

Том 34, № 3

Нижний Новгород

март 1991

СОДЕРЖАНИЕ

Коростелев В.С., Хлопов Г.И., Шестopalов В.П. Экспериментальное исследование спектров когерентных сигналов, отраженных от снегопада в диапазоне 140 ГГц.....	227
Зиничев В.А., Рапопорт В.О., Трахтенгерц В.Ю., Фабрикант А.Л., Федосеев Ю.Г. Система радиоакустического зондирования атмосферы в КВ радиодиапазоне	234
Власов А.А., Кадыров Е.Н., Шапошников А.Н. Радиофизические аспекты термического зондирования стратосферы со спутников на линиях поглощения O_2 в диапазоне частот 55 - 65 ГГц	240
Антифеев В.И., Султанов А.С. Синтез оптимального радиометра с частотной фильтрацией входного сигнала	247
Бронин А.Г., Денисенко П.Ф., Жбанков Г.А., Заботин Н.А. Бесстолкновительное затухание, обыкновенных электромагнитных волн в ионосферной плазме со степенным спектром неоднородностей	254
Кленов С.П., Свиридов М.В. О воздействии стационарных возмущений фазы на режим синхронизации	262
Савченко В.В. Рекуррентный метод восстановления плотности вероятности по конечному набору интегральных данных	268
Гузев М.А., Кляцкин В.И. К теории распространения волн в одномерных случайных средах с двухмасштабными неоднородностями	274
Абрамович Б.С., Немцов Б.Е. Сверхотражение от неоднородно-инвертированных слоев	280
Темнов В.М. Поверхностные волны в однополосовой линии передачи	286
Белокопытов Г.В. Параметрические взаимодействия в магнитодиэлектрических резонаторах	292
Корнеенков В.К., Мирошниченко В.С., Шматъко А.А. Исследование выходных характеристик генератора дифракционного излучения в автономном и неавтономном режимах	301
Акимов П.И., Плохов В.В., Сыровой В.А., Федотов А.В., Шантурин Л.П. О расчете инжектора с крупноструктурной сеткой и релятивистским электронным пучком	309
Полевой В.Г. Теплообмен между хорошо проводящим металлом и диэлектриком, обусловленный флуктуационным электромагнитным полем	319

Краткие сообщения и письма в редакцию

Волков А.В., Славутский Л.А., Шевцов Б.М. Пространственный спектр радиолокационного сигнала при скользящем распространении над поверхностью моря	325
Калинин Ю.К., Романчук А.А. О структуре изолированных крупномасштабных неоднородностей внешней ионосферы ...	327

Гоков А.М., Мисюра В.А., Пивень Л.А. К вопросу об одновременном определении плотности и частоты столкновений электронов с молекулами в D-области ионосферы.	330
Павкин А.Г. Прямой метод Ляпунова и устойчивость некоторых решений нелинейного уравнения Клейна - Гордона ...	333
Якимович А.П. Индикатриса светорассеяния случайно-неоднородных текстур жидких кристаллов с учетом многократных рассеяний	336
Беляев В.С. Новый псевдослучайный фазоманипулированный сигнал на основе нелинейной последовательности и возможности его формирования	339
Каджая И.И., Фурман Г.Б. Топологическая фаза для спиновых систем в линейно поляризованном радиочастотном поле	342

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 17.06.91. Подписано к печати 25.07.91.
Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 10, 50. Усл. кр.-отт. 11, 09. Уч.-изд. л. 13, 2.
Тираж 1007 экз. Заказ № . Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

Нижегородская областная типография управления издательства, полиграфии
и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 621.396.96

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ, ОТРАЖЕННЫХ ОТ СНЕГОПАДА В ДИАПАЗОНЕ 140 ГГц

В. С. Коростелев, Г. И. Хлопов, В. П. Шестopalов

Приведены результаты экспериментального исследования энергетических спектров флуктуаций радиолокационных сигналов в диапазоне 140 ГГц, отраженных от снегопада. Предложен метод измерения ЭПР объемно-распределенных отражателей с помощью бистатической когерентной РЛС в режиме непрерывного излучения за счет пересечения лучей антенн. Приведены характерные примеры энергетических спектров и их параметры — эффективная ширина и максимум спектральной плотности ЭПР.

Исследование распространения сигналов в осадках имеет важное значение при освоении миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов радиоволн в интересах создания системы связи, навигации и радиолокации [1]. Однако достаточно полно изучено лишь ослабление радиоволн в дождях [1-3], а в отношении обратного рассеяния сигналов от дождя этого, к сожалению, уже сказать нельзя. Что касается осадков в виде снега, то к настоящему времени накопленных данных явно недостаточно как в части прямого ослабления, так и обратного рассеяния сигналов.

В частности, данные измерений [1-3] показывают, что ослабление радиоволн в снегопаде пропорционально концентрации снежной массы $P(\text{г}/\text{м}^3)$ и в диапазоне 140 ГГц описывается зависимостью $\gamma(\text{дБ}/\text{км}) = (2 + 5) P(\text{г}/\text{м}^3)$, которая может быть также выражена через влагосодержание снега — $I(\text{мм}/\text{ч})$; $\gamma = (3 + 4) I^{0.7}$.

Однако в случае обратного рассеяния радиоволн от снега, как показывают эксперименты [2], не удается установить корреляционные связи между параметрами отраженных сигналов и интегральными характеристиками снегопада (концентрация снежной массы, ее влагосодержание или оптическая видимость) ввиду сложной структуры снежинок (геометрические размеры, влажность, плотность и т. д.). Например, при кратковременных измерениях в течение суток [2], когда структуру снежной массы и ее физико-химические параметры можно считать неизменными, удельная эквивалентная площадь рассеяния (ЭПР) снега (относительно 1 м²) в диапазоне 140 ГГц хорошо описывается выражением $\sigma(\text{дБ}) = -60 \exp(-0.3 P^{0.3})$. Но обобщение подобных данных на весь зимний период, к сожалению, неправомочно ввиду значительной изменчивости характеристик снегопада при постоянных интегральных параметрах, что подтверждается данными работы [2], в которой показано, что для одинаковой концентрации снега его удельная ЭПР меняется более чем на порядок.

Что касается данных о флуктуационных параметрах сигналов, отраженных от снегопада, то к настоящему времени известны лишь отдельные данные измерений для спектра интенсивности в диапазонах 3 и 0,8 см [4], полученные с помощью некогерентных РЛС, а в части

энергетических спектров, измеряемых с выхода фазового детектора когерентной РЛС, публикации практически отсутствуют как в сантиметровом, так и в миллиметровом диапазонах радиоволн.

В настоящей работе приведены первые результаты экспериментального исследования энергетического спектра флюктуаций когерентных сигналов в диапазоне 140 ГГц, отраженных от снегопада, которое проводилось в зимний период 1988 г. на европейской территории СССР. Измерения осуществлялись с помощью измерительной когерентной РЛС [5] на основе генератора дифракционного излучения (ГДИ) в непрерывном режиме при средней мощности 0,5 Вт и спектральной чувствительности приемника $\sim 5 \cdot 10^{-18}$ Вт/Гц (шум-фактор составляет 21 дБ). Антенно-фидерное устройство (АФУ) содержит раздельные приемную и передающую антенны с раскрытием 580 мм, переходное затухание между которыми составляло не менее 100 дБ. Сигналы с выхода фазового детектора РЛС записывались на магнитограф типа НО-67 и затем вводились в ЭВМ типа БЭСМ-б с помощью усовершенствованной аппаратуры цифровой обработки сигналов [6], динамический диапазон которой составляет не менее 40 дБ, а полоса анализируемых доплеровских частот равна $5 + 20000$ Гц при длительности отдельной записи ~ 74 с.

Применим ли к условиям

измерений аппаратура РЛС имела две особенности, связанные с калибровкой принимаемых сигналов по мощности и выделением в пространстве отражающего объема исследуемых сигналов для измерения удельного значения ЭПР. В частности, в раскрытие приемной и передающей антенн установлены небольшие рупорные излучатели (рис. 1) A_1 и A_2 опорного канала, содержащего также измерительный аттенюатор (АТ) и доплеровский сдвигатель частоты (СЧ) на основе механического фазовращателя [7]. Поэтому часть мощности передатчика (T) поступает с регулируемым ослаблением в приемник (R), причем за счет быстрого вращения диэлектрического вкладыша 1 с помощью электродвигателя (ЭД) достигается периодическая модуляция фазы опорного сигнала, эквивалентная доплеровскому смещению частоты ($f_d = 640$ Гц). Проводя калибровку (РЛС) путем сравнения сигналов опорного канала и отраженного от эталонного вибрирующего отражателя [8] в чистую и ясную погоду, можно в дальнейшем измерять мощность сигналов, отраженных от осадков, без использования традиционных уголковых отражателей [9].

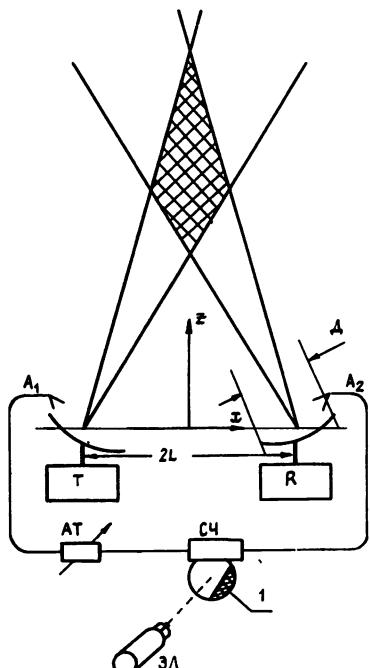


Рис. 1

Однако чтобы оценить значение удельной ЭПР исследуемых осадков, необходимо измерять кроме мощности отраженного сигнала также и величину отражающего объема, для чего обычно используется импульсная модуляция излучения передатчика. Для измерений в режиме немодулированного излучения предлагается формировать отражающий объем путем пересечения диаграмм направленности (ДН) в пространстве под углом 2α , как показано на рис. 1. При этом необходимо учитывать, что в рассматриваемом случае расстояние между антennами $2L$ обычно сравнимо

с размерами раскрыва $2L \approx D$, в связи с чем объем пространства, образованный пересечением лучей, находится в ближней зоне антенн $R_0 = L \operatorname{ctg} \alpha < 2D^2/\lambda$ (R_0 – расстояние до центра отражающего объема, λ – длина волн). Поэтому использование уравнения радиолокации в традиционной форме [10] неправомочно ввиду зависимости ДН антенн от расстояния. Но если размеры антенн значительно превышают длину волн $D > \lambda$, а спадание поля на краю раскрыва более $10 + 12$ дБ, то поле излучения в ближней зоне хорошо аппроксимируется гауссовым пучком [11].

Кроме того, среднеквадратичное расстояние между снекинками существенно превышает длину волн [12], поэтому расчет отраженного сигнала можно вести в приближении некогерентного рассеяния с учетом освещенности снекинок в поле передающей антенны. Если учесть с помощью леммы Лоренца [13] неплоский характер поля, падающего на раскрыв приемной антенны при переотражении от снекинок в ближней зоне, а также осуществляя необходимые преобразования в рамках приближений, традиционных при расчете мощности сигнала, отраженного от объемно-распределенного рассеивателя [4,10], то выражение для принятой мощности запишется в виде

$$P_R = \frac{P_T \lambda^2}{\pi^3} \sigma_0 C(\omega_{OR}, \omega_{OT}), \quad (1)$$

где P_T – излучаемая мощность, σ_0 – удельное значение ЭПР ($\text{м}^2/\text{м}^3$),

$$C(\omega_{OR}, \omega_{OT}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} dx dy dz \frac{\exp\{-2\rho_T^2/\omega_T^2 + \rho_R^2/\omega_R^2\}}{\omega_T^2 \omega_R^2}. \quad (2)$$

Здесь индексы R и T относятся к приемной и передающей антеннам, $k = 2\pi/\lambda$;

$$\rho_T^2 = x_T^2(x, y, z) + y_T^2(x, y, z), \quad \rho_R^2 = x_R^2(x, y, z) + y_R^2(x, y, z); \quad (3)$$

$$\omega_T^2 = \omega_{OT}^2(1 + \xi_T^2), \quad \xi_T = 2z_T/k\omega_{OT}, \quad (4)$$

$$\omega_R^2 = \omega_{OR}^2(1 + \xi_R^2), \quad \xi_R = 2z_R/k\omega_{OR},$$

ω_0 – радиус " пятна" поля в раскрыве антены; $\omega_{T,R}$ – радиус " пятна" поля на расстоянии $z_{T,R}$.

Связь координат наблюдателя x, y, z , поля волновых пучков приемной x_R, y_R, z_R и передающей антенн x_T, y_T и z_T определяется выражениями

$$x_R = x \cos \alpha - z \sin \alpha + L \cos \alpha, \quad x_T = x \cos \alpha + z \sin \alpha - L \cos \alpha, \\ y_R = y, \quad y_T = y. \quad (5)$$

$$z_R = x \sin \alpha + z \cos \alpha + L \sin \alpha, \quad z_T = -x \sin \alpha + z \cos \alpha + L \sin \alpha.$$

Несмотря на громоздкие выражения соотношения (1)–(5) асимптотически переходят в традиционное уравнение радиолокации [10], справедливое для расположения отражателей в дальней зоне антенн при $z \rightarrow \infty$. При этом в рассматриваемом случае расположение дальней зоны соответствует $z_D = 306$ м, а центр

отражающего объема находится на расстоянии 19 м ($\alpha = 1^\circ$), что и обуславливает необходимость применения выражений (1)–(5). Для

использованных антенн с осесимметричным распределением поля в раскрыте ($\omega_{\text{от}} = \omega_{\text{ор}} = 192$ мм) расчет дает значение эффективного отражающего объема $V_{\text{эфф}} = 6,2$ м³, что оказалось вполне достаточно для уверенного обнаружения сигналов, отраженных от снегопада, благодаря небольшим расстояниям наблюдения несмотря на довольно низкие значения полной ЭПР $\sigma_{\Sigma} \approx (10^{-5} + 10^{-4})$ м⁻¹.

Так как измерительная РЛС размещена в закрытой кабине на поворотном устройстве, то при измерениях, независимо от направления ветра, линия визирования ориентировалась по ветру и перпендикулярно ему, что дает возможность оценить характерные изменения в спектре отраженного сигнала при различном направлении ветра относительно измерительной РЛС.

Исследования проводились в январе-феврале 1988 г., в течение которых зарегистрировано 30 снегопадов общей продолжительностью 124,3 часа. Радиолокационные наблюдения проводились в основном в дневное время и охватывали примерно 55% общего количества снегопадов, а сами осадки характеризовались согласно классификации статистических данных, принятой в гидрометеорологии, а также влагосодержанием снега, измеряемым путем его выпаривания.

При этом за время наблюдений осадки дифференцировались в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

N п/п	Вид осадков	Отношение времени выпадения к времени наблюдения (в процентах)
1	Снег	38,1
2	Снег мокрый	26,0
3	Поземка	16,5
4	Снег мокрый со льдом	12,0
5	Снег со льдом	6,8
6	Снежная крупа	0,4
7	Метель общая	0,2

Минимально зарегистрированное влагосодержание снега составляло $I_{\min} = 0,05$ мм/ч, максимальное значение $I_{\max} = 4$ мм/ч, а среднее значение $I_{\text{ср}} = 0,55$ мм/ч.

На рис. 2 показаны примеры доплеровских спектров отраженных сигналов при средней скорости ветра $\bar{v} \approx 5$ м/с, усредненных по ансамблю N реализаций ($N \geq 256$). При параллельном направлении ветра (кривые 1 и 2 соответствуют слабому $I_1 = 0,05$ мм/ч и сильному $I_2 = 4,0$ мм/ч снегопаду соответственно) ярко выделяется спектральный максимум F_m , который обусловлен средним доплеровским смещением частоты за счет массопереноса снега ветром $F_m = 2\bar{v}/\lambda$ [4]. При этом увеличение интенсивности снегопада приводит к многопиковости спектра (кривая 2), связанной с увеличением неоднородности структуры снегопада за счет появления частиц с разными скоростями движения в ветровом

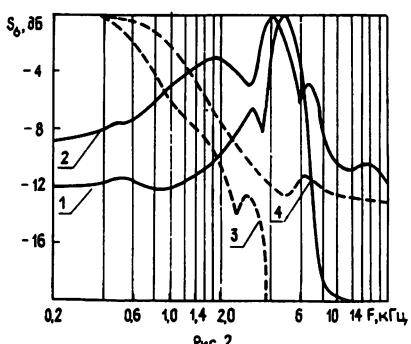


Рис. 2

поле (например, крупные хлопья, капли-снежинки и т. д.), что также отмечалось при исследованиях в сантиметровом диапазоне [4, 14].

Кроме того, для интенсивного снегопада (кривая 2) следует отметить наличие значительного по своей амплитуде и протяженности высокочастотного пьедестала в спектре отраженного сигнала, медленно убывающего вплоть до частот $F \leq 20$ кГц. В настоящее время не представляется возможным идентифицировать наличие столь высоких частот в спектре с каким-либо типом движения снежинок, можно лишь предполагать, что, по-видимому, появление подобного пьедестала обусловлено амплитудной модуляцией сигнала за счет взаимного затенения и столкновений снежинок в турбулентном ветровом потоке. Аналогичное "уплощение" спектра некогерентных сигналов, отраженных от дождя на волне $\lambda = 3$ мм, описано в работе [4], где уровень пьедестала также определяется интенсивностью дождя.

Рассмотренные особенности спектра отраженных сигналов также наблюдаются и при перпендикулярном направлении ветра (кривые 3 и 4 соответствуют влагосодержанию снегопада $I_3 = 0,05$ мм/ч и $I_4 = 4,0$ мм/ч), хотя в этом случае максимум спектральной плотности располагается вблизи нулевых доплеровских частот, соответствующих нулевой средней радиальной скорости движения снежинок. При этом увеличение интенсивности снегопада (кривая 4) приводит, как и в предыдущем случае (кривая 2), к появлению высокочастотного пьедестала и расширению спектра.

Суммируя сказанное, необходимо заметить, что в общем случае произвольного направления ветра относительно линии визирования измерительной РЛС вид спектра будет изменяться между кривыми 1 - 3 и 2 - 4, причем вряд ли целесообразно говорить о какой-либо его аппроксимации с помощью простых функций (гауссово распределение, степенная функция и др.). Тем не менее для практических приложений значительный интерес представляют также параметры спектра как максимум спектральной плотности $\sigma_{\text{om}}^2 (\text{м}^2/\text{м}^3 \cdot \text{Гц})$, равный максимальному удельному значению ЭПР снегопада в полосе 1 Гц, и эффективное значение ширины спектра

$$\Delta F_\sigma = \frac{1}{\sigma_{\text{om}}} \int_0^\infty dF S_\sigma(F), \quad (6)$$

определенное областью частот, внутри которой содержится основная энергия отраженного сигнала. Однако по причинам, отмеченным выше, указанные параметры плохо коррелируют с интегральными характеристиками снегопада [2] (концентрация снежной массы, влагосодержание и др.), поэтому более информативным показателем является повторяемость данных измерений, например, в течение зимнего сезона.

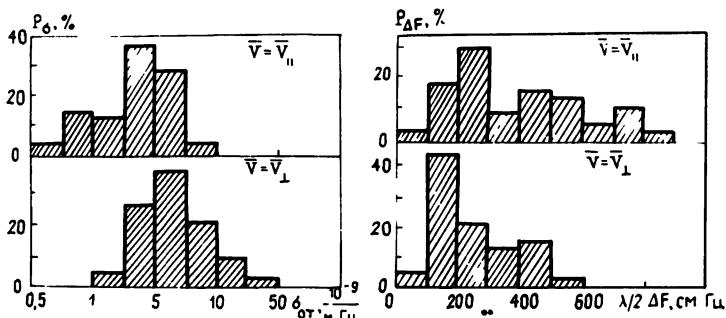


Рис. 3.4

В нашем распоряжении имелось 30 записей снегопадов, наблюдавшихся в течение полутора месяцев, результаты обработки которых приведены на рис. 3 и 4. Как видно, наиболее вероятное значение максимума спектральной плотности (рис. 3) для паралельного ($V = V_{\parallel}$) направления ветра несколько меньше, чем для перпендикуляр-

ного ($V = V_{\perp}$), и имеет порядок $\sigma_{0m}'' = (2 + 3) \cdot 10^{-9} \text{ 1/m}\cdot\text{Гц}$. Указанное отличие коррелирует с разной шириной спектра (рис. 4), причем для параллельного направления ветра ширина спектра в 2-3 раза больше, чем для перпендикулярного $\Delta F_{\parallel} > \Delta F_{\perp}$. В определенном смысле отмеченное обстоятельство является следствием инвариантности значения удельной ЭПР $\sigma_0 \approx \Delta F_{\parallel, \perp} \sigma_{0m}^{\parallel, \perp}$, которое соответствует некогерентному зондированию и не зависит от направления ветра (в рассматриваемом случае значение удельной ЭПР имеет порядок $\sigma_0 \approx 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, что согласуется с данными работ [1 - 3]).

Кроме того, ширина спектра сигналов, рассеянных объемно-распределенными отражателями, обратно пропорциональна рабочей длине волн [4], поэтому данные измерений на рис. 4 представлены в масштабе $\Delta F \lambda / 2$ (см·Гц), что позволяет проводить сравнение с результатами, полученными в других диапазонах. В частности, сопоставление с данными измерений, опубликованных в [4], показывает, что ширина энергетического спектра в коротковолновой части миллиметрового диапазона заметно превышает приведенное значение ширины спектра интенсивности в более длинноволновом диапазоне (к сожалению, данные для когерентных измерений авторам неизвестны). По-видимому, это указывает на существование особенностей, связанных с фазовой модуляцией когерентных сигналов, рассеянных совокупностью случайных отражателей, перемещающихся в ветровом поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Г. А., Потапов А. А. //Зарубежная радиоэлектроника. 1984. N 11. с. 28.
2. Nemarich Joscph, Wellman R.J., Lacombe J.//IEEE Trans. GRS. 1988. v. 26. N 3. P. 319.
3. Wallance H.B.//IEEE Trans. GRS. 1988. v. 26. N 3. P. 253.
4. Кулемин Г. П. Препринт ИРЭ АН УССР N 287. - Харьков, 1988.
5. Коростелев В. С., Краснянский А. Д., Хлопов Г. И. и др. //Сб. :Всесоюзная конф. по статистическим методам обработки данных дистанционного зондирования окружающей среды. - Рига, 1986. с. 94.
6. Дзюбан В. Г., Коростелев В. Ч., Хлопов Г. И. и др. //Сб. :II Всесоюзная школа-симпозиум по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. - Фрунзе: Илим, 1986. с. 250.
7. Карней А. Ф. Техника сверхвысоких частот. Пер. с англ. - М. :Сов. радио, 1965. - 782 с.
8. Коростелев В. С., Хлопов Г. И., Шестопалов В. П. //Сб. :Научное приборостроение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. - Харьков:ИРЭ АН УССР, 1988. с. 120.
9. Guosui Lin, Xiangguan Shi//Collog. Int. Radar, Paris, 1984. 21-24 мая. P. 339.
10. Справочник по радиолокации: В 4 т. /Под ред. М. Сколкина. - М. :Сов. радио, 1979. т. 1.
11. Герасименко В. Е., Калекин О. Ю., Костенко А. А. и др. //Сб. :Научное приборостроение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. - Харьков:ИРЭ АН УССР, 1988. с. 113.
12. Красюк Н. П., Коблов В. Л., Красюк В. Н. Влияние тропосферы и

- подстилающей поверхности на работу РЛС. - М. :Сов. радио, 1988. - 211 с.
13. Бурштейн Э. Л. //Радиотехника и электроника. 1958. N 11. с. 43.
14. Кивва Ф. В., Синицкий В. Б., Тургенев И. С. В кн. :XII Всесоюзная конф. по распространению радиоволн. - М. :Наука, 1978. Ч. 2. с. 252.

Институт радиофизики
и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
18 января 1990 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF SPECTRUM OF COHERENT
SIGNALS REFLECTED FROM SNOWFALL IN 140 GHz FREQUENCY RANGE

Korostelev V.S., Khlopov G.I., Shestopalov V.P.

The paper presents the results of experimental investigation of the energetic spectrum of fluctuations of radar signals reflected from a snowfall in 140 GHz frequency range. The method is suggested for the EDR measurement of volumetrically distributed reflectors using a bistatic coherent radar in the regime of continuous radiation with crossing antennas beam. Typical examples of the energetic spectra and their parameters, such as an effective width and the EDR spectral density maximum, are given.

УДК 551 :501

СИСТЕМА РАДИОАКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ В КВ РАДИОДИАПАЗОНЕ

*В. А. Зиничев, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц,
А. Л. Фабрикант, Ю. Г. Федосеев*

Приведено описание действующей установки радиоакустического зондирования атмосферы, позволяющей измерять профиль температуры до высоты 4 км. Рассмотрена методика обработки принимаемого радиосигнала, отраженного от звуковой волны. Обсуждаются различные факторы, определяющие точность измерения температурного профиля.

Существующие в настоящее время установки радиоакустического зондирования (РАЗ) атмосферы ориентированы, главным образом, на исследование атмосферного погранслоя [1]. В них, как правило, используются радиоволны дециметрового диапазона, что обеспечивает достаточно высокое пространственное разрешение при зондировании до высот около 1 км. Реализация РАЗ всей толщи тропосферы и нижней стратосферы требует перехода к использованию длин волн метрового диапазона [2, 3]. Такой путь развития хотя и связан с уменьшением пространственной разрешающей способности зондирования, значительно расширяет круг доступных для исследования задач (см., например, [4]).

Дальность зондирования в метровом диапазоне длин волн ограничиваются два основных фактора: ветровой снос звуковой волны, для которого, однако, известны различные способы компенсации [5], а также атмосферная турбулентность, искажающая фазовый фронт звуковой волны [1]. Тurbулентные искажения определяют предельную дальность РАЗ:

$$r_m \propto \Pi^{5/26}, \text{ где параметр}$$

$$\Pi = (\bar{P}_e w_a / \theta_e^2 \theta_a^2) \lambda_a^{2.4} \rho(r_m) / \rho(0) \quad (1)$$

характеризует потенциал установки РАЗ (при заданном уровне шумов приемника). Здесь \bar{P}_e - средняя мощность излучаемого радиосигнала, w_a - мощность звукового импульса, θ_e и θ_a - ширина диаграмм направленности (ДН), соответственно, радио- и акустической антенн, λ_a - длина звуковой волны. Дальность зондирования, превышающую высоту пограничного слоя, имеет к настоящему времени лишь одна установка, включающая в себя уникальный мощный МУ-радар (Япония) с полноповоротным узким лучом и сравнительно слабый ненаправленный акустический излучатель [3]. Выход за пределы пограничного слоя допускает также установка тропосферного РАЗ (ТРАЗ), рассматриваемая в настоящей работе. Возможность расширения такой установки с целью реализации РАЗ большой дальности на основе РЛС с умеренным потенциалом, но при наличии мощной направленной звуковой антенны рассмотрена в [2].

Ниже приведено описание действующего макета системы РАЗ в КВ радиодиапазоне. Эта установка позволяет проверить возможности сис-

темы РАЗ в диапазоне метровых волн, а также отработать необходимые для этого технические средства. При благоприятных ветровых условиях и достаточно низком уровне помех (от радиовещательных и связанных станций) дальность действия установки по определению температуры воздуха составляет $4 + 5$ км.

Установка выполнена по бистатической схеме и работает на частоте (радиоканала) $f_0 \approx 19$ МГц. Частота зондирующих звуковых импульсов задавалась в пределах $40 + 42,5$ Гц в зависимости от высоты зондирования. Передающая и приемная антенны радиоканала включали в себя по три синфазных горизонтальных диполя (диполи Надененко), разнесенных между собой на расстояние $\lambda_0/2$ и подвешенных на высоте 3 м ($\sim 0,2\lambda_0$) над поверхностью Земли. Ширина диаграммы направленности антенн $\approx 60^\circ$. Антенны разнесены между собой на расстояние $L \approx 120$ м. Для увеличения развязки между передающим и приемным трактами радиоканала применялось поочередное стробирование этих трактов. Период стробирования $T \approx 20 + 35$ мкс, длительность стробирующих (отпирающих) импульсов $\tau_1 \approx 4$ мкс, задержка стробимпульса приемника относительно стробимпульса передатчика $\tau_3 \approx 6+30$ мкс (устанавливалась в зависимости от высоты зондирования). Излучаемая мощность в импульсе $P_{0,1} \approx 1,0 + 1,2$ кВт, средняя излучаемая мощность $\bar{P}_0 \approx 200 + 300$ Вт.

Акустическая антенна системы РАЗ, расположенная примерно посередине между радиоантеннами, выполнена в виде синфазной решетки из 3×3 монопольных акустических излучателей. Каждый акустический излучатель состоит из резонатора Гельмгольца, настроенного на среднюю частоту акустического сигнала, и возбудителя акустических колебаний, находящегося в резонаторе* (см. рис. 1).

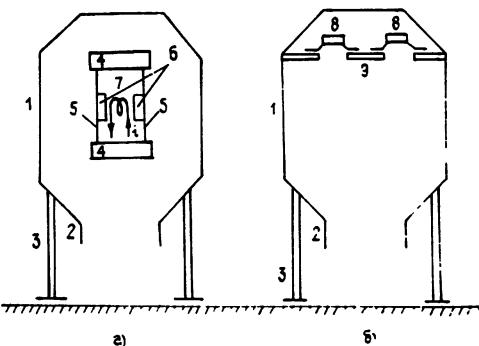


Рис. 1

Изменяя длину горловины с помощью специальной насадки, можно регулировать собственную частоту резонатора. Конструкции возбудителей различались. Центральный резонатор возбуждался симметричным электромагнитным резонансным возбудителем (см. [6] и рис. 1а). Этот возбудитель был выполнен в виде массивного стального цилиндрического корпуса (4) диаметром 1 м, закрытого с обоих торцов специальными мембранными (5), выточенными из дюралюминия. На мембранных (в центре) закреплены сердечники электромагнита (6), которые свободно входят в катушку возбуждения электромагнита (7), укрепленную внутри корпуса и механически не связанную с мембранными. При прохождении через катушку переменного тока, удвоенная частота которого совпадает с собственной частотой колебаний мембранных, амплитуда этих колебаний достигает максимума. При

*Использование резонаторов позволяет значительно увеличить кПД и отдаваемую мощность электроакустических преобразователей энергии (возбудителей акустических колебаний).

этом края мембранные остаются неподвижными, так как они закреплены на корпусе возбудителя. При токе возбуждения 12 А амплитуда смещения в центре каждой мембранные возбудителя, находящегося внутри резонатора, достигала 5 мм. Такая конструкция возбудителя позволяла излучать центральным резонатором акустический сигнал мощностью около 200 Вт при КПД ≈ 20%. Остальные резонаторы, расположенные по периметру квадратной решетки, возбуждались серийными динамическими головками (8) типа 75-ГДН-1Л-4, установленными на дне резонатора (9) (см. рис. 1б). В резонаторах, расположенных по углам квадратной решетки, было установлено по четыре головки, в остальных резонаторах - по восемь головок. Мощность акустического сигнала от каждого резонатора, возбуждаемого динамическими головками, составляла 25-35 Вт (в зависимости от числа головок в резонаторе), при КПД около 15%.

Использование резонаторов позволяет значительно увеличивать КПД и отдаваемую мощность электроакустических преобразователей энергии (возбудителей акустических колебаний).

Все резонаторы устанавливались на опорах (3) в положение "горлом вниз"; расстояние от выходного отверстия резонатора до поверхности земли составляло 0,5 + 0,7 м. Такое положение обеспечивало однолепестковую диаграмму направленности каждого отдельного резонатора с направлением максимального излучения вертикально вверх, а также защиту установленных в резонаторах возбудителей от атмосферных осадков.

Суммарная мощность излучаемого акустического сигнала от всех девяти резонаторов составляла около 450 Вт. Ширина диаграммы направленности, формируемая всей решеткой, была около 60°. Длительность излучаемых акустических импульсов составляла 0,5 + 1 с, период повторения 15 + 20 с.

Сигнал с приемной антенны поступал на вход первого (стробируемого) приемника, а непрерывный сигнал с задающего генератора тракта передатчика через аттенюатор поступал на вход второго приемника и в последующем использовался как опорный. В установке использовались связные приемники "Катран". Синтезаторы частоты гетеродинов обоих приемников, а также синтезатор частоты передатчика имели общий опорный кварцевый генератор. Оба приемника настраивались на частоту, формируемую синтезатором канала передатчика. Стробирование приемника импульсами длительностью 4 мкс осуществлялось в тракте первой промежуточной частоты (до фильтра первой промежуточной частоты), имеющем полосу пропускания не менее 2 МГц. За счет стробирования развязка между трактами приемника и передатчика увеличивалась с 80 дБ (без стробирования) до 120+130 дБ. Последующие узкополосные фильтры приемника выделяли одну (центральную) спектральную компоненту из линейчатого спектра периодической последовательности радиоимпульсов принимаемого сигнала, отраженного от звукового цуга.

После линейного преобразования частоты и фильтрации сигналы с обоих приемников (на частоте около 1,85 кГц) подавались на внешний синхронный детектор. Выходной сигнал синхронного детектора, в низкочастотной части спектра которого содержался полезный (доплеровский) сигнал, после фильтрации низкочастотным октавным фильтром (средняя частота фильтра 31,5 Гц) и режекторным фильтром, настроенным на частоту сети 50 Гц, подавался на анализатор спектра СК4-73. Частота этого сигнала (доплеровская частота) измерялась периодом (частотомер ЧЗ-64). Анализатор спектра и частотомер работали в режиме внешнего запуска импульсами, задержка которых относительно момента излучения акустических импульсов могла устанавливаться в необходимых пределах от 0,5 с до 15 с. Это позволяло однозначно сопоставлять измеряемую доплеровскую частоту с

высотой, на которой в момент измерения находился акустический импульс*.

Для уменьшения случайных ошибок измерения доплеровской частоты, вызванных шумами аппаратуры и возможными радиопомехами, для каждой фиксированной высоты производилась серия измерений по 10 - 30 звуковым посылкам и затем вычислялось среднее значение частоты. Это позволяло уменьшить случайную ошибку измерения доплеровской частоты до 0,05 Гц, т.е. относительная случайная ошибка составляла 10^{-3} , что соответствовало случайной ошибке измерения температуры воздуха не более $0,5^{\circ}\text{K}$.

Однако указанная точность измерения температуры может быть существенно снижена под влиянием систематических ошибок измерения скорости звука. Из-за неточного выполнения условия Брэгга измеряемая (разностная) частота отраженного сигнала может отличаться от доплеровской частоты [1, 7]. С целью уменьшения этой ошибки для каждой фиксированной высоты производилась подстройка частоты звука для выполнения условия Брэгга, что контролировалось по совпадению частоты звука с разностной частотой. Кроме того, при вычислении скорости звука на малых высотах ($0,5\text{--}2,5$ км) учитывалось конечное значение угла рассеяния φ .

Дополнительную ошибку в измерение температуры вносит отсутствие информации о ветре и влажности в зондирующем объеме. Однако в условиях хорошей погоды при устойчивой стратификации эти ошибки, по-видимому, не велики. Кроме того, при наличии поворотной диаграммы направленности либо передвижной акустической антенны метод РАЗ позволяет не только исключить влияние ветра на измерения температуры, но и измерить величину и направление самого ветра (см. [5]).

Остановимся теперь на пространственно-временном разрешении данной установки при определении высотного профиля температуры. Временное разрешение задавалось периодом накопления полезного сигнала, которое в проведенных экспериментах составляло несколько минут, что в условиях хорошей погоды вполне достаточно.

Значительно хуже обстоит дело с пространственным разрешением, которое определяется двумя факторами: конечной длительностью звуковой посылки и конечной шириной диаграммы направленности. Первый фактор ограничивает пространственное разрешение величиной $\Delta h \approx c_{ss} \tau_s \leq 300$ м, где τ_s - длительность звукового сигнала. Конечная ширина ДН приводит к тому, что центральная часть и периферия сферического звукового импульса оказываются на разных высотах. Это обстоятельство ограничивает высотное разрешение величиной $\Delta h = h[1 - \cos(\varphi/2)] \leq 200$ м. В результате принимаемый сигнал складывается из радиоволн, рассеянных в некотором слое, и мы измеряем величину температуры, усредненной по высоте этого слоя. Пространственные изменения температуры меньших масштабов сглаживаются, исказяя температурный профиль. Здесь следует отметить, что увеличение направленности используемых антенн позволит практически исключить второй фактор, влияющий на пространственное разрешение, а также увеличить предельную высоту зондирования.

На рис.2 приведен пример измеренного температурного профиля; здесь же отмечены данные, полученные с помощью метеорологических радиозондов на аэрологической станции, расположенной примерно в 20 км от установки РАЗ. Из приведенных на рис. 2 данных следует, что результаты, полученные методом РАЗ, хорошо отражают как общий ход, так и характерные особенности высотного хода температуры и, в частности,

*В процессе работы необходимо было изменять согласованным образом задержку стробирующих импульсов приемника и задержку импульсов запуска анализирующей аппаратуры.

наличие температурной инверсии. При благоприятных погодных условиях (отсутствие ветра, устойчивая стратификация) проводилось зондирование до высоты 4 - 5 км. В этих экспериментах отсутствовала компенсация ветрового сноса, поэтому даже при умеренном ветре высота зондирования значительно уменьшалась (ср.[1]).

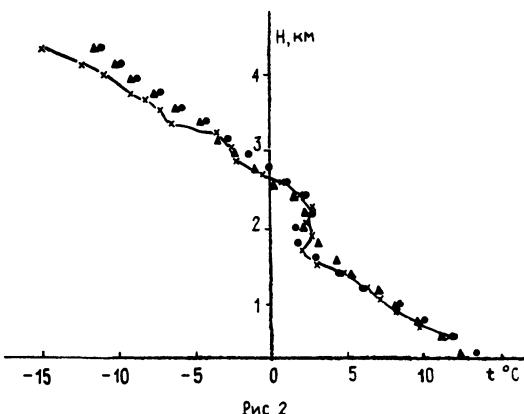


Рис 2

Увеличение предельной высоты зондирования методом РАЗ, связанное с переходом в КВ радиодиапазон, расширяет возможности исследования процессов в свободной атмосфере (вне атмосферного пограничного слоя). Однако эти возможности могут быть реализованы в полном объеме лишь при выполнении по крайней мере двух условий: во-первых, автоматизация и совершенствование методов обработки принимаемого отраженного радиосигнала, и, во-вторых, компенсация ветрового сноса, позволяющая значительно повысить надежность метода РАЗ.

Авторы выражают искреннюю признательность В. И. Балабанову за активное участие в технической реализации действующей установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каллистратова М. А., Кон А. И. Радиоакустическое зондирование атмосферы. - М.: Наука, 1985.
2. Зиничев В. А., Рапопорт В. О., Фабрикант А. Л. и др. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. №. 12. С. 76.
3. Matuura N., Masuda Y., Inuki H. at al. //Nature. 1986. V.323. P.426.
4. Плоткин В. В., Израилева Н. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 31. №. 5. С. 717.
5. Фабрикант А. Л. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. №. 10. С. 1160.
6. Алелеков И. В., Боголюбов Б. Н. и др. Тезисы докл. Всесоюзного симпозиума по лазерному и акустическому зондированию атмосферы. - Томск, 1988.
7. Гурвич А. С., Кон А. И., Татарский В. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. №. 4. С. 451.

THE RADIO-ACOUSTIC SOUNDING SYSTEM
IN THE SHORT WAVE RADIO FREQUENCY BAND

*V. A. Zinichev, V. O. Rapoport, V. Yu. Trakhtenherts,
A. L. Fabrikant, Yu. G. Fedoseev*

A description of the active radio-acoustic atmosphere sounding system is presented which allows us to measure the temperature profile up to the 4 km height. The method of the radio signal processing is considered for the received radio wave which is reflected from the acoustic wave. Various factors are discussed which determine the accuracy of the temperature profile measurement.

УДК 551.501.8

**РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕРМИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СТРАТОСФЕРЫ
СО СПУТНИКОВ НА ЛИНИЯХ ПОГЛОЩЕНИЯ O_2 В ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ 55-65 ГГц**

А. А. Власов, Е. Н. Кадыгров, А. Н. Шапошников

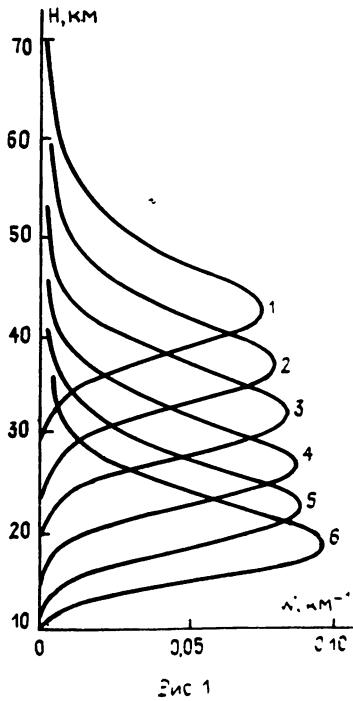
Рассматриваются методы повышения точности и высоты термического зондирования стратосферы с ИСЗ в миллиметровом диапазоне. Проведены расчеты весовых функций шестиканального СВЧ радиометра с учетом изменения коэффициента поглощения с частотой в пределах полосы пропускания каждого канала.

Задача оперативного определения температуры стратосферы в глобальных масштабах является актуальной при исследовании окружающей среды, особенно в связи с проблемой контроля озонового слоя Земли [1]. Для решения этой задачи весьма перспективно использовать спутниковые приборы миллиметрового диапазона радиоволн. Важное преимущество приборов этого диапазона - их высокое спектральное разрешение, позволяющее измерять формы линий поглощения различных атмосферных газов [2, 3].

В табл. 1 приведены

основные технические характеристики надирных спутниковых приборов США миллиметрового диапазона, начиная с первого прибора NEMS и кончая разрабатываемым в настоящее время 20-канальным прибором AMSU [4]. Видно, что совершенствование приборов велось по пути увеличения горизонтального разрешения за счет улучшения сканирующих устройств, повышения высоты зондирования за счет измерений в более узких полосах пропускания и увеличения числа измерительных каналов для учета влияния подстилающей поверхности, водяного пара и других мешающих факторов. Погрешности определения температуры атмосферы с помощью этих приборов составляют 1,5-2 К, вертикальное разрешение 8-10 км. Более высокого разрешения можно добиться путем использования лимбовых приборов миллиметрового диапазона [5].

