1,992	1,616
32	1,304689	0,701732	-0,026291	2,551	1,659
64	1,300657	0,702751	0,015662	2,740	1,679
128	1,299164	0,703224	-0,009287	2,809	1,686
256	1,298629	0,703407	0,005498	2,845	1,689
∞	1,298339	0,703509		2,85713	1,69030

Используя дважды второе уравнение (1), найдем отображение, описывающее изменение состояния второй подсистемы за две итерации:

$$y_{n+2} = [1 - Bx_1^2 - A(1 - Bx_0^2)] + 2(1 - Bx_0^2) A^2 y_n^2 - A^3 y_n^4.$$

Здесь $x_{0,1} = [1/2 \pm (\lambda - 3/4)^{1/2}] / \lambda$ - элементы 2-цикла первой подсистемы. После замены переменной $y \rightarrow y[1 - Bx_1^2 - A(1 - Bx_0^2)]^2$ имеем

$$y_{n+2} = 1 + ay_n^2 + by_n^4, \quad (2)$$

где

$$a = 2(1 - Bx_0^2)(1 - Bx_1^2 - A(1 - Bx_0^2)^2)A^2,$$

$$b = -[A(1 - Bx_1^2 - A(1 - Bx_0^2)^2)]^3. \quad (3)$$

Пересчетом по формуле (3) находим, что трикритические точки, имеющие на плоскости (a,b) координаты $(-2,81403; 1,40701)$ и $(0; -1,59490)$ [5] располагаются на плоскости (A,B) при $\lambda = 0,85$ в точках $(1,29834; 0,70351)$ и $(1,23075; 1,08446)$. На рис. 2 они обозначены T_1 и T_2 .

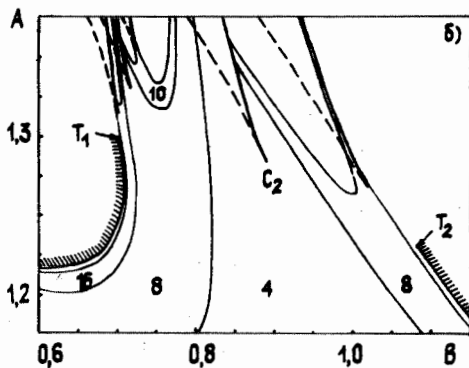
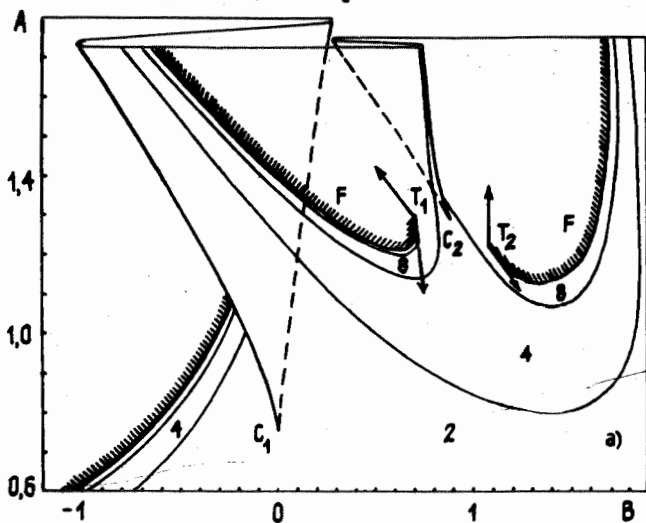


Рис. 2.

В соответствии с развитием в [5] ренормгрупповым анализом вблизи каждой из трикритических точек имеет место двухпараметрический скейлинг с масштабными константами $\delta_1 = 7,28469$ и $\delta_2 = 2,85713$.

Соответствующие собственные направления на плоскости (A, B) показаны стрелками. Первое из них идет вдоль линии, на которой динамика второй подсистемы при некотором выборе переменной описывается отображением (2) с $\alpha = 0$, а второе - вдоль фейгенбаумовской критической линии. С другой стороны от трикритической точки по этому же направлению к ней сходится по закону геометрической прогрессии с показателем δ_2 последовательность сборок (табл. 1), что можно положить в основу алгоритма поиска трикритических точек.

