

## СОДЕРЖАНИЕ

Гайкович К.П., Троицкий А.В. Восстановление вертикальной структуры внутренних волн в тропосфере по многочастотным измерениям в линии $O_2$ .....	103
Михайловский С.С., Гусак П.Н., Ненов Л.С. Экспериментальное исследование активного открытого оптического резонатора в турбулентной атмосфере .....	111
Благовещенская Н.Ф., Баранец А.Н., Борисова Т.Д., Бубнов В.А. Эффекты отклонения декаметровых радиоволн от дуги большого круга в высоких широтах .....	119
Овчинников А.О. Аналитический анализ процесса распространения МГД-волн по ионосферному волноводу .....	123
Озеров В.Д., Гдалевич Г.Л., Всехвятская И.С., Новикова Н.Н., Соболева Т.Н. Вероятный механизм изменения крутизны спектров ионосферных неоднородностей .....	131
Алешкевич В.А., Кожоридзе Г.Д., Матвеев А.Н., Шамолин М.В. Нестационарное тепловое самовоздействие частично когерентного лазерного излучения .....	136
Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Пространственные структуры в диссипативных средах у порога возникновения хаоса ...	142
Кузьмин А.В., Райзер В.Ю. О применении теории выбросов случайного поля к расчету излучения шероховатой поверхности в квазистатическом приближении .....	147
Сарычев В.Т. Метод максимальной энтропии в спектральном оценивании .....	157
Кудрин А.В., Марков Г.А. О дисперсионных и согласующих свойствах неоднородных плазменных волноводов .....	163
Кинбер Б.Е., Лобкова Л.М., Савочкин А.А. Об особенностях излучения сферических зеркальных антенн .....	173
Смирнов Г.Т. К теории клистрона на циклотронном авторезонансе .....	177
Власов М.А., Королев А.А., Носач Ю.Д., Попович В.В., Рыжков А.В., Сафонов В.А. Исследование транспортировки в плотном газе квазистационарного релятивистского электронного пучка. II. Экспериментальные исследования .....	190
Посев В.П., Мецераков А.В., Пригоровский В.М. Источники низкочастотного шума в полевом транзисторе с затвором Шоттки .....	198
Запелалов В.Е., Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е. Электронно-оптические системы двухлучевых гиротронов .....	205

## Краткие сообщения и письма в редакцию

Накаряков В.М., Файнштейн С.М. Генерация второй гармоники альфвеновской волны в плоском плазменном волноводу .....	211
Москиенко Е.М., Дюбко С.Ф. Субмиллиметровый вращательный спектр молекулы формамида в основном колебательном состоянии .....	213
Будаев Б.В. Обобщенные ряды Мейкснера .....	216

Бочков Г.Н., Чикин А.И., Шемагин В.А. Измерение флуктуационного компонента иммитанса двухполюсников .....	219
Дудин В.Е. Об одном радиолокационном методе обнаружения крупных капель в облаках .....	222

#### Аннотации депонированных статей

Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах (сборник) .....	172
--	-----

#### Редакционная коллегия

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 23.05.91. Подписано к печати 26.06.91.  
 Формат 70×108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
 Усл. печ. л. 10,85. Усл. кр.-отт. 10,85. Уч.-изд. л. 13,1. Тираж 1000 экз.  
 Заказ 3421. Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,  
 Научно-исследовательский радиофизический институт,  
 редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71.

Нижегородская областная типография управления издательств,  
 полиграфии и книжной торговли,  
 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1991

УДК 551.575:551.543:551.521.9

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН  
В ТРОПОСФЕРЕ ПО МНОГОЧАСТОТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ В ЛИНИИ O<sub>2</sub>**

*К.П.Гайкович, А.В.Троцкий*

На основе спектрального анализа временной динамики теплового радиоизлучения атмосферы на частотах 53,5; 54,0; 54,5; 55,0 ГГц установлены частоты наблюдаемых внутренних гравитационных волн (ВГВ) и их вклад в изменчивость яркостных температур. Развиты методы восстановления высотного распределения возмущения температуры ВГВ по спектральным амплитудам их вклада в яркостную температуру при многочастотных измерениях в линии O<sub>2</sub>.

1. Внутренние гравитационные волны в пограничном слое атмосферы. Источниками ВГВ являются атмосферные фронты, мезомасштабные процессы, препятствия на пути ветра (горы), штормы, а также тектонические процессы. ВГВ могут распространяться в устойчиво стратифицированном слое воздуха на большие расстояния от источников (сотни и тысячи километров) практически без затухания, перенося при этом значительную энергию.

В устойчиво стратифицированном слое, т.е. когда для градиента температуры  $\gamma = dT/dz$  имеет место  $\gamma > \gamma_a$ , где  $\gamma_a = -9,8$  К/км - адиабатический градиент, уравнение для вертикальной скорости смещения частиц ВГВ в приближении Бусинеска имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta W + N^2 \Delta W = 0, \tag{1}$$

где

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{g}{T} (\gamma - \gamma_a). \tag{2}$$

Здесь  $N$  - частота Брента - Вайсяля, составляющая обычно от единиц до десятков минут,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\rho$  - плотность воздуха,  $T$  - температура. Распространяются ВГВ с частотами  $\omega \leq N$  и вертикальным масштабом, сравнимым с толщиной устойчивого слоя. При волноводном распространении над земной поверхностью нулевым граничным условиям для устойчивого слоя соответствует решение (1) для амплитуды основной моды

$$W = W_0 \sin \frac{\pi}{\Delta z} z, \tag{3}$$

где  $\Delta z$  - толщина устойчивого слоя атмосферы. Процесс волновых колебаний в ВГВ близок к адиабатическому, т.е. смещение некоторого объема воздуха на величину  $\Delta z$  приводит к изменению его температуры на величину  $\Delta T = \gamma_a \Delta z$ , а температуры на уровне  $z$ , куда сместился этот объем, на величину  $\Delta T = (\gamma_a - \gamma) \Delta z$ . При  $\Delta z \sim 100$  м величина  $\Delta T$  может составлять единицы градусов, что позволяет обнаруживать колебания температуры в ВГВ по соответствующим изменениям теплового