Определение температуры атмосферы в миллиметровом диапазоне осуществляется с помощью обработки данных измерений собственного излучения молекулярного кислорода, имеющего множество линий поглощения в полосе частот 50-70 ГГц (рис. 1) и одну изолированную линию на частоте 118 ГГц [6]. Из уравнения переноса микроволнового излучения в атмосфере следует, что при зондировании со



спутника в надир яркостная температура записывается в виде [7]

$$T_{\text{Я}} = \int_0^{\infty} T(h) \gamma(h) \exp \left[- \int_h^{\infty} \gamma(z) dz \right] dh + (1-R) T_{\Pi} \exp(-\tau_0) + \\ + R \exp(-\tau_0) \int_0^{\infty} T(h) \gamma(h) \exp \left[- \int_0^h \gamma(z) dz \right] dh, \quad (1)$$

где $\tau_0 = \int_0^{\infty} \gamma(z) dz$ - оптическая толщина атмосферы, $T(h)$ -

вертикальный профиль температуры атмосферы, $\gamma(h)$ - коэффициент поглощения кислорода, T_{Π} , R - температура и энергетический коэффициент отражения подстилающей поверхности, h - высота.

Таблица 1
Основные характеристики спутниковых надирных радиометров
для определения температуры атмосферы

Характеристики	Наименование прибора				
	NEMS	SCAMS	MSU	SSM/T	AMSU
1. Общее число каналов	5	5	4	7	20
2. Число каналов зондирования	3	3	4	7	12
3. Диапазон рабочих частот температурного зондирования, ГГц	53,65-58,8	52,85-55,45	50,31-55,45	50,5-59,4	50,3-58
4. Ширина полосы пропускания, МГц	100	100	200	15-400	3-400
5. Приведенная чувствительность, К·с ^{-1/2}	0,2-0,5	0,2-0,5	0,25	0,4-0,6	0,25-1,2
6. Ширина ДН антены, град.	10	10	7,5	11	3,3
7. Диапазон сканирования, град.	-	40	47,35	36	40
8. Высотный диапазон измерений температуры, км	0-20	0-20	0-25	0-30	0-42
9. Название спутниковой серии	Nimbus-5	Nimbus-6	NOAA-6	DMSP Блок-5Д	ATN
10. Год запуска	1972	1975	1979	1979	1991

В диапазоне частот 55-65 ГГц, который используется для термического зондирования стратосферы, оптическая толщина настолько велика, что вторым и третьим слагаемыми в формуле (1) можно пренебречь и упростить ее:

$$T_{\text{Я}}(f) = \int_0^{\infty} T(h) \tilde{W}(f, h) dh, \quad (2)$$

где $\tilde{W}(f, h) = \gamma(f, h) \exp \left[- \int_h^{\infty} \gamma(f, z) dz \right]$ - весовая функция, которая

определяет вклад каждого высотного слоя атмосферы в яркостную температуру на частоте f . Так как удельная концентрация O_2 в атмосфере известна, то по измерениям яркостной температуры на разных частотах можно определить высотный профиль температуры из интегрального уравнения (1). В отличие от идеального монохроматического приемника с весовой функцией $\tilde{W}(f, h)$ весовую функцию канала реального радиометра следует вычислять с учетом

изменения коэффициента поглощения с частотой внутри полосы пропускания Δf_K канала по формуле

$$W(f_K, h) = \frac{1}{\Delta f_K} \int_{f_K - \Delta f_K/2}^{f_K + \Delta f_K/2} \tilde{W}(f, h) df. \quad (3)$$

Проблема аккуратного интегрирования сигнала по частоте в пределах полосы пропускания обсуждалась в [8], где для случая наземных наблюдений сравнивались значения яркостной температуры, рассчитанные для идеального и реального приемников. В наших вычислениях для случая наблюдений с ИСЗ диапазон высот от нуля до 80 км разбивался на 160 слоев, а полоса пропускания - на 10 интервалов. Было показано, что такая степень дискретизации вполне достаточна, чтобы замена интегрирования суммированием не внесла ошибок определения яркостной температуры, превышающих 0,2-0,3 К. Для иллюстрации степени изменения γ внутри полосы в табл. 2 приведены значения коэффициента поглощения в центре и на краях полос пропускания каналов 1, 6.

Таблица 2

Значения коэффициента поглощения O_2 в центре и на краях полос пропускания каналов 1 и 6 (резонансная частота 57612,5 МГц)

H, км	T, К	Коэффициент поглощения Нп/км					
		$f_1 - \Delta f_1/2$	f_1	$f_1 + \Delta f_1/2$	$f_6 - \Delta f_6/2$	f_6	$f_6 + \Delta f_6/2$
15	221	0,859	0,859	0,858	0,626	0,559	0,513
20	219	0,666	0,665	0,663	0,176	0,132	0,110
25	222	0,622	0,618	0,612	0,043	0,030	0,025
30	229	0,584	0,561	0,536	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
35	237	0,494	0,429	0,364	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$9,8 \cdot 10^{-4}$
40	252	0,290	0,196	0,136	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
45	262	0,098	0,053	0,033	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
50	264	0,025	0,012	0,007	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$9,2 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$

Погрешность измерения значений T_y зависит от чувствительности радиометра, точности его калибровки, влияния боковых лепестков диаграммы направленности антенны [9] и не превышает 1-2 К [7]. Большой вклад в ошибку определения температуры вносит неточность задания γ . Существует ряд методов расчета коэффициента поглощения O_2 : Жевакина - Наумова [10], Ван Флека - Вейскопфа [11], Розенкранца [12], Лама [13]. Результаты расчетов по трем первым моделям сопоставляются в [6,7]. Сравнение результатов расчетов по двум последним моделям, проведенное нами в [14], показало, что для частот 57-63 ГГц среднее расхождение между моделями составляет всего лишь 2-3% и приводит к отличию значений яркостной температуры 1-1,5 К. Поэтому при восстановлении профиля температуры стратосферы лучше применять простую модель [12], которая более удобна для вычислений на ЭВМ, чем сложная модель [13].

Таблица 3

Сравнение измеренной формы линии 9^+ с расчетной
(резонансная частота 61150,6 МГц)

N п/п	Отстройка от резонансной частоты, МГц	Измеренное значение $\gamma_{\text{Э}}$, Нп/км	Расчетное значение γ_p , Нп/км	Отклонение, %
1	-0,32	2,17	2,12	2,3
2	-0,58	1,54	1,52	1,3
3	-0,84	1,09	1,05	3,7
4	-1,10	0,77	0,75	2,6
5	-1,36	0,55	0,54	1,8
6	-1,86	0,342	0,315	4,5
7	-2,40	0,223	0,203	9,0
8	-3,05	0,144	0,129	10,4

Для экспериментальной проверки теоретических расчетов были проведены измерения коэффициента поглощения O_2 на спектрометрической установке [15]. В табл. 3 приведены значения коэффициента поглощения $\gamma_{\text{Э}}$ для низкочастотного крыла линии 9^+ , измеренные при $T = 295$ К и $P = 0,45$ мм рт. ст. [16]. Здесь же указаны значения γ_p , рассчитанные по методу Розенкранца при тех же условиях. Видно, что отличие между ними равно 2-3% вблизи от резонансной частоты и достигает 10% вдали от нее.

Другой важной проблемой является повышение высоты термического зондирования до верхних границ стратосферы. В работе [7] ошибочно указывается, что этого можно добиться простым увеличением частоты от края полосы поглощения O_2 (53-54 ГГц) до ее центра (60 ГГц). В действительности это позволяет поднять потолок зондирования лишь до 27-28 км. Дальнейшее увеличение высоты возможно за счет работы СВЧ радиометра в узких полосах вблизи резонансных частот поглощения O_2 . Только в этом случае будут выполняться условия, при которых сильное излучение нижних слоев атмосферы подавляется вышележащими слоями и, следовательно, основной вклад в яркостную температуру вносит излучение слоев стратосферы на высотах 20-40 км. При этом весовая функция $w(f_k, h)$ каждого канала радиометра имеет максимум, высота которого тем больше, чем ближе рабочая частота канала f_k к резонансной частоте f_p (рис. 1). Значения отклонений частоты $|f_k - f_p|$ и высот максимумов h_m для разных каналов приведены в табл. 4, откуда видно, что наибольшей высотой зондирования $h_m = 41$ км обладает канал 1 с $f_k - f_p = 5$ МГц.

На рис. 2 показаны зависимости ширины Δh весовой функции от полосы пропускания Δf_k для различных отклонений $f_k - f_p$ ($f_p = 57612,5$ МГц).

Видно, что ширина Δh возрастает с увеличением полосы Δf_k и тем быстрее, чем ближе частота f_k к f_p . Например, для $f_k - f_p = 5$ МГц ширина, равная 12 км при $\Delta f_k = 3$ МГц, увеличивается до 20 км при $\Delta f_k = 22$ МГц. Следовательно, для того, чтобы ширина Δh (а значит, и

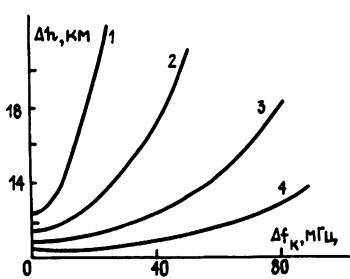


Рис. 2.

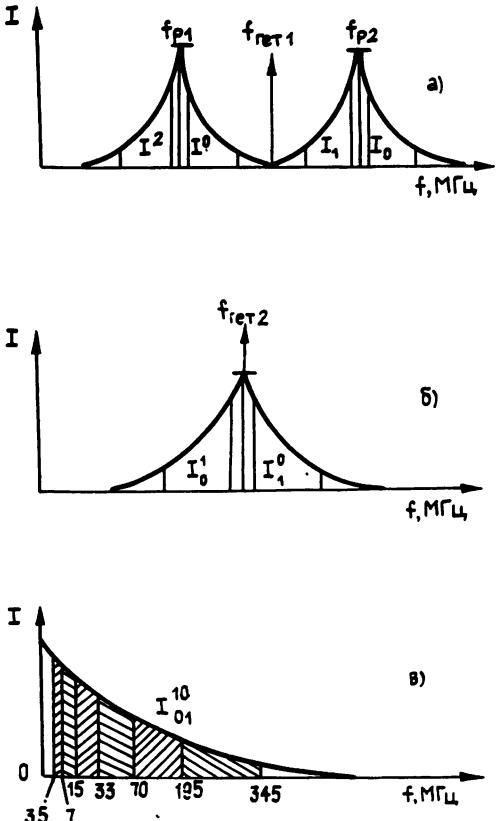


Рис 3

из линий. Символы $I^1, I^0, I_1, I_0, I_0^1, I_0^0, I_1^{10}, I_{01}^{10}$, на рис. 3 поясняют процесс свертки линий при двойном преобразовании частоты. В связи с описанным способом четырехполосного приема возникает проблема выбора оптимальной пары спектральных линий из двадцати линий поглощения O_2 в диапазоне 55–65 ГГц. В табл. 4 приведены параметры шестикального СВЧ радиометра с двойным преобразованием частоты, предназначенного для термического зондирования стратосферы со спутника [17–19].

Параметры СВЧ радиометра

Таблица 4

Номер канала	$f_k - f_p$ МГц	$\Delta f_k'$ МГц	h_m , км	Δh , км	$\Delta T, K \cdot c^{-1/2}$	$T_{я.c} K$
1	5	3	41	12	0,8	235
2	11	8	36	11	0,5	219
3	24	18	31	10,2	0,35	203
4	53	40	26	9,6	0,25	190
5	110	80	21	9,2	0,15	184
6	220	100	18	8,6	0,13	182

вертикальное разрешение) была примерно одинакова (~10 км) для всех каналов, необходимо резко (по экспоненте) ограничивать полосу пропускания при увеличении высоты термического зондирования. В свою очередь, такое сужение приводит к сильному ухудшению чувствительности ΔT тех каналов, у которых высота зондирования больше 30 км. Чтобы их чувствительность была лучше $1 K \cdot c^{1/2}$, следует одновременно измерять излучение на двух частотах, которые симметрично расположены относительно каждой из резонансных частот f_{p1}, f_{p2} двух линий O_2 , обладающих приблизительно одинаковыми характеристиками – интенсивностью I и формой склонов (рис. 3). Такой способ измерения, позволяющий улучшить чувствительность примерно в два раза, реализуется с помощью двойного преобразования частоты, при котором частота первого гетеродина f_{het1} равна полусумме резонансных частот $(f_{p1} + f_{p2})/2$ (рис. 3а), а частота второго гетеродина f_{het2} – их полуразности $(f_{p2} - f_{p1})/2$ (рис. 3б). На рис. 3в показано взаимное расположение полос пропускания всех каналов на правом склоне одной

Здесь $T_{я.c}$ - средняя яркостная температура слоя атмосферы толщиной Δh на высоте h . Такой радиометр должен обладать высокими техническими характеристиками, например, стабильность частоты первого гетеродина, равная 10^{-5} (точность 0,6 МГц для частоты 60000 МГц), должна сохраняться на этом уровне длительное время (1-2 года) в условиях функционирования на борту спутника.

Из вышесказанного следует, что для увеличения высоты термического зондирования до 60-70 км потребуется создать СВЧ радиометр с узкой полосой пропускания (~ 0,1 МГц), высокой чувствительностью (~ 0,1 К·с^{-1/2}) и очень хорошей стабильностью гетеродина (~ 10⁻⁶). Но главное заключается в другом - проблему термического зондирования придется рассматривать в принципиально новом радиофизическом аспекте: на высотах, больших 50 км, необходимо учитывать влияние эффекта Зеемана, которое в нижних слоях атмосферы было замаскировано уширением за счет столкновений молекул. Этот эффект в магнитном поле Земли приводит к расщеплению спектральных линий O₂ на компоненты, расстояние между которыми зависит от напряженности магнитного поля, а интенсивность поглощения - от угла наблюдения и поляризации излучения [20, 21].

Для проверки правильности выбора параметров спутникового СВЧ радиометра были проведены его испытания на аэростате в 1989 году [22, 23]. Аэростатный эксперимент подтвердил возможность дистанционного определения температуры стратосферы с помощью СВЧ радиометра.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

- 1) Весовые функции каналов СВЧ радиометра следует вычислять с учетом изменения коэффициента поглощения с частотой в пределах полосы пропускания каждого канала.
- 2) Для увеличения высоты термического зондирования до 50 км СВЧ радиометр должен измерять излучение в узких полосах на частотах, близких к резонансным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадыгров Е. Н. //Тезисы докл. Всесоюзной конференции по атмосферному озону. - Сузdalь, 1988. С. 39.
2. Кондратьев К. Я., Тимофеев Ю. М. Термическое зондирование атмосферы со спутников. - Л.: Гидрометеоиздат, 1970. - 410 с.
3. Кадыгров Е. Н., Кокин Г. А., Потапов А. А. //Зарубежная радиоэлектроника. 1989. N 10. С. 52.
4. Staelin D.H.//Report WMO/TD N 180. Columbia. 1987. Ap. B.
5. Reber C.A. Upper Atmosphere Research Satellite (UARS) Mission. - Goddard Space Flight Center. 1985. Р 67.
6. Наумов А. П. //Труды I Всесоюзной школы-симпозиума по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. - М.: ИРЭ АН СССР, 1983. С. 21.
7. Жевакин С. А. //Труды I Всесоюзной школы семинара по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. - М.: ИРЭ АН СССР, 1983. С. 261.
8. Ершов А. Т., Наумов А. П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. N 11. С. 1610.
9. Власов А. А., Плющев В. А. //Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. N 11. С. 2433.
10. Жевакин С. А., Наумов А. П. //Радиотехника и электроника. 1965. Т. 10. N 6. С. 987
11. Van Vleck J.H., Weisskopf V.F.//Rev.Mod. Phys. 1945. V. 17. N 4. P. 227.

12. Rosenkranz P.W.//IEEE Trans. 1975. V. AP-23. N 4. P. 498.
13. Lam K.S.//J. Quant. Spectr. Rad. Transfer. 1977. V. 17. N 3. P. 351.
14. Власов А. А., Кадыгров Е. Н., Шапошников А. Н. //Исследование Земли из космоса. 1990. N 1. С. 36.
15. Власов А. А., Кадыгров Е. Н., Куклин Е. А. и др. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 4. С. 368.
16. Власов А. А., Глызин В. В., Кадыгров Е. Н., Куклин Е. А. //Изв. АН СССР. Сер. ФАO. 1990. Т. 26. N 7. С. 730.
17. Кадыгров Е. Н., Шапошников А. Н. //Тезисы докл. II Всесоюзной школы-симпозиума по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. - Фрунзе: Илим, 1986. С. 142.
18. Кадыгров Е. Н., Власов А. А., Троицкий А. В. и др. //Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОВР. 1990. N 2. С. 28.
19. Власов А. А., Кадыгров Е. Н., Косов А. С. и др. //Исследование Земли из космоса. 1990. N 5. С. 11.
20. Stogryn A.//IEEE Trans. Geosc. Rem. Sens. 1989. V. GE-27. N 3. P. 332.
21. Rosenkranz P.W., Staelin D.H.//Radio Sci. 1988. V.23. N 5. P. 721.
22. Vlasov A.A., Kadygov E.N.//Space Research 28 Abstr. 1990. P. 133.
23. Власов А. А., Кадыгров Е. Н. //ДАН СССР. 1990. Т. 313. N 4. С. 831.

Центральная аэрологическая
обсерватория

Поступила в редакцию
19 октября 1989 г.

RADIOPHYSICAL ASPECTS OF THERMAL SOUNDING THE STRATOSPHERE
FROM SATELLITES ON THE O₂ ABSORPTION LINES
IN THE FREQUENCY RANGE 55-65 GHz

A. A. Vlasov, E. N. Kadygov, A. N. Shaposhnikov

The methods of increasing thermal sounding height are considered for satellite microwave radiometer operating at millimeter wavelengths. Calculations of weighting functions are made of six channel radiometer with account of limited channel bands.

УДК 535.8:535.214.4

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РАДИОМЕТРА С ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИЕЙ ВХОДНОГО СИГНАЛА

В. И. Антофеев, А. С. Султанов

На основе представления входного сигнала в частотной области с помощью теории оценок параметров сигналов решена задача синтеза радиометра, оптимального в смысле максимума апостериорной плотности вероятности при наличии гауссовых флуктуаций коэффициента усиления высокочастотного тракта. В результате синтеза получен радиометр, который при определенных условиях обладает такими же свойствами, что и оптимальный модуляционный радиометр, но вместо модулятора имеет на входе фильтр с неравномерной в пределах полосы пропускания амплитудно-частотной характеристикой.

В статье [1] решена задача синтеза оптимального радиометра с частично заданной структурой и нестабильным коэффициентом усиления. При синтезе предполагалось, что в заданной части радиометра осуществляется предварительная обработка полезного и эталонного сигналов путем временной модуляции их интенсивности.

В данном случае модуляция может рассматриваться как операция "подкрашивания" полезного и эталонного сигналов, необходимая для выделения сигналов на фоне внутреннего "белого" шума приемника.

Однако модуляция не является единственным возможным способом изменения структуры сигнала. В частности, эту задачу можно также решить путем пропускания сигнала через фильтр с неравномерной в пределах ширины спектра сигнала амплитудно-частотной характеристикой. При этом осуществляется как бы "модуляция" спектральной плотности сигнала в частотной области. Соответственно может быть поставлена задача синтеза оптимального радиометра с фильтром на входе вместо модулятора. Решению данной задачи в частотной области методами теории оценок параметров сигналов посвящена предлагаемая статья.

Постановка задачи. Пусть заданная часть радиометра содержит (рис. 1) источник полезного и эталонного шумовых сигналов с эквивалентными температурами T_A и T_3 , фильтры, сумматор и усилитель высокой частоты (УВЧ) с частотной характеристикой

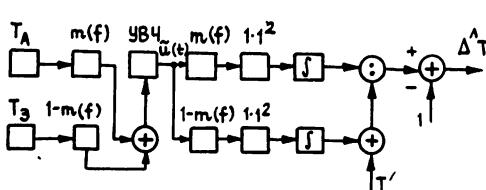


Рис 1

$$|H(f)|^2 =$$

$$= \begin{cases} 1, & |f \pm f_0| \leq \Delta f/2 \\ 0, & |f \pm f_0| > \Delta f/2 \end{cases}$$

Чтобы получить выражение для входного сигнала в частотной области, воспользуемся аналогией с модуляционным радиометром. Согласно [1], сигнал на входе УВЧ последнего можно представить в виде

$$\hat{u}(t) = \sqrt{m(t)} \hat{v}(t) + \sqrt{1 - m(t)} \hat{w}(t) + \hat{n}(t), \quad t \in [-\tau/2, \tau/2], \quad (1)$$

где $\hat{v}(t)$, $\hat{w}(t)$, $\hat{n}(t)$ – напряжения полезного, эталонного сигналов и приведенного ко входу собственного шума УВЧ соответственно, $[-\tau/2, \tau/2]$ – интервал времени усреднения, $m(t)$ – модулирующая функция, которую для простоты будем считать четной и удовлетворяющей условию $0 \leq m(t) \leq 1$.

Процессы $\hat{v}(t)$, $\hat{w}(t)$, $\hat{n}(t)$ являются статистически независимыми стационарными гауссовыми процессами типа белого шума с двусторонними спектральными плотностями $S_v(f) = kT_A/2$, $S_w(f) = kT_E/2$, $S_n(f) = kT_{III}/2$ (T_{III} – шумовая температура УВЧ, k – постоянная Больцмана).

Тогда сигнал на входе УВЧ рассматриваемого приемника можно записать следующим образом:

$$\hat{u}(t) = (h * \hat{v})(t) + (q * \hat{w})(t) + \hat{n}(t).$$

Это выражение отличается от (1) тем, что операции модуляции (умножения на функции $m(t)$ и $1 - m(t)$ в выражении (1)) заменены операциями фильтрации (свертки $h * \hat{v}$ и $q * \hat{w}$ с импульсными переходными характеристиками $h(t) = F[\sqrt{m(f)}]$ и $q(t) = F[\sqrt{1 - m(f)}]$, где F – экспоненциальное преобразование Фурье, а $m(f)$ – частотный аналог модулирующей функции $m(t)$).

Переходя к нормированным напряжениям $u(t) = \hat{u}(t) k^{-1/2}$, $v(t) = \hat{v}(t) (kT_A)^{-1/2}$, $w(t) = \hat{w}(t) (kT_E)^{-1/2}$, $n(t) = \hat{n}(t) (kT_{III})^{-1/2}$, для огибающей выходного сигнала УВЧ получим

$$\tilde{u}(t) = \sqrt{1 + g} [\sqrt{T_A} (h * \tilde{v})(t) + \sqrt{T_E} (q * \tilde{w})(t) + \sqrt{T_{III}} \tilde{n}(t)]. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{u}(t) = u_c(t) - iu_s(t)$ – комплексная огибающая полосового вещественного процесса $u(t)$, который допускает представление [2], $u(t) = \sqrt{2} [u_c \cos 2\pi f_0 t + u_s(t) \sin 2\pi f_0 t] = \sqrt{2} \operatorname{Re} [\tilde{u}(t) \exp(i2\pi f_0 t)]$, а спектральные плотности огибающих $\tilde{v}(t)$, $\tilde{w}(t)$, $\tilde{n}(t)$ определяются выражениями

$$\tilde{S}_{\tilde{v}}(f) = \tilde{S}_{\tilde{w}}(f) = \tilde{S}_{\tilde{n}}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \Delta f/2 \\ 0, & |f| > \Delta f/2 \end{cases}.$$

В формуле (2) g – гауссова случайная величина с дисперсией σ^2 , учитывающая квазистатистические относительные флуктуации коэффициента усиления высокочастотного тракта.

Из свойства преобразования Фурье $F^2[f(t)] = f(-t)$ [3] следует, что спектр $H = F[h]$ функции $h = F[\sqrt{m}]$ можно записать в виде $H(f) = \sqrt{m(-f)} = \sqrt{m(f)}$. Тогда спектр огибающей (2) можно представить как

$$\tilde{U}(f) = \sqrt{1 + g} [\sqrt{m(f)} T_A \tilde{V}(f) + \sqrt{[1 - m(f)]} T_E \tilde{W}(f) + \sqrt{T_{III}} \tilde{N}(f)]. \quad (3)$$

Функции $\tilde{U}(f)$, $\tilde{V}(f)$, $\tilde{W}(f)$, $\tilde{N}(f)$ являются комплексными гауссовыми стационарными процессами, поскольку получены преобразованием Фурье от функций $\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{w}(t)$, $\tilde{n}(t)$, которое линейно и не нарушает свойства нормальности.

Дисперсия случайной комплексной функции (3) определяется выражением

$$\langle |\tilde{U}(f)|^2 \rangle = \tau(1 + g)[m(f)\Delta T + T],$$

где $\Delta T = T_A - T_\Theta$, $T = T_A + T_\Theta$.

В терминах теории оценок параметров сигналов [4] задача синтеза оптимального в смысле максимума апостериорной плотности вероятности радиометра формулируется следующим образом: требуется найти оценку ΔT сигнала $[m(f)T_A]^{1/2} \tilde{V}(f) + \{[1 - m(f)]T_\Theta\}^{1/2} \tilde{W}(f)$, наблюдаемого на фоне шума $\tilde{N}(f)$ при наличии мешающего мультиплекативного параметра g , причем оценка ΔT должна доставить максимум апостериорной плотности вероятности параметра ΔT . В соответствии с принципом адаптации [5] оценка ΔT должна находиться совместно с оценкой параметра g .

Используя обратную теорему Котельникова, по аналогии с работой [1] для логарифма апостериорной плотности вероятности параметров ΔT , g можно получить выражение

$$\ln w(\Delta T, g | \tilde{U}) = -n \ln \pi \tau - \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{g^2}{2\sigma^2} - \Delta f \tau \ln (1 + g) -$$

$$- \tau \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} \left\{ \ln[m(f)\Delta T + T] + \frac{|\tilde{U}(f)|^2}{\tau(1 + g)[m(f)\Delta T + T]} \right\} df. \quad (4)$$

Оценка потенциальной чувствительности. Построим информационную матрицу оцениваемых параметров ΔT , g :

$$I = \frac{\Delta f \tau}{T^2} \begin{bmatrix} \langle M^2 \rangle & \frac{T \langle M \rangle}{1 + g} \\ \frac{T \langle M \rangle}{1 + g} & \frac{T^2}{(1+g)^2 Q} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $M(f) = m(f)/[1 + \beta m(f)]$, $\beta = \Delta T/T$ – отношение сигнал/шум на входе приемника, $Q = [1 + (1 + g)^2/(\sigma^2 \Delta f \tau)]^{-1}$,

$$\langle M \rangle = \frac{1}{\Delta f} \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} M(f) df, \quad \langle M^2 \rangle = \frac{1}{\Delta f} \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} M^2(f) df.$$

Матрица (5) формально получается из информационной матрицы работы [1] заменой $t \rightarrow f$, $\tau \rightarrow \Delta f$, $\Delta f \rightarrow \tau$ и терминов "модулятор" – "фильтр", "модулирующая функция" – "частотная характеристика фильтра". Следовательно, все выводы относительно чувствительности модуляционного радиометра остаются справедливыми и для рассматриваемого приемника. В частности, оптимальным является фильтр с гребенчатой частотной характеристикой

$$\hat{m}(f) = \sum_{i=-N}^N a(f - iF_p), \quad (6)$$

$$a(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq F_s/2 \\ 0, & |f| > F_s/2 \end{cases}, \quad N = \frac{1}{2} (\Delta f/F_p - 1),$$

причем $F_s = \hat{\eta} F_p$,

$$\hat{\eta} = \begin{cases} 1, & 0 \leq Q \leq 1/2 \\ 1/(2Q), & 1/2 < Q < 1 \end{cases}, \quad (7)$$

а соответствующая предельная чувствительность определяется выражением

$$\delta T = T(\Delta f \tau)^{-1/2} (1 + \beta) \begin{cases} (1 - Q)^{-1/2}, & 0 \leq Q \leq 1/2 \\ 2Q^{1/2}, & 1/2 < Q < 1 \end{cases}.$$

В случае произвольных частотных характеристик фильтра при $\beta \ll 1$ формула для чувствительности имеет вид

$$\delta T \approx T[\Delta f \tau (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2)]^{-1/2}. \quad (8)$$

Синтез оптимальной структуры. Необходимое условие того, что оценки $\hat{\Delta}T$, \hat{g} доставляют максимум апостериорной плотности вероятности, состоит в том, что эти оценки должны являться решениями системы уравнений, полученной приравниванием нулю частных производных от выражения (4) по ΔT , g :

$$\int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} \frac{m(f)}{m(f)\hat{\Delta}T + T} \left\{ 1 - \frac{|\tilde{U}(f)|^2}{\tau(1 + \hat{g})[m(f)\hat{\Delta}T + T]} \right\} df = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\hat{g}}{\sigma^2 \Delta f \tau} + \frac{1}{1 + \hat{g}} - \frac{1}{\Delta f \tau (1 + \hat{g})^2} \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} \frac{|\tilde{U}(f)|^2 df}{m(f)\hat{\Delta}T + T} = 0.$$

Для фильтров с гребенчатыми частотными характеристиками вида (6), заменяя в выражении (13) работы [1] q на η^{-1} , получим

$$\hat{\Delta}T = T \left\{ \frac{(1 - \eta Q)A}{\eta[BQ + T(1 - Q)]} - 1 \right\}, \quad (10)$$

где

$$A = \frac{1}{\Delta f \tau} \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} m(f) |\tilde{U}(f)|^2 df, \quad B = \frac{1}{\Delta f \tau} \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} [1 - m(f)] |\tilde{U}(f)|^2 df.$$

Подставив в уравнение (10) оптимальное значение $\hat{\eta}$ параметра η , определяемое формулой (7), найдем

$$\Delta T = \begin{cases} A - T, & 0 \leq Q \leq 1/2 \\ T \left(\frac{A}{B + T'} - 1 \right), & 1/2 < Q < 1 \end{cases}, \quad (11)$$

где

$$T' = T(1 - Q)/Q.$$

Структуру, описываемую уравнением (11), трудно реализовать на практике. Удобно применить к интегралам A , B равенство Парсеваля:

$$\int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} |\tilde{U}(f)|^2 df = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |\tilde{U}(t)|^2 dt.$$

Тогда

$$A = \frac{1}{\Delta f \tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |(h * \tilde{u})(t)|^2 dt, \quad B = \frac{1}{\Delta f \tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |(q * \tilde{u})(t)|^2 dt.$$

В случае $Q \in [0, 1/2]$

$$\hat{\eta} = 1, \quad m(t) = 1, \quad h(t) = \delta(t)$$

и первое уравнение (11) описывает структуру компенсационного радиометра, а структура приемника при $Q \in (1/2, 1)$ приведена на рис. 1.

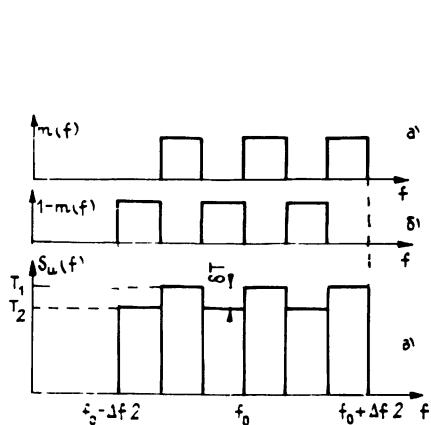


Рис 2

Для иллюстрации работы радиометра рассмотрим случай $Q = 1$. На рис. 2а, б приведены частотные характеристики $m(f)$ и $1-m(f)$ фильтров сигнального и опорного каналов для $N = 1$, а на рис. 2в - спектральная плотность мощности сигнала на выходе УВЧ. Здесь $T_1 = (1 + g)(T_A + T_{\text{III}})$, $T_2 = (1 + g)(T_{\text{Э}} + T_{\text{III}})$, $\delta T = (1 + g) \times (T_A - T_{\text{III}})$.

Постоянные составляющие сигналов на выходах квадраторов имеют вид $u_1 = 1/2(1 + g)(T_A + T_{\text{III}})$, $u_2 = 1/2(1 + g)(T_{\text{Э}} + T_{\text{III}})$. В соответствии с алгоритмом обработки выходной сигнал радиометра определяется выражением $u_{\text{вых}} = (T_{\text{Э}} + T_{\text{III}})(u_1/u_2 - 1) = \Delta T$.

В случае $\Delta T \ll T$ можно пренебречь модулирующим воздействием флуктуаций коэффициента усиления на полезный и эзатлонный сигналы по сравнению с их влиянием на собственный шум УВЧ и получить следующее решение системы уравнений (9) для произвольной частотной характеристики:

$$\Delta T = K_2(K_1 A - B - T'),$$

где

$$K_1 = \frac{1}{\langle m \rangle Q} - 1, \quad K_2 = \frac{\langle m \rangle}{\langle m^2 \rangle - Q \langle m \rangle^2}.$$

В частном случае $Q = 1$ и оптимального гребенчатого фильтра, для которого $\langle m \rangle = 0,5$, $\langle m^2 \rangle = 0,5$, будем иметь $\Delta T = 2(A - B)$.

Таким образом, алгоритм обработки сигналов основан на вычислении разности мощностей сигнального и опорного каналов, а рассуждения, относящиеся к рис. 2, справедливы для рассматриваемой схемы при $T_1 = T_A + (1 + g)T_{III}$, $T_2 = T_3 + (1 + g)T_{III}$, $\delta T = \Delta T$ и замене операции деления операцией вычитания.

Наиболее просто технически реализуются фильтры с частотными характеристиками $m(f) = \cos^2(\pi Nf/\Delta f)$, $1 - m(f) = \sin^2(\pi Nf/\Delta f)$, выполненные на основе симметричного делителя мощности, линии задержки на время $\Delta t = N/\Delta f$ и суммирующего или вычитающего устройства. Для такого фильтра $\langle m \rangle = 1/2$, $\langle m^2 \rangle = 3/8$, $K_2 = 4/(3-2Q)$, $K_1 = 2/Q - 1$ и, в соответствии с выражением (8), $\delta T = 2\sqrt{2} T[\Delta f \tau(3 - 2Q)]^{-1/2}$.

В случае $Q = 1$, соответствующем отсутствию информации о флуктуациях коэффициента усиления, получаем структуру оптимального в смысле максимума правдоподобия радиометра, для которого $K_2 = 4$, $K_1 = 1$, а чувствительность $\delta T = 2\sqrt{2} T(\Delta f \tau)^{-1/2}$ совпадает с чувствительностью модуляционного радиометра с синусоидальной модулирующей функцией [6].

Таким образом, при сохранении основных параметров T , Δf , τ чувствительность оптимальных модуляционного и синтезированного приемников одинакова, а структуры отличаются заменой операций модуляции и синхронного детектирования (умножения на функции $m(t)$ и $1 - m(t)$) операциями фильтрации с частотными характеристиками $m(f)$ и $1 - m(f)$.

Полученный результат открывает возможность создания радиометров, которые в соответствии с принципом работы могут быть названы компенсационно-фильтровыми радиометрами (КФР). Кроме чисто конструктивных отличий от радиометров других типов КФР обладают и качественно новыми свойствами. В частности, наличие частотно-селективного элемента на входе позволяет осуществить подавление сосредоточенной по спектру помехи на фиксированных частотах. Если этот фильтр сделать перестраиваемым и синхронно с ним перестраивать соответствующий фильтр в канале обработки, появляется возможность создания радиометра с автоматической компенсацией узкополосной помехи в пределах рабочей полосы частот радиометра. Важным является то обстоятельство, что флуктуационная чувствительность радиометра при этом не изменяется и остается равной предельной чувствительности оптимального радиометра с флюктуирующим коэффициентом усиления.

Следует отметить, что использованный подход к синтезу оптимального радиометра может быть обоснован также с позиций теории частотно-временной дуальности [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Антофеев В. И., Султанов А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 2. С. 142.
2. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. - М.: Сов. радио, 1977. Т. 3.
3. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций

- с приложениями в технике. - М.: Мир, 1978.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. - М.: Сов. радио, 1978.
5. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема. - М.: Сов. радио, 1973.
6. Башаринов А. Е., Гурвич А. С., Егоров А. Т. Радиоизлучение Земли как планеты. - М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию
12 июня 1989 г.

THE SYNTHESIS OF FREQUENCY FILTRATED INPUT
SIGNAL OPTIMAL RADIOMETER

V. I. Antyufeev, A. S. Sultanov

The problem of optimal, with relation to the posterior probability density maximum with gaussian fluctuations of r.f. circuit gain, radiometer structure synthesis has been solved on the basis of signal parameter estimations and frequency domain representation of input signal. As a result we have a radiometer which, under certain conditions, displays the same properties as the optimal modulation radiometer does, but it has input bandpass filter with non-uniform amplitude frequency response instead of the modulator.

УДК 538.574:538.951

**БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ
СО СТЕПЕННЫМ СПЕКТРОМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ**

А. Г. Бронин, П. Ф. Денисенко, Г. А. Жбанков, Н. А. Заботин

Рассмотрено бесстолкновительное поглощение обыкновенных волн в ионосфере, обусловленное рассеянием в z -моде на случайных неоднородностях в резонансной области. Определена антиэрмитова часть тензора эффективной диэлектрической проницаемости для изотропного степенного спектра с показателем 2 и для модели бесконечно вытянутых неоднородностей со степенным спектром (показатель 2-4). Рассчитано дополнительное поглощение обыкновенных волн при вертикальном зондировании для указанных спектров неоднородностей, а также для степенного спектра с показателем 4.

Существует целый ряд экспериментальных указаний на то, что обычные соударения электронов с тяжелыми частицами не являются единственной причиной диссипации энергии электромагнитных волн в ионосферной плазме. Так, аномальное поглощение радиоволн наблюдается при вертикальном зондировании области искусственного ВЧ нагрева [1] и в естественных условиях [2], а также при трансионосферном прохождении сигналов космических источников [3]. Один из возможных механизмов этого явления связан с существованием мелкомасштабных случайных неоднородностей электронной концентрации. При рассеянии на таких неоднородностях часть энергии трансформируется в медленные необыкновенные волны (z -моде), условия распространения которых таковы, что они оказываются "запертными" в ограниченном слое ионосферной плазмы [4]. Особенно эффективно этот процесс протекает в области параметров плазмы, где возможен резонанс для z -моды. В регулярно неоднородной в среднем ионосфере соответствующие условия выполняются в слое, прилегающем к уровню отражения обыкновенной волны. Необыкновенная волна отражается ниже резонансного слоя, и для нее рассматриваемый механизм бесстолкновительного затухания не работает.

Описание бесстолкновительных потерь энергии электромагнитных волн удобно проводить в терминах тензора эффективной диэлектрической проницаемости, который управляет средним полем в случайно-неоднородной среде. Такой тензор для резонансной области магнитоактивной плазмы был получен в работе [5] и использован для определения дополнительного затухания обыкновенных волн при вертикальном зондировании ионосферы в работе [6]. Принятая в [5, 6] модель гауссова спектра неоднородностей удобна для расчетов, но не соответствует современным представлениям о мелкомасштабной структуре ионосферы [7]. Поэтому есть необходимость обобщения результатов [5, 6] на случай степенного спектра неоднородностей. В этом и заключается цель настоящей работы.

В разд. 1 приводятся результаты расчетов дополнительного затухания, испытываемого обыкновенной волной при степенном изотропном спектре неоднородностей $F(p) \propto p^{-\nu}$ с показателем $\nu = 4$. В разд. 2 рассматривается случай $\nu = 2$. Обобщение расчетов тензора

эффективной диэлектрической проницаемости для неоднородностей, вытянутых вдоль магнитного поля, производится в разд. 3. В разд. 4 определено дополнительное затухание обыкновенных волн при наличии анизотропных неоднородностей.

1. Бесстолкновительное затухание при изотропном спектре неоднородностей. Для решения задачи, вынесенной в заголовок настоящего раздела, необходимо знать антиэрмитову часть тензора эффективной диэлектрической проницаемости. Для спектра неоднородностей вида $F(\vec{p}) \propto p^{-4}$ соответствующие результаты получены в работе [8]. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости имеет вид [5]

$$\epsilon_{\text{пр}}^{\text{ЭФФ}}(\omega, \vec{k}) = \langle \epsilon_{\text{пр}}(\omega) \rangle + \xi_{\text{пр}}(\omega, \vec{k}), \quad (1)$$

где $\langle \epsilon_{\text{пр}}(\omega) \rangle$ - средний тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы:

$$\langle \epsilon_{\text{пр}}(\omega) \rangle = \begin{vmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix},$$

$$\epsilon = 1 - v/(1 - u), \quad \eta = 1 - v, \quad g = vv/\bar{u}/(1 - u),$$

$$v = \omega_0^2/\omega^2, \quad u = \omega_h^2/\omega^2,$$

ω_0 - плазменная частота, ω_h - гирочастота электронов, ω - частота волны;

$$\xi_{\text{пр}}(\omega, \vec{k}) = - \frac{k_0^2}{(2\pi)^3} B_{\text{nlp}} \int F(\vec{k} - \vec{k}) G_{\text{q1}}(\vec{k}) d^3k \quad (2)$$

- поправка к тензору, возникающая при наличии случайных неоднородностей электронной концентрации $\Delta N/N$ со спектром $F(\vec{p})$, $G_{\text{q1}}(\vec{k})$ - спектр функции Грина для волнового уравнения в однородной магнитоактивной плазме, $k_0 = \omega/c$, c - скорость света в вакууме,

$B_{\text{nlp}} = (\langle \epsilon_{\text{n1}} \rangle - \delta_{\text{n1}}) (\langle \epsilon_{\text{qp}} \rangle - \delta_{\text{qp}}) \langle (\Delta N/N)^2 \rangle$. Эрмитова часть тензора $\epsilon_{\text{пр}}^{\text{ЭФФ}}$, которая определяет фазовую скорость и рефракцию волны, при низком уровне неоднородностей изменяется незначительно. Антиэрмитова часть тензора эффективной диэлектрической проницаемости, связанная с потерями энергии о-волны на возбуждение рассеянных медленных необыкновенных волн, может быть представлена в виде [8]

$$\xi_{\text{пр}}^A = -i \begin{vmatrix} S_1 & iS_4 & iS_5 \\ -iS_4 & S_2 & S_6 \\ -iS_5 & S_6 & S_3 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где S_i ($i = 1, \dots, 6$) - вещественные функции u , v и угла x между волновым вектором пробной обыкновенной волны \vec{k} и магнитным полем.