Отметим, что термин трикритическая точка введен по аналогии с теорией фазовых переходов: так называют точку, в окрестности которой реализуются фазовые переходы и первого, и второго рода. Переходы первого рода ассоциируются с жесткими бифуркациями на линиях складок, а второго рода - с мягким возникновением хаоса через удвоения периода.

Пусть теперь значение параметра первой подсистемы таково, что она демонстрирует цикл периода 4. Тогда конфигурация областей на плоскости (A, B) становится более сложной, но новых типов критического поведения не обнаруживается. То же самое можно сказать о ситуациях, когда циклы в первой подсистеме имеют период 8, 16 и т. д.

3. Бикритическое поведение и мультикритическая точка BT . Пусть теперь управляющий параметр первой подсистемы λ равен критическому значению $\lambda_c = 1,401155$. Тогда при увеличении управляющего параметра второй подсистемы A у границы возникновения хаоса будет наблюдаться еще один тип критического поведения, названный в [2] *бикритическим*. Бикритическую линию на плоскости (A, B) можно найти, проследив за эволюцией фейгенбаумовской линии во второй подсистеме при $\lambda \rightarrow \lambda_c$. На рис. 3а показано, как располагается эта линия на плоскости (A, B) при значениях λ , отвечающих порогу потери устойчивости 2-, 4-, 8-, 16-циклов первой подсистемы. Из рисунка видно, что при приближении параметра λ к критическому значению фейгенбаумовские линии на плоскости (A, B) накапливаются к бикритической линии B , а трикритические точки - к некоторой точке BT .

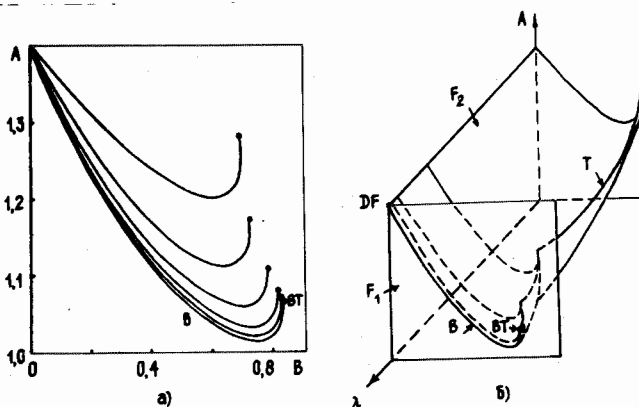


Рис. 3.

Вблизи бикритической линии в пространстве (λ, A, B) имеет место двухпараметрический скейлинг с константами $\delta_1 = 4,66920$ и $\delta_2 = 2,392724$. Первое собственное направление совпадает с осью λ , вдоль второго к бикритической линии в сечениях (λ, A) подходят фэйгенбаумовские критические линии второй подсистемы.

Точка BT - это мультикритическая точка нового типа, окрестность которой характеризуется трехпараметрическим скейлингом с масштабными константами $\delta_1 = 4,66920$, $\delta_2 = 2,654654$, $\delta_3 = 1,541720$. Собственное направление, связанное с константой δ_1 , - это ось λ , для δ_2 - линия, вдоль которой сходятся к BT трикритические точки, для δ_3 - направление вдоль бикритической линии. (Табл. 2.)