Расчеты [8] проделаны для спектра неоднородностей $F(\vec{p}) = F_0(p^2 + k_m^2) \exp(-p^2 l^2/4)$, где $k_m = 2\pi/\Lambda$, l , Λ - минимальный и максимальный масштабы неоднородностей. При условии $l \ll \Lambda$ этот спектр

имеет широкий интервал волновых чисел, в котором функция $F(p)$ является степенной с показателем $\nu = 4$. При этом нормировку спектра удобно производить на величину структурной функции случайного поля неоднородностей

$$\delta_R^2 = \left\langle \left[\frac{\Delta N}{N}(\vec{r}_1) - \frac{\Delta N}{N}(\vec{r}_2) \right]^2 \right\rangle \Big|_{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = R} = 2 \frac{R}{\Lambda} \left\langle \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \right\rangle.$$

Все величины S_i ($i = 1, \dots, 6$) пропорциональны δ_R^2 .

При расчетах аномального поглощения можно воспользоваться аналогией с обычным столкновительным механизмом потерь энергии [6]. Приравняем формально потери энергии за счет статистической трансформации в z -модуле $Q = (\omega/4\pi) E_n^* E_p \xi_{\text{пр}}^A$ тепловым потерям, которые имели бы место при соударениях с тяжелыми частицами, $Q_{\text{тепл}} = 1/2 E_n^* E_p \sigma_{\text{пр}}$ (здесь тензор проводимости $\sigma_{\text{пр}}$ линеаризован по параметру $S_{\text{ЭФФ}} = \nu_{\text{ЭФФ}}/\omega$). Тогда для эффективной частоты соударений получаем

$$S_{\text{ЭФФ}} = G^{-1} \sum_{i=1}^6 a_i S_i, \quad (4)$$

где

$$a_1 = f^2, \quad a_2 = (\rho f \cos \chi + d \sin \chi)^2, \quad a_3 = (\rho f \sin \chi - d \cos \chi)^2,$$

$$a_4 = -2f(\rho f \cos \chi + d \sin \chi), \quad a_5 = -2f(\rho f \sin \chi - d \cos \chi),$$

$$a_6 = 2(\rho f \cos \chi + d \sin \chi)(\rho f \sin \chi - d \cos \chi), \quad f = \frac{\varepsilon + uv \cos^2 \chi}{1 - u},$$

$$d = \sin \chi [(\eta - \varepsilon) \rho \cos \chi - g],$$

$$\rho = \sqrt{u^2 \sin^4 \chi + 4u\eta^2 \cos^2 \chi} + u \sin^2 \chi (2\eta\sqrt{u} \cos \chi)^{-1},$$

$$G = v(1-u)^{-2}x$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ f^2 [1 + u - 4\rho v \sqrt{u} \cos \chi + 2\rho^2 u \cos^2 \chi + \rho^2 (1-u) (1 - u \sin^2 \chi)] - \right. \\ & - 2f [2\sqrt{u} \sin^2 \chi + \rho \tau u (u - 3) \sin^2 \chi \cos \chi] + \\ & \left. + \tau^2 \sin^2 \chi [2u \sin^2 \chi + (1 - u) (1 - u \cos^2 \chi)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\tau = (\eta - \varepsilon) \rho \cos \chi - g.$$

Коэффициент поглощения о-волны, линеаризованный по параметру $S_{\text{ЭФФ}}$, имеет вид [9]

$$K = \frac{v [(u_T + R)^2 + 2u_L u_T (1 - u_T/R)] S_{\text{ЭФФ}}}{2\eta^{1/2} [u + u_L (1 - 2v) + R]^{3/2} (u + u_L + R)^{1/2}}, \quad (5)$$

$$\text{где } R = [u_{\tau}^2 + 4u_L(1 - \nu)^2]^{1/2}, \quad u_L = u \cos^2 \chi, \quad u_{\tau} = u \sin^2 \chi.$$

Преимущество данного подхода состоит в том, что дополнительное поглощение в резонансной области при вертикальном зондировании определяется стандартным образом:

$$L = 2 \frac{\omega}{c} \int_{1-u}^1 K \frac{dz}{dv} dv, \quad (6)$$

где dz/dv – характерный масштаб изменения электронной концентрации (для линейного слоя просто его толщина H). Однако для получения результата в аналитической форме необходимы упрощения. Учтем, что для области трансформации $1 - u \leq v \leq 1$. Тогда при $u \ll 1$ $\eta \leq u \ll 1$. Проведя разложения в ряд коэффициентов в формуле (4) и в выражении для K по малым параметрам u и η при дополнительном ограничении

$$4u \cos^2 \chi \ll \sin^4 \chi, \quad (7)$$

получим

$$S_{\text{ЭФФ}} \approx \sum_{i=1}^6 b_i s_i, \quad K \approx S_{\text{ЭФФ}} / 2\sqrt{\eta} \sin \chi, \quad (8)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{\eta^2 \cos^2 \chi (1-u)^2}{uv \sin^2 \chi}, \quad b_3 = \frac{(1-u)^2}{v}, \quad b_5 = -\frac{2\eta \cos \chi (1-u)^2}{vv \sqrt{u} \sin \chi},$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = 0.$$

Подставляя (8) в формулу (6), для степенного изотропного спектра неоднородностей с показателем $\nu = 4$ получаем следующую величину энергетических потерь о-волны:

$$L \approx \frac{\pi^2}{8} \delta_R^2 \frac{H}{R} \sin^{-1} \chi \frac{\omega}{\omega_H}. \quad (9)$$

На рис. 1 представлены графики зависимости поглощения от частоты зондирующей волны при следующих значениях параметров: $H = 100$ км, $\chi = 30^\circ$, $\omega = 6 \cdot 10^6$ с⁻¹, $l = 1$ м и для $\delta_R = 10^{-2}$; $1,5 \cdot 10^{-2}$; $2 \cdot 10^{-2}$ (линии 1-3 соответственно) в масштабе $R = 1$ км.

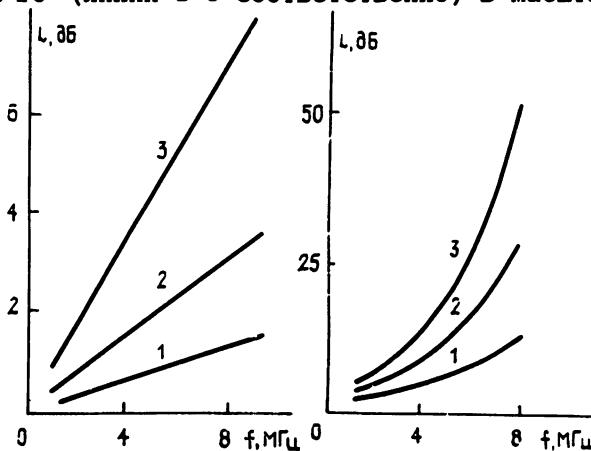


Рис 1,2

2. Вариант изотропного спектра с показателем $\nu = 2$. В данном разделе объектом исследования является ионосферная плазма со спектром случайных неоднородностей вида

$$F(\vec{p}) = F_0(p^2 + k_0^2)^{-1} \exp(-p^2 l^2/4), \quad (10)$$

где $F_0 = \delta_R^2 l / 8\pi^{3/2}$ – нормировочный коэффициент, δ_R^2 – структурная функция. В "инерционном" интервале ($1 < R < \Lambda$) $F(\vec{p}) \propto p^{-2}$, $\delta_R^2 \approx 2<(\Delta N/N)^2>$. Для спектра неоднородностей (10) необходимо заново определять тензор эффективной диэлектрической проницаемости. Расчет по формулам (2) имеет в данном случае ряд особенностей, но в целом аналогичен расчетам работы [8]. Поэтому мы приведем только его результат. Антиэрмитова часть тензора эффективной диэлектрической проницаемости в приближении $k_0 l \ll 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{11}^A &= \xi_{22}^A \approx -Q[D_1 I_1(-1) + D_3 I_1(0) + D_5 I_3(1)], \\ \xi_{33}^A &\approx Qv^2(-I_4(-1) + \epsilon[I_4(0) + I_3(0)] - (\epsilon^2 - g^2)I_3(1)), \\ \xi_{12}^A &\approx iQ(D_7[I_1(0) - I_1(-1) + 2\eta I_3(0)] - \eta D_6 I_3(1)), \\ \xi_{13}^A &\approx 6n_2^2(x) \cdot QD_9[I_2(1) - I_2(0)] \sin x \cos x, \\ \xi_{23}^A &\approx 6n_2^2(x) \cdot QD_{10}[I_2(1) - I_2(0)] \sin x \cos x, \end{aligned} \quad (11)$$

где $Q = (\sqrt{\pi}/8) k_0^4 \delta_R^2$, $I_1(-1) = -[\sqrt{\pi}(1 - \alpha)(uk_0 l \sqrt{\alpha})^{-1}] \times$
 $\times \operatorname{erfc}(k_0 l / 2\sqrt{\alpha}) + \sqrt{\alpha}/u$, $I_4(-1) = -(\sqrt{\pi\alpha}/uk_0 l) \operatorname{erfc}(k_0 l / 2\sqrt{\alpha}) +$
 $\pm \sqrt{\alpha}/u - (1/u) \ln [\sqrt{1 - \alpha}/(1 - \sqrt{\alpha})]$, $\alpha = \epsilon/(\epsilon - \eta)$, $n_2(x)$ –
 показатель преломления обыкновенной волны, величины D_i ($i = 1, \dots, 10$)
 и $I_1(0)$, $I_4(0)$, $I_3(0)$, $I_2(0)$, $I_2(1)$ определены в работе [8].

Используя технику расчета аномального поглощения для линейного слоя, описанную в предыдущем разделе, получим в данном случае

$$L \approx \frac{4\pi^2}{16} \delta_R^2 \frac{H}{c\omega_H} \sin^{-1}\chi(\omega^2). \quad (12)$$

Представляет интерес связь между величинами поглощения для различных спектров неоднородностей: $L(\nu = 2) = (\omega R/2c) L(\nu = 4)$. Мы видим, что в предположении неизменности уровня отклонений плотности в масштабе 1 км аномальное поглощение выше для менее крутого спектра неоднородностей.

Если не делать упрощающих предположений, необходимых для аналитической оценки (12), и находить аномальное поглощение численно, частотная зависимость $L(\omega)$ несколько модифицируется: $L(\omega) \propto \omega^{2.7}$. На рис. 2 приведен график зависимости $L(\omega)$, рассчитанный численно для спектра неоднородностей (10), при тех же параметрах ионосферного слоя, что и график на рис. 1.

3. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости в случае сильно вытянутых неоднородностей. При учете магнитного поля в плазме наиболее распространенным типом неоднородностей, по-видимому, будут анизотропные, вытянутые вдоль поля. Ряд авторов [10, 11] связывают наблюдаемое аномальное поглощение обыкновенных волн в ионосфере именно с вытянутыми вдоль магнитного поля неоднородностями электронной концентраций. В общем случае спектр анизотропных неоднородностей можно представить в виде

$$F(\vec{p}) = F_0(p_\perp^2 + k_{\text{eff}}^2)^{-\nu/2} \exp(-p_\parallel^2 l_\parallel^2/4), \quad (13)$$

где $k_{\text{eff}} = 2\pi/\Lambda_\perp$, l_\parallel — минимальный масштаб неоднородностей вдоль магнитного поля, Λ_\perp — максимальный поперечный размер неоднородностей. Но попытка нахождения тензора эффективной диэлектрической проницаемости в резонансной области плазмы для спектра (13) наталкивается на непреодолимые трудности даже для конкретных значений ν . Выход заключается в использовании приближения сильно вытянутых неоднородностей $l_\parallel \rightarrow \infty$. Спектр в этом случае принимает вид

$$F(\vec{p}) = F_0(p_\perp^2 + k_{\text{eff}}^2)^{-\nu/2} \delta(p_\parallel), \quad (14)$$

где δ — дельта-функция, $F_0 = \frac{[\Gamma(\nu/2)]^2}{\Gamma[(\nu-2)/2] \Gamma[(4-\nu)/2]} \frac{\delta_{R\perp}^2}{2\pi} \left(\frac{R_\perp}{2}\right)^{2-\nu}$

для $2 < \nu < 4$ и нормировка производится на значение структурной функции в поперечном по отношению к магнитному полю направлении. В этом приближении задача имеет решение для произвольного значения показателя ν .

Как и ранее, приведем только результат расчета антиэрмитовой части тензора эффективной диэлектрической проницаемости для резонансной области магнитоактивной плазмы со спектром неоднородностей (14):

$$\xi_{11}^\text{A} = \xi_{22}^\text{A} = \frac{T \sin \vartheta^*}{A^{\nu/2} N(\vartheta^*) (n_1^2 - n_2^2)} [2M_1(n_1^2 \sin^2 \vartheta^* - \eta) - M_2 n_1^2 (n_1^2 + \eta) \sin^2 \vartheta^*], \quad (15)$$

$$\xi_{33}^\text{A} = \frac{2\nu^2 T \sin \vartheta^*}{A^{\nu/2} N(\vartheta^*) (n_1^2 - n_2^2)} [n_1^2 (\eta - n_1^2) \cos^2 \vartheta^* + \epsilon n_1^2 - \epsilon^2 + g^2],$$

$$\xi_{42}^\text{A} = -\xi_{21}^\text{A} = -i \frac{2gT \sin \vartheta^*}{A^{\nu/2} N(\vartheta^*) (n_1^2 - n_2^2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\nu}{1-u} n_1^4 \sin^2 \vartheta^* + 2\eta M_2 - \frac{\nu}{1-u} \epsilon \eta + \right.$$

$$\left. + n_1^2 \left[\frac{\nu}{1-u} N(\vartheta^*) - 2M_2 \sin^2 \vartheta^* \right] \right\},$$

$$\xi_{13}^A = \xi_{31}^A = \xi_{23}^A = \xi_{32}^A \approx 0,$$

где

$$\vartheta^* = \arccos(n_2 \cos \chi / n_1), \quad T = \pi^2 F_0 k_0^{2-\nu} / 2,$$

$$\lambda = n_1^2 \sin^2 \vartheta^* + n_2^2 \sin^2 \chi + k_{n1}^2 / k_0^2$$

$$M_1 = v^2 (1 - u)^{-2} [1 + u - v(1 + 3u)/(1 - u)],$$

$$M_2 = v^2 (1 - u)^{-2} (1 + u),$$

$$N(\vartheta) = \epsilon \sin^2 \vartheta + \eta \cos^2 \vartheta,$$

$n_2(\chi)$, $n_1(\vartheta^*)$ – показатели преломления обычновенной и необыкновенной волн.

Пользоваться для расчетов выражениями (15) ввиду их громоздкости не очень удобно. Необходимо поэтому учесть малость отношения $n_2/n_1 \ll 1$ в резонансной области плазмы при $u \ll 1$. В этом случае основные члены антиэрмитовых компонент тензора принимают вид

$$\xi_{11}^A = \xi_{22}^A = Tu^{-1} \alpha^{\nu/2-2},$$

$$\xi_{12}^A = -\xi_{21}^A = -2iT u^{-1/2} \alpha^{\nu/2-2},$$

$$\xi_{33}^A = 2T \operatorname{ctg}^2 \chi \alpha^{\nu/2-1} (1 - \alpha).$$

В такой форме мы и будем их использовать в настоящей работе.

4. Бесстолкновительное поглощение при наличии сильно вытянутых неоднородностей. Для обычновенных волн при нахождении интегрального поглощения, связанного с их трансформацией при резонансном рассеянии в z -моде, в случае вертикального зондирования ионосферы с линейным распределением электронной концентрации, воспользуемся методикой, уже описанной в разд. 1. Расчеты, аналогичные (3)–(9), для спектра неоднородностей (14) приводят к следующему результату:

$$L \approx \frac{\pi [\Gamma(\nu/2)]^2}{4\Gamma[(\nu-2)/2] \Gamma[(4-\nu)/2]} \delta_{R_1}^2 \left(\frac{R_1 \omega}{2c} \right)^{2-\nu} \frac{H\omega_H}{c} \frac{\operatorname{ctg}^2 \chi}{\sin \chi} \times \\ \times [B\left(\frac{\nu-2}{2}, \frac{5}{2}\right) + 2B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}\right)]. \quad (16)$$

Напомним, что полученное выражение справедливо при $2 < \nu < 4$. Таким образом, оно предсказывает уменьшение аномального поглощения с ростом частоты. Значительный уровень поглощения достигается только при показателе спектра неоднородностей ν , близком к 2 и при прочих параметрах, имеющих прежние значения (см. разд. 1 и 2). Так, для $\nu=2$, $H = 100$ км, $R = 1$ км, $\omega = 2\pi \cdot 10^6$ с⁻¹ получаем $L = 7,8$ и 28 дБ для $\chi = 30^\circ$ и 20° соответственно. Для $\nu = 2,5$ при тех же значениях параметров получаем $L = 0,375$ дБ при $\chi = 30^\circ$ и $L = 1,125$ при $\chi = 20^\circ$.

Таким образом, частотная зависимость аномального поглощения обыкновенных волн, вертикально падающих на ионосферу, определяется спектром неоднородностей электронной концентрации. Это обстоятельство может использоваться для диагностики формы спектра неоднородностей в области F как в нагревных экспериментах, так и в естественных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб.: Термические нелинейные явления в плазме. - Горький: ИПФАН СССР, 1979. - 162 с.
2. Денисенко П. Ф., Водолазкин В. И. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. Т. 27. С. 504.
3. Гельберг М. Г., Волков Н. Н. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1985. Т. 25. С. 784.
4. Рыжов Ю. А. // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 141.
5. Рыжов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. С. 316.
6. Водолазкин В. И., Денисенко П. Ф., Фаер Ю. Н. // Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29. С. 329.
7. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. В. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. - М: Наука, 1984. - 392 с.
8. Бронин А. Г., Денисенко П. Ф. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 5. С. 587.
9. Гусев В. Д., Данилкин Н. П. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1977. Т. 17. С. 645.
10. Митяков В. Н., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. С. 1273.
11. Васьков В. В. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 1172.

Научно-исследовательский институт физики
при Ростовском университете

Поступила в редакцию
22 января 1990 г.

COLLISIONLESS ATTENUATION OF ORDINARY ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE IONOSPHERIC PLASMA WITH THE POWER-TYPE SPECTRUM OF IRREGULARITIES

A. G. Bronin, P. F. Denisenko, G. A. Zhbankov, N. A. Zabotin

Collisionless absorption of ordinary waves in the ionosphere, caused by scattering from irregularities into z-mode in the resonance region has been studied. The non-Hermitian components of the effective dielectric constant tensor have been obtained for the isotropic power-type spectrum of irregularities with index 2 and for the model of infinitely lengthened irregularities with the power-type spectrum with index in the range from 2 to 4. The anomalous absorption of ordinary waves has been obtained for both the above-mentioned spectra and also for the isotropic power-type spectrum with index 4.

УДК 621.316.729

О ВОЗДЕЙСТВИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ФАЗЫ НА РЕЖИМ СИНХРОНИЗАЦИИ

С. Л. Кленов, М. В. Свиридов

Теоретически изучены особенности явления синхронизации при воздействии на систему шума, имеющего характер стационарных возмущений фазы. Получено аналитическое решение уравнения Фоккера-Планка для данного типа шума и показано, что при стационарных возмущениях фазы синхронизация в системе разрушается главным образом благодаря сокращению эффективной зоны захвата.

Известно [1, 2], что влияние флуктуаций на режим синхронизации в динамических системах приводит к разрушению этого состояния. Соответственно частотная характеристика системы приобретает "гладкий" вид. Подробный теоретический анализ этого явления дан в [1] на примере генератора, синхронизуемого внешним сигналом, частота которого содержит стационарную случайную компоненту. Вместе с тем в ряде систем реализуется ситуация, когда разрушение синхронизации происходит при воздействии шума, имеющего характер стационарных флуктуаций не частоты, а фазы. Такого типа возмущения возникают, например, в кольцевом лазере, совершающем случайные финитные колебания относительно своего основания, при синхронизации генератора, когда случайный стационарный процесс модулирует фазу внешнего сигнала, в контакте Джозефсона, нагруженном на случайную эдс через проходную емкость, и т. д. Как было показано в [3] при исследовании влияния шума на захват частот встречных волн в кольцевом лазере, эффект синхронизации при воздействии стационарных возмущений фазы обладает рядом особенностей. В частности, даже при высокой интенсивности шума существует область частот расстройки, в которой среднее значение разности фаз волн практически не меняется, т. е. фактически сохраняется режим захвата. Для анализа этого явления в [3] использовалось приближенное решение фазового уравнения, полученное с помощью асимптотического метода "усреднения" [4]. Целью настоящей статьи является детальное изучение процесса разрушения режима синхронизации при воздействии стационарных возмущений фазы в приближении применимости уравнения Фоккера-Планка. При этом рассматривается простейшая модель синхронизуемой системы, описываемая фазовым уравнением вида

$$\dot{\phi} = \Omega + \Omega_0 \sin \phi + \eta. \quad (1)$$

Здесь Ω - частота расстройки, Ω_0 - полуширина невозмущенной зоны захвата, $\eta(t)$ - случайный процесс. "Фазовый" характер шума проявляется в том, что процесс η представляет собой производную по времени $\eta = \dot{\xi}$ от некоторой стационарной случайной функции $\xi(t)$. Как показано в настоящей работе, при данном характере шума его влияние на режим синхронизации значительно отличается от случая, рассмотренного в [1], где шум η предполагался белым, а процесс ξ , соответственно, винеровским (чисто диффузионным).

Используя замену переменных $\theta = \varphi - \xi$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\dot{\theta} = \Omega + \Omega_c \sin \theta + \Omega_0 (\xi_c \sin \theta + \xi_s \cos \theta), \quad (2)$$

где

$$\Omega_c = \Omega_0 \overline{\cos \xi} \quad (3)$$

и введены обозначения $\xi_c = \cos \xi - \overline{\cos \xi}$, $\xi_s = \sin \xi$. Как показано в [3, 5], характерные времена корреляции τ_c и τ_s процессов ξ_c и ξ_s являются величинами порядка времени корреляции τ_0 процесса ξ и

уменьшаются с ростом дисперсии шума $\overline{\xi^2} = \sigma^2$. Например, в случае, когда $\xi(t)$ представляет собой нормальный марковский процесс, из выражений для функций корреляций процессов ξ_c и ξ_s , приведенных в работе [3], следует, что $\tau_s \approx \tau_0$, $\tau_c \approx \tau_0/2$ при $\sigma^2 \ll 1$ и $\tau_s \approx \tau_c \approx \tau_0/\sigma^2$ при $\sigma^2 \gg 1$. Соответственно, если величина τ_0 удовлетворяет условиям $\Omega_0 \tau_0 \ll 1$, $\Omega \tau_0 \ll 1$, то процессы ξ_c и ξ_s в уравнении (2) можно рассматривать как дельта-коррелированные и представить их функции корреляции в виде

$$R_c(\tau) = K_c \delta(\tau), \quad R_s(\tau) = K_s \delta(\tau), \quad (4)$$

где K_c и K_s - спектральные плотности процессов $\cos \xi$ и $\sin \xi$ на нулевой частоте. В целях упрощения дальнейшего анализа будем предполагать, что процессы ξ_c и ξ_s не коррелированы между собой:

$\xi_c(t) \xi_s(t+\tau) = 0$. Это допущение справедливо, например, в том случае, когда двумерная функция распределения $w_2(\xi_1, \xi_2, \tau)$ процесса ξ удовлетворяет условию симметричности $w_2(\xi_1, \xi_2, \tau) = w_2(-\xi_1, -\xi_2, \tau)$. Используя некоррелируемость процессов ξ_c и ξ_s , запишем уравнение Фоккера-Планка [6], соответствующее уравнению (2), в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \theta} (\Omega + \Omega_c \sin \theta) w + \frac{K}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta) w, \quad (5)$$

где $K = \Omega_0^2 K_s$, $\gamma^2 = K_c/K_s$, w - плотность вероятности.

При анализе уравнения (5) будем следовать подходу, развитому в [1]. В стационарном состоянии решение уравнения (5), удовлетворяющее условию периодичности $w(\theta) = w(\theta + 2\pi)$, имеет вид

$$\hat{w}(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\exp(f(\theta))}{\cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-f(\theta_1)) d\theta_1, \quad (6)$$

где $f(\theta) = D \operatorname{Arctg}(\gamma \operatorname{tg} \theta) - \frac{D_c}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \cos \theta\right)$,

$$D = 2\Omega/K\gamma, \quad D_c = 2\Omega_c/K\gamma,$$

а величина N определяется условием нормировки

$$\int_0^{2\pi} W(\theta) d\theta = 1. \quad (7)$$

Усредняя уравнение (2) и используя соотношения (5), (6), найдем выражение для средней скорости изменения фазы [1]

$$\overline{\dot{\phi}} = \frac{\pi K(1 - \exp(-2\pi D))}{N}, \quad (8)$$

которое позволяет рассчитать частотную характеристику системы.

Как следует из соотношений (3), (4) и уравнения (5), при "фазовом" характере шума свойства синхронизуемой системы определяются характеристиками процессов $\sin \xi$ и $\cos \xi$ и поэтому в значительной мере зависят от вида функции распределения величины ξ . Для проведения дальнейшего анализа предположим, что ξ - нормальный процесс с дисперсией σ^2 и функцией корреляции $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_0)$. При этом параметры Ω_c , K_s и K_c в (3)-(5) определяются соотношениями

$$\Omega_c = \Omega_0 \exp(-\sigma^2/2),$$

$$K_s = \exp(-\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} R(\tau) d\tau = 2\tau_0 \exp(-\sigma^2) \operatorname{shi}(\sigma^2), \quad (9)$$

$$K_c = \exp(-\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{ch} R(\tau) - 1) d\tau =$$

$$= 2\tau_0 \exp(-\sigma^2) (\operatorname{chi}(\sigma^2) - C - \ln \sigma^2),$$

где $\operatorname{shi}(x)$ и $\operatorname{chi}(x)$ - интегральные гиперболические синус и косинус [7], C - постоянная Эйлера. Графики зависимости параметров $\tilde{K}_s = K_s \tau_0^{-1}$, $\tilde{K}_c = K_c \tau_0^{-1}$ и $\tilde{D}_c = (\Omega_0 \tau_0) D_c$ от дисперсии шума σ^2 показаны на рис. 1.

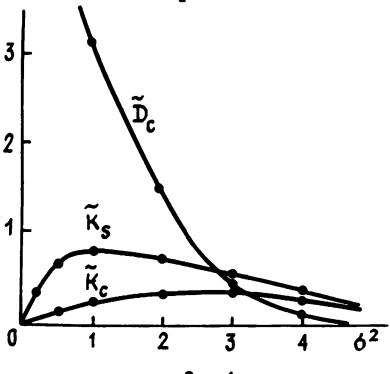


Рис 1

Сопоставим влияние случайных стационарных возмущений частоты и фазы в случае малых уровней шума ($D, D_c \gg 1$). Для этого оценим величину N в равенстве (8). При частотах расстройки Ω , удовлетворяющих условию $\Omega_c^2/\Omega^2 - 1 \gg D^{-2/3}$ [1], интегралы в выражениях (6), (7) можно вычислить методом "перевала" в точках экстремума функции $f(\theta)$. При этом зависимость $\overline{\dot{\phi}}$ от Ω аппроксимируется выражением

$$\overline{\dot{\phi}} = 2(\Omega_c^2 - \Omega^2)^{1/2} \operatorname{sh}(\pi D) \times$$

$$\times \exp \left\{ -2D \operatorname{arctg} \frac{\gamma D}{(\Omega_c^2 - \Omega^2)^{1/2}} - \frac{2D_c}{(1 - \gamma^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \gamma^2)^{1/2} (\Omega_c^2 - \Omega^2)^{1/2}}{\gamma \Omega_c} \right\}.$$

При выполнении условия $\gamma \rightarrow 1$ это выражение переходит в соотношение (18.93) из [1]. Однако для флуктуаций с величиной дисперсии $\sigma^2 \ll 1$ из (9) и [7] следует, что $K_s \approx 2\tau_0\sigma^2$, $K_c \approx \approx \tau_0(\sigma^4/2)$ и параметр $\gamma = (K_c/K_s)^{1/2} \approx \sigma/2$ достаточно мал. В этих условиях при значениях $\Omega \ll \Omega_c$ вблизи центра зоны синхронизации величина $\dot{\bar{\phi}}$ определяется соотношением

$$\dot{\bar{\phi}} = 2\Omega_c \operatorname{sh}(\pi D) \exp(-\pi D_c).$$

Сопоставляя это соотношение с формулой (18.56) в [1] при одинаковых значениях параметра K , оценим отношение $\dot{\bar{\phi}}_\Phi / \dot{\bar{\phi}}_\chi$ средних скоростей изменения фазы $\dot{\bar{\phi}}_\Phi$ и $\dot{\bar{\phi}}_\chi$ для случаев стационарных возмущений фазы и частоты

$$\dot{\bar{\phi}}_\Phi / \dot{\bar{\phi}}_\chi \sim \exp \left[-2D_c^{(0)} \left(\frac{\pi}{\sigma} - 1 \right) \right], \quad (10)$$

где $D_c^{(0)} = 2\Omega_c/K$, параметр K равен спектральной плотности шума в случае его "частотного" характера [1] и спектральной плотности процесса $\Omega_0 \xi_c \approx \Omega_0 \xi$ (при $\xi^2 \ll 1$) в случае "фазового" характера возмущений. Из соотношения (10) следует, что при $\sigma \ll 1$ выполняется условие $\dot{\bar{\phi}}_\Phi \ll \dot{\bar{\phi}}_\chi$. Поскольку величина $\dot{\bar{\phi}}$ пропорциональна частоте "переходов" фазы из области притяжения одного из устойчивых состояний невозмущенной системы в окрестность другого [1], то при малой величине случайного возмущения, имеющего фазовый характер, такие переходы осуществляются значительно реже, чем при воздействии стационарных возмущений частоты. Соответственно, если под режимом синхронизации в присутствии шума понимать состояние системы, в котором ее фаза флуктуирует вблизи одного из своих устойчивых положений равновесия, то в случае фазового шума такой режим будет сохраняться в течение значительно более длительного времени.

Различие между двумя вариантами сохраняется и при высоких уровнях шума, когда $\sigma^2 \gg 1$. В этих условиях согласно (9) и [7] $K_c \approx K_s \approx 2\tau_0/\sigma^2$, поэтому параметр $\gamma=1$ и формально решение (6) совпадает с полученным в [1]. Однако в рассматриваемом случае зависимости параметров K и Ω_c , определяющих вид частотной характеристики системы, от дисперсии шума оказываются существенно иными. Действительно, если при возмущениях частоты случайным стационарным процессом параметр K в уравнении Фоккера-Планка [1] равен спектральной плотности шума и растет при повышении его интенсивности, то при стационарных возмущениях фазы параметр K определяется спектральной плотностью $K_s \propto \sin \xi$ и, согласно

(9), при больших значениях дисперсии уменьшается как σ^{-2} (рис. 1). Фактически в области значений $\sigma^2 \gg 1$ эффективная спектральная плотность шума в системе остается малой. Вместе с тем при повышении дисперсии σ^2 происходит быстрое уменьшение параметра

$\Omega_c = \Omega_0 \exp(-\sigma^2/2)$. Как видно из структуры уравнения (2), этот параметр можно рассматривать как некоторую эффективную ширину зоны захвата. Соответственно при воздействии стационарного фазового шума линеаризация частотной характеристики системы происходит прежде всего в результате уменьшения ширины этой зоны.

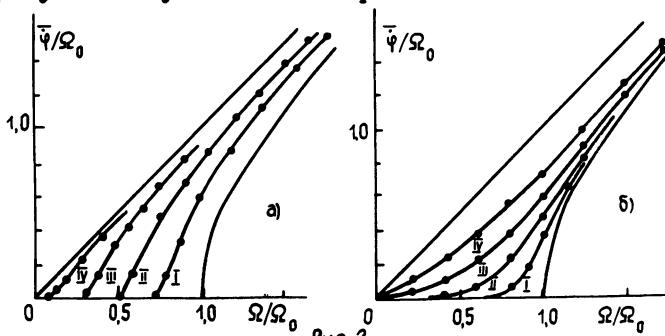


Рис. 2.

Данный вывод подтверждают представленные на рис. 2а результа́ты численного расчета частотной характеристики системы при различных значениях интенсивности шума. Расчет был проведен для случая стационарных нормальных возмущений фазы на основе соотношений

(6)-(8). Для сравнения на рис. 2б приведены зависимости ϕ от Ω , построенные в соответствии с результатами [1] для случая стационарных нормальных флуктуаций частоты. Кривые I - IV на рис. 2 соответствуют значениям стандартного отклонения $\sigma = 0,7$ (I); 1,0 (II); 1,4 (III); 2,0 (IV), при этом в случае стационарных флуктуаций частоты [1] дисперсия шума для получения безразмерной величины нормировалась на Ω_0^2 . Время корреляции процесса ξ выбиралось равным $\tau_0 = 0,1 \Omega_0^{-1}$. Как следует из результатов численных расчетов, при

фазовом характере шума (рис. 2а) каждая из зависимостей ϕ от Ω в области значений $\Omega < \Omega_c$ существенно ближе к нулю, чем в случае частотного шума (рис. 2б). Например, для кривых II на рис. 2а, б в точке $\Omega / \Omega_0 = 0,35$ величина ϕ / Ω_0 для первого случая составляет $4,7 \cdot 10^{-6}$, а для второго - $6 \cdot 10^{-3}$. Это объясняет результаты работы [3], где в первом приближении метода "усреднения" было получено, что при частотах $\Omega < \Omega_c$ в системе сохраняется режим синхронизации. При увеличениистройки Ω каждая из частотных характеристик на рис. 2а приближается к соответствующей кривой $(\Omega^2/\Omega_c^2 - 1)^{1/2}$. С ростом дисперсии σ^2 величина $\Omega_c = \Omega_0(\sigma^2)$ уменьшается, кривая $(\Omega^2/\Omega_c^2 - 1)^{1/2}$

смещается влево и для частот $\Omega \sim \Omega_0$ частотные характеристики ϕ (Ω) на рис. 2а оказываются ближе к линейной, чем в случае, показанном на рис. 2б.

Таким образом, представленные результаты показывают, что при воздействии шума, имеющего характер стационарных возмущений фазы, линеаризация частотной характеристики синхронизуемой системы с ростом интенсивности шума происходит вследствие монотонного сокращения ширины эффективных зон охвата Ω_c .

При воздействии фазового стационарного шума в значительной мере

изменяется и скорость диффузионного "расплывания" фазы. Действительно, при высоких уровнях шума, когда выполнено условие $\Omega_c < K$, из уравнения (5) следует, что коэффициент диффузии фазы D_ϕ равен параметру K и, следовательно, определяется спектральной плотностью процесса $\sin \xi$. При этом в соответствии с соотношением (9) величина коэффициента диффузии D_ϕ с ростом интенсивности шума монотонно убывает обратно пропорционально дисперсии σ^2 .

Авторы признательны И. П. Мазанько за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М. : Сов. радио, 1961. - 558 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. - М. : Сов. радио, 1977. - 488 с.
3. Свиридов М. В. // Радиотехника и электроника. 1984. Т.29. N 10. С.1971.
4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. - М. : Наука, 1981. - 400 с.
5. Свиридов М. В. //Радиотехника и электроника. 1986. Т.31. N 4. С.752.
6. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. - М. : Наука, 1976. Ч. 1.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. - М. : Наука, 1979.

Научно-производственное объединение
"Астрофизика"

Поступила в редакцию
16 января 1990 г.

THE INFLUENCE OF STATIONARY PHASE PERTURBATIONS ON A LOCK-IN.

S. L. Klenov, M. V. Sviridov

Locking effect in the subject to stationary phase noise systems is theoretically investigated. The analytical solution of Fokker-Plank equation is found for such the particular case. It is shown that the locking process in the system under influence of stationary phase perturbations is destroyed mainly through the reduction of the effective locking range.

УДК 519. 272

**РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ
ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

В. В. Савченко

Дается обоснование принципа минимакса энтропии наблюдений в задаче восстановления плотности вероятности по первым начальным моментам неизвестного распределения. Синтезируется рекуррентный алгоритм восстановления на ограниченном временном интервале. Решаются вопросы его реализации, исследуется скорость сходимости.

Классический подход к задаче непараметрического оценивания неизвестной плотности вероятности во всех своих модификациях основывается на ряде общих положений асимптотической теории оценивания [1]. В рамках данного подхода укладываются оба известных класса непараметрических оценок — ядерного типа (Парзена — Розенблатта) и проекционные, причем последние, предложенные Ченцовым, характеризуются скоростью сходимости, неулучшаемой по порядку [2]. Однако на практике часто возникают ситуации, когда асимптотически оптимальные свойства упомянутых оценок не могут быть реализованы в полной мере. Это справедливо, например, в задачах с ограниченным объемом выборки [3], особенно для многомерных случайных величин, когда неопределенность наблюдений возрастает [2, 4]. В указанных условиях актуальной становится задача некорректного анализа: на основе имеющихся ограниченных данных необходимо с максимальной точностью оценить (восстановить) неизвестный закон распределения. Самостоятельное значение при этом будет иметь оптимизация набора данных в рамках используемой модели наблюдений. Довольно общий подход к постановке и решению этих задач с использованием идеи натуральной по Ченцову параметризации данных излагается в настоящей статье.

1. Постановка задачи. Пусть \vec{x} — случайная выборка из вероятностного выборочного пространства $\{R^k, \mathcal{B}, P\}$ с неизвестными распределением на борелевском поле $P\{\vec{x}\}$ и плотностью вероятности по мере Лебега $f(\vec{x})$. В роли наблюдения случайной величины будем рассматривать в общем случае нетривиальную статистику $\vec{y} = G\vec{x}$, порожденную измеримым отображением $G: R^k \rightarrow R^k$. Для сохранения всей полезной информации о выборке \vec{x} наложим на статистику \vec{y} условие достаточности. В классе линейных преобразований на измеримом пространстве $\{R^k, \mathcal{B}\}$ G — это невырожденная квадратная ($k \times k$) матрица над полем вещественных чисел, а $\vec{x} = \{x_i\}$, $\vec{y} = \{y_i\}$ — векторы (столбцы) со случайными координатами на R^k .

В соответствии с общей идеей натуральной параметризации данных будем полагать известными (или точно измеренными) и ограниченными в R^1 по абсолютной величине первые два начальных момента каждой

случайной координаты y_i многомерного наблюдения \vec{y} . В таком случае для центрированной случайной величины $\hat{y} = \vec{y} - E_p\{\vec{y}\}$ существует система интегралов

$$D_p\{y_i\} \triangleq \int_{R^k} \hat{y}_i^2(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} = \sigma_i^2 > 0, \quad (1)$$

где $i = 1, k$, а интегрирование ведется по области определения наблюдения в R^k . Другие сведения о распределении $P\{\cdot\}$ при этом отсутствуют. Поставим задачу восстановления в таких условиях неизвестной плотности вероятности $f(\vec{x})$.

Нетрудно убедиться, что в общем случае система уравнений (1) неразрешима относительно функции $f(\vec{x})$. Задача, следовательно, требует доопределения. Можно наложить ограничения на вид неизвестного распределения, сводя задачу к случаю параметрической априорной неопределенности [1]. Но этот путь не всегда осуществим практически. Примером могут служить задачи связи, локации и другие, в которых проблема априорной неопределенности не только естественна, но и часто специально организуется, и информация о среднем и мощности анализируемых процессов, которую удается извлечь из наблюдения при жесткой регламентации его объема [6], является порой единственной надежной.

Преодолеть противоречие между имеющимися и необходимыми данными позволяет вариационный подход [7]. Строго говоря, его идея не нова, и для некоторых специальных применений статистики она давно и подробно разрабатывалась. Примером может служить задача проектирования [2], основанная на критерии минимального информационного уклонения $I[P_c|P]$ искомой оценки распределения $P_c\{\cdot\}$ от истинного распределения. По аналогии с [2] воспользуемся информационной трактовкой задачи. По-видимому, наиболее общий результат в такой постановке дает теорема о концентрации энтропии наблюдаемой случайной величины [8]. В соответствии с ней будем искать оценку неизвестной плотности из условия

$$H_p(\vec{x}) \triangleq - \int_{R^k} \log [f(\vec{x})] f(\vec{x}) d\vec{x} \longrightarrow \max \quad (2)$$

при ограничениях на моменты распределения (1). Задача свелась, таким образом, к изопериметрической задаче вариационного исчисления. Нетрудно показать [2], с. 352, что в данной формулировке она имеет единственное решение $f_c(\vec{x})$, зависящее от вида преобразующей матрицы G .

2. Вспомогательные утверждения. Дополним (1) и (2) условием нормировки распределения

$$P(R^k) \triangleq \int_{R^k} f(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \quad (3)$$

и после этого применим к задаче метод множителей Лагранжа. Опуская несложные промежуточные вычисления, запишем результат

$$f_c(\vec{x}) = |\det G| / \prod_{i=1}^k (2\pi \sigma_i^2)^{-0.5} \exp (-0.5 \vec{x}^T G^T \text{diag}\{\sigma_i^{-2}\} G \vec{x}), \quad (4)$$

где $\vec{x} = \vec{x} - E_p\{\vec{x}\}$.

На множестве линейных невырожденных преобразований $\mathcal{T} = \{G\}$ выражение (4) определяет параметрическое семейство нормальных

законов распределения $\mathcal{P} = \{P_c\}$, отличающихся по энтропии:

$$H_p(\vec{x}, G) = 0,5 \log \left[\prod_{i=1}^k (2\pi e \sigma_i^2) / \det^2 G \right]. \quad (5)$$

Очевидно, что каждому из них можно поставить в однозначное соответствие информационную меру отклонения $I[P_c|P]$ от неизвестного истинного распределения $P\{\cdot\}$. Закономерно в этой связи возникает вопрос о выборе из семейства \mathcal{P} наилучшего закона $P^*\{\cdot\}$ с минимальными отличиями от истинного. Ответ на него дается ниже.

Утверждение 1. Если $P\{d\vec{x}\}$ – произвольное распределение с доминирующей мерой Лебега на $\{R^k, \mathcal{B}\}$, такое, что для статистики $\hat{y} = G\vec{x}$ выполняются условия в форме (1), то информационное уклонение его оценки максимальной энтропии (4) равно

$$I[P_c|P] = H_p(\vec{x}, G) - H_p(\hat{x}) \geq 0.$$

Доказательство данного утверждения автоматически следует из определения [2]

$$I[P_c|P] \triangleq \int f(\vec{x}) \log[f(\vec{x}) / f_c(\vec{x})] d\vec{x} = - \int \log[f_c(\vec{x})] f(\vec{x}) d\vec{x} - H_p(\vec{x})$$

при последующем учете выражений (4), (5).

Следствие 1. Закон $P^* \in \mathcal{P}$ с наименьшими отличиями от истинного $P\{\cdot\}$ имеет энтропию, равную $\inf H_p(\vec{x}, G)$.

Следствие 2. На множестве преобразований \mathcal{T} линейное преобразование

$$G^* = \operatorname{Arg} \max \log \det^2 G \quad (6)$$

в условиях вариационной задачи (1), (2) позволяет обеспечить потенциальную точность оценки максимальной энтропии (4).

Линейное преобразование $\hat{y} = G^*\vec{x}$, отвечающее условию (6) при ограничениях на дисперсии (1), будем называть оптимальным преобразованием. Понятие оптимального преобразования имеет прямое отношение к задаче оптимального планирования статистического эксперимента [1].

3. Основные результаты. Утверждение 2. В классе линейных невырожденных преобразований \mathcal{T} оптимальным в условиях вариационной задачи (1), (2) является разложение случайной выборки $\vec{x} \in \{R^k, \mathcal{B}\}$ в k -базисе Карунена – Лоэва.

Доказательство. Запишем лагранжиан вариационной задачи (6), (1)

$$\begin{aligned} L_G &= \log \det^2 G + E_p \{ \hat{x}^T G^T \operatorname{diag} \{ \lambda_i \} G \hat{x} \} = \\ &= \log \det^2 G + \operatorname{tr} (\operatorname{diag} \{ \lambda_i \} G K_x^T G^T) \end{aligned}$$

и возьмем от него вариацию δL_G . Здесь $K_x \triangleq E_p \{ \hat{x} \hat{x}^T \}$ – ковариационная матрица размера ($k \times k$) случайной выборки \hat{x} ; $\hat{x} = \vec{x} - E_p \{ \vec{x} \}$ – центрированная многомерная случайная величина; $\operatorname{tr}(\cdot)$ – след матрицы. С использованием известных матричных теорем [9] будем иметь

$$\delta L_G = \operatorname{tr}(2G^{-1} \delta G + \operatorname{diag} \{ \lambda_i \} G K_x^T \delta G^T + \operatorname{diag} \{ \lambda_i \} \delta G K_x^T G^T),$$

заменив вариацию δG с \mathcal{T} матрицей G и приравнивая результат нулю,

получим уравнение $G K_x G^T = -\text{diag}\{\frac{1}{\lambda_i}\}$, которое в совокупности с (1) дает систему очевидных равенств $\lambda_i = -\sigma_i^{-2}$, $i = \overline{1, k}$. Таким образом, окончательно получаем $G^* K_x^{*T} G^* = \text{diag}\{\sigma_i^2\}$ или в иных обозначениях

$$K_y \triangleq E_p\{\hat{g}\hat{g}^T\} = \text{diag}\{\sigma_i^2\}.$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. $\inf I_{P_c}(\hat{x}, G) = 0,5 \log[(2\pi e)^k \det K_x]$.

Следствие 2. Если истинное распределение $P\{\cdot\}$ нормально, то

$$\inf I[P_c|P] = I[P_c|P]|_{c=c^*} = 0.$$

Следствие 3. Из семейства нормальных законов распределения P закон с наименьшими по Кульбаку - Лейблеру отличиями от истинного распределения $P\{\cdot\}$ в условиях утверждения 1 описывается плотностью

$$f^*(\hat{x}) = [(2\pi)^k \det K_x]^{-0.5} \exp(-0.5 \hat{x}^T K_x^{-1} \hat{x}).$$

Назовем выражение (7) оценкой плотности вероятности по методу минимакса энтропии.

Практической интерпретацией разложения Карунена - Лозва может служить процедура многомерного выбеливания случайного процесса, в том числе в адаптивном варианте [10]. В последнем случае вместо неизвестной ковариационной матрицы K_x в выражение (7) войдет ее состоятельная оценка $K_x(n)$ по повторной выборке $\{\hat{x}_n\}$ объема n .

4. Пример реализации. Определим нормированную матрицу оптимального преобразования (6) по формуле $\tilde{G} = \text{diag}\{\sigma_i^{-1}\} G^*$. В таком случае выполняется равенство $\tilde{G}^T \tilde{G} = K_x^{-1}$, которое в классе эрмитовых матриц K_x дает треугольный вид матрицы $\tilde{G} = K_x^{-0.5}$ с ненулевыми элементами G_{ii} , $i = \overline{1, k}$, на главной диагонали. Для этого случая будем иметь

$$I[P_c|P] = 0,5 \log [(2\pi e)^k \prod_{i=1}^k (\sigma_i^2 / G_{ii})] + \text{const},$$

и, следовательно, вид оптимального преобразования G^* с \mathcal{I} можно найти из решения вариационной задачи $\prod_i \sigma_i^2(G) \rightarrow \min$ при ограничениях $G_{ii} = \text{const}$, $i = \overline{1, k}$.

Последняя сводится к k независимым задачам \tilde{G}^i :

$$\tilde{G}_i^T K_x \tilde{G}_i^T \rightarrow \min, \quad G_{ii} = \text{const} \quad \forall i = \overline{1, k}. \quad (8)$$

Здесь вектор $\tilde{G}_i = (0, \dots, 0, G_{ii}, \tilde{G}_i^T)$ определяется i -й строкой верхней треугольной матрицы преобразования G с элементами G_{ii} на i -й позиции; \tilde{G}_i^T - "укороченный" размера $(k - i)$ вектор ненулевых элементов i -й строки без учета ее i -го элемента. По аналогии с последним введем обозначение "укороченного" вектора значений

ценрированной выборки $\tilde{x}_1^T = (\dot{x}_{1+1}, \dots, \dot{x}_k)$ и после этого применим к (8) метод стохастической аппроксимации. Путем несложных вычислений, подробно описанных в работе [10], получим систему рекуррентных уравнений в дискретном времени $n = 1, 2, \dots$,

$$\dot{\tilde{y}}_i(n) = G_{ii} \dot{x}_i(n) + \tilde{G}_i^T(n-1) \tilde{x}_i(n),$$

$$\tilde{G}_i(n) = \tilde{G}_i(n-1) - \gamma_n \dot{\tilde{y}}_i(n) \tilde{x}_i(n), \quad i = \overline{1, k}. \quad (9)$$

При выборе переменной усиления $\{\gamma_n\}$ из условий теоремы Гладышева обеспечивается сходимость итераций (9) к оптимальным векторам G_i^* "почти наверное" или с вероятностью 1. Этим условиям отвечает, например, гармоническая переменная $\gamma_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, соответствующая случаю упрощенных наилучших алгоритмов стохастической аппроксимации.

Дополним (9) аналогичными рекуррентными процедурами оценивания по одномерным наблюдениям $y_i(n)$ набора дисперсий

$$\sigma_i^2(n) = \sigma_i^2(n-1) + \gamma_n [\dot{\tilde{y}}_i^2(n) - \sigma_i^2(n-1)], \quad (10)$$

$i = \overline{1, k}$, с использованием определений (4), (6) получим окончательное выражение для эмпирической оценки плотности вероятности по повторной выборке $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$:

$$f_n^*(\tilde{x}) = (2\pi)^{-k/2} \prod_{i=1}^k [G_{ii} \sigma_i^{-1}(n)] \exp [-0,5 \dot{\tilde{x}}^T G^T(n) \times \\ \times \text{diag} \{\sigma_i^{-2}(n)\} G(n) \dot{\tilde{x}}], \quad (11)$$

где $G^T(n) \triangleq [\tilde{G}_1^T(n), \tilde{G}_2^T(n), \dots, \tilde{G}_k^T(n)]$. Его сходимость в точке к оптимальной оценке минимакса энтропии (7) непосредственно вытекает из свойства сходимости "почти наверное" итераций (9) и (10) при $n \rightarrow \infty$. При этом исключительно важное значение имеет достигаемая скорость сходимости, характеризующая динамические свойства предложенного алгоритма (9) - (10).

Для оценки последних воспользуемся известным выражением [6] кривой обучения:

$$H_p(n) = 0,5 \log \prod_{i=1}^k \sigma_i^2(n) + \text{const} = \\ + 0,5 \sum_{i=1}^k \log [\sigma_{10}^2(1 + a_i^2/n)] + \text{const},$$

где $\sigma_{10}^2 = \inf \sigma_i^2(n)$, $a_i^2 = \text{const}$, $i = \overline{1, k}$. При $n \rightarrow \infty$ кривая обучения устанавливается в нижнюю точку

$$\inf H_p(n) = 0,5 \sum_{i=1}^k \log \sigma_{10}^2 + \text{const} = \inf H_p(\tilde{x}).$$

Таким образом, выборочная оценка минимакса энтропии (11) сходится к оптимальному решению (7) почти наверное со скоростью порядка $\log n$, что много лучше закона двойного логарифма в теории асимптотически

оптимальных методов непараметрического оценивания плотностей [1, 4].

Обсуждение полученных результатов. Идея вариационного подхода к задаче восстановления неизвестной плотности вероятности отталкивается от общих принципов классической задачи проектирования математической статистики. В обоих случаях используется информационный критерий качества, а в роли исходной информации служат первые моменты распределения. Физически ясная интерпретация этой информации позволяет легко перейти от теоретических к эмпирическим оценкам распределения. Для многих приложений статистики, таких, как проверка гипотез, существенное значение имеет возможность адаптивного формирования эмпирических распределений на ограниченном интервале наблюдения. Наилучшие результаты такой подход дает для семейства нормальных популяций. Во всех иных ситуациях оценка минимакса энтропии является ортопроекцией неизвестного распределения на параметрическое семейство нормальных плотностей. Добавим к сказанному, что данный подход может быть распространен и на случай наличия информации о моментах высших порядков. Последнее будет иметь значение, например, при восстановлении существенно несимметричных и многомодальных распределений. Подробное освещение этих возможностей требует, однако, специального исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. - М.: Наука, 1979.
2. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. - М.: Наука, 1972.
3. Афанасьев В. П. //Радиотехника и электроника. 1985. Т.30. № 4. С.718.
4. Иоффе М. О., Катковник В. Я. //Автоматика и телемеханика. 1986. № 12. С.33.
5. Фигаро В. А., Ханох Б. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. № 3. С.281.
6. Савченко В. В. //Автоматика и телемеханика. 1988. № 10. С.101.
7. Савченко В. В. //Радиотехника и электроника. 1989. Т.34. № 1. С.68.
8. Ждейнс Э. Т. //ТИИЭР. 1982. Т.70. № 9. С.33.
9. Берг Д. П., Люндергер Д. Г., Венгер Д. Л. //ТИИЭР. 1982. Т.70. № 9. С.63.
10. Савченко В. В. //Радиотехника и электроника. 1986. Т.31. № 8. С.1571.

Нижегородский политехнический
институт

Поступила в редакцию
3 мая 1989 г.,
в окончательном варианте
21 января 1991 г.

A RECURRENT METHOD OF PROBABILITY DENSITY RESTORATION
ON THE LIMITED INTEGRAL DATA

V.V.Savchenko

The rationale of the minimax entropy of observations in the problem of restorating distribution density by first initial moments of the unknown distribution is described. A new recurrent algorythm of restoration on the limited data array is synthesised. The problems of its realisation are solved, the rapidity of calculations is investigated.

УДК 537.86:519.2

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ С ДВУХМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. А. Гузев, В. И. Кляцкин

В рамках метода погружения и метода усреднения изучены статистические характеристики волнового поля при падении плоской волны на слой случайной среды с двухмасштабными неоднородностями.

Пусть слой случайно-неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 \leq x \leq L$ и справа (из области $x \geq L$) на него падает плоская волна $\exp[-ik(x-L)]$. Волновое поле в слое среды описывается одномерным уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 [1 + \varepsilon(x)] u(x) = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$[1 + \frac{i}{K} \partial_x] u(x) \Big|_{x=L} = 2, \quad [1 - \frac{i}{K} \partial_x] u(x) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (2)$$

Вне слоя считаем $\varepsilon = 0$, а волновое число $k = \kappa + i\gamma$ ($\gamma \ll \kappa$), где γ описывает поглощение волны в среде. Используя метод погружения [1], краевую задачу (1), (2) можно переформулировать в виде задачи с начальными условиями по параметру, связанному с положением границы слоя L :

$$\frac{\partial u(x, L)}{\partial L} = [ik + \frac{i\kappa}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)] u(x, L), \quad u(x, L) \Big|_{L=x} = 1 + R_x,$$

$$\frac{dR_L}{dL} = 2ikR_L + \frac{i\kappa}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_L \Big|_{L=L_0} = 0. \quad (3)$$

Здесь R_L – комплексный коэффициент отражения волны от слоя, а поле на границе слоя определяется выражением $u(L, L) = 1 + R_L$.

Из системы (3) следуют уравнения для интенсивности волны в слое среды $I(x, L) = |u(x, L)|^2$:

$$\frac{\partial I(x, L)}{\partial L} = -4\gamma I(x, L) + \frac{i\kappa}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) I(x, L),$$

$$I(x, L) \Big|_{L=x} = |1 + R_x|^2. \quad (4)$$

Пусть теперь $\varepsilon(L)$ – случайная гауссова функция со средним значением $\langle \varepsilon(L) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $B_\varepsilon(L-L') = \langle \varepsilon(L) \varepsilon(L') \rangle$. Тогда для одномасштабных флуктуаций $\varepsilon(L)$ статистические

характеристики коэффициента отражения и волнового поля внутри среды характеризуются коэффициентом диффузии

$$D = (\kappa/4)^2 \Phi_\epsilon(2\kappa),$$

где $\Phi_\epsilon(q) = \int dx B_\epsilon(x) \exp(iqx)$ - спектральная функция. Характерный вид кривой для одномасштабных флуктуаций соответствует линии 1 на рис. 1. Появление значения спектральной функции на удвоенной

пространственной гармонике физически связано с известным условием Брэгга для дифракций на пространственных структурах. Это означает, что статистическое описание волновой задачи (1), (2) с корреляционной функцией $B_\epsilon(L-L')$ при дос-

таточно малых значениях $B_\epsilon(0)=\sigma^2$ совпадает с описанием задачи в предположении, что случайный процесс $\epsilon(L)$ - гауссов белый шум с корреляционной функцией $B_\epsilon(L) = \Phi_\epsilon(2\kappa)\delta(L)$ и спектральной функцией, соответствующей линии 2 на рис. 1. Это так называемое диф-

фузионное приближение, в котором можно считать, что на масштабах порядка радиуса корреляции влияние флуктуаций на динамику задачи несущественно и решение краевой задачи (1), (2) является марковским процессом. Отметим, что такое приближение соответствует аппроксимации гауссова случайного процесса $\epsilon(L)$ телеграфным

процессом (см., например, [2]).

Если мы деформируем кривую спектральной функции далее, сохранив значение $\Phi_\epsilon(2\kappa)$ (кривая 3 на рис. 1), то статистические характеристики функции $\epsilon(L)$ задаются двумя масштабами - величиной 2κ и шириной λ спектральной кривой 3 на рис. 1. При $\lambda < 2\kappa$ задача по своей сути становится близкой к задаче о волнах в средах с периодическими неоднородностями и, следовательно, статистические эффекты должны быть "приглушенны". Это означает, что диффузионное приближение, описанное выше, не должно быть применимо в этом случае.

Корреляционная функция, соответствующая кривой 3 на рис. 1, описывается выражением

$$B_\epsilon(L) = \sigma^2 \exp(-\lambda|L|) \cos 2\kappa L, \quad (5)$$

и при $\lambda < 2\kappa$ на масштабах порядка радиуса корреляции $l = 1/\lambda$ уже нельзя считать, что влияние $\epsilon(L)$ несущественно, как в диффузионном приближении, а необходимо учесть параметрическое взаимодействие волны со средой. Величина $\Phi_\epsilon(2\kappa)$ для корреляционной функции (5) определяется выражением

$$\Phi_\epsilon(2\kappa) = \frac{2\sigma^2}{\lambda} \frac{\lambda^2 + 8\kappa^2}{\lambda^2 + 16\kappa^2} = \begin{cases} 2\sigma^2 \cdot \lambda^{-1}, & \lambda > 2\kappa \\ \sigma^2 \cdot \lambda^{-1}, & \lambda < 2\kappa \end{cases}$$

и, следовательно, статистические характеристики волнового поля при $\lambda < 2\kappa$ характеризуются коэффициентом диффузии $D = \sigma^2 \kappa^2 / 4\lambda$. Введем безразмерные величины $\Lambda = \lambda/D$, $\beta = 2\gamma/D$, $\alpha = \kappa/D$, $L \rightarrow DL$ и перепишем уравнения (3), (4) в виде

$$\frac{\partial u_L}{\partial L} = -\beta(u_L^2 - 1) + 2\tilde{\epsilon}\sqrt{u_L^2 - 1} \sin(\psi_L + 2\alpha L),$$

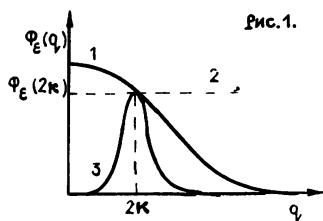


Рис. 1.

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial L} = 2\tilde{\epsilon}(L) [1 + u_L / \sqrt{u_L^2 - 1} \cos(\psi_L + 2\alpha L)], \quad (6)$$

$$\frac{\partial I(x, L)}{\partial L} = -\beta I(x, L) - 2\tilde{\epsilon}(L) I(x, L) \sqrt{(u_L - 1)/(u_L + 1)} \sin(\psi_L + 2\alpha L),$$

где $\rho_L = \sqrt{(u_L - 1)/(u_L + 1)}$ - модуль коэффициента отражения, $\varphi_L = \psi_L + 2\alpha L$ - его фаза, а $\tilde{\epsilon}(L)$ - гауссов случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $\langle \tilde{\epsilon}(L) \tilde{\epsilon}(L') \rangle = \Lambda \exp(-\Lambda|L - L'|) \times \cos 2\alpha(L - L')$. Выделим в $\tilde{\epsilon}(L)$ осциллирующие ($\sim \cos 2\alpha L, \sin 2\alpha L$) вклады. С этой целью введем гауссова статистически независимые случайные процессы $u(L)$, $v(L)$ с нулевым средним и корреляционными функциями $\langle u(L)u(L') \rangle = \langle v(L)v(L') \rangle = \Lambda \exp(-\Lambda|L - L'|)$. Тогда $\tilde{\epsilon}(L)$ записывается следующим образом через $u(L)$, $v(L)$:

$$\tilde{\epsilon}(L) = u(L) \cos 2\alpha L + v(L) \sin 2\alpha L.$$

Рассмотрим статистическое описание коэффициента отражения. Для случайных величин u_L , ψ_L совместная плотность вероятности $F_L(u, \psi) = \langle \delta(u_L - u) \delta(\psi_L - \psi) \rangle$. Поступая стандартным способом [2], можно получить соответствующее эволюционное уравнение для $F_L(u, \psi)$. Но построение его решения затруднено из-за присутствия двух неизвестных функций. В дальнейшем нас будут интересовать статистические характеристики u_L , тогда ее плотность вероятности $P_L(u) = \int d\psi F_L(u, \psi)$. В этом случае анализ уравнения для $F_L(u, \psi)$ показывает, что единственной неизвестной функцией, подлежащей определению, является $\varphi_1 = 2[u \cos 2\alpha L + v \sin 2\alpha L] \sin(\psi + 2\alpha L) F_L$. Точная система уравнений для ее нахождения является в общем случае бесконечной, поэтому естественным является путь "уокрачивания" уравнений и построение приближенного решения. Здесь используются две идеи.

Первая связана с аппроксимацией гауссовых случайных процессов $u(L)$, $v(L)$ телеграфными процессами. Тогда $u^2(L) = v^2(L) = \Lambda$ [2], а для произвольного функционала G_L , зависящего от u, v ,

$$[\partial_L + \Lambda] \langle uG_L \rangle = \langle u\partial_L G_L \rangle, \quad [\partial_L + \Lambda] \langle vG_L \rangle = \langle v\partial_L G_L \rangle.$$

Подставим φ_1 вместо G_L , тогда в получаемых соотношениях присутствуют члены, содержащие произведение uv множителем, ими следует пренебречь по сравнению со слагаемыми, пропорциональными $u^2(L) = v^2(L) = \Lambda$, поскольку вклад первой группы членов в $\langle \varphi_1 \rangle$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми. Для учета вклада гармонических (пропорциональных $\cos 2\alpha L, \sin 2\alpha L$ и их произведениям) воспользуемся методом усреднения.

Согласно общей идеи метода усреднения решение для неизвестной функции можно записать в виде суммы медленно меняющейся функции и периодической по L поправки. В ведущем порядке (~ 1) уравнение для медленной компоненты получается из точного - после проведения усреднения правых частей точных уравнений по явно входящей переменной L . Решение усредненных уравнений хорошо аппроксимирует точное решение на расстояниях, для которых параметры задачи меняются

на величину порядка единицы. Это изменение определяется корреляционными функциями $\langle uu \rangle$, $\langle vv \rangle$, поэтому характерный масштаб по $L \sim 1/\Lambda$.

Проводя вышеуказанные преобразования, получим следующую систему уравнений для медленных изменений функций $P_L = P_L(u)$, $\langle \varphi_1 \rangle$ (интегрирование по ψ в $\langle \varphi_1 \rangle$ проведено):

$$\partial_L P_L = \beta \partial_u (u^2 - 1) P_L - \partial_u \sqrt{u^2 - 1} \langle \varphi_1 \rangle, \quad (7)$$

$$[\partial_L + \Lambda] \langle \varphi_1 \rangle = \beta \partial_u (u^2 - 1) \langle \varphi_1 \rangle - 2\Lambda \sqrt{u^2 - 1} \partial_u P_L.$$

Это и есть окончательная система уравнений для определения плотности распределения случайной величины u_L .

В случае стационарного распределения $P_L(u)$ не зависит от L и (7) переходит в

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \rangle &= \beta \sqrt{u^2 - 1} P_\infty(u), \quad [\Lambda - \beta \partial_u (u^2 - 1)] \langle \varphi_1 \rangle = \\ &= - 2\Lambda \sqrt{u^2 - 1} \partial_u P_\infty(u). \end{aligned} \quad (8)$$

Решая систему уравнений (8), получаем стационарную плотность распределения $P_\infty(u)$:

$$\begin{aligned} P_\infty(u) &= C |u - \mu|^{1/2\beta(\Lambda/\mu - 3\beta)} |u + \mu|^{-1/2\beta(\Lambda/\mu + 3\beta)}, \\ \mu &= \sqrt{1 + 2\Lambda/\beta^2}. \end{aligned}$$

Значение C определяется из условия нормировки $P_\infty(u)$, а требование интегрируемости в точке $u = \mu$ выделяет те Λ , для которых существует $P_\infty(u)$: $\Lambda > 1 + \sqrt{1 + \beta^2}$. При $\Lambda \gg 1$ из (9) следует, что $P_\infty(u) \rightarrow \beta e^{-\beta(u-1)/2}/2$. В этом случае поведение моментов величины $|R_L|^2$ хорошо изучено (см. [1]).

Рассмотрим моменты волнового поля $I_L^n(x, L) = |u(x, L)|^{2n}$ в отсутствие затухания ($\beta = 0$) для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$). Тогда, как известно [1], все моменты модуля коэффициента отражения стремятся к единице: $P_\infty(\rho) = \delta(\rho - 1)$ и уравнение для $I_L^n(x, L)$ можно записать в виде (см. (6))

$$\frac{\partial I_L^n(x, L)}{\partial L} = - 2n I_L^n(x, L) \varphi_2(L),$$

где функция $\varphi_2(L) = 2(u \cos 2\alpha L + v \sin 2\alpha L) \sin(\psi_L + 2\alpha L)$ подлежит определению. Для замыкания системы уравнений на $\langle I_L^n(x, L) \rangle$, $\langle \varphi_2'(L) \rangle$ воспользуемся способом, примененным при получении (7). Это дает

$$\partial_L \langle I_L^n \rangle = - n \langle \varphi_2 \rangle, \quad [\partial_L + \Lambda] \langle \varphi_2 \rangle = - 2\Lambda(n - 1) \langle I_L^n \rangle.$$

Нормируя $\langle I_L^n \rangle$ на его значение при $L = x$ и переходя к переменной $\xi = L - x$, имеем уравнение второго порядка

$$[\partial_\zeta + \Lambda] \partial_\zeta \langle I_\zeta^n \rangle = 2\Lambda n(n-1) \langle I_\zeta^n \rangle,$$

решение которого с условиями $\langle I_\zeta^n \rangle|_{\zeta=0} = 1$, $\partial_\zeta \langle I_\zeta^n \rangle|_{\zeta=0} = -n$ дается следующей формулой:

$$\langle I_\zeta^n \rangle = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[(\mu_1 + n) e^{\mu_2 \zeta} - (\mu_2 + n) e^{\mu_1 \zeta} \right],$$

$$\mu_{1,2} = -\frac{\Lambda}{2} \pm \frac{\Lambda}{2} \sqrt{1 + [8n(n-1)]/\Lambda}. \quad (10)$$

Было проведено моделирование рассматриваемой задачи. На рис. 2, 3 изображены кривые 1, построенные по формуле (10) и результатам численного счета при $\Lambda = 1,5$ и $\Lambda = 2,5$ соответственно (в обоих случаях $\beta = 0,001$).

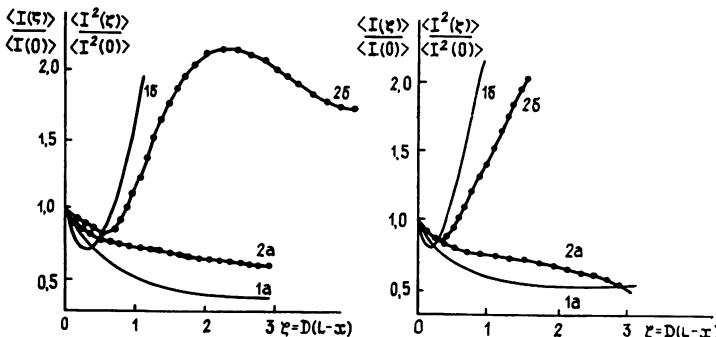


Рис. 2, 3.

Индекс a отвечает первому моменту, а индекс b – второму. Убывание моментов поля вблизи границы обусловлено "псевдопериодичностью" среды, при этом в области, прилежащей к границе, вклад в интенсивность волнового поля дают волны, испытывающие малое количество переотражений на неоднородностях среды, и статистические эффекты не дают существенного вклада. Это подтверждается еще тем, что вблизи границы $\langle I^2 \rangle \approx \langle I \rangle^2$, что имеет место для детерминированных величин. В глубине слоя волна испытывает большое количество переотражений и статистические эффекты оказывают основное влияние на характеристики поля. В результате этого поведение моментов (начиная со второго) меняется принципиально: они растут экспоненциально. Наличие же сколь угодно малого затухания приводит к прекращению роста второго момента и его дальнейшему убыванию. Из рисунков видно, что аналитическое решение хорошо описывает поведение моментов на интервале $\zeta \sim 1/\Lambda$. Это как раз соответствует области применимости по ζ усредненных уравнений. При этом наблюдается (см. рис. 2) "затягивание" асимптотики по Λ : аналитическим решением можно воспользоваться и в области $1 < \Lambda < 2$.

Авторы выражают благодарность Д. В. Вовне за проведенную работу по численному моделированию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. - М.: Наука, 1986. - 256 с.
2. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1980. - 336 с.

Тихоокеанский океанологический
институт ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
9 января 1990 г.

TO THE THEORY OF WAVE PROPAGATION IN RANDOM MEDIA WITH TWO-SCALE INHOMOGENEITIES

M. A. Guzey, V. I. Klyatskin

In the framework of the imbedding method and the averaging method, statistical characteristics of the wave field have been investigated in the case of plane wave incident on a randomly layered medium with two-scale inhomogeneities.

УДК 538. 574. 2

СВЕРХОТРАЖЕНИЕ ОТ НЕОДНОРОДНО-ИНВЕРТИРОВАННЫХ СЛОЕВ

Б. С. Абрамович, Б. Е. Немцов

Установлены общие закономерности отражения от активных плавно-неоднородных сред и для сред с узкой в пространстве областью усиления. Выяснены условия, при которых коэффициент отражения плоских волн стремится к бесконечности. Исследованы дисперсионные свойства собственных волн в неоднородных активных средах. Показано, что в случае плавно-неоднородных сред собственные волны могут быть абсолютно неустойчивыми.

В ряде экспериментов по отражению оптического излучения от активных сред было обнаружено, что отраженная волна превосходит по амплитуде падающую [1-6]. В частности, в работе [1] отмечалось, что коэффициент отражения по интенсивности достигает $\sim 10^4$. В первых теоретических работах, посвященных данному вопросу, была предпринята попытка объяснить эффект сверхотражения на основе формул Френеля для коэффициентов отражения от границы раздела двух однородных сред [7,8]. Однако, соответствующий анализ показал, что коэффициенты отражения оказываются порядка пяти и поэтому объяснить эксперименты на основе обычных формул Френеля не удается [8]. Кроме того, при теоретическом анализе вопроса возникают принципиальные сложности, связанные с выбором решения для поля прошедшей волны [8]. Дело в том, что если волна падает на границу раздела под углом, близким к критическому, то не ясно, какое решение для прошедшей волны выбирать: убывающее внутрь среды (за счет полного отражения) или растущее (за счет усиливающих свойств среды). Предлагавшиеся рецепты выбора решений были необоснованными [8-10]. Указанные обстоятельства явились побудительным мотивом для анализа более сложной задачи об отражении от неоднородно-инвертированных сред. В первой из работ, посвященных данному вопросу, рассмотрена модель активной среды, в которой инверсия убывает вглубь по экспоненциальному закону [11]. Там же устанавливается, что коэффициенты отражения могут значительно превосходить единицу, и выяснено, что эффект сверхотражения существует в узкой области углов падения вблизи критического угла. Аналогичные результаты содержатся в [12,13]. В статье [13] рассмотрена задача об отражении от среды с линейно и экспоненциально уменьшающейся вглубь инверсией и показано, что при переходе к однородным средам величина коэффициента отражения зависит от исходной модели неоднородной среды. На этом основании делается вывод о некорректности задачи об отражении от однородно-инвертированных сред. Кроме этого, в работе [13] установлено, что в средах с плавно-неоднородной инверсией возможно существование нового типа поверхностных волн. Структура поля поверхностной волны этого типа такова, что в неинвертированной среде эта волна является незатухающей и может быть возбуждена плоской волной.

В цитируемых выше работах исследовались коэффициенты отражения для конкретных профилей $\epsilon(z)$ (ϵ - диэлектрическая проницаемость среды). При этом общие результаты в задачах об отражении от активных сред получены не были. Целью настоящей статьи является установление

общих закономерностей отражения от инвертированных сред (плавно-неоднородных и с узкой в пространстве областью усиления). Для этих двух случаев формулируется критерий сверхотражения и анализируются дисперсионные свойства собственных волн, связанных с неоднородностью инверсии. Анализ показывает, что в плавно-неоднородных средах собственные волны могут быть абсолютно неустойчивыми, что представляет существенный интерес для проблемы создания лазеров без зеркал.

1. Отражение от сред с плавно-неоднородной инверсией. Предположим, что электромагнитная волна распространяется в плоскости z, y , а вектор электрического поля направлен перпендикулярно этой плоскости. Будем также считать, что среда неоднородна в одном направлении z . Тогда задача о нахождении полей электромагнитных волн сводится к решению уравнения

$$E_{zz} + E_{yy} + k_0^2 \epsilon(z) E = 0, \quad (1)$$

где считается, что поля $-\exp(-i\omega t)$, $k_0 = \omega/c$, c - скорость света. Ищем решение в виде $E = f(z) \exp(iky)$, после чего уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f_{zz} + (k_0^2 \epsilon - k^2) f = 0. \quad (2)$$

Прежде чем решать задачу о прохождении и отражении от плавного слоя, рассмотрим модельную задачу о прохождении через параболический барьер. Предположим, что $\epsilon(z) = \bar{\epsilon} + bz^2$, где $\bar{\epsilon}$ - диэлектрическая проницаемость в центре слоя, причем в случае активной среды $\text{Im}\bar{\epsilon} < 0$. Для того, чтобы при $z \rightarrow \pm \infty$ среда была неусиливающей, следует считать, что $\text{Im}b > 0$. После перехода к безразмерной переменной $x = \sqrt{2} k_0^{1/2} b^{1/4} \exp(-i\pi/4) z$ для f получаем уравнение параболического цилиндра [14], частное решение которого имеет вид

$$f = D_\nu(x), \quad (3)$$

$$x = \sqrt{2} k_0^{1/2} b^{1/4} \exp(-i\pi/4) z,$$

$$\nu = \frac{k_0 \epsilon_0 \exp(-i\pi/2)}{2b^{1/2}} - \frac{1}{2}, \quad \epsilon_0 = \frac{k^2}{k_0^2} - \bar{\epsilon}.$$

Асимптотическое поведение $D_\nu(x)$ при $z \rightarrow +\infty$

$$D_\nu(x) = x^\nu \exp(ib^{1/2} k_0 z^2 / 2) \quad (4)$$

показывает, что выбранное решение содержит при $z \rightarrow +\infty$ волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z . Будем называть ее прошедшей. При $z \rightarrow -\infty$ ($\arg z = \pi$) асимптотическое поведение $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = x^\nu \exp(\frac{i}{2} b^{1/2} k_0 z^2) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp(i\nu\pi) x^{-\nu-1} \exp(-\frac{1}{2} b^{1/2} k_0 z^2). \quad (5)$$

Первое слагаемое в (5) соответствует волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси z (направление распространения выбирается из условия роста фазового множителя), второе отвечает волне, падающей из $z = -\infty$ на параболический слой. Естественно поэтому называть первое слагаемое отраженной волной, а второе - падающей. Из (4), (5) легко получить формулы для коэффициентов отражения и прохождения.

Для нас, однако, важно то, что, как видно из (5), при условии $\nu \rightarrow n$ (n - натуральное число) амплитуда падающей волны стремится к нулю, в то время как амплитуды отраженной и прошедшей волн остаются конечными. Этот факт означает, что при $\nu = n$ или в развернутом виде при

$$k_0 \epsilon_0 \exp(-i\pi/2)/2b^{1/2} = n + 1/2 \quad (6)$$

коэффициенты отражения и прохождения обращаются в бесконечность. Если, например, b - действительное число, то соотношение (6) выполнено для

$$k^2/k_0^2 = \operatorname{Re} \bar{\epsilon}, \quad -k_0 \operatorname{Im} \bar{\epsilon}/2b^{1/2} = n + 1/2. \quad (7)$$

Из (7) следует, что эффект сверхотражения возможен лишь для активных систем. Если параметры b и $\bar{\epsilon}$ заданы, что, подбирая частоты излучения, можно легко добиться эффекта сверхотражения.

Приведенные результаты легко обобщить на случай произвольного плавного профиля $\epsilon(z)$, содержащего две точки поворота вблизи начала координат, причем эти точки могут лежать в комплексной плоскости z . Обобщение основано на методе фазовых интегралов [15]. Хотя этим методом нельзя вычислить коэффициенты отражения и прохождения волн в случае комплексных ϵ , тем не менее удается получить условие, при котором коэффициенты отражения и прохождения обращаются в бесконечность. Это условие имеет вид

$$\oint \sqrt{k^2 \epsilon(z) - k^2} dz = 2\pi(n + 1/2), \quad (8)$$

где интеграл берется по контуру, охватывающему обе точки поворота.

Соотношение (8) является обобщением условия квантования Бора-Зоммерфельда на комплексный случай. В частном случае $\epsilon(z) = bz^2 + \bar{\epsilon}$ (8) переходит в (6).

Определим, при каких параметрах слоя и падающей волны коэффициент отражения обращается в бесконечность. Для этого предположим, что $\epsilon(z) \rightarrow \epsilon_1$ при $z \rightarrow \infty$ будем считать, что вблизи начала координат, где находятся точки поворота, $\epsilon(z) \approx bz^2 + \bar{\epsilon}$. Учитывая сказанное, можно положить в (8) $k = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin \vartheta$ (ϑ - угол падения волны на слой), после чего получим

$$k_0 (\epsilon_1 \sin^2 \vartheta - \bar{\epsilon}) / 2b^{1/2} = (n + 1/2) \exp(i\pi/2). \quad (9)$$

Если усиление достаточно мало, т. е. $|\operatorname{Im} \bar{\epsilon}| \ll \operatorname{Re} \bar{\epsilon}$, $\operatorname{Im} b \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, то условие сверхотражения (9) выполнено при

$$\epsilon_1 \sin^2 \vartheta \approx \operatorname{Re} \bar{\epsilon}, \quad \operatorname{Im} \bar{\epsilon} = -2b^{1/2}(n + 1/2)/k_0. \quad (10)$$

В ординарных экспериментах $k_0 \gg |b^{1/2}|$ (длина волны много меньше масштаба неоднородности слоя), поэтому (10) выполнено при $|\operatorname{Im} \bar{\epsilon}| \ll 1$, что и предполагалось вначале.

Формула (8) является одновременно дисперсионным уравнением для собственных волн в среде. Из физических соображений ясно, что наиболее неустойчивыми будут волны, распространяющиеся в волноводном канале. Волноводный режим реализуется при $\operatorname{Re} b < 0$. Считая слой слabo

поглощающим, $\operatorname{Im} b < \operatorname{Re} b$, из (8) получим

$$k_0 = \frac{\sqrt{k^2 \bar{\epsilon} - b(n + 1/2)} - ib^{1/2}(n + 1/2)}{\bar{\epsilon}}. \quad (11)$$

Положив $b = |b| \exp[i(\pi-\chi)]$ ($\chi < 1$), будем иметь

$$\operatorname{Re} k_0 = \frac{\sqrt{k^2 \operatorname{Re} \bar{\epsilon} + |b|(n + 1/2)} + |b|^{1/2}(n + 1/2)}{\operatorname{Re} \bar{\epsilon}}, \quad (12)$$

$$\operatorname{Im} k_0 = \frac{\operatorname{Re} k_0 (-\operatorname{Im} \bar{\epsilon} \operatorname{Re} k_0 - 2|b|^{1/2}(n + 1/2) \sin \chi / 2)}{2\sqrt{k^2 \operatorname{Re} \bar{\epsilon} + |b|(n + 1/2)}}.$$

откуда видно, что при $\operatorname{Im} \bar{\epsilon} < 0$ и достаточно малых χ собственные волны неустойчивы.

Важным оказывается тот факт, что неустойчивость может быть абсолютной, т.е. пакет собственных волн системы растет в каждой точке пространства. Согласно критерию Бриггса [16] режим абсолютной неустойчивости реализуется при

$$\chi < 2|\operatorname{Im} \bar{\epsilon}|/\operatorname{Re} \bar{\epsilon}, \quad (13)$$

а при обратном неравенстве неустойчивость носит конвективный характер.

2. Отражение от активной среды с узкой областью усиления. Рассмотрим задачу об отражении плоской электромагнитной волны, падающей из однородной неинвертированной среды на границу раздела с инвертированной средой. Если предположить, как и ранее, что волна распространяется в плоскости z, y , а вектор E колеблется в перпендикулярной ей плоскости, то поле в неинвертированной среде ($z < 0$) можно представить в виде

$$E = \exp\left(-i\omega t + iky + i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 - k^2} z\right) + R \exp\left(-i\omega t + iky - i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} z\right), \quad (14)$$

где ϵ_1 — диэлектрическая проницаемость однородной среды, R — коэффициент отражения.

Поле в активной среде ($z > 0$) ищем в виде $E = f(z) \exp(-i\omega t + iky)$. Используя граничные условия неразрывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, для R получим

$$R = \frac{i\sqrt{k_1^2 - k^2} - f'(0)/f(0)}{i\sqrt{k_1^2 - k^2} + f'(0)/f(0)}. \quad (15)$$

Здесь $k_1 = \epsilon_1^{1/2} \omega / c$ — волновое число в однородной среде. Таким образом, для определения коэффициента отражения необходимо знать $f'(0)/f(0)$. Функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$f'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(z) - k^2\right) f = 0. \quad (16)$$

Представим $\epsilon(z)$ в виде $\epsilon(z) = \epsilon_2 + \Delta\epsilon$, где $\epsilon_2 = \text{const}$, $\Delta\epsilon(z)$ — зависящее от координат слагаемое, после чего перепишем (16) в форме

$$f'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k^2 \right) f = - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \epsilon f. \quad (17)$$

Ищем решение (17) в виде $f = C \exp(ik_2 z)$ ($k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \omega^2/c^2 - k^2}$), тогда для C получаем уравнение

$$C'' + 2ik_2 C' = - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \epsilon C. \quad (18)$$

Предположим, что $\Delta \epsilon$ отлично от нуля в некоторой узкой полосе ширины a близи границы раздела $z = 0$. Ясно, что если a и $\Delta \epsilon$ достаточно малы, то C мало изменяется на масштабе $-a$ и поэтому в правой части (18) можно заменить $C(z)$ на $C(0)$. После этого уравнение (18) легко решается, и мы получим:

$$C'(z) = - \frac{\omega^2}{c^2} C(0) \exp(-2ik_2 z) \int_{-\infty}^z \Delta \epsilon(z') \exp(2ik_2 z') dz'; \quad (19)$$

$$C(z) = C(0) \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^z \exp(-2ik_2 z') dz' \int_z^{\infty} \Delta \epsilon(z'') \exp(2ik_2 z'') dz'' \right]. \quad (20)$$

Условием применимости данного подхода является малость второго слагаемого в (20) по сравнению с первым. Для этого достаточно, чтобы

$$\frac{\omega^2}{c^2} |\Delta \epsilon(0)| a^2 \ll 1. \quad (21)$$

Таким образом, (19) справедливо при соблюдении неравенства (21). Используя (19), легко получить, что $R \rightarrow \infty$, если выполнено равенство

$$\sqrt{k_1^2 - k^2} + k_2 = \frac{i\omega^2}{c^2} \int_0^{\infty} \Delta \epsilon \exp(2ik_2 z') dz'. \quad (22)$$

Соотношение (22) является условием сверхотражения и наряду с этим – дисперсионным уравнением для собственных (поверхностных) волн, возникающих на границе раздела сред. Исследуем (22) в случае, когда $\Delta \epsilon = -i\varepsilon_0 \exp(-z/a)$. При этом

$$\sqrt{k_1^2 - k^2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon_0 a}{c^2} \left(1 - 2i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2} a \right)^{-1}. \quad (23)$$

Предположим, что среды мало отличаются друг от друга, т. е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Тогда из условия (21) и соотношения (23) заключаем, что $|\sqrt{k_1^2 - k^2} a| \ll 1$, а частота собственных волн

$$\omega = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(1 + \frac{k^2 a^2 \varepsilon_0^2}{8\varepsilon_1^2} \right) \quad (24)$$

Из (24) видно, что решение уравнения (23) с $\operatorname{Im} \omega > 0$ существует лишь тогда, когда $0 < \arg \varepsilon_0 < \pi/2$, т. е. в случае когда наряду с усилением реализуется режим волноводного распространения электромагнитных волн (скорость света в области, примыкающей к границе, минимальна). Интересно, что если среда обладает только усиливающими свойствами ($\arg \varepsilon_0 = 0$), то, как видно из (24), собственная волна не является прижатой к границе раздела, а распространяется в неинвертированной среде. В то же время для

неоднородной неактивной среды поверхность волна прижата к границе раздела сред. Именно поэтому поверхность модуля в активной среде можно возбуждать источником плоских волн.