Таблица 2

Сходимость последовательности трикритических точек к мультикритической точке BT

λ	A_n	B_n	$\frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1} - A_{n-2}}$
1,25	1,279894	0,690210	
1,368099	1,173074	0,721136	1,998
1,394046	1,108720	0,784254	2,506
1,399631	1,080086	0,817598	3,034
1,400829	1,071161	0,828522	2,729
1,401155	1,066	0,83505	2,654

4. Общее обсуждение критической динамики. Подведем некоторые итоги и дадим общее представление о геометрии пространства параметров однонаправленно связанных систем фэйгенбаума с точки зрения реализующихся в них типов критического поведения. В пространстве (λ, A, B) имеются две фэйгенбаумовские критические поверхности $F1$ и $F2$ (рис. 3б). Первая - это плоскость $\lambda = 1,401155$, а вторая - поверхность сложной формы, являющаяся границей возникновения хаоса во второй системе*. Эти поверхности пересекаются по бикритической линии B . Поверхность $F2$ имеет границу - линию трикритических точек T . Трикритическая и бикритическая линии сходятся и оканчиваются в мультикритической точке BT . Вторым концом бикритической линии служит двойная фэйгенбаумовская точка DF . Отметим, что в любой окрестности трикритической линии, точек BT и DF имеются области мультистабильности и жестких бифуркаций.

Каждому из перечисленных типов критического поведения отвечает определенный набор количественных характеристик (число существенных параметров и динамических переменных, масштабные константы скейлинга в пространстве параметров и в фазовом пространстве, критический мультипликатор 2^k -циклов и др.), которые сведены в табл. 3.

Спектры колебаний второй подсистемы в различных критических ситуациях - фэйгенбаумовской, трикритической, бикритической и в точке BT - обладают четко выраженной иерархической организацией по уровням амплитуд субгармоник и могут быть приближенно описаны рекуррентным соотношением

$$S(\omega) \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta \cos(\pi\omega/2)}{4\alpha^2\beta^2} \rightarrow \begin{cases} S(\omega/2), & \text{знак "+"} \\ S(1-\omega/2), & \text{знак "-"} \end{cases} \quad (4)$$

Поверхность $F2$ на самом деле состоит из множества кусков. На рис. 3б для простоты показан лишь один из них, которому на рис. 2 отвечает участок критической линии от $B = 0$ до первой трикритической точки.

Это обобщение известного результата для фейгенбаумовского спектра, получаемое по той же методике [6,7]. В формуле (4) α - масштабный фактор для динамической переменной y в соответствующей критической ситуации (см. табл. 3), $\beta = \alpha^2$ - для фейгенбаумовской и бикритической точек, $\beta = \alpha^4$ - для трикритической точки и точки ВТ.

Как видно из (4), величина $\gamma = (1/4\alpha^2 + 1/4\beta^2)$ характеризует средний перепад между соседними уровнями субгармоник, а коэффициент $\varepsilon = |2\alpha\beta/(\alpha^2 + \beta^2)|$ - степень неравномерности распределения амплитуд субгармоник на данном уровне иерархии. Численные значения величин γ и ε также приведены в табл. 3.

Таблица 3

Числовые характеристики иерархии критической динамики
однонаправленно связанных систем фейгенбаума

Тип критическ. точки	n	m	δ	α	μ	γ , дБ	ε	χ
Фейгенбаум F	1	1	4,66920	-2,50291	-1,6012	13,35	0,69	0,4498
Трикритическая T	2	1	7,28469 2,85712	-1,69030	-2,0509	10,40	0,40	0,3491 0,6603
Бикритическая B	2	2	4,66920 2,39272	-2,50291 -1,50532	-1,6012 -1,1789	13,35 7,98	0,69 0,92	0,4498 0,7945
Мультикритическая BT	3	2	4,66920 2,65465 1,54172	-2,50291 -1,24166	-1,6012 -1,3980	13,35 6,85	0,69 0,82	0,4498 0,7100 1,6012
Двойная фейгенбаумовская DF	3	2	4,66920 4,66920 2,00000	-2,50291 -2,50291	-1,6012 -1,6012	13,35 13,35	0,69 0,69	0,4498 0,4498

Обозначения: n - число существенных параметров (корузмерность), m - число существенных динамических переменных, δ - масштабный фактор скейлинга в пространстве параметров, α - масштабный фактор скейлинга в фазовом пространстве, μ - мультипликатор 2^n -циклов в критической точке, γ , ε - константы, характеризующие спектр колебаний в критической точке (перепад между субгармониками различного уровня и неравномерность амплитуд в пределах одного уровня), χ - критический индекс для ляпуновского показателя.