Несложный анализ (23) показывает, что неустойчивость собственных волн в случае тонкого инвертированного слоя носит конвективный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган Б. Я., Волков В. М., Лебедев С. А. //Письма в ЖЭТФ. 1972. Т.16. Вып. 3. С. 144.
2. Koester Ch.J.//IEEE 1966. V. VQE-2. N 4. P. 63.
3. Лебедев С. А., Кизель В. А., Коган Б. Я. //Квантовая электроника. 1976. Т. 3. N 11. С. 2446.
4. Cubulski R.F. Silverman M.P.//Opt.Lett.1983. V. 8. N 3. P.142.
5. Cubulski R.F., Silverman M.P.//JOSA. 1983. N 73. P. 1739.
6. Бойко Б. Б., Уварова Н. И. //Квантовая электроника. 1987. Т. 14. N 7. С. 1431.
7. Лебедев С. А., Волков В. М., Коган Б. Я. //Опт. и спектр. 1973. Т. 35. Вып. 5. С. 976.
8. Вайнштейн Л. А. //УФН.1976. Т. 118. N 2. С. 339.
9. Бойко Б. Б., Петров Н. С., Длилавдари И. З. В кн.: Квантовая электроника и лазерная спектроскопия. -Минск: Наука и техника, 1974. С. 449.
10. Коган Е. Я., Молевич Н. Е. //Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 2. С.252.
11. Cubulski R.F., Carnigkia C.K.//JOSA. 1977. V.67. N 12. P. 1620.
12. Петров Н. С. //Вестник АН БССР. Сер. Физ.-мат. наук. 1983. N 3. С. 62.
13. Немцов Б. Е. Препринт НИРФИ № 248. Горький. 1988.
14. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. -М.: Наука, 1966. Т. 2. 287 с.
15. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). - М.: Мир, 1965. 120 с.
16. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Физическая кинетика. -М.: Наука, 1982. Т. 10. 540 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
9 ноября 1989 г.

SUPER-REFLECTION BY INHOMOGENEOUSLY INVERTED LAYERS

B. S. Abramovich, B. E. Nemtsov

The general laws have been stated for the reflection by active smoothly inhomogeneous media and for media with a spaceregion narrow of amplification. Conditions are found out under which the reflection coefficient of plane waves tends to infinity. The dispersion properties of natural waves in inhomogeneous active media have been investigated. It is shown that in the case of smoothly inhomogeneous media the natural waves can be absolutely unstable.

УДК 621.372.82

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

В. М. Темнов

Методом полуобращения интегрального оператора решена задача о поверхностных волнах в однополосковой линии передачи, представляющей собой расположенный на диэлектрической подложке полосковый проводник конечной ширины. Получено дисперсионное уравнение для поверхностных волн в линии; приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей и распределения плотностей токов на полосковом проводнике.

Однополосковая линия передачи (ОПЛ) представляет собой структуру, состоящую из полоскового проводника конечной ширины $2w$, нанесенного на диэлектрическую подложку проницаемости ϵ и толщины h

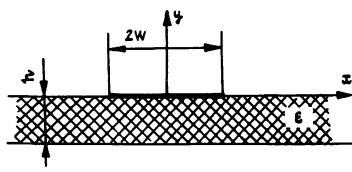


Рис. 1

(рис. 1). Необходимость анализа ОПЛ обусловлена, с одной стороны, наметившейся в последнее время тенденцией перехода к объемному интегральному проектированию, когда в качестве подложки используется образующая объемный модуль частично металлизированная многослойная структура [1,2], а с другой стороны - возможностью использования ОПЛ в качестве линии передачи в устройствах

сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн.

В настоящей работе проводится исследование поверхностных волн в ОПЛ. Предполагается, что зависимость компонент поля от времени t и координаты z имеет вид $\exp[i(\beta z - \omega t)]$ (β - фазовая постоянная, ω - круговая частота), потери в проводнике и диэлектрике отсутствуют. Искомое поле должно удовлетворять также волновому уравнению, условию убывания на поперечной бесконечности, условию конечности энергии в любом ограниченном объеме.

Решение поставленной задачи проводится методом полуобращения интегрального оператора [3], согласно которому задача сводится к решению однородной системы парных интегральных уравнений относительно трансформант Фурье поперечного $X(\alpha)/\alpha$ и продольного $Y(\alpha)$ токов на полосковом проводнике (см. также [4,5]):

$$\left. \begin{aligned} \int X(\alpha) \frac{|\alpha|}{\alpha} e^{i\alpha\bar{x}} d\alpha &= \int [X(\alpha)a(\alpha) + Y(\alpha)b(\alpha)] \frac{|\alpha|}{\alpha} e^{i\alpha\bar{x}} d\alpha \\ \int Y(\alpha) \frac{|\alpha|}{\alpha} e^{i\alpha\bar{x}} d\alpha &= \int [X(\alpha)c(\alpha) + Y(\alpha)d(\alpha)] \frac{|\alpha|}{\alpha} e^{i\alpha\bar{x}} d\alpha \end{aligned} \right\} |\bar{x}| < \bar{w},$$

$$\left. \begin{aligned} \int X(\alpha) e^{i\alpha\bar{x}} d\alpha &= 0 \\ \int Y(\alpha) e^{i\alpha\bar{x}} d\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} |\bar{x}| > \bar{w}, \quad \bar{x} = x/h, \quad \bar{w} = w/h. \quad (1)$$

В интегралах с опущенными пределами интегрирование проводится в пределах от $-\infty$ до ∞ .

В (1) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 a(\alpha) &= \frac{|\alpha|}{\alpha} - \frac{A(\alpha)D - C(\alpha)B}{\Delta}, & b(\alpha) &= \frac{D(\alpha)B - B(\alpha)D}{\Delta}, \\
 c(\alpha) &= \frac{A(\alpha)C - C(\alpha)A}{\Delta}, & d(\alpha) &= \frac{|\alpha|}{\alpha} - \frac{D(\alpha)A - B(\alpha)C}{\Delta}, \\
 A(\alpha) &= \frac{1}{\alpha^2 + \bar{K}^2\bar{\beta}^2} \left\{ \frac{\alpha\gamma_2 F_\varepsilon^-}{\varepsilon F_\varepsilon^+ + (\gamma_2/\gamma_1)F_\varepsilon^-} - \frac{\bar{K}^4\bar{\beta}^2 F_1^+}{\alpha\gamma_1 [F_1^+ + (\gamma_2/\gamma_1)F_1^-]} \right\}, \\
 B(\alpha) &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \bar{K}^2\bar{\beta}^2} \left\{ \frac{\bar{\beta}\gamma_2 F_\varepsilon^-}{\varepsilon F_\varepsilon^+ + (\gamma_2/\gamma_1)F_\varepsilon^-} - \frac{\bar{\beta}\bar{K}^2 F_1^+}{\gamma_1 [F_1^+ + (\gamma_2/\gamma_1)F_1^-]} \right\}, \\
 D(\alpha) &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \bar{K}^2\bar{\beta}^2} \left\{ \frac{\bar{\beta}^2\gamma_2 F_\varepsilon^-}{\varepsilon F_\varepsilon^+ + (\gamma_2/\gamma_1)F_\varepsilon^-} - \frac{\alpha^2 F_1^+}{\gamma_1 [F_1^+ + (\gamma_2/\gamma_1)F_1^-]} \right\}, \\
 C(\alpha) &= D(\alpha), & F_\varepsilon^\pm &= 1 \pm \frac{\gamma_2 - \gamma_1\varepsilon}{\gamma_2 + \gamma_1\varepsilon} e^{-2\gamma_2}, \\
 F_1^\pm &= 1 \pm \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} e^{-2\gamma_2}, & \gamma_1 &= \sqrt{\alpha^2 + \bar{K}^2(\bar{\beta}^2 - 1)}, \\
 \gamma_2 &= \sqrt{\alpha^2 + \bar{K}^2(\bar{\beta}^2 - \varepsilon)}, & \bar{K} &= Kh, \quad \bar{\beta} = \beta/K, \quad A = 1/(1 + \varepsilon), \\
 B &= C = \bar{\beta}/(1 + \varepsilon), \quad D = \bar{\beta}^2/(1 + \varepsilon) - 0,5, \quad \Delta = -0,5/(1 + \varepsilon),
 \end{aligned}
 \tag{1a}$$

K – волновое число свободного пространства.

Применение метода полуобращения интегрального оператора [4] позволяет свести систему (1) к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В случае четных волн, когда в плоскости $x = 0$ расположена магнитная стенка, будем иметь

$$X(\alpha) = \int [X(\lambda) a(\lambda) + Y(\lambda) b(\lambda)] V_\alpha^\lambda d\lambda, \tag{2}$$

$$Y(\alpha) = \int [X(\lambda) c(\lambda) + Y(\lambda) d(\lambda)] V_\alpha^\lambda d\lambda + \Pi J_0(\alpha \bar{W}),$$

где

$$V_\alpha^\lambda = \frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n J_{2n}(\alpha \bar{W}) J_{2n}(\lambda \bar{W}).$$

В случае нечетных волн получаем

$$\tilde{X}(\alpha) = \int [\tilde{X}(\lambda) a(\lambda) + \tilde{Y}(\lambda) b(\lambda)] \Phi_\alpha^\lambda d\lambda, \tag{3}$$

$$\tilde{Y}(\alpha) = \int [\tilde{X}(\lambda) c(\lambda) + \tilde{Y}(\lambda) d(\lambda)] \Phi_\alpha^\lambda d\lambda,$$

где

$$\Phi_\alpha^\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{2n+1}(\alpha \bar{W}) J_{2n+1}(\lambda \bar{W}).$$

Решение систем (2) и (3) ищем в виде

$$X(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n J_{2n}(\alpha \bar{W}),$$

$$Y(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_{2n}(\alpha \bar{W}) + \Pi J_0(\alpha \bar{W}), \quad (4)$$

$$\tilde{X}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{X}_n J_{2n+1}(\alpha \bar{W}),$$

$$\tilde{Y}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n J_{2n+1}(\alpha \bar{W}).$$

С учетом (4) сведем системы интегральных уравнений (2) и (3) к системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $X_n, Y_n, \Pi, \tilde{X}_n, \tilde{Y}_n$.

Для четных волн получаем

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} (X_m A_{mn}^{11} + Y_m A_{mn}^{12}) + \Pi A_{m0}^{12},$$

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} (X_m A_{mn}^{21} + Y_m A_{mn}^{22}) + \Pi A_{m0}^{22}, \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n Q_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n P_n + \Pi P_0 = 0,$$

где

$$\begin{vmatrix} A_{mn}^{11} & A_{mn}^{12} \\ A_{mn}^{21} & A_{mn}^{22} \end{vmatrix} = 4m \int_0^{\infty} \begin{vmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{vmatrix} \frac{J_{2n}(\alpha \bar{W}) J_{2n}(\alpha \bar{W}) d\alpha}{\alpha},$$

$$Q_n = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(\alpha) J_{2n}(\alpha \bar{W}) d\alpha}{\alpha}, \quad P_n = 2 \int_0^{\infty} \frac{D(\alpha) J_{2n}(\alpha \bar{W}) d\alpha}{\alpha}.$$

Для нечетных волн будем иметь

$$\tilde{X}_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{X}_m \tilde{A}_{mn}^{11} + \tilde{Y}_m \tilde{A}_{mn}^{12}), \quad \tilde{Y}_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{X}_m \tilde{A}_{mn}^{21} + \tilde{Y}_m \tilde{A}_{mn}^{22}), \quad (6)$$

где

$$\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_{nn}^{11} & \tilde{\lambda}_{nn}^{12} \\ \tilde{\lambda}_{nn}^{21} & \tilde{\lambda}_{nn}^{22} \end{vmatrix} = 2(2m+1) \int_0^{\alpha} \begin{vmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{vmatrix} \frac{J_{2n+1}(\alpha \bar{W}) J_{2n+1}(\alpha \bar{W}) d\alpha}{\alpha} .$$

Искомые дисперсионные уравнения получаются приравниванием нулю определителей систем (5) и (6).

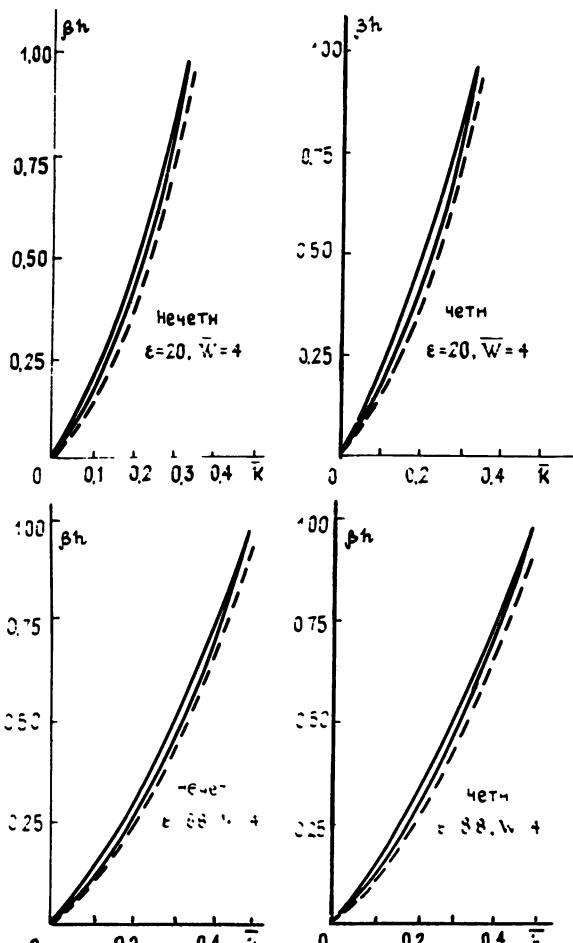


Рис 2

В силу нормальности определителей при их приближенном вычислении возможно применение метода редукции.

Обратимся к результатам численного эксперимента. Для определения зависимостей \bar{v} от нормированного волнового числа \bar{k} численно решались дисперсионные уравнения, которые получаются, если приравнять нулю определители систем (5) и (6). Благодаря высокой скорости сходимости разложений (4) порядки определителей не превосходили десяти. При этом для значений \bar{v} получалось четыре-пять верных знаков, причем с увеличением \bar{k} погрешность вычислений возрастала. На рис. 2 приведены зависимости нормированной постоянной распространения v_h от волнового числа \bar{k} при двух значениях проницаемости подложки $\epsilon = 8,8; 20$. Верхние кривые, взятые из работы [6], соответствуют случаю $\bar{w} = \infty$ и являются дисперсионными зависимостями краевых волн; пунктиром обозначены дисперсионные зависимости магнитной волны в подложке, имеющей из поверхностных волн наибольшее значение \bar{v} . Видно, что на низких частотах кривые для нечетных волн расположены ближе к пунктирным линиям, что свидетельствует о том, что поле этих волн слабее концентрируется в окрестности полоскового проводника. На высоких частотах дисперсионные зависимости для четных и нечетных волн практически сливаются с верхними кривыми, что говорит о существовании на этих частотах в линии с конечной шириной проводника двух независимых краевых волн.

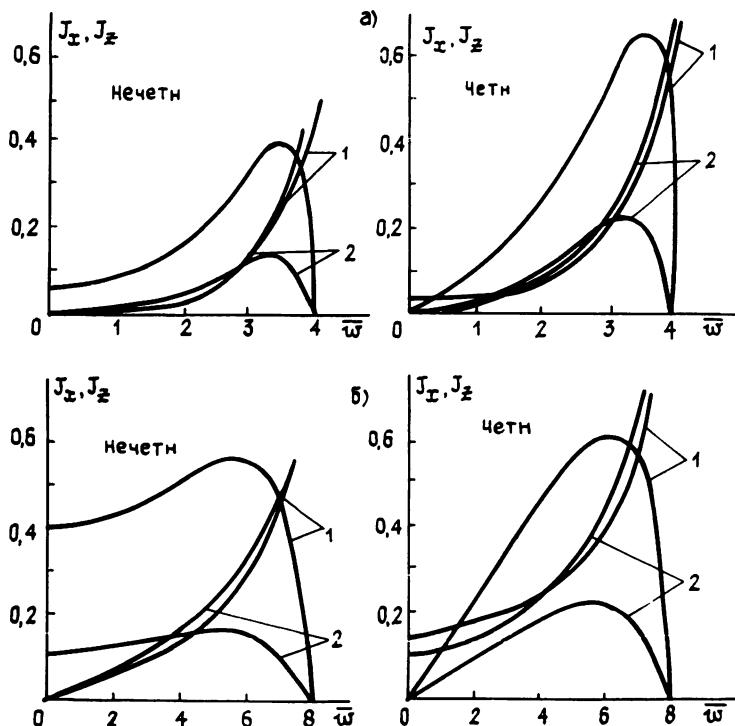


Рис 3.

Необходимо отметить, что слабая концентрация поля волны на низких частотах означает наличие сильного влияния удаленных от

проводника предметов на характер распространения волн в линии и, как следствие, непригодность линии для практического использования.

Здесь наблюдается аналогия с щелевой линией передачи (ШЛП), также непригодной для применения на низких частотах.

На рис. 3а представлены зависимости плотностей поперечного J_x и продольного J_z плотностей токов на широком ($\bar{W} = 8$) полосковом проводнике при различных частотах ($1 - \bar{k} = 0,2$; $2 - \bar{k} = 0,4$). Из рисунков видно, что с увеличением частоты значения токов в центре проводника уменьшаются, что подтверждает существование независимых краевых волн в окрестностях ребер полоскового проводника. При уменьшении \bar{W} (рис. 3б, $\bar{W} = 4$) связь между краевыми волнами возрастает.

Из приведенных результатов вытекает следующая физическая интерпретация работы ОЛП и ШЛП. Обе линии передачи могут рассматриваться как волноведущие структуры, в которых распространяются связанные краевые волны. Свойства этих волн в основном определяют свойства рассматриваемых линий передачи, в частности, отсутствие конечной частоты отсечки и слабую концентрацию поля в окрестности полоскового проводника на низких частотах.

Использование ОЛП в качестве линии передачи будет зависеть в основном от результатов экспериментальных исследований, которые необходимо провести с целью выявления способности линии к излучению и возможности ее соединения с другими типами линий передачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев В. И., Нефедов Е. И. Объемные интегральные схемы. - М.: Наука, 1985.
2. Гвоздев В. И., Кузаев Г. А., Нефедов Е. И., Уткин М. И. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 1. С. 47.
3. Сологуб В. Г. // ЖВМ и МФ. 1971. № 4. С. 837.
4. Темнов В. М. // Техника средств связи. Сер. Радиоизмерительная техника. 1976. Вып. 2. С. 43.
5. Веселов Г. И., Темнов В. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 5. С. 576.
6. Зайцев С. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С. 1115.

Нижегородский филиал Всесоюзного научно-исследовательского института программных средств вычислительной техники

Поступила в редакцию
14 августа 1989 г.

SURFACE WAVES IN A SINGLE-STRIP LINE

V. M. Temnov

The problem of surface waves in a single-strip line, which is a strip conductor of limited width placed on a dielectric substratum, was solved by the integral operator halfinversion method. A dispersion equation was obtained for surface waves in a line; the calculations of dispersion relations and current density distribution on the strip-line conductor were given.

УДК 537.226:538.67

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

Г. В. Белокопытов

Рассмотрено параметрическое взаимодействие электромагнитных колебаний в резонаторах, обладающих диэлектрической и магнитной нелинейностью, с учетом влияния магнитоэлектрических эффектов, гиротропии и дисперсии характеристик нелинейной среды. Модуляция диэлектрической и магнитной проницаемости волной накачки происходит несинфазно, что приводит, одновременно с параметрическим вложением энергии, к модуляции потерь в резонаторе. Показано, что в сегнетомагнетиках параметрическое возбуждение должно происходить в результате совместного действия многих нелинейных механизмов, причем их разделение затруднено.

Исследование сегнетомагнетиков - материалов, в которых сочетается электрическое и магнитное упорядочение [1,2], а также гибридных феррит-диэлектрических структур [3] дает стимул для нового взгляда на вопрос о параметрических взаимодействиях в распределенных системах, обладающих диэлектрической и магнитной нелинейностью. В приближении заданного поля накачки такая задача рассматривалась ранее [4]. Однако реалистическое описание процессов в магнитодиэлектриках предполагает анализ более общего нелинейного случая при совместном учете эффектов гиротропии, дисперсии и существования не только диэлектрической и магнитной нелинейности, но и магнитоэлектрических эффектов. В средах со столь многообразными электромагнитными свойствами можно ожидать появления новых особенностей нелинейных взаимодействий и, возможно, реализации параметрических СВЧ устройств с нетрадиционными характеристиками.

Следует также иметь в виду, что параметрическое возбуждение колебаний в сегнетомагнетиках может дать ценную информацию о механизмах взаимодействия в них спиновой и фононной подсистем [1]. Известные оценки пороговой напряженности поля накачки свидетельствуют о принципиальной осуществимости эффекта (см., например, [5]). Однако для постановки и интерпретации эксперимента их следует дополнить анализом динамики межмодовых взаимодействий.

Разложение по нормальным модам. Сформулируем нелинейную электродинамическую краевую задачу, которая дает описание колебаний в магнитодиэлектрическом резонаторе. Используем запись уравнений Maxwella в операторной форме [6]

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{rot} \\ -\text{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}, \vec{B}) + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}^e, \vec{j}^m), \quad (1)$$

где роль искомой переменной играет "вектор-строка" $(\vec{B}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t))$. Будем полагать, что часть поверхности S , ограничивающей

объем резонатора V , металлизирована, так что

$$\vec{E}_\tau = 0|_{S-S_\Sigma}. \quad (2)$$

На другой части поверхности задано поле сторонних источников

$$\vec{E}_\tau = \vec{E}^{CT}|_{S_\Sigma}. \quad (3)$$

Наряду с полем \vec{E}^{CT} колебания в резонаторе могут возбуждаться объемными сторонними электрическими и магнитными токами \vec{j}^e и \vec{j}^h .

Для постановки задачи принципиален вопрос о характере связи между векторами поля (\vec{E}, \vec{H}) и индукции (\vec{D}, \vec{B}) . Для нахождения этой связи в самой общей постановке необходимо рассматривать уравнения движения систем электрических и магнитных диполей в полях \vec{E} и \vec{H} . Однако если вначале ограничиться случаем, когда частоты взаимодействующих колебаний лежат за пределами области возбуждения магнитостатических (спиновых) волн, то характеристики нелинейной среды могут быть адекватно описаны материальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(3)} = (\kappa \vec{D} + A_E \vec{B}) + (\lambda \vec{D} \vec{D} + 2C_E \vec{D} \vec{B} + F_E \vec{B} \vec{B}) + \\ & + (v \vec{D} \vec{D} \vec{D} + 2K_E \vec{D} \vec{B} \vec{B}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} = & \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)} + \vec{H}^{(3)} = (\eta \vec{B} + A_H \vec{D}) + (\zeta \vec{B} \vec{B} + C_H \vec{D} \vec{D} + 2F_H \vec{B} \vec{D}) + \\ & + (\xi \vec{B} \vec{B} \vec{B} + 2K_H \vec{D} \vec{D} \vec{B}). \end{aligned}$$

Для статических полей эти уравнения следуют из термодинамической теории, причем коэффициенты разложения являются тензорами, свойства которых отражают симметрию нелинейной среды [2]. Кроме того, статические коэффициенты магнитоэлектрической связи таковы, что $A_E = A_H$, $C_E = C_H$, $F_E = F_H$ и $K_E = K_H$ (из магнитоэлектрических эффектов третьего порядка в (4) учтен лишь один, возможный во всех классах симметрии, рассмотрение других эффектов не дает качественно новых результатов). Для высокочастотных полей имеет место дисперсия, тогда соотношения для магнитоэлектрических коэффициентов не выполняются, а все материальные параметры, входящие в (4), следует рассматривать как операторы, нелокальные во времени. Для гармонических полей коэффициенты (4) - комплексные функции взаимодействующих частот.

Колебательную систему, удовлетворяющую (1)-(4), естественно рассматривать как возмущенную по отношению к линейной системе, описываемой уравнением

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{rot} \eta_0 \cdot \\ -\text{rot} \kappa_0 \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}, \vec{B}), \quad (5)$$

с граничным условием $(\kappa_0 \vec{D})_\tau = 0$ на S . Собственные колебания невозмущенной системы имеют вид $Q_a(\vec{r}) \exp(-i\omega_a t)$, где $Q_a = (\vec{D}_a(\vec{r}), \vec{B}_a(\vec{r}))$ и ω_a - собственные функции и нормальные частоты.

Известно [6], что при эрмитовых κ_0 и η_0 собственные частоты вещественны, а функции, соответствующие различным собственным частотам, ортогональны между собой и могут быть нормированы посредством соотношения

$$\int \kappa_0 \vec{D}_a \vec{D}_b^* dV + \int \eta_0 \vec{B}_a \vec{B}_b^* dV = \delta_{ab}. \quad (6)$$

Пользуясь полнотой системы собственных функций линейной задачи [6], можем представить поле в резонаторе в виде ряда

$$(\vec{D}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)) = q_a(t) Q_a(\vec{r}), \quad (7)$$

где по индексу a ведется суммирование. Подставив разложения (7) и (4) в уравнение (1), можно после стандартной операции умножения на $(\kappa_0 \vec{D}_f, \eta_0 \vec{B}_f)^*$ и интегрирования по объему резонатора с учетом (6) получить цепочку уравнений для обобщенных координат

$$\dot{q}_f = \tilde{I}_{fa}^{(1)} q_a + \tilde{I}_{fab}^{(2)} q_a q_b + \tilde{I}_{fabc}^{(3)} q_a q_b q_c + \tilde{q}_f(t), \quad (8)$$

где коэффициенты $\tilde{I}_{fa}^{(1)}$, $\tilde{I}_{fab}^{(2)}$ и $\tilde{I}_{fabc}^{(3)}$ являются интегральными характеристиками нелинейного резонатора:

$$\tilde{I}_{fa(bc)}^{(1)} = \int (\kappa_0^* \vec{D}_f^* \operatorname{rot} \vec{H}_{a(bc)}^{(1)} - \eta_0^* \vec{B}_f^* \operatorname{rot} \vec{E}_{a(bc)}^{(1)}) dV, \quad (9)$$

$i = 1, 2, 3$, $\vec{H}_{a(bc)}^{(1)}$ и $\vec{E}_{a(bc)}^{(1)}$ – значения $\vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(1)}$, получаемые в результате подстановки в (4) собственных векторов (\vec{D}_a, \vec{B}_a) , (\vec{D}_b, \vec{B}_b) и (\vec{D}_c, \vec{B}_c) . Действие сторонних полей и токов на резонатор описывают члены

$$\tilde{q}_f = \int_{S_f} [\vec{E}^{\text{ст}}, \eta_0^* \vec{B}_f^*] \vec{n} ds - 4\pi \int (\kappa_0^* \vec{D}_f^* j^e + \eta_0^* \vec{B}_f^* j^m) dV. \quad (10)$$

Отметим, что полученные нами формулы для интегральных коэффициентов (9) отличаются от результатов [4], где описание модуляции энергоемких параметров производилось путем введения явной зависимости диэлектрической и магнитной проницаемости от времени. При этом оказалось упущененным то обстоятельство, что в силу неравномерной сходимости на поверхностях, где материальные параметры испытывают скачок, почлененное дифференцирование (7) неправомерно. В этом случае преобразование (9) по формуле Грина с учетом (5) дает

$$\tilde{I}_{fa(bc)}^{(1)} = -i\omega_f \int (\vec{H}_{a(bc)}^{(1)} \vec{B}_f^* + \vec{E}_{a(bc)}^{(1)} \vec{D}_f^*) dV +$$

$$+ \operatorname{cf} \{ [\vec{H}_{a(bc)}^{(1)}, \kappa_0^* \vec{D}_f^*] - [\vec{E}_{a(bc)}^{(1)}, \eta_0^* \vec{B}_f^*] \} \vec{n} ds.$$

В дополнение к объемному интегралу, эквивалентному в приближении заданной накачки результату [4], последнее выражение содержит также поверхственный вклад в энергию взаимодействия. Интегрирование во втором интеграле ведется по всем замкнутым поверхностям частей резонатора, в которых материальные параметры непрерывны, причем \vec{n} – вектор внешней нормали. Поверхностный интеграл может быть отличен от

нуля и на металлической границе резонатора, поскольку хоть там $(\kappa_0^* \tilde{D}_f^*)_\tau = 0$, но в анизотропной среде $\tilde{E}_{a(bc)}^{(1)} \neq 0$.

Если рассматривать стационарные колебания, когда координаты q_f зависят от времени по гармоническому закону, то интегральные коэффициенты являются комплексными функциями взаимодействующих частот, например, $\tilde{I}_{fab}^{(2)} = I_{fab}^{(2)}(\omega_f, \omega_a, \omega_b)$. Для невозмущенной линейной задачи (5) не равны нулю лишь коэффициенты $I_{fa}^{(1)} = i\omega_f \delta_{fa}$.

Для высокодобротных резонаторов, обладающих малыми потерями на излучение, граничное условие (2) не является существенным. В этом случае собственные колебания открытого резонатора с хорошей точностью совпадают с колебаниями того же резонатора, помещенного в идеально проводящий экран с должным образом подобранными размерами.

Укороченные уравнения. В добротных резонаторах эффективное нелинейное взаимодействие происходит между колебаниями, возбуждаемыми в резонансных условиях, с участием лишь небольшого числа степеней свободы, удовлетворяющих условиям синхронизма. Типичным эффектом здесь является трехмодовое параметрическое взаимодействие, при котором энергия колебаний накачки с частотой ω_H преобразуется в колебания двух частот (ω_C и ω_X), сумма которых равна частоте модуляции энергоемкого параметра. Такое преобразование происходит либо за счет квадратичной нелинейности в трехчастотном процессе:

$$\omega_H = \omega_C + \omega_X \quad (11)$$

либо за счет кубичной нелинейности при вырожденном четырехчастотном взаимодействии:

$$2\omega_H = \omega_C + \omega_X \quad (12)$$

При этом в резонансных условиях частота каждого из колебаний $\tilde{\omega}_i$ ($\tilde{\omega}_i = \omega_C, \omega_X, \omega_H$) близка к одной из нормальных частот резонатора ω_i ($i = 1, 2, 3$), так что $\tilde{\omega}_i \approx \omega_i$.

Пусть на нелинейный резонатор воздействуют сторонние силы $\tilde{q}_H = \bar{q}_H \cos \omega_H t$, $\tilde{q}_C = \bar{q}_C \cos \omega_C t$. Отклик колебательной системы в предположении малости потерь и слабой нелинейности будет состоять из квазигармонических компонент $q_f = x_f \exp[-i(\tilde{\omega}_f t + \varphi_f)]$, где x_f и φ_f – медленно меняющиеся амплитуды и фазы. Применяя процедуру разделения частот [7] к системе (8) (см. Приложение), получим укороченные уравнения, которые ниже запишем в форме, пригодной для обоих вариантов взаимодействия (11) и (12). Для колебаний сигнальной частоты будем иметь

$$\dot{x}_C = -(\omega_C/2Q_C)x_C - \bar{m}_C \sin(\Psi + x_C)x_X + \bar{q}_C \cos \varphi_C, \quad (13)$$

$$x_C \dot{\varphi}_C = -\frac{1}{2} \omega_C \xi_C x_C + \bar{m}_C \cos(\Psi + x_C)x_X - \bar{q}_C \sin \varphi_C,$$

где нелинейная расстройка ξ_C и эквивалентная добротность Q_C связаны с реальной и мнимой частями выражения $R_{\text{Эфф}} = I_{CC}^{(1)} + 3I_{CC\bar{C}}^{(3)}x_C^2 + + 6I_{C\bar{C}XX}^{(3)}x_X^2 + 6I_{C\bar{C}HH}^{(3)}x_H^2$, так что

$$\omega_C/2Q_C = - \operatorname{Re} R_{\text{Эфф}}, \quad \omega_C \xi_C/2 = \omega_C + \operatorname{Im} R_{\text{Эфф}}. \quad (14)$$

Подчеркивание индексов у интегральных коэффициентов означает, что соответствующие собственные функции отвечают отрицательным частотам, т. е. в формулы (9) следует подставлять не Q_a , а Q_a^* . Модуль и фаза комплексного коэффициента модуляции \bar{m}_C и x_C в случае (11) равны $\bar{m}_C = 2|I_{CHX}^{(2)}|x_H$, $x_C = -\operatorname{Arg}(iI_{CHX}^{(2)})$, кроме того $\Psi = l\varphi_H - \varphi_C - \varphi_X$, $l = 1$, а в случае (12) $\bar{m}_C = 3|I_{CHHX}^{(3)}|x_H^2$, $x_C = -\operatorname{Arg}(iI_{CHHX}^{(3)})$, $l = 2$.

Укороченные уравнения для частоты ω_X аналогичны (13) с точностью до замены индексов С и Х (с учетом того, что $q_X = 0$). Наконец, для частоты накачки имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_H &= -(\omega_H/2Q_H)x_H + \bar{M}_H \sin(\Psi - x_H)x_C x_X + \bar{q}_H \cos \varphi_H, \\ x_H \dot{\varphi}_H &= -\frac{1}{2} \omega_H \xi_H x_H + \bar{M}_H \cos(\Psi - x_H)x_C x_X - \bar{q}_H \sin \varphi_H. \end{aligned} \quad (15)$$

Определение Q_H и ξ_H аналогично (14), а для \bar{M}_H и x_H имеем в случае (11) $\bar{M}_H = 2|I_{HCX}^{(2)}|$, $x_H = -\operatorname{Arg}(iI_{HCX}^{(2)})$, а в случае (12) $\bar{M}_H = 6|I_{HHCX}^{(3)}|$, $x_H = -\operatorname{Arg}(iI_{HHCX}^{(3)})$.

Обсуждение результатов. В отличие от хорошо исследованного случая, когда нелинейна лишь одна характеристика среды, укороченные уравнения для колебаний в магнитоэлектрическом резонаторе содержат дополнительные фазовые сдвиги $x_{C,X,H}$. С одной стороны, они появляются как следствие дисперсии нелинейных параметров и гиротропии, поскольку для учета запаздывания фаз поляризации и намагниченности от вызывающих их полей, так же как и для учета эллиптической поляризации полей в гиротропной среде, необходимо рассматривать волновые функции собственных колебаний и материальные параметры среды как комплексные функции точек. В итоге интегральные коэффициенты $I_{fA(bc)}^{(1)}$ – существенно комплексные величины. С другой стороны, к появлению фазовых сдвигов $x_{C,X,H}$ ведет и несинфазный характер модуляции диэлектрической и магнитной проницаемости. В среде с магнитоэлектрическим эффектом модуляция энергоемких параметров происходит при совместном действии электрического и магнитного полей накачки, между которыми имеется фазовый сдвиг, близкий к $\pi/2$ (при наличии линейного магнитоэлектрического эффекта он не равен в точности $\pi/2$).

Итак, при всем разнообразии факторов, действующих в магнитодиэлектрических резонаторах, их влияние на динамику параметрических колебаний подобно, причем вид укороченных уравнений, описывающих трехмодовые взаимодействия, оказывается таким же, как и для колебательной системы, имеющей один нелинейный энергоемкий и один нелинейный диссипативный параметр [7,8]. В режиме усиления слабого сигнала коэффициенты модуляции \bar{m}_c и \bar{m}_x однозначно связаны с уровнем накачки, а нелинейные эффекты, вызываемые колебаниями x_c и x_x , пренебрежимо малы. Тогда частотная характеристика усиления и пороговая мощность параметрического возбуждения легко могут быть определены в соответствии с результатами [8].

Сосредоточенные параметрические системы с переменными реактивными и диссипативными элементами рассматривались ранее в связи с проблемой реализации частотно невзаимных устройств [9-12]. В рассматриваемых здесь магнитодиэлектрических резонаторах эффект частотной невзаимности также может иметь место. В частности, строение интегральных коэффициентов $I_{fab(c)}^{(2,3)}$ позволяет в принципе добиться, чтобы

$$\bar{m}_c = 0, \quad \bar{m}_x \neq 0. \quad (16)$$

При этом на частоте ω_c регенерации не будет, но будет преобразование сигнала в колебания комбинационной частоты ω_x . Напротив, воздействие сторонней силы на частоте ω_x не приведет к образованию сигнала с частотой ω_c . В [10,11] отмечались также и другие особенности, присущие невзаимным параметрическим системам. Так, системы с высокочастотной накачкой могут быть нерегенеративными, и, напротив, преобразование частоты вверх может сопровождаться регенерацией.

До сих пор обсуждалась возможность создания невзаимных параметрических устройств СВЧ лишь на основе полупроводниковых диодов [12]. Применение для этой цели магнитодиэлектрических резонаторов может представлять интерес благодаря совмещению в одном распределенном элементе нелинейных и частотно избирательных свойств, а также раздельному управлению параметрами нелинейной среды при подаче электрического и магнитного полей смещения. При этом более перспективными в настоящее время представляются гибридные структуры феррит-сегнетоэлектрик, тогда как известные сегнетомагнетики значительно уступают первым как по уровню нелинейности, так и по величине СВЧ потерь [3].

Рассматривая структуру интегральных коэффициентов $I_{fab(c)}^{(2,3)}$ и их роль в укороченных уравнениях, следует признать, что в сегнетомагнетиках параметрическое возбуждение должно проявляться как результат совместного действия многих механизмов нелинейности, а наличие магнитоэлектрической связи не ведет само по себе к появлению качественно новых особенностей в динамике параметрических систем. Более того, представляется затруднительным создание условий, при которых нелинейное трехмодовое взаимодействие обеспечивалось бы только за счет магнитоэлектрических эффектов. Это ограничивает возможности получения новой информации о количественных характеристиках спин-фононного взаимодействия в экспериментах по параметрическому возбуждению колебаний.

Из результатов настоящей работы следует вывод об отсутствии жесткой границы между колебательными системами, где происходит модуляция только реактивных параметров, и потенциально автоколебательными системами с переменной диссипацией. Это по

существу вытекает из известного положения макроскопической электродинамики о том, что выделение векторов электрической поляризации и намагниченности в среде с дисперсией неоднозначно и все свойства материальной среды можно характеризовать одной функцией отклика [13]. Вместе с тем, можно утверждать, что сделанный вывод справедлив независимо от электромагнитной природы колебаний и сохраняет силу при включении в рассмотрение новых степеней свободы в нелинейной среде (спиновых, упругих и др.). Действительно, пока колебательную систему можно рассматривать как возмущенную по отношению к некоторому линейному прототипу и искать решения нелинейной задачи в виде разложения по собственным функциям (это могут быть как стоячие, так и бегущие волны), для соответствующих обобщенных координат будут по-прежнему иметь место уравнения вида (8). Специфика различных систем будет проявляться лишь в виде интегральных коэффициентов $I_{fa(bc)}^{(1)}$. Динамика же колебаний и в самом общем случае трехчастотного взаимодействия будет соответствовать укороченным уравнениям (13) и (15). Развитый подход можно распространить на случай возбуждения связанных электромагнитно-спиновых волн, если уравнения Максвелла дополнить уравнением прецессии магнитных моментов и соответственно модифицировать соотношения (4).