Поведение ляпуновских показателей L вблизи критических точек подчиняются скейлинговым соотношениям вида

$$L \rightarrow L/2, \quad \Lambda \rightarrow \Lambda/\delta, \quad (5)$$

где Λ - параметр, отсчитываемый вдоль некоторого собственного направления, а δ - масштабный фактор, отвечающий этому направлению. Отсюда вытекает соотношение для огибающей ляпуновского показателя

$$L \sim \Lambda^\chi, \quad (6)$$

где критический индекс χ определяется как $\chi = \ln 2 / \ln \delta$. Величины χ приведены в табл. 3. Отметим, что при движении в пространстве параметров через бикритическую точку одновременно становятся положительными два ляпуновских показателя, т.е. бикритическое поведение отвечает порогу возникновения гиперхаоса.

5. Заключение. Как известно, одна из ключевых идей в теории бифуркаций, теории катастроф и отчасти в теории фазовых переходов - это идея "движения по корузмерности". В соответствии с ней в

рассмотрение последовательно вводятся и анализируются ситуации, типичные сначала в однопараметрических семействах, затем в семействах с числом параметров 2, 3 и т.д. Результаты настоящей работы наглядно показывают, что аналогичный подход плодотворен и в теории критических явлений у порога возникновения хаоса. С этой точки зрения, основные задачи теории состоят в поиске и классификации типичных вариантов критической динамики в зависимости от числа существенных параметров, в выявлении присущих им свойств универсальности и скейлинга, в нахождении канонических моделей, описывающих каждую критическую ситуацию. Предметом рассмотрения должны служить также закономерности сосуществования типов критического поведения в пространстве параметров динамических систем, методика их поиска и идентификации в эксперименте.

К настоящему времени известно большое число систем, демонстрирующих сценарий перехода к хаосу по Фейгенбауму. Его распространенность обусловлена тем, что фейгенбаумовская критическая точка типичным образом встречается в системах с одним управляющим параметром ($n = 1$, табл. 3). Что можно сказать о возможности реализации других обсуждавшихся здесь типов критической динамики?

Что касается трикритического поведения, то оно становится типичным при наличии двух управляющих параметров и, очевидно, может наблюдаться во многих реальных системах. Анализируемая здесь ситуация однонаправленно связанных систем является в этом смысле лишь одним из возможных примеров. Практически она может быть реализована, в частности, на основе двух нелинейных колебательных контуров, возбуждаемых внешним периодическим воздействием [2]. Насколько нам известно, вопрос об экспериментальном наблюдении трикритического поведения, обнаруженного пока лишь в формальной математической модели [5], до сих пор не ставился.

Бикритическое поведение и мультикритическая точка ВТ характерны, по-видимому, только для потоковых систем, поскольку введение обратного воздействия второй подсистемы на первую разрушает эти типы критической динамики. Экспериментальное наблюдение бикритического поведения описано в работе [2]. Следует отметить, что такого рода критические явления можно наблюдать и в цепочках из трех, четырех и более элементов с однонаправленной связью, если допустить независимое управление параметрами подсистем. Для реализации бикритической ситуации необходимо подобрать два параметра, а для точки ВТ - три.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. N 2. С. 343.
2. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. N 3. С. 619.
3. Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. // Physica. 1988. V. D33. N 1-3. P. 1.
4. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 8. С. 991.
5. Chang S.-J., Wortis M., Wright J.A. // Phys. Rev. 1981. V. A24. N 5. P. 2669.
6. Huberman B., Zisook A. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 26. N 10. P. 626.
7. Nauenberg M., Rudnik J. // Phys. Rev. 1981. V. B24. N 1. P. 493.

Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
25 декабря 1989 г.