Приложение

Об учете дисперсии в укороченных уравнениях. Укороченные уравнения трехчастотного взаимодействия имеют вид (13), (15) тогда, когда частоты ω_c , ω_x и ω_h лежат за пределами областей дисперсии, так что $|dI_{fa}^{(1)}/d\omega| \ll 1$. Если же временная дисперсия на указанных частотах значительна, нестационарные укороченные уравнения нуждаются в модификации. В общем случае оператор линейного отклика имеет вид интеграла Диамеля:

$$\tilde{I}_{fa}^{(1)} q_a(t) = \int_0^\infty h_{fa}(\tau) q_a(t-\tau) d\tau. \quad (\text{П. 1})$$

Поскольку в первом приближении $q_a(t)$ – квазигармонические колебания вида $q_a(t) = x_a(t) \exp[-i(\tilde{\omega}_a t + \varphi_a(+))]$, то

$$\tilde{I}_{fa}^{(1)} q_a(t) = \int_0^\infty h_{fa}(\tau) x_a(t-\tau) \exp\{-i[\tilde{\omega}_a(t-\tau) + \varphi_a(t-\tau)]\} d\tau. \quad (\text{П. 2})$$

Чем меньше дисперсия, тем быстрее функция импульсного отклика $H_{fa}(\tau)$ принимает значения, близкие к нулю, и тем с большей точностью выполняется соотношение

$$\tilde{I}_{fa}^{(1)} q_a(t) \approx C h_{fa}(0) x_a(t) \exp[-i(\tilde{\omega}_a t + \varphi_a(+))]. \quad (\text{П. 3})$$

Для учета последействия будем в (П. 2) полагать

$$x_a(t - \tau) = x_a(t) - \dot{x}_a(t)\tau + \dots$$

$$\varphi_a(t - \tau) = \varphi_a(t) - \dot{\varphi}_a(t)\tau + \dots \quad (\text{П. 4})$$

Тогда получим

$$\tilde{I}_{fa}^{(1)} q_a(t) = \exp[-i(\tilde{\omega}_a t + \varphi_a(t))] \times$$

$$\times \left[x_a(t) I_{fa}(\tilde{\omega}_a) + \frac{dI_{fa}(\tilde{\omega}_a)}{d\omega} (\dot{\varphi}_a x_a + i \dot{x}_a) + \dots \right]. \quad (\text{II. 5})$$

Подстановка (II. 5) в уравнение (8) при выполнении (11) или (12) дает, после разделения действительных и мнимых составляющих на частотах ω_c , ω_x , ω_h уравнения (13), (16), или

$$\dot{x}_f = F_{1f}(x|, \varphi|, t), \quad x_f \dot{\varphi}_f = F_{2f}(x|, \varphi|, t), \quad (\text{II. 6})$$

лишь если пренебречь членами, пропорциональными $dI_{fa}/d\omega$. Если же дисперсия существенна, то нестационарные укороченные уравнения принимают вид

$$\left(1 + \frac{dI''_{ff}}{d\omega}(\tilde{\omega}_f) \right) \dot{x}_f - \frac{dI'_{ff}(\tilde{\omega}_f)}{d\omega} x_f \dot{\varphi}_f = F_{1f},$$

$$\frac{dI'_{ff}(\tilde{\omega}_f)}{d\omega} \dot{x}_f + \left(1 + \frac{dI''_{ff}}{d\omega}(\tilde{\omega}_f) \right) x_f \dot{\varphi}_f = F_{2f}. \quad (\text{II. 7})$$

В первом приближении нет необходимости учитывать дисперсионные поправки от нелинейных членов, поскольку они имеют более высокий порядок малости. В стационарном режиме уравнения (II. 6) и (II. 7) эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смоленский Г. А., Чупис И. Е. //УФН. 1982. Т. 137. № 3. С. 415.
2. Веневцев Ю. Н., Гагулин В. В., Любимов В. Н. Сегнетомагнетики. - М.: Наука, 1982.
3. Афиногенов В. Б., Вербицкая Т. Н. и др. //Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 3. С. 494.
4. Луговой В. Н. //Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9. № 4. С. 596.
5. Чупис И. Е., Александрова Н. Я. //Укр. физ. журн. 1982. Т. 27. № 1. С. 144.
6. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. - М.: Наука, 1967.
7. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. - М.: Сов. радио, 1966.
8. Белокопытов Г. В., Моисеев Н. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 10. С. 1210.
9. Engelsrecht R.S.//Proc. IEEE. 1962. V. 50. № 3. P. 312.
10. Трифонов В. И. //Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8. № 9. С. 1637.
11. Зубков В. И. //Радиотехника и электроника. 1966. Т. 11. № 1. С. 103.
12. Полупроводниковые параметрические усилители и преобразователи СВЧ/Под ред. В. С. Эткина. - М.: Радио и связь, 1983.
13. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. -М.: Наука, 1965.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
9 января 1990 г.

PARAMETRIC INTERACTION IN MAGNETODIELECTRIC RESONATORS

G. V. Belokopytov

Parametric interaction of electromagnetic oscillations in resonators possessing dielectric and magnetic nonlinearity is considered with regard of magnetoelectric effects, gyrotropy and dispersion of characteristics of nonlinear medium. The modulation of permittivity and permeability by pump wave being non-synphase induces both parametric regeneration and Q-switching. It is shown that parametric excitation in magnetoelectric materials is the result of mutual action of several processes the distinction of which is hardly possible.

УДК 621.385.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕНЕРАТОРА
ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АВТОНОМНОМ И НЕАВТОНОМНОМ РЕЖИМАХ**

В. К. Корнеенков, В. С. Мирошниченко, А. А. Шмалько

Теоретически и экспериментально исследованы энергетические и частотные характеристики генератора дифракционного излучения при воздействии внешнего гармонического колебания. В автономном режиме численно рассчитана крутизна амплитудной и частотной колебательной характеристики генератора с учетом пространственного заряда на основе которой определен электронный КПД, электронное смещение частоты и пусковой ток. Проведено сравнение полученных теоретических и экспериментальных результатов. В неавтономном режиме определен спектральный состав квазипериодических колебаний, построен фазовый портрет колебательного процесса и установлены характерные их особенности для двух случаев, когда частота биений плавно уменьшается до нуля (фазовая неустойчивость) или изменяется скачкообразно (амплитудная неустойчивость). Наблюдаемые экспериментальные спектрограммы и осциллограммы квазипериодических колебаний согласуются с результатами теории.

В работах [1-3] теоретически исследовано возбуждение синхронных (одночастотных) и квазипериодических (многочастотных) колебаний в резонансных генераторах с длительным электронноволновым взаимодействием типа ГДИ - ортран при воздействии внешнего монохроматического сигнала. Установлены характерные особенности перехода от квазипериодических к синхронным колебаниям для различных режимов генератора в широкой области изменения исходных параметров. В связи с наметившейся в последние годы тенденцией использования многочастотных колебаний для различных практических приложений в новых частотных диапазонах представляется важным исследование энергетических и частотных характеристик колебаний, их спектрального состава в автономных и неавтономных генераторах коротковолновой части СВЧ диапазона. В данной работе такой анализ проведен применительно к резонансным электронным генераторам типа ГДИ - ортран. Выяснены особенности спектра при амплитудной и фазовой неустойчивости вынужденных колебаний в нелинейной автоколебательной системе с внешним монохроматическим воздействием. Проведены экспериментальные исследования выходных характеристик ГДИ в автономном и неавтономном режимах, подтверждающие теоретические выводы.

1. Теория. В качестве автоколебательной системы рассмотрим генератор дифракционного излучения (ГДИ), на который воздействует гармонический сигнал с частотой, близкой к частоте генерации. Наличие внешнего сигнала приводит к возбуждению многочастотных колебаний, форма и ширина спектра которых зависят как от вида нелинейности, так и от параметров синхросигнала. Эволюция амплитуды F и фазы ψ вынужденных колебаний генератора дифракционного излучения описывается следующей укороченной системой нестационарных уравнений [2]:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = F[GS_1(F) - 1] - a_C \cos \psi,$$

$$F \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = F[GS_2(F) - \Delta \omega] + a_C \sin \psi. \quad (1)$$

Здесь $S_1(F)$ и $S_2(F)$ - вещественная и мнимая части крутизны колебательной характеристики генератора дифракционного излучения [1], $G = \frac{2QL^2I}{\omega_r N_r U}$ - величина положительной обратной связи [4] (N_r - норма колебания, L - длина пространства взаимодействия, U , I - ускоряющее напряжение и ток электронного пучка), a_C - амплитуда внешнего сигнала, $\Delta \omega = 2Q(\omega - \omega_r)/\omega_r$ - относительная величина расстройки частот внешнего сигнала ω и резонансной частоты "холодного" резонатора ω_r , $\tau = t\omega_r/2Q$ - безразмерное время; Q - нагруженная добротность резонатора. Отметим, что режим автогенератора при заданном токе пучка I и ускоряющем напряжении U полностью определен крутизной колебательной характеристики $S(F) = S_1(F) + iS_2(F)$ и величиной обратной положительной связи G .

Величина $S(F)$ характеризует вид нелинейности системы и находится из решения нелинейных дифференциальных уравнений движения электронов в высокочастотном поле резонатора и поле пространственного заряда всех электронов, находящихся в конкретный момент времени в пространстве взаимодействия [2, 5]. Таким образом, если известен вид нелинейности $S(F)$ из теории или эксперимента, то уравнение (1) позволяет определить зависимости амплитуды F и фазы ψ от времени и рассчитать с помощью фурье-анализа спектр выходного колебания. Известно, что при приближении к полосе синхронизации по частотному параметру $\Delta \omega$ спектр колебаний усложняется - появляются все новые и новые спектральные составляющие частоты биений. Оказывается, что в непосредственной близости к конусу синхронизации при выполненных амплитудных условиях устойчивости и нарушенных фазовых временная зависимость F и спектр колебаний могут быть найдены аналитически. В этом случае можно считать, что амплитуда колебаний F изменяется более медленно по сравнению с ее фазой ψ . В этом предположении второе уравнение системы упрощается и совпадает с уравнением линии при фазовой автоподстройке частоты, решение которого может быть получено в явном виде. В области существования многочастотных колебаний мгновенное значение частоты $\omega_\mu = d\psi/dt$ имеет вид

$$\omega_\mu(\tau) = \Omega(\sqrt{m^2-1}/m) [1 + (\sqrt{m^2-1}/m)\cos(\Omega\tau + \tau_m)]^{-2}, \quad (2)$$

где $m = [GS_2(F_C) - \Delta \omega]/a_C$, $\Omega = a\sqrt{m^2-1}$ - частота биений, F_C - амплитуда вынужденных колебаний на границе полосы синхронизации, $a = a_C/F_C$, $\tau_m = -\arctg \sqrt{m^2-1}$. Для качественного анализа спектра выходного колебания $U(t)$ достаточно ограничиться двумя слагаемыми при разложении мгновенной частоты ω_μ (2) в ряд Фурье [6]. Тогда получим

$$U(t) = F_C \cos[\omega_r t + \beta \sin(\Omega t - \tau_m) + (\beta/2)^2 \sin(2\Omega t - \tau_m)]. \quad (3)$$

Здесь $\omega_r = \omega_0 + \Omega$, $\beta = 2(|m| - \sqrt{m^2-1})$. Из (3) следует, что при

внешнем гармоническом воздействии происходит частичное увлечение частоты автоколебаний, которая подтягивается к частоте внешнего сигнала на величину $\Delta\omega = \sqrt{m^2 - 1}$, зависящую от режима возбуждения колебаний в генераторе. Используя ряды Фурье - Бесселя, выражение (3) можно представить в виде

$$U(t) = F_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) J_n(\beta^2/4) \cos[\omega_r t (n+2s) \Omega t + \pi n - (n+2s) \tau]. \quad (4)$$

Как показывает анализ интенсивностей спектральных составляющих колебаний, рассчитанных на основе численного решения уравнения (1) и аналитических выражений (3), (4), обнаруживается их хорошее соответствие. В области амплитудной неустойчивости квазипериодических колебаний необходимо проводить численный анализ. При численном решении уравнения (1) крутизна колебательной характеристики $S(F)$ находилась по формуле [1]

$$S(F) = (1/2\pi) \int_0^1 f(\xi) e^{i\Phi b \xi} \int_0^{2\pi} e^{i\Theta(\xi, \varphi) + \varphi} d\varphi d\xi, \quad (5)$$

где фаза электронов $\Theta(\xi, \varphi)$ определялась из решения нелинейных уравнений движения в высокочастотном поле $f(\xi) = A \exp[(\xi - 0,5)^2/\nu^2]$ (A - константа нормировки $f(\xi)$, ξ - безразмерная координата, $2\nu = 0,5$ - ширина пятна поля в открытом резонаторе в области движения электронов) и в поле пространственного заряда [5].

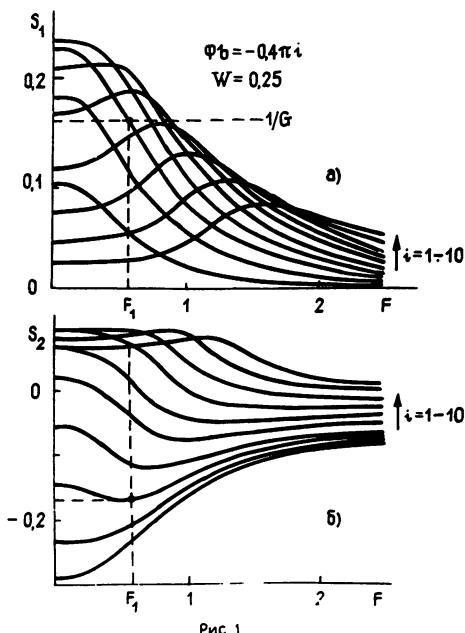


Рис 1

Вещественная и мнимая части $S(F)$, вычисленные для генератора дифракционного излучения при различных значениях параметра относительно рассинхронизма Φb , имеют вид, изображенный на рис. 1. Здесь $\Phi = \omega L / v_0$ - угол пролета через резонатор длиной L невозмущенного электрона с начальной скоростью v_0 ; $b = 1 - v_\phi / v_0$, v_ϕ - фазовая скорость синхронной с электронами замедленной

пространственной гармоники поля. По представленным графическим зависимостям $S(F, \Phi_b)$ при заданной величине обратной связи G легко находятся характеристики автономного режима генератора - пусковой ток $I_{\text{пуск}} (G_{\text{пуск}})$, амплитуда колебаний F_1 , электронный кпд η_1 и электронное смещение частоты $\delta\omega_1$:

$$G_{\text{пуск}} = \frac{1}{S_1(0)}, \quad \eta_1 = \frac{S_1(F_1)}{F_1^2}, \quad \delta\omega_1 = \frac{S_2(F_1)}{S_1(F_1)}.$$

Крутизна колебательной характеристики резонансных генераторов о-типа с длительным взаимодействием является исключительно удобным инструментом при анализе и расчете их выходных характеристик не только в автономном, но и в неавтономном режимах возбуждения колебаний. Так, максимальная амплитуда вынужденных автоколебаний определяется графически, как точка пересечения функции $S_1(F)$ с гиперболой $(1-a_c/F)/G$ [2]. Более того, характеристики $S_1(F)$, $S_2(F)$ подлежат и экспериментальному определению, что, с одной стороны, позволяет рассчитывать необходимые эксплуатационные характеристики автогенераторов и регенеративных усилителей, а также указать методику экспериментальной проверки такого важного электродинамического параметра, как сопротивление связи R ($G = R/R_0$, $R_0 = U/I$), а с другой - провести достаточно качественное сравнение с теоретическими результатами.

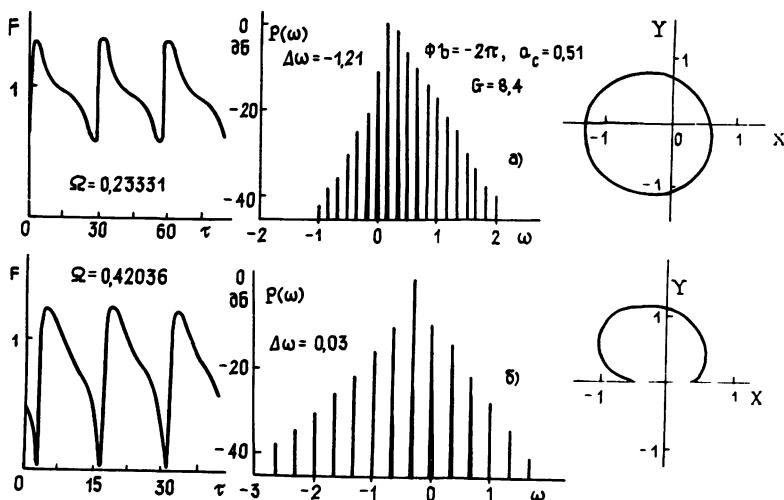


Рис 2

Перейдем к анализу спектральных характеристик неавтономного генератора. Спектральные характеристики многочастотных квазипериодических колебаний неавтономного генератора рассчитывались по найденным значениям амплитуды F и фазы ψ в установившемся режиме с помощью Fourier-анализа. На рис. 2 представлена временная эволюция амплитуды вынужденных колебаний F , энергетический спектр $P(\omega)$ и фазовый портрет в декартовых координатах ($x = F \cos \psi$, $y = F \sin \psi$) для двух характерных случаев - с амплитудной и фазовой неустойчивостью колебаний ($\Phi_b = -2\pi$, $G = 8,4$, $a = 0,51$). Серия

графиков "а" на рис. 2 характеризует колебания вне полосы синхронизации, где выполнены амплитудные условия устойчивости решений уравнения (1) и нарушены фазовые [1]. Серия кривых "б" на рис. 2 соответствует амплитудной неустойчивости решений (1). Отметим характерные особенности возбуждения одночастотных и многочастотных колебаний. При приближении к границам полосы синхронизации колебаний для двух рассматриваемых ситуаций все сильнее проявляется ахармоничность колебаний, спектр колебаний усложняется. Энергетический спектр при фазовой неустойчивости колебаний имеет в основном форму прямоугольного треугольника, а при амплитудной - равностороннего треугольника. В первом случае частота биений Ω плавно уменьшается до нуля. Предельный цикл имеет форму окружности и мало искается при изменении параметров. В другом случае (рис. 2б), как показывает анализ, частота биений Ω может как уменьшаться, так и увеличиваться при приближении к границе синхронизации. Наблюдается такая ситуация, когда реализуется режим прерывистой импульсной генерации ($\Delta\omega = 0,031$) - предельный цикл касается начала координат $F = 0$, имеет место 100-процентная амплитудная модуляция. В дальнейшем предельный цикл уменьшается и при определенном значении $\Delta\omega$ происходит переход к синхронным колебаниям за счет "тушения амплитуд вынужденных колебаний" до нуля [7]. В области параметров между прерывистыми колебаниями и границей полосы синхронизации средняя частота квазипериодических колебаний тождественно равна нулю: $d\psi/dt = 0$. Сравнение спектрограмм, рассчитанных по приближенным формулам (4) и на основе численной реализации для F и ψ , показывает их удовлетворительное согласие.

2. Эксперимент. Для исследования характерных особенностей работы ГДИ при внешнем гармоническом воздействии использовалась экспериментальная установка, в состав которой входили исследуемый ГДИ (Γ_1) и ГДИ - источник внешнего сигнала (Γ_2), подключаемый при помощи трехплечевого ферритового циркулятора. Контролировались уровень мощности внешнего сигнала, уровень средней мощности исследуемого генератора, спектр вынужденных колебаний (С4-28) и амплитуда биений (С1-75). Для исключения взаимной синхронизации генераторов Γ_1 и Γ_2 при малой расстройке их частот ($\Delta f < 4$ МГц) в данной схеме развязка входа внешнего генератора Γ_2 составляла около -50 дБ. С помощью такой схемы были проведены исследования выходных характеристик генератора в автономном и неавтономных режимах.

Прежде чем перейти к исследованию неавтономного режима, необходимо было обеспечить соответствующий режим возбуждения колебаний. С этой целью определялись выходные энергетические и частотные характеристики ГДИ (Γ_1). Пусть $\Delta f = f - f_p$ - расстройка частот, f - частота автоколебаний ГДИ, f_p - резонансная частота "холодного" резонатора ГДИ. Для исследуемого генератора параметры "холодного" резонатора составляли: $f_p = 35,0$ ГГц, связь ОР с нагрузкой $\sigma = 0,83$, $Q = 1400$, нерезонансные потери элемента связи - 15%. Минимум пускового тока наблюдался при расстройке частоты $\Delta f = -3$ МГц и составлял $I_{\text{пуск. мин}} = 16$ мА, причем для отрицательных расстроек частот наблюдался плавный рост $I_{\text{пуск}} / I_{\text{пуск. мин}} > 2$ при $\Delta f < -33$ МГц, а для положительных расстроек частот наблюдался резкий рост $I_{\text{пуск}} / I_{\text{пуск. мин}} > 2$ при $\Delta f > 6$ МГц. При рабочем токе $I = 3 I_{\text{пуск. мин}}$ максимум выходной мощности наблюдался при $\Delta f = 3$ МГц и составлял $P = 6,0$ Вт, а при $\Delta f \geq 9$ МГц наблюдался срыв колебаний. При отрицательных расстройках частот мощность генерации плавно снижалась до нуля вплоть до $\Delta f = -45$ МГц. Экспериментальные данные находились в хорошем согласии (в пределах

точности эксперимента $\delta P = 4\%$; $\delta I = 1\%$; $\delta f = 0,3$ МГц) с теоретическими зависимостями, полученными с использованием кривых $S(F)$ (рис. 1). Привязка экспериментальных и теоретических зависимостей осуществлялась в одной точке $I_{\text{пуск}} = I_{\text{пуск. мин.}}$.

Крутину колебательной характеристики ГДИ экспериментально можно определить в автономном режиме работы генератора, как это следует из формул теории

$$S_1(F) = 1/G, \quad S_2(F) = \Delta\omega/G, \quad G = R/R_0. \quad (6)$$

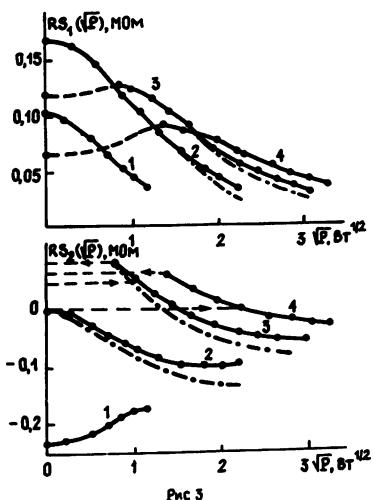
по выходной мощности P при заданных значениях тока пучка I и ускоряющего напряжения U . Тогда при определении характеристик $S_1(\sqrt{P})$ и $S_2(\sqrt{P})$ можно воспользоваться соотношениями

$$S_1(\sqrt{P}) = \frac{1}{R} \frac{U}{I(\sqrt{P})},$$

$$S_2(\sqrt{P}) = \frac{1}{R} \frac{2Q\Delta f U}{f_p I(\sqrt{P})}.$$

Экспериментальные кривые $RS_1(\sqrt{P})$ и $RS_2(\sqrt{P})$ ($R = \text{const}$) для значений параметра рассинхронизма $b = 0,7; 2,2; 3,2; 4,5\%$ (соответственно кривые 1-4) представлены на рис. 3. Из анализа характеристик $S_1(F)$ видно, что в слабонелинейном режиме исследуемого ГДИ (мягкий режим возбуждения колебаний) $S_1 > 0,7 S_{1\text{макс}}$ при соответствующем выборе b уровень выходной мощности может достигать $P \approx 1$ Вт. Жесткий режим возбуждения в данном ГДИ имеет место при $b \geq 3,0\%$. На этом же рисунке приведены теоретические зависимости для двух значений $b = 2,2; 3,2\%$ (штрихпунктирные кривые).

Перейдем к анализу неавтономного режима возбуждения колебаний.



Сначала рассмотрим особенности синхронизации ГДИ при малом внешнем сигнале $P_C/P_\Gamma \ll 1$. В эксперименте автономный режим ГДИ был выбран следующим: $f_\Gamma = f_p$, $P_\Gamma = 2,6$ Вт. Параметр рассинхронизма b соответствовал максимуму мощности в зоне электронной перестройки. Мощность внешнего сигнала поддерживалась постоянной, а его расстройка частоты $\Delta f_C = f_C - f_p$ изменялась в ходе эксперимента. Экспериментально исследованы два случая со слабым ($P_C = 0,3$ Вт) и сильным ($P_C = 3$ Вт) внешним сигналом, что соответствовало фазовой и амплитудной неустойчивости решений уравнений (1). В эксперименте регистрировались спектр колебаний и квадрат амплитуды огибающей

$F^2(t)$ выходного сигнала генератора для нескольких значений расстройки частот Δf_C . Было установлено, что для $P_C = 0,3$ Вт (малый

внешний сигнал) в области существования квазипериодических колебаний форма спектра соответствует прямоугольному треугольнику, что полностью совпадает с теоретическими результатами. В этой ситуации импульсной прерывистой генерации не наблюдалось. Частота биений уменьшалась до нуля на границе полосы синхронизации. В области значений $-2 \text{ МГц} < \Delta f_c < +2 \text{ МГц}$ возбуждались синхронные колебания.

При большом внешнем сигнале ($P_c = 3 \text{ Вт}$) суммарная выходная мощность составляла $P_\Sigma = 5,1 \text{ Вт}$, полоса синхронизации расширялась до $-14 \text{ МГц} < \Delta f_c < +14 \text{ МГц}$, форма спектра колебаний близка к равнобедренному треугольнику. В этом случае при определенном значении расстройки частот ($\Delta f_c = -15,5 \text{ МГц}$) реализуется режим прерывистых колебаний, а переход к синхронным колебаниям происходит посредством "тущения" амплитуд спектра.

Отмеченные в эксперименте особенности возбуждения вынужденных колебаний подтверждают теоретические результаты, полученные на основе нелинейной нестационарной самосогласованной модели ГДИ с внешним сигналом. Отметим, что на границе перехода от квазипериодических к синхронным колебаниям в эксперименте наблюдались неустойчивые шумоподобные колебания, природа возбуждения которых может быть связана с неустойчивостью в этой области исходных параметров рассмотренной колебательной системы к присутствующим в реальном приборе малым флуктуациям или наличием динамического хаоса. Однако такой режим исходная система уравнений (1) не описывает. В этой ситуации необходимо решение неукороченной системы уравнений, в которой, как известно, возможен и динамический хаос [10].

1) Предложена методика определения выходных характеристик приборов с длительным электронно-волновым взаимодействием через крутизну колебательной характеристики и продемонстрирована ее эффективность на модели генератора дифракционного излучения.

2) Установлена теоретически и экспериментально различная форма спектра вынужденных квазипериодических колебаний в генераторе дифракционного излучения с внешним сигналом и показана их связь с типом неустойчивости колебательной системы: фазовой или амплитудной.

3) Обнаружен режим прерывистой генерации и режим синхронизации колебаний на средней частоте биений.

4) Проведенные теоретические и экспериментальные исследования указывают на адекватность выбранной теоретической модели физическим процессам, происходящим в реальных резонансных приборах типа ГДИ.

5) Показана возможность экспериментального определения крутизны колебательной характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шматъко А. А. //Радиотехника и электроника. 1985. Т.30. N 4. С.761.
2. Шматъко А. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т.30. N 12. С.1488.
3. Шматъко А. А. //ДАН УССР. Сер. А. 1987. N 9. С. 65.
4. Ваврик Д. М., Третьяков О. А., Шматъко А. А. Препринт ФТИНТ АН УССР. Харьков, 1978.
5. Ваврик Д. М., Третьяков О. А., Шматъко А. А. //Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. N 8. С. 1580.
6. Бригидин А. М. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1978. Вып. 4. С. 49.
7. Рязин П. А. //МТФ. 1935. Т. 5. N 1. С. 38.
8. Шестopalов В. П. Диффракционная электроника. - Харьков: Вища школа.

1976. - 231 с.

9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. - М.: Наука. 1983. - 752 с.
10. Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Спиро А. Г. //Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 12. С. 2430.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
5 декабря 1989 г.

INVESTIGATION OF THE DIFFRACTION RADIATION GENERATOR
CHARACTERISTICS UNDER AUTONOMOUS AND NON-AUTONOMOUS CONDITIONS

V. X. Korneenkov, V. S. Miroshnichenko, A. A. Shmat'ko

Energy and frequency response characteristics of the diffraction radiation generator under the influence of the external pure oscillation are investigated experimentally and theoretically. The generator amplitude-frequency characteristic slope is numerically calculated with the spatial charge taken into account; on the basis of the former electronic efficiency, electronic frequency pushing and starting current are defined under autonomous conditions. A comparison of the theoretical and the experimental results obtained is given. Under non-autonomous conditions the quasi-periodical oscillation spectrum is defined and the phase portrait of the oscillation process is constructed and their peculiarities for two cases are stated: when the pulse frequency is fluently decreasing up to zero (phase instability) or is changing step by step (amplitude instability). The quasi-periodic oscillation spectrograms and oscillograms investigated are in agreement with the theoretical results.

УДК 621.385

О РАСЧЕТЕ ИНЖЕКТОРА С КРУПНОСТРУКТУРНОЙ СЕТКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

П. И. Акимов, В. В. Плохов, В. А. Сыровой, А. В. Федотов, Л. П. Шантурин

Представлен метод расчета электронно-оптической системы (ЭОС) многоструйного релятивистского инжектора. Модель основана на введении учитывающего взаимодействия микроструй эффективного осесимметричного макропучка, в электромагнитном поле которого распространяется каждый из микропучков.

Задача о расчете и оптимизации инжектора с крупноструктурной управляющей сеткой представляет собой трехмерную проблему. Эффективное использование существующих трехмерных программ траекторного анализа, которые в значительной степени представляют собой методический задел, а не удобный для пользователя аппарат, не представляется возможным ввиду малой точности и большого времени счета, необходимого для оптимизации. Методические недостатки [1] двухмерных пакетов траекторного анализа еще в большей степени свойственны трехмерным программам. Методы синтеза требуют гораздо меньших затрат времени и по принципиальным соображениям должны использоваться на первом этапе проектирования новых систем, так как позволяют установить допустимые значения предельных параметров потока (например, предельную компрессию при заданном токе пучка и ускоряющем напряжении). Траекторный анализ, действующий методом проб и ошибок, оставляет открытым вопрос о степени приближения к реально существующему пределу. Поэтому в идеальной схеме расчета его очередь наступает после оптимизации ЭОС методами синтеза, когда встает окончательный вопрос о придании формирующими электродам удобных с точки зрения технологии очертаний.

Идея введения эффективного осесимметричного макропучка в системах с крупноструктурной сеткой и оценки эволюции микроструй в поле последнего сформулирована в [2]. В этой работе, однако, рассматривался нерелятивистский поток, причем как микроструи, так и макропучок описывались уравнениями параксиальной теории.

Для сильноточного релятивистского пучка необходимо учесть неоднородность параметров по сечению и пинчующее собственное магнитное поле. Таким образом, речь идет об алгоритме синтеза непараксиального релятивистского макропучка. Решение этой задачи впервые приводится в настоящей работе.

Основные положения предлагаемого метода расчета излагались в докладах [3, 4].

В настоящее время существует хорошо развитая теория релятивистских приосевых и приповерхностных потоков. Ниже будут использованы результаты работ [5, 6], в которых приведена полная библиография по этому вопросу.

Синтез непараксиальных осесимметричных релятивистских пучков в рамках геометризованной теории рассматривался в [7, 8]. Он сводится к решению задачи с начальными данными, часть которых задана на оси симметрии, а часть — на заранее неизвестной и определяемой в ходе решения поверхности катода. Известно, что система, описывающая

релятивистский пучок, включает два уравнения второго порядка с мнимыми характеристиками для скалярного потенциала электрического поля и векторного потенциала магнитного поля. В результате маршевые методы численного интегрирования в этих случаях оказываются неэффективными из-за развивающейся неустойчивости решения. Использованный в [9] прием аналитического продолжения уравнений пучка в комплексное пространство, где система становится гиперболической, не может быть отнесен к числу простых и снимающих все трудности подходов.

Представляется разумным построить синтез непараксиального пучка на методе полос, в первой из которых действует приосевая, а во всех последующих - приповерхностная асимптотика. Полос должно быть достаточно мало, чтобы упомянутые численные неустойчивости не успели реализоваться; они должны быть достаточно узки, чтобы не нарушить условия применения асимптотической теории. Вместе с тем при выполнении перечисленных требований решение, срашиваемое (с необходимой степенью гладкости) на границах полос, может описывать существенно непараксиальное течение, поперечное распределение плотности пространственного заряда и плотности тока в котором задается ступенчатой функцией. Срашивание решения осуществляется с использованием алгоритмов численного дифференцирования.

1. Синтез макропучка. Распределение потенциала $U(z)$ на оси инжектора с крупноструктурной сеткой носит существенно триодный характер, при котором потенциал сетки U_g заметно выше естественного.

Входной информацией к задаче служит полный ток I , потенциалы сетки U_g и анода U_a , расстояние по оси z до сетки z_g и анода z_a . В результате решения должен быть сформирован ламинарный пучок с заданной (или максимально возможной) компрессией, возможно более однородным распределением параметров в выходном сечении, малыми поперечными скоростями, технологичной в изготовлении сеткой, конфигурация которой определяется в ходе решения, формирующими электродами, удовлетворяющими условиями электрической прочности и т. д. Перечисленные требования часто носят противоречивый характер, и поиск компромиссного варианта является задачей оптимизации.

Управляющими параметрами служат ширина полос, углы наклона траекторий (условия встречи) и значения плотности тока в начальном сечении; управляющей функцией является распределение потенциала $U(z)$ между сеткой и анодом.

Алгоритм синтеза макропучка в виде ряда узких полос* сводится к заданию вспомогательной ломаной линии (эмиттера) $A_0 A_1 A_2 \dots$, звенья которой $s_{00}, s_{10}, s_{20}, \dots$ определяют начальную ширину слоев, а углы встречи ($\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$) зависят от величин $s'_{00}, s'_{10}, s'_{20}, \dots$, которые представляют собой производные траекторных функций по длине дуги l базовой кривой каждого слоя в точках A_1, A_2, \dots : для приосевого пучка это ось z , для слоя толщиной $s_1(l_1)$ - это внешняя граница приосевого пучка и т. д.

Рассмотрение в пределах слоя ведется в криволинейной ортогональной системе l, s (длина дуги базовой кривой - расстояние по нормали к ней). Если

$$z = Z_{en}(l_n), \quad R = R_{en}(l_n) \quad (1)$$

- параметрические уравнения базовой кривой $(n + 1)$ -го слоя, то связь

*Поясняющий рисунок (рис. 1б) в работе В. В. Плохова, В. А. Сырового (Радиотехника и электроника, 1990. N 12. С. 2582), которая является развитием настоящей работы.

l_n , s_n с R , z задается формулами

$$R = R_{en}(l_n) + Z'_{en}(l_n)s_n, \quad z = Z_{en}(l_n) - R'_{en}(l_n)s_n. \quad (2)$$

Для приосевого пучка системы l_0 , s_0 совпадает с z , R .

Введем безразмерные переменные (символы с чертой), связанные с размерными величинами в системе СИ соотношениями

$$\bar{r} = \frac{r}{L_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c}, \quad \bar{\varphi} = -\frac{\eta}{c^2} \varphi, \quad \bar{H} = \frac{\eta L_* \mu_0}{c} H, \quad (3)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\eta L_*^2}{c^2 \epsilon_0} \rho, \quad \bar{J} = \frac{\eta L_*^2}{c^3 \epsilon_0} J, \quad \eta = \frac{e}{m}, \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Здесь r , v , H , J - модули радиус-вектора, вектора скорости, вектора напряженности магнитного поля и вектора плотности тока, L_* - характерный масштаб длины; η - удельный заряд частицы ($\eta < 0$ для электрона), c - скорость света, μ_0 , ϵ_0 - магнитная и диэлектрическая проницаемость вакуума. В дальнейшем символ безразмерной величины - черта - будем опускать.

Приосевая и приповерхностная асимптотика релятивистских пучков при отсутствии внешнего магнитного поля определяются дифференциальным уравнением для траекторной функции s , нормированной на значение толщины слоя s_0 на эмиттере, и рядом соотношений, описывающих параметры потока в пределах полосы. Зметим, что азимутальная скорость при этом отсутствует. Для n -го слоя имеем

$$\tilde{v}_n^2 s_n'' + \tilde{v}_n \tilde{v}_n' s_n' = a(\sigma_n - N_n) s_n, \quad \tilde{v}_n = \frac{v_n}{\sqrt{1 - v_n^2}}, \quad s_n \equiv \frac{ds_n}{dl_n},$$

$$U_n + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_n^2}}, \quad \sigma_n = (U_n + 1)\rho_n. \quad (4)$$

Здесь v_n , \tilde{v}_n - скорость и импульс на базовой поверхности, U_n - распределение потенциала на ней, ρ_n - плотность пространственного заряда, σ_n - скалярная плотность заряда, N_n - эффективный "фон", фокусирующий при $N_n > 0$ и дефокусирующий в противоположном случае, a - константа, равная $1/2$ в приосевой полосе ($n = 0$) и 1 для приповерхностных слоев ($n \geq 1$).

Значения фона N_n и собственного азимутального магнитного поля H_{ψ_n} на внешней границе полосы определены формулами

$$N_0 = (U + 1)U'', \quad H_{\psi_0} = \frac{1}{2}\rho_0 s_0;$$

$$N_n = \frac{U_n + 1}{R_{en}} (R_{en} U_n')' + k_{1n} (2k_{1n} - k_{2n}) \tilde{v}_n^2 + \Omega_{\psi_n}^2 +$$

$$+ 2k_{1n} \tilde{v}_n \Omega_{\psi_n} - E_{sn}^2, \quad H_{\psi_n} = (k_{2n} \Omega_{\psi_n} + \rho_n v_n) s_n \quad (5)$$

Здесь k_{1n} , k_{2n} - главные кривизны базовой поверхности, E_{sn} - нормальное электрическое поле, $\Omega_{\psi n}$ - азимутальное внешнее магнитное поле на ней. Функции k_{1n} , k_{2n} , полная кривизна T_n и E_{sn} заданы соотношениями

$$k_{1n} = \frac{R''_{en}}{Z'_{en}}, \quad k_{2n} = \frac{Z'_{en}}{R'_{en}}, \quad T_n = k_{1n} + k_{2n}, \quad R'^2_{en} + Z'^2_{en} = 1, \quad (6)$$

$$E_{sn} = (U_n + 1) k_{1n} v_n^2 + v_n \Omega_{\psi n}.$$

Распределение потенциала в пределах слоя и плотность пространственного заряда описываются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= U + \frac{1}{4} (\rho_0 - U'') s_0^2, \quad \rho_0 = \frac{J_0}{v s_0^2}, \\ \varphi_n &= U_n + E_{sn} s_n + \frac{1}{2} (\rho_n - \bar{\rho}_n) s_n^2, \quad \rho_n = \frac{R_{en}(0) J_n}{R_{en} v_n s_n}, \\ \bar{\rho}_n &= \frac{1}{R_{en}} (R_{en} U'_n)' - T_n E_{sn}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь U , v - потенциал и скорость на оси z , J_n - плотность тока на эмиттере в n -м слое.

Роль базового потенциала U_n и внешнего по отношению к слою азимутального магнитного поля $\Omega_{\psi n}$ играют потенциал и собственное магнитное поле предыдущего слоя, вычисленные на его внешней границе:

$$U_n = \varphi_{n-1}, \quad \Omega_{\psi n} = (H_\psi)_{n-1}.$$

Из формул (4)-(7) видно, что переход к следующему слою требует подсчета фона N , а для этого R_e , φ , полученные численным интегрированием уравнения (4), должны быть дважды продифференцированы. Для таблично заданных функций R_e , φ строилась аппроксимирующая функция, производные которой отождествлялись с искомыми производными. В работе использовались аппроксимации двух видов. В первом случае функция $y(x)$ с известными значениями y_i описывалась кубическим сплайном $s(x)$, минимизирующим функционал

$$F = \alpha \sum_i [s(x_i) - y_i]^2 + (1 - \alpha) \int s''^2(x) dx, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Во втором случае аппроксимирующей функцией являлся МНК-полином четвертой степени. При вычислении второй производной численное дифференцирование применялось последовательно: сначала конструировалась первая производная, затем она аппроксимировалась и по результатам аппроксимации вычислялась вторая производная.

Оптимизация макропучка может проводиться послойно. При этом, задавши s_{oo} и варьируя J_0 и s'_0 в допустимых пределах, добиваются наибольшей компрессии на заданной длине, учитывая по возможности упоминавшиеся требования к качеству пучка на выходе. Границная траектория приосевого слоя, на которой остановлен выбор, позволяет построить второе звено эмиттера, составляющее с ней угол в 90° .

Далее проводится процедура оптимизации встречи в точке A_2 с соблюдением требования ламинарности и т. д.

По завершении наращивания полос закон изменения потенциала по всему непараксиальному макропучку становится известным, что позволяет, в частности, построить эквипотенциаль $\varphi = U_g$, определяющую геометрию сетки.

Альтернативным вариантом к послойной оптимизации является априорное задание эмиттера $A_0 A_1 \dots$ и наборов φ_k, J_k в слоях. Такой подход может обеспечить близость сетки к сфере (квазисферический эмиттер) за счет снижения компрессии.

Заметим, что мощным способом управления пучком служит изменение функции $U(z)$. Из выражения для N_0 в (5) видно, что создание протяженной области с $V'' > 0$ способствует фокусировке потока.

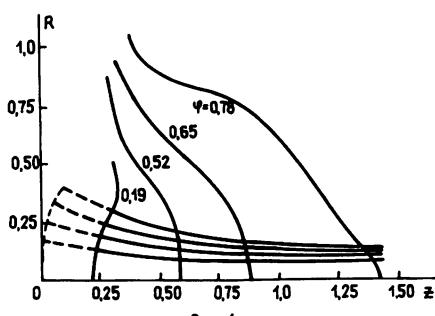


Рис. 1

На рис. 1 представлен пример расчета макропучка в приближении четырех полос с компрессией 2,4 от сетки 3,2 - от макрокатода (изображен пунктиром) с микропервеансом 1,2. Функция $U(z)$ задавалась полиномом пятой степени с изменением второй производной от положительных значений на сетке до отрицательных при $z \geq 0,5$ и со стремлением к значению U_a при $z \geq 0,5$.

Рис. 2 иллюстрирует синтез нерелятивистского макропучка с микропервеансом 3,2, который за анодом попадает в дрейфовое пространство.

2. Решение внешней задачи для макропучка. Решение внешней задачи основывалось на координатных разложениях [10], примененных в осесимметричном случае к функции $w = \varphi \sqrt{R}$. Граница пучка, определяемая функциями $R_e(u)$, $Z_e(u)$, а также условия Коши на этой кривой

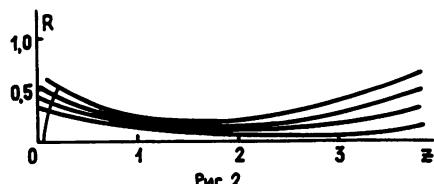


Рис. 2.

$$w_e = \varphi_e \sqrt{R_e}, \quad w_{ve} = \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_e = \sqrt{R_e} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)_e + \frac{dZ_e}{du} \frac{\varphi_e}{2R_e} \right] \quad (8)$$

аппроксимируются полиномами четвертой степени, что дает возможность построить криволинейную ортогональную систему u, v , связанную с границей потока $v = 0$:

$$z + iR = Z_e(v) + iR_e(v), \quad v = u + iv,$$

$$\beta + i\alpha = Z'_n(v) + iR'_e(v). \quad (9)$$

В системе u, v уравнение для w принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + G(u, v) w = 0, \quad G = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4R^2}, \quad (10)$$

а решение ищется в форме

$$w = \sum_{k=0} w_k(u) v^k, \quad G = \sum_{k=0} G_k(u) v^k.$$

В результате для φ получаем выражение

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\sqrt{R}} [w_e + w_{ve} v - \frac{1}{2} (w''_e + G_0 w_e) v^2 - \\ & - \frac{1}{6} (w'''_{ve} + G_0 w_{ve} + G_1 w_e) v^3 + \dots], \end{aligned} \quad (11)$$

по которому осуществляется расчет эквипотенциальных поверхностей в пространстве между сеткой и анодом.

3. Эволюция микропучка. Будем считать, что электромагнитное поле макропучка идеально описывает совокупность микропучков. Помещенный в это поле осевой электрон макропучка будет двигаться по плоской кривой, совпадающей с траекторией макропотока. Исследование эволюции микропучка в макрополе естественно вести в рамках релятивистской параксиальной теории квазиаксиально-симметричных течений: первоначально круглый пучок остается круглым в любом сечении, нормальном к искривленной оси, и имеет однородное поперечное распределение ρ . Это приближение тем точнее, чем ближе изменение потенциала в макропотоке при $z = \text{const}$ к параболической зависимости по R .

Квазиаксиально-симметричный пучок описывается уравнением

$$\tilde{v}(\tilde{v}\delta')' = \frac{1}{2} (\sigma - n)\delta, \quad \tilde{v} = (U + 1)v,$$

$$n = (U + 1)U'' + 2k^2\tilde{v}^2 + 2k\tilde{v}\Omega\psi + \Omega_\psi^2 - E_s^2, \quad (12)$$

$$E_s = (U + 1)kv^2 + v\Omega_\psi, \quad \sigma = \frac{\rho}{U + 1}, \quad \rho = \frac{J_g}{v\delta^2}.$$

Здесь $\delta = R/R_g$ – нормированный радиус микропучка (R_g – радиус на сетке), k – кривизна оси, v , E_s , Ω_ψ – скорость, нормальное электрическое поле и азимутальное магнитное поле на ней. Плотность тока J_g микропучка на сетке выше, чем в макропотоке, а ее величина определяется номером слоя и плотностью упаковки. Зная ее геометрию (численные результаты аппроксимируются полиномом четвертой степени) и плотность тока в макропучке, можно подсчитать ток, приходящийся на один кольцевой слой, а поделив это значение на число струй, найти ток микропучка и далее – плотность тока в нем при заданном радиусе.

Оптимизация электронно-оптической системы инжектора проводится не только по условиям встречи для полос макропучка, но и по соответствующим начальным данным для микропучей каждого слоя. Рис. 3 иллюстрирует результаты такого расчета. Видно, что микропучки пересекаются под малыми углами и что компрессия в

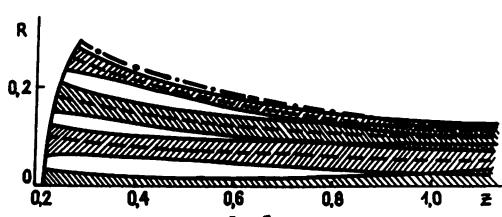


Рис. 3.

выходном сечении близка к компрессии макропучка.

4. Расчет микропушек. Расчет электронно-оптической системы микропушек производится на основе нерелятивистской параксиальной теории для пучков с прямой осью, направленной по нормали в центре микрокатода; координату, отсчитанную вдоль этой прямой будем обозначать символом l , а по нормали к ней - R . В пространстве катод-сетка инжектора, таким образом, мы пренебрегаем взаимодействием струй. Изменение радиуса пучка описывается уравнением

$$v(v\delta')' = \frac{1}{2} (\rho - U'')\delta, \quad \rho = \frac{J_c}{v\delta^2}, \quad v^2 = 2U, \quad \delta = \frac{R}{R_c}, \quad (13)$$

индекс "c" относится к микрокатоду. Для выполнения условий термоэмиссии на криволинейной поверхности вводится деформированная продольная координата ζ , связанная с микрокатодом $\zeta = 0$:

$$\zeta = l - \Lambda R^2, \quad \Lambda = -\frac{1}{2}\delta_3 = \text{const}, \quad \delta(l) = 1 + \delta_1 l + \dots \quad (14)$$

Потенциал в области микропушки должен удовлетворять прикатодной асимптотике и выходит на заданные значения U_g , U'_g на сетке:

$$2U(l) = \left(\frac{9J_c}{2}\right)^{2/3} l^{4/3} \left(1 + \frac{32}{15} \Lambda l + \bar{U}(l)\right). \quad (15)$$

В остальном функция $\bar{U}(l)$ является произвольной.

После решения задачи об эволюции микроструй стали известны оптимальные условия встречи в области сетка-анод, обеспечивающие близость совокупности струй к макропучку. Эти условия должны быть возможно более точно реализованы на выходе микропушки. Управляющими параметрами задачи является радиус δ_c макропучка на катоде, радиус

кривизны катода, функция $\bar{U}(l)$ в распределении потенциала на оси микропушки и расстояние микрокатод-сетка в каждом слое. Варьирование этих параметров позволяет приблизиться к оптимальным условиям встречи и, кроме того, дает возможность расположить все микрокатоды на сфере при несферической сетке.

Внешняя задача для микропушек решается с использованием идеи фальшивого аналитического представления, высказанной в работе [11]. Потенциал вне пучка с границей $R = R_c(l)$ определяется формулой

$$\varphi = \text{Re } U(\zeta + iy) + U(\zeta)R_c^2(\zeta) \frac{\delta''(\zeta)}{\delta(\zeta)} \left(2 \ln \frac{R}{R_c(\zeta)} + 1\right),$$

$$\zeta = l - R_c^2(l)\Lambda(l)(2 \ln \frac{R}{R_c} + 1), \quad \Lambda = -\frac{1}{2} \frac{\delta'}{\delta}, \quad (16)$$

$$y = R_c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{R_c^2} - 1 - 2 \ln \frac{R}{R_c} \right) \right]^{1/2}.$$

Функция $\bar{U}(l)$ в (15), определяющая распределение потенциала на оси микропушек, задавалась полиномом четвертой степени с учетом условий сопряжения по потенциальному U_g и полю U'_g на сетке.

5. Расчет прикатодных электродов макропучка. Расчет прикатодных формирующими электродов макропучка выполняется после синтеза микропушек и основан на результатах антипараксиальной теории [12].

Форма микрокатода, определяемая координатами центров микрокатодов, может быть аппроксимирована аналитической зависимостью, позволяющей вычислить главные кривизны макрокатода κ_1 , κ_2 и его полную кривизну $T = \kappa_1 + \kappa_2$ в точке старта. Сосредоточенный в струях пространственный заряд теперь снова "размазывается" по слоям и ступенчатое распределение плотности тока аппроксимируется параболой четвертой степени, позволяющей вычислить значение J'/J на границе потока (штрих означает производную по длине дуги макрокатода). Азимутальное собственное магнитное поле N в точке старта $Q(R_0, z_0)$ периферической траектории определяется полным током пучка I и расстоянием от оси z :

$$N = I/R_0.$$

Информация о параметрах потока в Q позволяет записать в локальных декартовых координатах X , Y (ось X направлена по нормали к макрокатоду в Q , Y - по касательной) уравнение границы потока

$$X_e = u, \quad Y_e = au^{4/3} + bu^2 + cu^{7/3}; \quad U_2 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3},$$

$$a = -\frac{3}{4} \frac{N}{U_2}, \quad b = \frac{1}{10} \frac{J'}{J} - \frac{1}{20} \frac{N^3}{J}, \quad c = \frac{1}{U_2} \left(-\frac{31}{140} \kappa_1 - \frac{1}{10} \kappa_2 \right) N, \quad (17)$$

построить ортогональную систему u , v , связанную с границей (17), которая в этой системе определяется уравнением $v = 0$

$$X + iY = X_e(v) + iY_e(v), \quad v = u + iv, \quad (18)$$

и дать приближенное решение внешней задачи в вид

$$\begin{aligned} 2\varphi = & \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2} \left\{ v_4(u^2 + v^2)^{2/3} \left[\left(1 + \frac{\sin \vartheta}{2R_0} u\right) \cos \frac{4}{3} \arctg \frac{v}{u} - \right. \right. \\ & - \frac{\sin \vartheta}{2R_0} v \sin \frac{4}{3} \arctg \frac{v}{u} \left. \right] + \frac{3}{5} F_2(u^2+v^2)^{5/6} \sin \frac{5}{3} \arctg \frac{v}{u} + \quad (19) \\ & \left. \left. + v_6(u^2-v^2) + (u^2+v^2)^{7/6} \left[v_7 \cos - \frac{7}{3} \arctg \frac{v}{u} + \frac{3}{7} \left(F_4 + \frac{\cos \vartheta}{2R_0} v_4 \right) \right] \right\}, \\ v_4 = & \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}, \quad v_6 = \frac{1}{10} N^2, \quad v_7 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} \frac{8}{15} T, \\ F_2 = & \frac{4}{3} \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3} N, \quad F_4 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{2}{5} \frac{J'}{J} + \frac{8}{45} \frac{N^3}{J} \right). \end{aligned}$$

Здесь ϑ - угол наклона оси X к оси z . Связь X , Y с R , z задается соотношениями

$$R = R_0 + X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta, \quad z = z_0 + X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta. \quad (20)$$

Формулы (19), (20) позволяют рассчитать конфигурации эквипотенциала, а также поверхностей с малым отрицательным потенциалом, которые могут быть использованы для создания синтезированного теплового зазора.

Точность синтеза макропучка определяется пределами применимости приосевой и приповерхностной асимптотик. При назначении начальной ширины слоев s_{k_0} контролировалось выполнение условия $s_{k_0} k_1, s_{k_0} k_1 \leq 0,25$, а начальные углы встречала относительно искривленной базовой поверхности не превышали 12° . При расчетах велся контроль за тем, чтобы поперечное приращение потенциала в слое составляло не более 20% потенциала на базовой поверхности.

Для микроустройств предположения параксиальной теории заведомо выполняются.

Точность решения внешней задачи по формулам (11) проверялась сравнением с известным точным решением для кольцевого пучка с конического катода [11], фальшивое асимптотическое приближение (16) - на задаче о формировании цилиндрического пучка [12], а прикатодные асимптотики (19) - на решении о формировании клиновидной вырезки из цилиндрического диода [13]. Можно надеяться, что все эти формулы обеспечивают пригодное приближение для задачи о придании электродам технологичной формы либо в подходе с "холодным" полем [14], либо с использованием программ траекторного анализа. Здесь же будут правильно учтены линзовье эффекты сетки, не включенные в предложенные алгоритмы. Особенно важна роль этого этапа для электронов микропушек, которые при плотной упаковке могут быть только весьма короткими. Что касается электродов для макропучка, то их синтезированные конфигурации довольно просты, и упрощенный технологичный вариант может быть получен без каких-либо трудностей.

Тестирование алгоритмов численного дифференцирования на точном решении, описывающем течение со спирального катода по спиральным траекториям, при использовавшемся в расчетах числе полос дает оценку точности порядка 5 - 10% для функций, вычисленных на периферии макропотока.

Модель, связанная с идеей макропучка, будет тем точнее, чем выше плотность упаковки микроструй. Принципиальные трудности решения рассмотренной задачи, обсуждавшиеся во введении, не позволяют предложить здесь каких-либо конструктивных способов оценки точности, связанной с отличием поля совокупности микроструй от поля макропучка и вызываемого этим отличием ухода центров микропучков с траекторий макропотока, которое не учитывается в расчете.

Заметим, однако, что предложенная модель является шагом вперед по сравнению с повсеместно применяемыми методами анализа осесимметричных пучков, когда результаты расчетов (форма огибающей и особенно эмиттанс) без серьезных обоснований переносятся на многоструйные системы.

Подчеркнем в заключение, что приведенные примеры расчета иллюстрируют работоспособность метода, но не претендуют на установление предельных параметров системы, которые должны быть результатом тщательной оптимизации. Реальность выполнения этой программы обеспечивает тот факт, что вариант расчета многоструйной системы занимает на БЭСМ-6 время порядка 5 минут.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов П. И., Осипова Г. П., Сыровой В. А. // ЖВМФ. 1989. Т. 29. № 3. С. 405.
2. Данилов В. И., Дроздов С. С. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. № 8. С. 1706.
3. Акимов П. И., Дроздов С. С., Плохов В. В. и др. // Тезисы докл. VI Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике - Томск, 1986. Ч. 2. С. 52.
4. Плохов В. В. // Тезисы докл. VII Всесоюзного симпозиума по

5. сильноточной электронике. - Новосибирск, 1988. ч. 2. с. 50.
5. Сыровой В. А. //Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 7. С. 1492.
6. Сыровой В. А. //Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 8. С. 1706.
7. Сыровой В. А. //Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 4. С. 793.
8. Плохов В. В. //Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 1. С. 164.
9. Colburn D.S., Harker K.J., Kino G.S. Microwaves. Proc. IV Internat. Cong. Microwave Tubes. Eindhoven Centrex Publ. Comp. 1963. Р. 572.
10. Сыровой В. А. //ПМТФ. 1967. № 4. С. 3.
11. Данилов В. И. Методы расчета электронно-оптических систем. - М. : Наука, 1977. С. 61.
12. Вацковский А. В., Солуянова Е. А., Сыровой В. А., Цимлинг Ш. Е. //Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 4. С. 783.
13. Данилов В. И., Сыровой В. А. Методы расчета электронно-оптических систем. - М. :Наука, 1977. С. 87.
14. Овчаров В. Т., Невский П. В., Соколов А. И. //Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1978. № 8. С. 54.

Всесоюзный электротехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
25 августа 1989 г.

TO THE DESIGN OF MULTIBEAM RELATIVISTIC INJECTOR

*P. I. Akimov, V. V. Plochov, V. A. Syrovoj, A. V. Fedotov,
L. P. Shanturin*

The method of calculation of multibeam relativistic injector is described. The effective macrobeam with axial symmetry is introduced to take into account. The microbeams interaction. Every microbeam propagates in the electromagnetic field of macrobeam.

УДК 538.3

**ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ХОРОШО ПРОВОДЯЩИМ МЕТАЛЛОМ И ДИЭЛЕКТРИКОМ,
ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ФЛУКТУАЦИОННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

В. Г. Полевой

Рассмотрен теплообмен, связанный с флюктуационным электромагнитным полем, между хорошо проводящим металлом и диэлектриком с проницаемостями, близкими к единице; получено общее выражение для спектральной плотности теплового потока. Рассмотрены некоторые частные случаи.

В работе [1] было получено выражение, определяющее тепловой поток, обусловленный флюктуационным электромагнитным полем, между двумя произвольными полупространствами, разделенными плоским вакуумным зазором ширины a . Общий результат достаточно сложен, так что при произвольных проницаемостях сред получить из него простое аналитическое выражение для теплового потока не представляется возможным. В частном случае, когда обе среды являются хорошо проводящими металлами, общее выражение, как показано в [1], значительно упрощается и окончательный результат принимает простую обозримую форму.

В данной работе мы рассмотрим другой частный случай, когда также возможно получить довольно простое выражение для теплового потока. Мы имеем виду случай, когда одна из сред является хорошо проводящим металлом, а диэлектрическая и магнитная проницаемости другой незначительно отличаются от единицы (рис. 1):

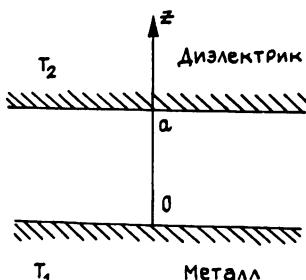


Рис 1

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\epsilon}(\omega),$$

$$\mu(\omega) = 1 + \tilde{\mu}(\omega), \quad (1)$$

где величины $\tilde{\epsilon}(\omega)$ и $\tilde{\mu}(\omega)$ малы ($|\tilde{\epsilon}|$, $|\tilde{\mu}| \ll 1$). Электродинамические характеристики металла описываются его поверхностным импедансом $\zeta(\omega)$, который для хорошо проводящего металла является малой величиной ($|\zeta(\omega)| \ll 1$).

Как показано в [1], тепловой поток $P(a)$ в направлении от среды 1 к среде 2 записывается в виде

$$P(a) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega [\Pi(T_1, \omega) - \Pi(T_2, \omega)] M(\omega; a), \quad (2)$$

где

$$\Pi(T, \omega) = \hbar \omega / (e^{T/\hbar} - 1), \quad \omega_T = k_B T / \hbar,$$

k и k_B – постоянные Планка и Больцмана соответственно, T_1 – температура металла, T_2 – температура диэлектрика. Для определенности мы будем считать, что $T_1 > T_2$. Величина $M(\omega; a)$, входящая в (2), может быть представлена в виде суммы

$$M(\omega; a) = M_t(\omega; a) + M_1(\omega; a),$$

причем в наименшем порядке по малому импедансу металла для $M_t(\omega; a)$ и $M_1(\omega; a)$ имеем следующие выражения:

$$M_t(\omega; a) = \frac{i\zeta'(\omega)}{2k} \int_0^\infty dk \ k \frac{(q/\mu - q^*/\mu^*)}{|chq_0a + (q/\mu q_0) shq_0a|^2}; \quad (3)$$

$$M_1(\omega; a) = \frac{ik\zeta'(\omega)}{2} \int_0^\infty dk \ k \frac{(q/\epsilon - q^*/\epsilon^*)}{|q_0 shq_0a + (q/\epsilon) chq_0a|^2}, \quad (4)$$

где $\zeta'(\omega)$ – вещественная часть импеданса металла, а

$$k = \omega/c, \ q_0 = \sqrt{\kappa^2 - k^2}, \ q = \sqrt{\kappa^2 - k^2 \epsilon \mu},$$

c – скорость света в вакууме. Знак корня у величины q выбирается таким образом, чтобы было $Re q > 0$. Выбор же знака у q_0 , как видно из (3) и (4), произволен. Предположение о том, что проницаемости диэлектрика мало отличаются от единицы пока не было использовано, так что выражения (3) и (4) справедливы при любых проницаемостях $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Рассмотрим (3) и (4) в предположении (1). В силу малости добавок $\tilde{\epsilon}(\omega)$ и $\tilde{\mu}(\omega)$ дальнейший расчет проводится с точностью до первого порядка по $\tilde{\epsilon}(\omega)$ и $\tilde{\mu}(\omega)$. Так как вычисления, необходимые для нахождения теплового потока, довольно громоздки, то мы их опустим и приведем лишь окончательное выражение для величины $M(\omega; a)$:

$$\begin{aligned} M(\omega; a) = & \zeta' \left[\frac{4k^2}{3} + (\tilde{\epsilon}' - \tilde{\mu}') \frac{k \sin 2ka}{4a} + (\tilde{\epsilon}'' - \tilde{\mu}') \frac{k \cos 2ka}{4a} + \right. \\ & + \tilde{\mu}' \frac{\sin 2ka}{4k^3} + \tilde{\mu}'' \frac{\sin 2ka}{2a^2} + \tilde{\mu}'' \frac{\cos 2ka}{4ka^3} + \frac{k^2}{2} (\tilde{\epsilon}' + \tilde{\mu}') \cos 2ka - \\ & - \frac{k^2}{2} (\tilde{\epsilon}'' + \tilde{\mu}'') \sin 2ka - k^3 a (\tilde{\epsilon}' + \tilde{\mu}') \int_{2ka}^\infty dt \frac{\sin t}{t} - \\ & \left. - k^3 a (\tilde{\epsilon}'' + \tilde{\mu}'') \int_{2ka}^\infty dt \frac{\cos t}{t} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где одним и двумя штрихами отмечены соответственно вещественные и мнимые части проницаемостей.

Из (5) видно, что при $a \rightarrow 0$ в тепловом потоке содержатся слагаемые, нарастающие, как $1/a$, $1/a^2$ и $1/a^3$. Наличие члена,

пропорционального $1/a^3$, не противоречит (отмеченному в [1]) общему выводу о том, что при $a \rightarrow 0$ тепловой поток не может нарастать быстрее, чем $1/a^2$, так как приближение хорошо проводящего металла применимо при ширинах зазора a , значительно превосходящих толщину скин-слоя в металле. Асимптотика же $1/a^2$ имеет место в противоположном случае при малости ширины зазора по сравнению с толщиной скин-слоя.

Если магнитную проницаемость диэлектрика можно считать равной единице (что мы и будем в дальнейшем предполагать), то выражение (5) несколько упрощается и принимает вид

$$M(\omega; a) = k^2 \zeta' \left[\frac{4}{3} + \tilde{\epsilon}' \left(\frac{\sin 2ka}{2ka} + 2ka \int_{2ka}^{\infty} dt \frac{\sin t}{t^3} \right) + \tilde{\epsilon}'' \left(\frac{\cos 2ka}{2ka} + 2ka \int_{2ka}^{\infty} dt \frac{\cos t}{t^3} \right) \right]. \quad (6)$$

Отсюда следует, что при широких зазорах ($a \rightarrow \infty$)

$$M(\omega; \infty) = (4/3) k^2 \zeta'. \quad (7)$$

Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении $M(\omega; \infty)$ вообще не зависит от свойств диэлектрика. В противоположном случае узких зазоров ($a \rightarrow 0$) из (6), как нетрудно убедиться, получаем

$$M(\omega; a) \approx (3/4) (k \zeta' \tilde{\epsilon}'' / a), \quad (8)$$

т. е. тепловой поток нарастает, как $1/a$.

Интегральный (по частотам) тепловой поток $P(a)$ выражается через величину $M(\omega; a)$ согласно (2). Интегрирование по частоте, разумеется, можно выполнить только тогда, когда известны зависимости от частоты импеданса металла и проницаемости диэлектрика. Будем считать, что электродинамические свойства металла могут быть описаны теорией нормального или аномального скин-эффекта, т. е. что импеданс имеет степенной вид

$$\zeta(\omega) = G_s \omega^s,$$

где $s = 1/2$ - для нормального скин-эффекта и $s = 2/3$ - для аномального, а константа G_s от частоты не зависит.

Для того, чтобы можно было довести вычисления до конца, сделаем относительно диэлектрика следующие простейшие предположения. Будем считать его прозрачным ($\tilde{\epsilon}'' = 0$) и не обладающим дисперсией во всем существенном для интегрирования интервале частот, т. е. $\tilde{\epsilon}' = \tilde{\epsilon}$ и не зависит от частоты. Тогда для $M(\omega; a)$ из (7) имеем

$$M(\omega; a) = k^2 \zeta' \left[\frac{4}{3} + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\sin 2ka}{2ka} + 2ka \int_{2ka}^{\infty} dt \frac{\sin t}{t^3} \right) \right].$$

Для интегрального теплового потока в случае широких зазоров с учетом (7) получаем из (2) следующее выражение:

$$P(\infty) = \frac{4}{3} \frac{G_s k_B^{4+s}}{\pi^2 c_n^2 n^{3+s}} \left(T_1^{4+s} - T_2^{4+s} \right) \Gamma(4+s) \zeta_{\text{Рим}}(4+s),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, а $\zeta_{\text{Рим}}(x)$ – дзета-функция Римана.

Интегральный тепловой поток $P(a)$ при произвольной ширине зазора удобно нормировать на его значение при бесконечно широком зазоре $P(\infty)$. После несложных преобразований величину $P(a)/P(\infty)$ можно привести к следующему виду

$$\frac{P(a)}{P(\infty)} = 1 + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4\Gamma(4+s)\zeta_{\text{Рим}}(4+s)} \left[\frac{T_1^{4+s} H_s(\beta_1) - T_2^{4+s} H_s(\beta_2)}{T_1^{4+s} - T_2^{4+s}} \right], \quad (9)$$

где $\beta_\nu = 2ak_B T_\nu / \hbar c$ ($\nu=1,2$) – обезразмеренная ширина зазора, а функция $H_s(\beta)$ определяется равенством

$$H_s(\beta) = \psi_s(\beta) + \int_1^\infty dt \frac{\psi_s(\beta t)}{t^2},$$

причем

$$\psi_s(\beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty dx \frac{x^{2+s} \sin \beta x}{e^x - 1}. \quad (10)$$

Для узких зазоров ($\beta_\nu \rightarrow 0$), как видно из (10), функция $\psi_s(\beta)$ стремится к постоянному значению

$$\psi_s(0) = \int_0^\infty dx \frac{x^{3+s}}{e^x - 1} = \Gamma(4+s) \zeta_{\text{Рим}}(4+s),$$

так что

$$H_s(0) = 2\Gamma(4+s) \zeta_{\text{Рим}}(4+s).$$

Для $s = 1/2$ и $s = 2/3$ имеем соответственно

$$H_{1/2}(0) = 24,54, \quad H_{2/3}(0) = 30,58.$$

С учетом этого получаем, что при непосредственном контакте сред, когда $a = 0$ ($\beta_\nu = 0$), для нормированного теплового потока имеем

$$\frac{P(0)}{P(\infty)} = 1 + \frac{3}{2} \tilde{\epsilon}.$$

Как видно, это отношение не зависит ни от импеданса металла, ни от его температуры. Во избежание недоразумений отметим, что нарастающий при $a \rightarrow 0$ член в данном случае отсутствует – в силу предположения о прозрачности диэлектрика (см. (8)).

Выясним теперь поведение функции $\psi_s(\beta)$ при $\beta \rightarrow \infty$. Для этого запишем $(e^x - 1)^{-1}$ в виде суммы геометрической прогрессии

$$(e^x - 1)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

Тогда

$$\psi_s(\beta) = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_0^\infty dx \frac{x^{2+s} e^{1/\beta x}}{e^x - 1} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dx x^{2+s} e^{-(n-1)\beta x} =$$

$$= \frac{\Gamma(3+s)}{\beta^{3+s}} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\beta} \frac{1}{(n/\beta - 1)^{3+s}}.$$

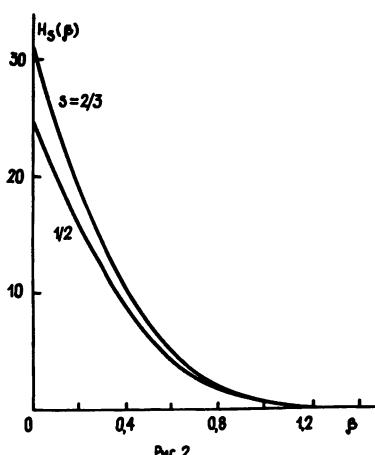
Входящая в последнее выражение сумма представляет собой интегральную сумму функции $1/(t-i)^{3+s}$ с интервалом разбиения $1/\beta$. Следовательно при больших β функция $\psi_s(\beta)$ имеет асимптотику

$$\psi_s(\beta) \approx \frac{\Gamma(3+s)}{\beta^{3+s}} \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{dt}{(t-i)^{3+s}} = - \frac{1}{\beta^{3+s}} - s(s+1) \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}.$$

С учетом этого для $H_s(\beta)$ получаем следующую асимптотическую формулу:

$$H_s(\beta) \approx - \frac{1}{\beta^{3+s}} \frac{5+s}{4+s} s(s+1) \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$$

Таким образом, как при $s=1/2$, так и при $s=2/3$ функция $H_s(\beta)$ подходит к своему предельному значению, равному нулю, снизу, т. е. имеет минимум. Однако, в отличии от теплообмена между хорошо проводящими металлами (см. [1]), в данном случае минимум выражен значительно слабее: его глубина всего лишь порядка $2 \cdot 10^{-2}$ и достигается он при $\beta \sim 2$ как для нормального, так и для аномального скин-эффекта. Если температура одной из сред значительно превышает температуру другой, например $T_1 > T_2$, то из (9) получаем, что



$$P(a)/P(\infty) =$$

$$= 1 + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4\Gamma(4+s)\zeta_{\text{Рим}}(4+s)} H_s(\beta_1),$$

или же

$$P(a)/P(\infty) = \begin{cases} 1 + 0,061\tilde{\epsilon} H_{1/2}(\beta_1), & s = 1/2 \\ 1 + 0,048\tilde{\epsilon} H_{2/3}(\beta_1), & s = 2/3 \end{cases}$$

т. е. зависимость теплового потока от ширины зазора определяется универсальной функцией $H_s(\beta)$. Графики функций $H_s(\beta)$, рассчитанные на ЭВМ, показаны на рис. 2.

Автор благодарен С. М. Рытову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Полевой В. Г., Рытов С. М. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. Вып. 6(12). С. 2087.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
10 января 1990 г.

THE HEAT TRANSFER BY ELECTROMAGNETIC FIELD BETWEEN PERFECT CONDUCTOR AND DIELECTRIC

V. G. Polevoj

The problem of heat transfer due to a fluctuational electromagnetic field between perfect conductor and a medium which permittivity is near the unity is considered. The general expression for spectral density of heat flux is obtained. Some special cases are considered.

Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 621.391.2

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР РАДИОЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА
ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ МОРЯ

А. В. Волков, Л. А. Славутский, Б. М. Шевцов

Основным механизмом формирования радиолокационных отражений от морской поверхности считается резонансное брэгговское рассеяние [1]. При этом крупномасштабное волнение приводит к модуляции радиолокационного сигнала [2], временные характеристики которого рассматривались в ряде работ (см., например, [3, 4]). В настоящей работе предлагается методика экспериментального исследования влияния крупномасштабного волнения на пространственный спектр радиолокационного сигнала при скользящем распространении.

Исследования проводились летом 1989 года в Тихом океане в 16-м рейсе НИС "Академик А. Несмеянов". В качестве источников радиосигналов использовалась судовая радиолокационная станция "Океан М-03" с двумя локаторами кругового обзора (длины волн 3 и 10 см), приемно-передающие антенны которых располагались на высоте ~26 м над уровнем моря. Диаграмма направленности антенн локаторов составляла 0,75 и 2,5° (соответственно для длин волн 3 и 10 см) в горизонтальной плоскости и 20° (для обеих длин волн) в вертикальной плоскости. Параллельно с радиолокационными измерениями проводился контроль состояния морской поверхности путем измерения ее радиотеплового излучения на длине волны 1,35 см. Радиометрические измерения осуществлялись под углом 20–30° к поверхности в пределах пятна размером примерно 150 см. При этом временные изменения радиотеплового излучения содержат информацию о временной зависимости уклонов морской поверхности и, соответственно, о спектре энергонесущего волнения (ветровые волны, збы) [5]. Вклад качки судна оценивался с помощью гирокопического датчика и исключался спектральной обработкой. Радиолокационные сигналы оцифровывались либо непосредственно, либо записывались на аналоговый магнитофон с полосой до 5 МГц, и дальнейшая обработка проводилась на берегу.

Сигналы радиолокатора, соответствующие импульсным посылкам в заданном направлении, подавались на вход быстродействующего АЦП (с частотой оцифровки до 20 МГц). Время накопления сигнала с заданного направления определялось временем одного оборота (3,45 с) антенн локатора (256 посылок записывались за 15 минут). Длительность отраженного импульса достаточно мала по сравнению с характерным временем изменения формы морской поверхности, поэтому поверхность можно считать замороженной в этом интервале времени. При углах скольжения, меньших характерных уклонов поверхности, можно считать, что на структуру и характеристики отраженного сигнала изменение угла скольжения влияния не оказывает. Если иметь в виду крупномасштабное волнение, то этот случай реализуется при дальностях более 1 км. Таким образом, предлагаемая методика позволяет исследовать пространственные характеристики морской поверхности в выбранном направлении.

Результат усреднения энергетических спектров флюктуаций

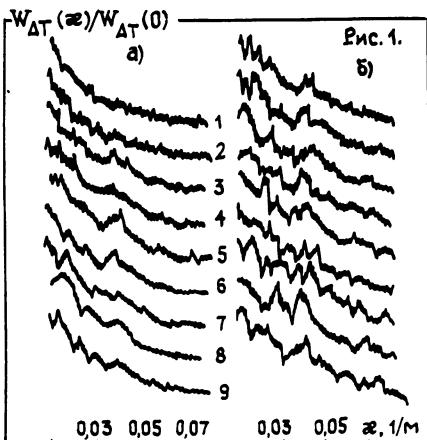


Рис. 1.

интенсивности отраженных сигналов
соответствующих 128

импульсным посылкам локатора в одном направлении при длине волны излучения 10 см, показан на рис. 1 ($\kappa = 4\pi f/c$, f - частота, c - скорость света). Метки на вертикальной оси не нанесены во избежание загромождения рисунка (это же относится и к рис. 2). Кривые 1-9 соответствуют различным азимутальным углам локации относительно направления ветра: $-57^\circ, -45^\circ, -25^\circ, 0^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 67^\circ, 90^\circ, 115^\circ$. Кривые, показанные на рис. 1а, получены при слабом ветре и наличии

крупной зыби на поверхности моря, а рис. 1б соответствует развитому ветровому волнению (4 балла). На рисунке хорошо видно изменение структуры спектров, связанное с анизотропией волнения [6]. Регулярный подъем кривых в области низких частот объясняется расходностью радиоизлучения в горизонтальной плоскости, которая для длины волны 10 см больше, чем для 3 см.

На рис. 2 (кривая 1) приведен аналогичный спектр для длины волны 3 см вдоль направления ветра, который для удобства показан в логарифмическом масштабе. В это же время была получена временная зависимость радиояркостной температуры воды и ее энергетический спектр W_{ν_x} (изображен на врезке). Из него можно заключить, что в период проведения измерений в поверхностном волнении преобладала крупная зыбь с длиной волны ~ 200 м и амплитудой ~ 3 м [7].

Из рис. 2 (кривая 1) видно, что спектр в показанной частотной области состоит из двух участков (условно обозначенных I и II), имеющих похожую форму, но отличающихся по амплитуде. Подобная структура хорошо прослеживается практически на всех спектрах, соответствующих данным, полученным в различных условиях. Следуя работе [8], можно предположить, что спектр отраженного сигнала представляет собой сумму спектра уклонов морской поверхности и его автокорреляционной функции с некоторыми коэффициентами:

$$W_{\Delta t}(\kappa) = 4\pi^2 \nu(\kappa) [a_x^2 W_{\nu_x}(\kappa) + 2a_{xx}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\nu_x}(\kappa - \kappa_1) W_{\nu_x}(\kappa_1) d\kappa_1], \quad (1)$$

где κ - волновое число поверхностного волнения, $W_{\Delta t}(\kappa)$ - энергетический спектр флуктуаций интенсивности отраженного от поверхности радиосигнала, Δt , $W_{\nu_x}(\kappa)$ - энергетический спектр проекций вектора единичной внешней нормали к поверхности на выбранное направление x , ν_x , $\nu(\kappa)$ - пространственный спектр огибающей исходного радиолокационного импульса.

Для расчета по формуле (1) предположим, что первый участок в спектре сигнала соответствует спектру уклонов поверхности. Для грубой оценки коэффициентов a_x и a_{xx} предположим, что вдоль

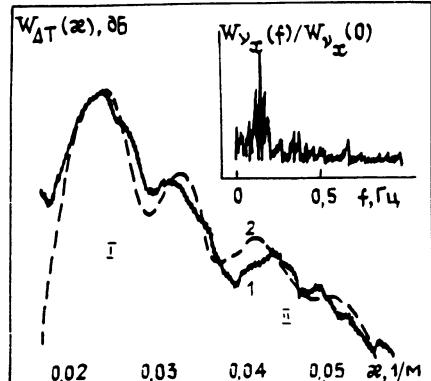


Рис 2

направления локации спектр поверхностного волнения сосредоточен вблизи гармоники с пространственным волновым числом k и амплитудой A и описывается гауссовой кривой с полушириной Δk . Тогда для оценки отношения этих коэффициентов можно получить следующее простое выражение:

$$\frac{a_x}{a_{xx}} = Ak \sqrt{\sqrt{\pi} \Delta k D},$$

где D - отношение высот первого и второго участков в спектре сигнала. Оценка отношения $a_x/a_{xx} \approx 10^{-2}$, сделанная для высоты волнения 3 м, по порядку величины согласуется с коэффициентами, приведенными в [8] для угла скольжения 2° . Результат расчета, проведенного по формуле (1) с параметрами показанного спектра сигнала, приведен на рис. 2 (кривая 2).

Таким образом, в спектре отраженного радиолокационного сигнала в явном виде присутствует спектр крупномасштабного волнения и экспериментальные данные позволяют оценить нелинейный эффект "детектирования" [8]. Реализованная методика наблюдений позволяет оценить пространственные спектральные характеристики анизотропного крупномасштабного волнения.

Радиометрические измерения выполнены совместно с сотрудниками ЛПИ Д. В. Шаниковым и О. Б. Утробиным, которым авторы выражают глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barric D.E. // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. N 1. P.2.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. - М.: Наука, 1972.
3. Лейкин И. А., Островский И. Е. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. N 3. С. 346.
4. Keller W.C., Plant W.J. // J. Geophys. Res. 1980. V. 90. N C1. P. 1019.
5. Шутко А. М. СВЧ радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. - М.: Наука, 1986.
6. Гуськов М. П., Жидко Ю. М. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. N 11. С. 1318.
7. Пирсон В., Нейман Г., Джеймс Р. В кн.: Ветровые волны: Пер. с англ. /Под ред. Ю. М. Крылова. - М.: ИЛ, 1962.
8. Долин А. С., Родин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. N 1. С. 79.

Тихоокеанский океанологический
институт ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
3 мая 1990 г.

УДК 550.388.2 + 621.396

О СТРУКТУРЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ КРУПНОМАШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВНЕШНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Ю. К. Калинин, А. А. Романчук

Ранее в работах [1,2] был определен новый тип случайных крупномасштабных неоднородностей внешней ионосферы по данным некогерентного рассеяния, низкочастотного и высокочастотного зондирования с ИСЗ и ГФР [3-8].

Неоднородности представляют собой цилиндрические образования с

осями, ориентированными вертикально, с соизмеримыми горизонтальными и вертикальными размерами порядка 10^3 км и временем жизни более часа. Относительная вариация электронной концентрации $\delta N_e/N_e$

заключена в пределах 0,05–0,5 с некоторым преобладанием положительных отклонений над отрицательными. Существенной особенностью неоднородностей является тот факт, что они являются уединенными, интервал между ними на порядок превышает интервал, занимаемый самим объектом. Их появление – события независимые; не обнаруживается зависимость отдельных параметров неоднородностей между собой и с известными индексами гелиогеофизической активности. Имеются косвенные данные о наличии зависимости между δN_e и N_e . Неоднородности могут вызывать частотную нестабильность трансионосферных СВЧ сигналов, достигающую величины 10^{-13} на частоте 10^4 МГц, обусловленную их горизонтальным перемещением со скоростью v_g около 250 м/с. Это существенно ограничивает предельные возможности ряда технических систем, ибо, как было показано методами, развитыми в работе [9], частотный сдвиг приобретает практически вся энергия трансионосферного СВЧ сигнала.

В данной работе рассматривается структура неоднородностей – зависимость $\delta N_e/N_e$ и δN_e от местных координат. Анализ данных НР [3] позволил отметить главную особенность структуры неоднородностей – мультиплективный характер зависимости δN_e от вертикальной координаты $\xi = h/H$ (h – высота над поверхностью Земли, H – шкала высот) и горизонтальной $\eta = r/r_0$ (r – расстояние от оси неоднородности, r_0 – радиальный масштаб):

$$\delta N_e = (\delta N_e)_m G(\xi) \mathcal{F}(\eta), \quad (1)$$

где $(\delta N_e)_m$ – максимальное значение абсолютной контрастности, $G(\xi) \leq 1$, $\mathcal{F}(\eta) \leq 1$. Соотношение (1) означает, что форма возмущения (зависимость δN_e от смещения в горизонтальном направлении) одинакова на всех высотах, а зависимость от высоты одинакова при различных смещениях. Данные НР [3] позволяют определить $G(\xi)$ в виде экспоненты на интервале $[h_H, h_B]$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \exp(-\xi + \xi_H), & h_H < h < h_B \\ 0, & h < h_H, h > h_B \end{cases}, \quad (2)$$

где $\xi_H = h_H/H$.

Величина h_H может быть с достаточной для практики точностью определена как несколько превышающая высоту h_m главного максимума ионосфера:

$$h_H \approx h_m + H/3. \quad (3)$$

Величина h_B приближенно оценивается по данным НР [7], ИСЗ [5] и в единичном измерении с помощью ГФР [8]. Ее значение примерно равно $h_B \approx 1,5$ –2 тыс. км. Следует отметить, что вплоть до указанных высот ионосфера, являясь частично ионизированной средой, вращается вместе с Землей.

Совокупность формул (2)–(4) позволяет, с учетом того, что в рассматриваемом интервале высот электронная концентрация $N_e \sim G(\xi)$, представить зависимость относительной контрастности $\delta N_e/N_e$ в виде

$$\frac{\delta N}{N_0} = \left(\frac{\delta N}{N_0} \right)_0 \begin{cases} F(\eta), & h_H < h < h_B \\ 0, & h < h_H, h > h_B \end{cases}, \quad (4)$$

т. е. внутри интервала высот $h_H < h < h_B$ относительная контрастность не зависит (практически слабо зависит) от высоты [2, 4].

Экспериментальные данные НР [3] позволяют провести исследование функции формы $F(\eta)$. В работе [5] было сделано достаточное предположение о том, что $F_1(\eta) = 1/\sinh \eta$. Действительно, для эмпирических унимодальных примерно симметричных функций $F_3(\eta)$ такая аппроксимация всегда возможна, как, впрочем, и аппроксимация функциями $F_2(\eta) = \eta/\sinh \eta$, $F_3(\eta) = \exp(-\eta^2)$, $F_4(\eta) = (1 + \eta^2)^{-1}$. Из всех видов нелинейной обработки функций формы $F_3(\eta)$ предпочтение было отдано следующей простой схеме. Из соотношения $F_1(\eta) = 0,5$ определялась $\eta_{0,5}^1$, а затем находилась величина $q_1 = F_1(2\eta_{0,5}^1)$. Для перечисленных выше функций $q_1 = 0,14$, $q_2 = 0,13$, $q_3 = 0,06$, $q_4 = 0,20$ (отметим, что, например, для треугольной формы всегда $q = 0$). Соответственно были определены и экспериментальные величины $\bar{q}_3 = 0,12 \pm 0,05$. Результаты обработки свидетельствуют о том, что предпочтение следует отдать функциям формы с линейно-экспоненциальной асимптотикой при больших значениях аргументов. В рамках рассмотренного массива различных форм F_i такой выбор, в некотором смысле, является необходимым. Уместно отметить, что функция F_1 удовлетворяет "минимуму" волновому уравнению с кубической нелинейностью $u'' - u = -2u^3$.

В заключение следует обратить внимание на возможность альтернативных ветвей будущей теории рассматриваемых неоднородностей. Альтернатива определяется направлением скорости v_Γ . Гипотеза о меридиальном направлении перемещения приводит к представлениям об объектах, движущихся от полюсов к экватору. По скорости и продольному масштабу объекты сходны с ВГВ, но существенно отличаются от них как отсутствием пары в другом полушарии, так и малым горизонтальным масштабом в направлении, ортогональном скорости перемещения (по фронту волны). Гипотеза о трансмеридиональном направлении v_Γ обратном вращению ионосфера, приводит к представлениям о медленно перемещающихся относительно магнитосферы объектах, сквозь которые проходит вращающаяся атмосфера.

Обеим альтернативам со всей очевидностью соответствуют представления о нелинейных уединенных волнах. При этом особой сложностью моделирования таких объектов является то обстоятельство, что сама модель должна на определенном этапе своего развития включать эволюцию уединенной волны. Временной параметр эволюции должен быть много больше времени диффузии, а в пределе эта модель, по-видимому, должна приводить к решению типа уединенной волны (в частности солитона). Предельное решение может быть моделью всегда существовавших неоднородностей (реликтовая модель).

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин Ю. К., Романчук А. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1981. Т. 21. № 3. С. 552.
2. Романчук А. А. Диссертация. - М.: Институт прикладной геофизики, 1988.

3. Evans J.V. Millston Hill Thomson Scatter Results for 1968. Technical Reports 499. Massachusetts Institute of Techn. 1973. P. 83.
4. Thomas J.O., Rycroft M.J., Colin Z., Chan K.Z. Electron density profiles in ionosphere and exosphere. Amsterdam. North-Holland Publishing Company. 1966. P. 322.
5. Фаткуллин М. Н., Соловьевников Г. К. и др. Препринт ИЗМИРАН N 20 (385). М., 1982.
6. Гдалевич Г. Л. Диссертация. - М.: Институт космических исследований АН СССР, 1983.
7. Clark W.L., McClure J.P., Van Zandt T.E. Description and Catalog of Ionospheric F-region Data. Jacamarca Radar Observatory, 1976. - 42 p.
8. Gdalevich G.Z., Gubsky V.F., Natorf Z. // J. Atmos. Terr. Phys. 1984. V. 46. N 10. P. 953.
9. Денисов Н. Г., Ерухимов Л. М. // Геомагнетизм и аэрономия. 1966. Т. 6. N 4. С. 695.

Институт прикладной геофизики

Поступила в редакцию
3 мая 1990 г.

УДК 551.510.535

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ И ЧАСТОТЫ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С МОЛЕКУЛАМИ В D-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

А. М. Гоков, В. А. Нисюра, Л. А. Пивень

Возможность одновременного измерения высотных профилей плотности $N(h)$ (h - высота в километрах) и частоты столкновений электронов $\nu(h)$ с молекулами в D-области ионосферы (впрочем как и во всей ионосфере) является весьма интересной задачей.

Изучение D-области ионосферы (получение сведений о $N(h)$) ведется эпизодически в ракетных измерениях (зондовые или методом когерентных частот) (см., например, [1, 2]) или по распространению СДВ (см., например, [3]). Для систематических исследований используется метод частичных отражений (ЧО) (например, [4]), обладающий достаточной точностью и приемлемой стоимостью. Однако в этом случае измеряется только $N(h)$ -профиль, модельный профиль $\nu(h)$ задается, что вносит в определяемый $N(h)$ -профиль погрешность, часто большую и неизвестную, так как сами модели $\nu(h)$ еще недостаточно точны.

В работе [5] предложено определять $N(h)$ и $\nu(h)$ в D-области ионосферы методом ЧО по одновременным измерениям дифференциального поглощения обычной "o" и необычной "n" компонент радиоволн, обратно рассеянных неоднородностями D-области, и коэффициента корреляции $\rho_{A_{o,n}}$ их амплитуд $A_{o,n}$. Однако этот способ не нашел широкого применения из-за трудностей измерения $\rho_{A_{o,n}}$ с требуемой точностью.

Определенные трудности существуют и при реализации способа определения $N(h)$ и $\nu(h)$, описанного в [6].

В данном сообщении предлагается способ определения $N(h)$ и $\nu(h)$ в D-области ионосферы, основанный на одновременных измерениях

дифференциального поглощения и разности фаз "о" и "н" компонент ЧО сигналов. При этом φ определяется по одновременным измерениям $A_{0,n}$ и амплитуд $A_{1,2}$ на ортогональных линейно поляризованных антенах по методике [7] (позволяет определять φ без проведения тонких и сложных фазовых измерений).

Задача одновременного определения N и v_n решается в два этапа.

1. Определение $N(h)$. Для средней разности фаз имеет место из [7] выражение

$$\varphi = \langle \varphi_0 - \varphi_n \rangle = \langle \arccos \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 + A_2^2} \frac{A_0^2 + A_n^2}{A_0 A_n} \right) \rangle. \quad (1)$$

Связь φ с параметрами ионосфера, справедливая также для непосредственно фазовых измерений, имеет вид [7]

$$\varphi = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^h (n_0 - n_n) dh + \varphi_2 + \varphi_3 + \Delta\Phi, \quad (2)$$

где

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{5/2[C_{5/2}(z_n)z_0 C_{3/2}(z_0) - C_{5/2}(z_0)z_n C_{3/2}(z_n)]}{z_0 C_{3/2}(z_0)z_n C_{3/2}(z_n) + (25/4)C_{5/2}(z_0)C_{5/2}(z_n)},$$

$$z_{0,n}(h) = \frac{\omega \pm \omega_L}{v_n(h)}, \quad C_p(z_{0,n}) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_0^\infty \frac{\epsilon^p p^{-\epsilon}}{\epsilon^2 + z_{0,n}^2} d\epsilon,$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{\alpha \sin \varphi_1}{1 + \alpha \cos \varphi_1}, \quad \varphi_1 = \frac{x \operatorname{sh} y \cos x - y \operatorname{ch} y \sin x}{y \operatorname{sh} y \cos x + x \operatorname{ch} y \sin x},$$

$x = \omega \tau_u (n_0 - n_n)$, $y = \omega \tau_u (k_0 - k_n)$, ω_L - продольная составляющая гирочастоты электронов, $\Delta\Phi$ - начальная разность фаз "о" и "н" волн, $n_{0,n}$, $k_{0,n}$ - действительная и мнимая части показателя преломления, $y_{0,n} = \omega \tau_u k_{0,n}$, ω - рабочая частота, τ_u - длительность зондирующих импульсов, α - коэффициент, приведенный в [7] и существенный при одновременном существовании механизмов рассеяния и френелевского отражения (при рассеянии $\varphi_3 = \varphi_1$, при отражении $\varphi_3 = \varphi_1 = 0$).

Расчет $N(h)$ -профиля производится по формуле (2) с учетом (1), выражения для $n_{0,n}$ и $k_{0,n}$ берутся по обобщенной теории Сена и Уиллера (модельные расчеты φ в зависимости от N при различных частотах соударений, проведенные для двух частот $f = 2,5$ и 5 МГц, показали, что возможный интервал измерений N с погрешностью $\leq 30\%$ этим способом охватывает D -область днем и E -слой ночью).

Учет v_n при вычислении N , так же как и в [5], необходимо проводить в два этапа: сначала берется примерное значение v_n на заданной высоте (например из модели), затем это значение v_n уточняется по методике [5], описанной кратко ниже, после чего вводится поправка на определение N методом последовательных приближений.

2. Определение $v_n(h)$. Методика определения $v_n(h)$ [5] основана на измерении дифференциального поглощения "о" и "н" компонент ЧО сигналов, используются те же экспериментальные записи $A_{0,n}(h,t)$ (t - время) и выражение

$$a(h) = \left(\frac{A_n^2}{A_0^2} (h) \right)^{1/2} = \frac{|R_n|}{|R_0|} \exp \left[-2 \frac{\omega}{c} \int_0^h (k_n - k_0) dh \right], \quad (3)$$

связывающее параметры N и ν с экспериментальными значениями $A_{0,n}$ (обозначения те же, что и в [5]; погрешность определения ν в этом случае $\leq 30\%$ при корректном учете ошибок измерений).

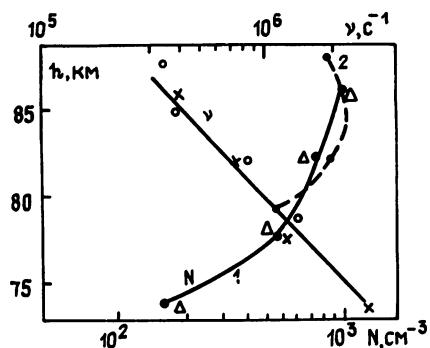


Рис 1.

высотно-временные зависимости $\lambda_{0,n}(h,t)$ и $\lambda_{1,2}(h,t)$ регистрировались с экрана осциллографа на кинопленку, а затем использовались для вычисления $a(h)$ и $\varphi(h)$. Полученные значения $N(h)$ и $v(h)$ в этих измерениях практически не отличаются друг от друга (в пределах погрешности) и соответствуют типичным величинам $N(h)$ и $v(h)$ в среднеширотной области D , известным в литературе. На этом рисунке приведен $N(h)$ -профиль (треугольники), полученный по тем же экспериментальным данным по методике [5] (для $f = 2,04$ МГц) с использованием $v(h)$ (крестики), вычисленного по описанной здесь методике. Этот профиль (как и $N(h)$ — профиль для $f = 2,19$ МГц, который не приведен здесь) достаточно хорошо совпадает с кривыми 1 и 2.

Таким образом, описанный здесь способ может применяться для регулярных измерений $N(h)$ - и $v_{\perp}(h)$ -профилей в D-области ионосферы, а совместное использование двух методик одновременного определения $N(h)$ и $v_{\perp}(h)$ позволяет минимизировать ошибки (при корректном учете ошибок измерения) и представляется необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

- Пахомов С. В., Князев А. К. //Геомагнетизм и аэрономия. 1985. Т. 25. № 5. С. 750.
 - Синельников В. М. //Ионосферные исследования (М.). 1989. № 47. С. 120.
 - Ременец Г. Ф., Белоглазов М. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 12. С. 1491.
 - Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. и др. Препринт НИРФИ № 171. Горький, 1983.
 - Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 5. С. 695.
 - Гоков А. М., Мисюра В. А., Пивень Л. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 10. С. 1276.
 - Мисюра В. А., Пивень Л. А., Федоренко Ю. П. //Тезисы докл. симпозиума КАПГ по солнечно-земной физике. -М.: Наука, 1976. Ч. 2. С. 64.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 марта 1990 г.

УДК 530.1

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА - ГОРДОНА

А. Г. Лавкин

В работе [1] с помощью численного метода Ферми - Паста - Улама исследована стохастичность решений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm 1$ нелинейного радиального уравнения Клейна - Гордона:

$$(\delta_t^2 - \delta_r^2) \varphi = - \frac{1}{r^2} \varphi (\varphi^2 - 1). \quad (1)$$

Критерием стохастичности служило равномерное распределение ("термализация") энергии возмущения по гармоникам. Была доказана стохастичность $\varphi = 0$ и регулярность $\varphi = \pm 1$ решений уравнения (1).

Представляет интерес дополнить численные исследования стохастичности этих решений аналитическими. В данной работе прямым методом Ляпунова [2] эти решения анализируются на устойчивость, отсутствие которой - необходимый признак стохастичности [3].

Вопрос об устойчивости решений $\varphi = \pm 1$ после замены $x = \varphi \mp 1$ сводится к исследованию решения $x = 0$. Плотность энергии системы, описываемой (1), имеет вид

$$T_{\infty} = \frac{1}{2} x_t^2 + \frac{1}{2} x_r^2 + \frac{1}{r^2} x^2 \pm \frac{1}{r^2} x^3 + \frac{1}{4r^2} x^4. \quad (2)$$

Здесь и далее x_t , x_r и т. п. - производные по соответствующему аргументу. В линейном приближении ((2) без двух последних слагаемых) T_{∞} является определенно положительной формой. Отсюда, согласно второй теореме Ляпунова, следует устойчивость решений $\varphi = \pm 1$.

В случае $\varphi = 0$ величина T_{∞} в линейном приближении не является знакопределенным функционалом, показатели Ляпунова имеют нулевые действительные части (критический случай). Поэтому устойчивость системы необходимо исследовать с учетом нелинейностей.

Устойчивость решения $\varphi = 0$ будем рассматривать по мере

$$\rho = \int_0^\infty (\varphi_t^2 + \varphi_r^2) dr, \quad (3)$$

что как раз соответствует устойчивости в смысле Ляпунова. Уравнение

(1) заменой $\varphi_1 = \varphi_t$, $\varphi_2 = \varphi$ сводится к системе

$$\begin{cases} \varphi_{1t} = \varphi_{2rr} + \frac{1}{r^2} \varphi_2 - \frac{1}{r^2} \varphi_2^3 \\ \varphi_{2t} = \varphi_1 \end{cases}. \quad (4)$$

Функционал Ляпунова V будем искать в виде интегральной формы

$$V = \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\xi \sum_{i,j=1}^2 F_{ij} \varphi_i(x, t) \varphi_j(\xi, t),$$

где $F_{ij}(x, \xi)$ -неизвестные функции. Временную производную функционала Ляпунова в линейном приближении (4) зададим в виде

$$U = \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\xi \left[U_{11} \varphi_1(x, t) \varphi_1(\xi, t) + U_{22} \varphi_{2x}(x, t) \varphi_{2\xi}(\xi, t) \right]. \quad (5)$$

При $U_{ij}(x, \xi) = \delta(x-\xi)$ этот функционал совпадает с мерой (3). Нулевые граничные значения φ_2 позволяют записать (5) следующим образом:

$$U = \int_0^\infty dx d\xi \left[U_{11} \varphi_1(x, t) \varphi_1(\xi, t) + U_{22x} \xi \varphi_2(x, t) \varphi_2(\xi, t) \right].$$

Поправка к функционалу U при учете нелинейностей в (4) определяется выражением

$$\Delta U = - \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\xi \left[x^{-2} \varphi_2^3(x, t) (F_{11} \varphi_1(\xi, t) + F_{12} \varphi_2(\xi, t)) + \right. \\ \left. + \xi^{-2} \varphi_2^3(\xi, t) (F_{11} \varphi_1(x, t) + F_{21} \varphi_2(x, t)) \right].$$

Представим F_{ij} , U_{11} синус-преобразованием, а U_{22} - косинус-преобразованием Фурье. Соотношения между их фурье-компонентами $\tilde{F}_{ij}(s, r)$, $\tilde{U}_{11}(s, r)$ выглядят так (линейное приближение (4)):

$$\tilde{F}_{11} = \tilde{F}_{22} = 0,$$

$$\tilde{F}_{12} = \frac{\tilde{U}_{11}(\xi^{-2}-r^2)-\tilde{U}_{22}sr}{\xi^{-2}-x^{-2}-r^2+s^2}, \quad \tilde{F}_{21} = \frac{\tilde{U}_{22}sr - \tilde{U}_{11}(x^{-2}-s^2)}{\xi^{-2}-x^{-2}-r^2+s^2}.$$

Зададимся $\tilde{U}_{11} = U_1(s) \delta(s-r)$, а φ_1 представим синус-преобразованием Фурье $\tilde{\varphi}_1(s)$. Тогда для функционалов V , ρ , U , ΔU получаются выражения

$$V = 2 \int_0^\infty ds (\tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 U_1), \quad \rho = \int_0^\infty ds (\tilde{\varphi}_1^2 + s^2 \tilde{\varphi}_2^2),$$

$$U = \int_0^\infty ds (U_1 \tilde{\varphi}_1^2 + s^2 U_2 \tilde{\varphi}_2^2), \quad (6)$$

$$\Delta U = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds ds_1 ds_2 ds_3 \left\{ s^2 [U_1(s) + U_2(s)] \tilde{\varphi}_2(s) \tilde{\varphi}_2(s_1) \tilde{\varphi}_2(s_2) \tilde{\varphi}_2(s_3) \times \right. \\ \left. \times \left[\delta(s+s_1-s_2-s_3) + \delta(s-s_1-s_2+s_3) - \delta(s+s_1-s_2+s_3) - \delta(s-s_1-s_2-s_3) \right] \right\}.$$

Для доказательства неустойчивости решения $\varphi = 0$ покажем, что существует знакопеременный, ограниченный и непрерывный по мере ρ функционал V и определенно отрицательная форма $U + \Delta U$. Зададимся $U_1(s) = -1$. Тогда ограниченность и непрерывность V по мере ρ следует из оценки

$$|V| \leq 2 \int_0^\infty ds |\tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2| \leq 2 \left\{ \int_0^\infty ds \tilde{\varphi}_1^2 \int_0^\infty ds_1 \tilde{\varphi}_2^2 \right\}^{1/2} \leq 2\rho,$$

где использовано неравенство Коши – Буняковского. Знакопеременность V и отрицательность U очевидны из (6). Отрицательность формы $U + \Delta U$ обеспечивается при малых возмущениях решения $\varphi = 0$ следующей оценкой:

$$|\Delta U| \leq \frac{8}{\pi} \int_0^\infty ds ds_1 ds_2 ds_3 \left\{ s^2 |\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{\varphi}_2(s_1) \tilde{\varphi}_2(s_2) \tilde{\varphi}_2(s_3)| \right\} < |U|.$$

Таким образом, динамическая неустойчивость $\varphi = 0$ и устойчивость $\varphi = \pm 1$ решений нелинейного уравнения Клейна – Гордона, установленные в [1] численным моделированием, подтверждаются прямым методом Ляпунова.

Автор благодарит Д. И. Трубецкова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

- Матинян С. Г., Прохоренко Е. Б., Саввиди Г. К. //Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 109.
- Сиразетдинов Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987.
- Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. -М.: Наука, 1984.

Центральный научно-исследовательский
институт измерительной аппаратуры

Поступила в редакцию
18 апреля 1990 г.

ИНДИКАТРИСА СВЕТОРАССЕЯНИЯ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕКСТУР
ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНЫХ РАССЕЯНИЙ

А. П. ЯКИМОВИЧ

Рассеяние света случайно-неоднородными слоями жидких кристаллов широко используется при создании световых индикаторов. Несмотря на наличие большого числа экспериментальных работ, например [1, 2], теоретическое описание процессов светорассеяния в слоях ЖК пока еще не достаточно полно. Так, в ряде ранних работ [3-5] анализ индикатрисы рассеяния был проведен с использованием только процесса однократного рассеяния, что справедливо для малой толщины рассеивающего слоя. Случай большой толщины слоя, когда становятся существенными процессы многократного рассеяния, рассматривались в работах [6, 7] с использованием дискретной модели рассеивающей среды и в работах [8, 9] на основе непрерывного пространственно-частотного спектра среды. В этих работах были получены общие эквивалентные выражения для индикатрисы рассеянного излучения, которые трудно использовать на практике. Цель настоящей работы состоит в получении простого, пригодного для практических применений аналитического описания индикатрисы светорассеяния случайно-неоднородных текстур жидких кристаллов с учетом многократных рассеяний.

Согласно работам [8, 9] при падении на случайно-неоднородную среду световой волны с волновым вектором \vec{k}_0 индикатриса светорассеяния среды $J(\theta_x, \theta_y)$ на глубине z с учетом многократных рассеяний определяется как взвешенная сумма индикатрис всех порядков рассеяния $f_n(\theta_x, \theta_y)$, которые в свою очередь определяются через многократные свертки сечения трехмерного пространственно-частотного спектра неоднородностей среды $S(K_x, K_y, K_z)$:

$$J(\theta_x, \theta_y) = e^{-\alpha z} \left[\delta(0,0) + \frac{\alpha z}{1!} f_1(\theta_x, \theta_y) + \frac{(\alpha z)^2}{2!} f_2(\theta_x, \theta_y) + \dots \right], \quad (1)$$

где

$$f_1(\theta_x, \theta_y) = S(\theta_x k_0, \theta_y k_0, 0),$$

$$f_n(\theta_x, \theta_y) = \iint f_{n-1}(\theta'_x, \theta'_y) f_1(\theta_x - \theta'_x, \theta_y - \theta'_y) d\theta'_x d\theta'_y.$$

Параметр многократного рассеяния или декремент ослабления падающей волны α для изотропной среды определен в [8], а для анизотропной в [9] через дисперсию и ширину пространственно-частотного спектра среды.

Выражение (1) полностью определяет индикатрису рассеяния, однако практическое использование его имеет большие неудобства. После фурье-преобразования (1) получаем

$$J_\Phi(\tau_x, \tau_y) = e^{-\alpha z} \left[1 + \frac{\alpha z}{1!} R(\tau_x, \tau_y) + \frac{(\alpha z)^2}{2!} R^2(\tau_x, \tau_y) + \dots \right], \quad (2)$$

$$\text{где } R(\tau_x, \tau_y) = \iint f_1(\theta_x, \theta_y) \exp\left\{-i(\tau_x \theta_x + \tau_y \theta_y)\right\} d\theta_x d\theta_y -$$

корреляционная функция неоднородностей среды. Выражение в квадратных скобках (2) представляет собой разложение экспоненты, поэтому окончательно имеем простое выражение

$$J_\Phi(\tau_x, \tau_y) = \exp(-\alpha z[1 - R(\tau_x, \tau_y)]). \quad (3)$$

Таким образом, зная корреляционную функцию среды $R(\tau_x, \tau_y)$ и выполнив обратное Фурье-преобразование (3), можно найти индикатрису рассеяния для любой толщины слоя случайно-неоднородной среды.

В случае малой толщины слоя $\alpha z < 1$, разложив экспоненту (3) в ряд, и с помощью обратного преобразования Фурье, используя два первых члена разложения, получаем известный результат

$$J(\theta_x, \theta_y) = (1 - \alpha z)\delta(0,0) + \alpha r S(\theta_x, \theta_y). \quad (4)$$

Первый член в (4) дает падающую волну, а второй - индикатрису рассеянных волн.

Для больших толщин рассеивающего слоя и произвольного вида $R(\tau_x, \tau_y)$ получить общее решение из (3) не удается. Поэтому далее будет найдено приближенное решение в случае круговой симметрии для кусочно-линейной аппроксимации корреляционной функции пространственно-частотного спектра вида

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \theta_0 \tau / 4, & \theta_0 \tau \leq 4 \\ 0, & \theta_0 \tau > 4 \end{cases}. \quad (5)$$

Эта функция достаточно хорошо аппроксимирует корреляционную функцию равномерно-ограниченного и гауссова спектров. Правомерность такой аппроксимации подтверждает также работа [3], в которой экспериментально изучались корреляционные функции случайно-неоднородных текстур ЖК и где было получено, что начальный участок корреляционных функций имеет практически линейный вид.

Подставляя (5) в (3) и выполняя обратное преобразование Ханкеля, получаем

$$J(\theta) = \int_0^{4/\theta_0} e^{-\alpha z \theta_0 \tau / 4} J_0(\theta \tau) \tau d\tau + \int_{4/\theta_0}^{\infty} e^{-\alpha z} J_0(\theta \tau) \tau d\tau, \quad (6)$$

где J_0 - функция Бесселя.

В случае большой толщины рассеивающей среды $\alpha z \gg 1$ вторым интегралом в (6) можно пренебречь, а верхний предел в первом интеграле увеличить до бесконечности, и тогда получается простое аналитическое выражение для индикатрисы рассеяния случайно-неоднородной среды.

$$J(\theta) = \frac{\alpha z \theta_0}{4[(\alpha z \theta_0 / 4)^2 + \theta^2]^{3/2}}. \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что интегральная интенсивность рассеянного излучения равна единице.

На рис. 1 графически показаны индикатрисы светорассеяния для различных значений параметра $\alpha z \theta_0 = 2, 3, 4, 5$. Сравнивая с результатами экспериментальных работ [1, 2], видим хорошее совпадение

индикатрис. Наблюдается небольшое расхождение в виде индикатрисы при больших θ , связанное с тем, что выбранной нами кусочно-линейной аппроксимации R соответствует неограниченный пространственно-частотный спектр среды. Реально же этот спектр ограничен. Поэтому экспериментально наблюдается более быстрый спад индикатрисы рассеяния при больших θ по сравнению с тем, что дается формулой (7).

Можно ввести нормированную индикатрису рассеяния

$$\tilde{J}(\theta) = \frac{J(\theta)}{J(0)} = \left[1 + \left(\frac{4\theta}{\alpha z \theta_0} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что вид нормированной индикатрисы при увеличении толщины среды совершенно не меняется, происходит лишь ее расширение, пропорциональное толщине. Из (8) можно получить, что при значении

$$\theta = \frac{\alpha z}{4} \theta_0, \quad (9)$$

величина индикатрисы снижается до уровня 0,3. Таким образом, для практической оценки ширины индикатрисы рассеяния и ее зависимости от толщины слоя можно пользоваться формулой (9), которая показывает, что угловая ширина индикатрисы рассеяния при больших толщинах среды в $\alpha z / 4$ раз больше ширины спектра рассеивающей среды.

Из (8) и графиков рис. 1 видно, что при малой толщине среды $\alpha z < 4$ ширина индикатрисы рассеяния уже, чем ширина пространственно-частотного спектра среды. Этот факт, а также линейная зависимость ширины индикатрисы рассеяния от глубины уже отмечались в работе [11], посвященной рассмотрению распространения узких световых пучков в случайно-неоднородных средах. Следует иметь в виду, что результаты данной работы, как и предшествующих [8, 9], на выводах которой она основана, получены в малоугловом приближении, которое с достаточной для практических целей точностью можно распространить до величин $\theta \sim 30^\circ$.

В заключение автор благодарит В. И. Татарского за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

- Лебедев В. И., Мордасов В. Н., Томилин М. Г. //Оптико-механическая промышленность. 1976. № 4. С. 60.
- Каретников А. А., Томилин М. Г., Чирков В. Н. //ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 11. С. 2253.
- Бабак Э. В., Лебедев В. И., Томилин М. Г. //Опт. и спектр. 1979. Т. 46. Вып. 3. С. 532.
- Самодурова Н. Д., Сонин А. С., Успенский А. Б. //Опт. и спектр. 1974. Т. 36. Вып. 6. С. 1165.
- Гитин А. В. //В сб.: Оптика хидких кристаллов. Материалы III отраслевого семинара. - Л., 1984. С. 115.
- Дализа А. Л., Сеймур Р. И. //ТИИЭР. 1973. Т. 61. № 7. С. 224.
- Tully D.B. //SPIE. 1980. V. 255. P. 114.
- Якимович А. П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32.

- Н З. С. 307.
 9. Якимович А. П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33.
 № 5. С. 616.
 10. Напулис А. Теория систем и преобразований в оптике. -М.: Мир, 1971.
 11. Долин Л. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9.
 Т. 9. № 1. С. 61.

Научно-производственное
объединение "Волна"

Поступила в редакцию
30 января 1990 г.

УДК 621.391.24

НОВЫЙ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЙ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫЙ СИГНАЛ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ФОРМИРОВАНИЯ

В. С. Беляев

В настоящее время в системах связи и других радиотехнических системах широкое применение находят сложные широкополосные сигналы. Формирование сложных фазоманипулированных сигналов производится в основном на основе линейных псевдослучайных последовательностей (ПСП) максимальной длины, т. е. M -последовательностей. Число элементов N в одном периоде такой ПСП, формируемой на R -разрядном регистре сдвига, равно

$$N = 2^R - 1. \quad (1)$$

Во многих случаях предпочтительнее использовать сигналы на основе нелинейных последовательностей. Преимуществами нелинейных ПСП перед линейными являются их многочленность, более высокие криптоустойчивость и помехоустойчивость. Общее количество Q нелинейных ПСП, которые могут быть сформированы на R -разрядном регистре, определяется по формуле [1]

$$Q = 2^{2^{R-1}-R}. \quad (2)$$

Например, при формировании обоих типов ПСП с помощью 5-разрядного ($R = 5$) регистра сдвига можно получить 2048 различных 32-значных нелинейных ПСП и только шесть 31-значных M -последовательностей.

Основным методом выбора нелинейных ПСП с хорошими автокорреляционными функциями (АКФ) является метод перебора на ЭВМ. Однако замечено, что автокорреляционные свойства нелинейных ПСП можно связать с числом блоков m (т. е. групп неразделенных одинаковых элементов) в них [2]. Оптимальные ПСП с минимальным уровнем остатков удовлетворяют условию

$$m \approx 0,5(N + 1). \quad (3)$$

Среди нелинейных ПСП с числом знаков $N = 16; 32; 64$ были отобраны лучшие и представлены в [2]. Представленная там 32-значная нелинейная ПСП, обладающая наилучшей АКФ, может быть сформирована из 31-значной линейной M -последовательности (начальная комбинация 11111, суммирование (по модулю два) сигналов второго и пятого триггеров формирующего регистра) путем ввода дополнительного

нелинейного знака 0 между 18 и 19 знаками M -последовательности. Действительно, эти ПСП таковы: 31-значная M -последовательность 11110011010010000 1010111011000; 32-значная нелинейная 1111001101001000001010111011000. Однако данную нелинейную ПСП весьма трудно формировать. Устройство для ее генерирования получается достаточно сложным. Поэтому для удовлетворения требованиям удобства и простоты формирования была разработана новая нелинейная ПСП. Эта ПСП, так же как и приведенная выше, отличается одним знаком от 31-значной M -последовательности. Однако, с точки зрения простоты формирования, удобней добавить один знак к 31-значной M -последовательности в конце периода. Тогда получим новую нелинейную ПСП: 11110011010010000010101110110001. Был рассчитан максимальный относительный уровень боковых лепестков ее АКФ, который равен $\delta = 0,1875$, что примерно совпадает с максимальным уровнем боковых лепестков АКФ M -последовательности: $\delta = 1/\sqrt{31} \approx 0,180$. Таким образом, в случае оптимальной обработки ФМ сигнала, манипулированного выбранной 32-значной нелинейной ПСП, отношение сигнал/остатки на выходе приемника будет равно 14,7 дБ. Число блоков новой ПСП $m = 17$ удовлетворяет приведенному выше критерию оптимальности (3).

Рассмотрим частотный спектр данного сигнала. На основании результатов, полученных в [3], модуль частотного спектра псевдослучайного ФМ сигнала определяется следующим выражением:

$$|S(\omega)| = \left| \sum_{r=1}^R A \frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} m_r \sin \frac{(\omega - \omega_0)r\tau}{2} \right|, \quad (4)$$

где $m_r = 2^{R-1-r}$ - число блоков длиной в r элементарных символов, причем $m_1 = 1$, R - число элементарных дискретов ФМ сигнала в наибольшем по длительности блоке (для рассматриваемого сигнала $R = 5$); τ - длительность элементарного дискрета сигнала; $\omega_0 = 2\pi f_0$ - несущая частота; ω - текущее значение частоты; A - амплитуда сигнала.

Анализ приведенного выражения (4) показывает, что спектр рассматриваемого псевдослучайного ФМ сигнала, так же как и спектр ФМ сигнала на основе линейной M -последовательности, убывает с ростом частоты быстрее, чем по закону $(\sin x)/x$, где $x = \Delta\omega r\tau/2$, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

А именно, амплитуда спектральных составляющих уменьшается обратно пропорционально квадрату частоты, а не первой степени частоты. Однако более показательным является исследование убывания амплитуд спектра в зависимости от частотной расстройки $\Delta\omega$. Для этого проведем следующие преобразования с множителем $2\omega_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$, определяющим характер убывания спектра:

$$\frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2\omega_0}{(2\omega_0 + \Delta\omega)\Delta\omega} = \frac{r\tau/2}{(\Delta\omega\tau/2)(1 + \Delta\omega\tau/2\omega_0\tau)} = \frac{r\tau/2}{x(1 + x/(2\pi K_r))}, \quad (5)$$

где $K_r = r\tau f_0 = r\tau/T_0$ - число периодов $T_0 = 1/f_0$ высокочастотного заполнения в блоке длительностью $r\tau$ рассматриваемого радиосигнала.

Как видно, поправочная функция спектра, определяющая различия характера убывания спектральных составляющих от закона $(\sin x)/x$, равна

$$p(x) = 1/(1 + x/(2\pi K_r)). \quad (6)$$

Найденная поправочная функция (6) частотного спектра радиоимпульса объясняется тем, что использованное в работе [3] и в этой работе

адекватное математическое описание радиоимпульса не имеет точек разрыва описывающей его функции, что соответствует действительности, в то время как известный закон изменения спектра $(\sin x)/x$ связан с искусственно вводимой видеочастотной прямоугольной огибающей, имеющей точки разрыва на границах, чего однако нет в действительности и что поэтому приводит к погрешности в расчете спектра. Отметим, что влияние этой поправки больше проявляется при больших частотных расстройках.

Отличия же спектра рассматриваемого псевдослучайного ФМ сигнала на основе нелинейной ПСП от ФМ сигнала на основе линейной и последовательности заключается в следующем. В случае одиночного радиоимпульса с ФМ на основе нелинейной ПСП ($N = 32$) его спектр отличается от спектра ФМ радиоимпульса на основе линейной ПСП ($N = 31$) на спектр одного добавленного элементарного дискрета. В случае непрерывно повторяющегося рассматриваемого сигнала в общий спектр (4) как одно из слагаемых будет входить спектр блока длиной в шесть элементарных дискретов вместо пяти дискретов при линейной ПСП, что несколько изменяет общий спектр сигнала и уровень боковых остатков при его оптимальной обработке, например, в согласованном фильтре.

Полученные результаты по спектрам ФМ сигналов имеют самостоятельное научное значение. Кроме того, они важны для более точного расчета частотных характеристик высокочастотных трактов и устройства обработки ФМ радиосигналов и для более обоснованного и правильного решения проблем электромагнитной совместимости радиосредств.

Была сделана экспериментальная проверка предлагаемого метода формирования нелинейной ПСП и получения реального радиочастотного ФМ сигнала, манипулированного по фазе на 180° данной нелинейной последовательностью. Параметры сигнала: $N = 32$; $\tau = 0,8$ мкс; $f_0 = 20$ МГц.

Для генерирования такого ФМ сигнала было разработано соответствующее устройство формирования. Разработанное устройство формирования сигнала состоит из генератора высокой частоты, формирователя нелинейной ПСП, т. е. генератора кода, фазового модулятора и буферных каскадов.

На выходе модулятора формируется ФМ сигнал с законом изменения фазы, соответствующим предложенной новой нелинейной ПСП. Описанное устройство было создано и испытано экспериментально. Проведенные эксперименты показали работоспособность устройства и полностью подтвердили правильность положений и результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts T.A. Analysis and synthesis of linear and nonlinear shift register generators. International Telemetry Conference, London, 1963. P. 390.
2. Варакин Л. Е. Теория систем сигналов. - М.: Сов. радио, 1978.-304 с.
3. Беляев В. С. //Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. 1984. Вып. 7. С. 36.

Московский институт связи

Поступила в редакцию
5 февраля 1990 г.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФАЗА ДЛЯ СПИНОВЫХ СИСТЕМ
В ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОМ РАДИОЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

И. М. Каджая, Г. Б. Бурман

Как показал Берри [1], собственные квантовые состояния гамильтониана, который в параметрическом пространстве изменяется адиабатически с периодом t_c , накапливают за этот период топологическую фазу в дополнение к обычной динамической фазе. За публикацией Берри последовал ряд работ по магнитному резонансу, в которых обсуждалась возможность экспериментального определения величины топологической фазы. Так, например, в [2] определяется топологическая фаза, приобретенная спином $I = 1/2$ в магнитном поле постоянной величины и меняющемся по направлению в ВСК (вращающаяся система координат). В работе [3] в случае ядерного квадрупольного резонанса топологическая фаза спина $I = 3/2$ наблюдалась при вращении кристалла.

В настоящей работе показано, что воздействие на спиновую систему линейно поляризованным радиочастотным (РЧ) полем вызывает появление топологической фазы.

Представим гамильтониан спиновой системы в одиночастичном приближении следующим образом:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t); \quad (1)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_z + \mathcal{H}_{0'} \quad (2)$$

\mathcal{H}_z , \mathcal{H}_0 - гамильтонианы взаимодействия спиновой системы с внешним постоянным магнитным полем и квадрупольного взаимодействия [4]. Гамильтониан $\mathcal{H}_1(t)$ описывает взаимодействие спиновой системы с линейно поляризованным РЧ полем:

$$\mathcal{H}_1(t) = 2\gamma \vec{H}_1 \cos(\omega t), \quad (3)$$

где γ - гиromагнитное отношение, $2H_1$ и ω - амплитуда и частота РЧ поля соответственно. Используя проекционные операторы e_{mn} [5] с матричными элементами $\langle m' | e_{mn} | n' \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'}$, определенными в \mathcal{H}_0 -представлении, выражение для гамильтониана $\mathcal{H}(t)$ можно записать следующим образом [6]:

$$\mathcal{H}(t) = (2I + 1)^{-1} \sum_{mn} \omega_{mn}^0 e_{mn} + \sum_{mn} 2\gamma H_1 I_{mn} \cos(\omega t) e_{mn}, \quad (4)$$

где $\omega_{mn}^0 = \lambda_m^0 - \lambda_n^0$, λ_m^0 - собственные значения \mathcal{H}_0 , $I_{mn} = \langle m | \vec{h}_1 \vec{I} | n \rangle$, \vec{h}_1 - единичный вектор, ориентированный вдоль РЧ поля $2\vec{H}_1 \cos(\omega t)$. Известно, что в присутствии линейно поляризованного РЧ поля $2H_1 \cos(\omega t)$ происходит сдвиг линии магнитного резонанса (эффект Блоха - Зигерта) [4], который обусловлен нерезонансной составляющей РЧ поля, вращающейся с частотой ω .

Для корректного учета влияния нерезонансной составляющей проведем унитарное преобразование

$$\rho(t) = U^* \tilde{\rho}(t) U, \quad (5)$$

где $\rho(t)$ - матрица плотности системы, $U = \exp(-iAt)$, $A = (2I + 1)^{-1} \sum_{mn} \omega_{mn}^0 e_{mn}$. Тогда для (4) с учетом только нерезонансных слагаемых получим

$$\mathcal{H}t) = (2I + 1)^{-1} \sum_{mn} 2\omega_{mn}^0 e_{mn} + \sum_{mn} \gamma H_1 I_{mn} \exp(i\Omega_{mn} t) e_{mn}, \quad (6)$$

где $\Omega_{mn} = \omega_{mn}^0 - \omega$. Для вычисления эффективного гамильтониана системы проведем еще одно унитарное преобразование:

$$\tilde{\rho}(t) = P \tilde{\rho}(t) P^*, \quad (7)$$

где $P = \exp(-iBt)$, $B = (2I + 1)^{-1} \sum_{mn} \Omega_{mn} e_{mn}$. Тогда для эффективного гамильтониана получим

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} = \mathcal{H}_\Delta + \tilde{\mathcal{H}}_1, \quad (8)$$

где

$$\mathcal{H}_\Delta = (2I + 1)^{-1} \sum_{mn} (2\omega_{mn}^0 - \Omega_{mn}); \quad (9)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \sum_{mn} \gamma H_1 I_{mn} e_{mn}. \quad (10)$$

Диагонализация эффективного гамильтониана (8) позволит получить выражения для величины топологической фазы квантовых состояний системы, накапливающейся за период $t_c = 2\pi/\tilde{\Omega}_{mn}$.

В качестве примера рассмотрим систему ядер со спином $I = 1$, расположенных в аксиально-симметричном ГЭП (градиент электрического поля), которая облучается линейно поляризованным РЧ полем $2\vec{H}_1 \cos(\omega t)$, внешнее постоянное магнитное поле $\vec{H}_0 = 0$. Используя выражения (8)–(10), запишем эффективный гамильтониан системы

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} = (\Delta/3)(e_{11} - 2e_\omega + e_{-1}) + N[\exp(i\varphi)(e_{10} + e_{01}) + \\ + \exp(-i\varphi)(e_{01} + e_{10})], \end{aligned} \quad (11)$$

где $N = (\omega_1/\sqrt{2}) \sin \theta$, $\omega_1 = \gamma H_1$, θ и φ – углы, определяющие ориентацию \vec{H}_1 относительно главных осей ГЭП, $\Delta = 2\omega_0 - \Omega$, $\Omega = \omega_0 - \omega$, $\omega_0 = (3/4)eQq_{zz}$, eQq_{zz} – константа квадрупольной связи. После диагонализации (11) получим собственные значения $\mathcal{H}_{\text{эфф}}$

$$\epsilon_0 = \Delta/3, \quad \epsilon_{1,-1} = -(\Delta/6) \pm (\Delta^2 + 4\omega_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}/2. \quad (12)$$

Эффективная частота, соответствующая состояниям $m = -1$ и $m = +1$, будет равна

$$\omega_{11} = \epsilon_1 - \epsilon_{-1} = (\Delta^2 + 4\omega_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}. \quad (13)$$

В случае адиабатического предела $\Omega \ll \omega_d$ ($\omega_d = 2[\omega_0^2 +$

$+\omega_1^2 \sin^2 \theta]^{1/2}$) [2] выражение для ω_{11} с точностью до членов первого порядка по ξ ($\xi = \Omega/\omega_d$) можно записать следующим образом:

$$\omega_{11} = \omega_d - \Omega \cos \alpha, \quad (14)$$

где $\cos \alpha = 2 \omega_0 / \omega_d$. Тогда топологическая фаза когерентных состояний ± 1 , накапливающаяся за период $t_c = 2\pi/\Omega$, будет равна

$$\Phi_T = 2\pi(m-m')(1-\cos \alpha) = 4\pi[1 - \omega_0(\omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}]. \quad (15)$$

Таким образом, в случае $I = 1$ и $\eta = 0$, нерезонансная составляющая линейно поляризованного РЧ поля, которая приводит к сдвигу Блоха - Зигерта и снятие вырождения состояний $m = \pm 1$ [7], вызывает появление топологической фазы. Следует отметить, что наблюдение топологической фазы возможно только при $\Omega \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berry M.V. // Proc. Roy. Soc. Lond A. 1984. V.392. P.45.
2. Suter D., Chingas G.C., Harris R.A., Pines A. // Mol. Phys. 1987. V.61. P.1327.
3. Туко R. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P.2281.
4. Абрагам А. Ядерный магнетизм. - М.: ИЛ, 1963.
5. Кессель А.Р. // ФТТ. 1963. Т. 5. С. 1055.
6. Айнбиндер Н. Е., Фурман Г. Б. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 988.
7. Фурман Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. N 5. С. 667.

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
6 июля 1990 г.