радиоизлучения атмосферы в линиях поглощения  $O_2$  с резонансами на длинах волн  $\lambda = 5$  мм и  $\lambda = 2,6$  мм. При наблюдении ВГВ с частотой  $\omega$  из (3) легко получить, предполагая, что вертикальный масштаб колебаний меньше  $\Delta z$ , выражение для вертикального профиля амплитуды периодического возмущения температуры:

$$\Delta T(z) = \frac{W_0}{\omega} (\gamma_a - \gamma) \sin \frac{\pi}{\Delta z} z. \quad (4)$$

Периоды ВГВ составляют обычно единицы минут, длина волны - несколько километров. В реальной атмосфере распределение  $\Delta T(z)$  может иметь более сложный характер, чем (4), из-за возможной высотной зависимости градиента температуры, а также в случаях, когда возмущение является сильным, что приводит к опрокидыванию волн, возникновению ячейковой циркуляции, и приводит к неоднородной задаче.

2. Вариации теплового радиоизлучения атмосферы при распространении ВГВ. Выражение для яркостной температуры теплового радиоизлучения атмосферы при наземных измерениях на длине волны  $\lambda$  и в направлении с зенитным углом  $\theta$  имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\gamma}(\lambda, \theta) &= \frac{1}{\cos \theta} \int_0^{\infty} T(z) \kappa(z, \lambda) \exp\left(-\frac{1}{\cos \theta} \int_0^z \kappa(z', \lambda) dz'\right) dz = \\ &= \int_0^{\infty} T(z) K(\lambda, z) dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\kappa(z, \lambda)$  - коэффициент поглощения.

Хорошо известны возможности восстановления высотного профиля  $T(z)$  по данным угломестных или спектральных измерений в линии  $O_2$  на основе решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (5) [2, 3]. Физической основой решения является тот факт, что толщина слоя, в котором формируется излучение, зависит от длины волны и угла места наблюдения, а интенсивность излучения пропорциональна температуре воздуха. Следует отметить, что, хотя уравнение (5) некорректно и требует использования дополнительной априорной информации о свойствах точного решения, показана возможность восстановления особенностей распределения  $T(z)$  в пограничном слое воздуха, включая ситуации инверсии [3], когда особенно вероятно распространение ВГВ. В принципе, можно восстанавливать вариации  $T(z)$  в ВГВ непосредственно из измерений  $T_{\gamma}$  на ряде длин волн или зависимости  $T_{\gamma}(\theta)$ . Однако амплитуда колебаний  $T_{\gamma}$  обычно не превышает несколько десятых градусов Кельвина, что сравнимо с уровнем флуктуационной чувствительности радиометра ( $\sim 0,3$  К при постоянной интегрирования  $\tau = 4$  с). Иногда, хотя и редко, отмечаются случаи мощных колебаний  $T_{\gamma}$ , которые и регистрировались в первых наблюдениях ВГВ [4].

На рис.1 (см. на вклейке) представлены примеры наблюдений ВГВ на частоте 53,5 ГГц (1 - в случае изотермической стратификации ( $\gamma \approx 0$  К/км); 2 - при инверсионной стратификации ( $\gamma = 50$  К/км)). Для регистрации же большинства ВГВ требуется большая чувствительность; обнаружение затрудняют также турбулентные флуктуации теплового радиоизлучения, которые также могут быть одного порядка с эффектом, обусловленным наличием волнового процесса. Увеличивать чувствительность путем увеличения времени интегрирования затруднительно, поскольку заранее не известен период ВГВ. Эффективным методом в данном случае может быть спектральный анализ наблюдаемой динамики  $T_{\gamma}(t)$ , позволяющий при наличии периодической

составляющей в  $T_{\text{я}}$  уверенно выделить ее на фоне широкого спектра турбулентных флуктуаций излучения и шумов радиометра. Независимый анализ динамики  $T_{\text{я}}$  на различных длинах волн позволяет увеличить значимость обнаружения ВГВ, а также дает возможность восстановить высотное распределение амплитуды колебаний  $T(z)$  на основе решения соответствующей обратной задачи. Одновременно из решения задачи для постоянной составляющей  $T_{\text{я}}$  восстанавливается стратификация температуры, по которой можно сделать оценки условий распространения наблюдаемых ВГВ. Угломестный способ восстановления ВГВ ограничен из-за необходимости выполнять измерения в направлении по азимуту, перпендикулярном направлению распространения ВГВ. Идея обнаружения ВГВ на основе спектрального анализа измерений применялась в работе [5], однако там зависимость  $T_{\text{я}}(t)$  рассматривалась как случайный процесс, определялись автокорреляционная функция  $T_{\text{я}}$  и путем ее фурье-преобразования спектр мощности  $T_{\text{я}}$ . Спектр мощности  $T_{\text{я}}$  позволяет судить о наличии волнового процесса, однако эта физическая характеристика не имеет простой связи с высотным распределением возмущения температуры, что не позволило авторам, несмотря на наличие многочастотных измерений, продвинуться дальше задачи обнаружения ВГВ и перейти к восстановлению высотной структуры колебаний температуры.

Рассматривая фурье-разложение самой зависимости  $T_{\text{я}}(t)$ , можно получить уравнение связи соответствующих компонент этого разложения с компонентами фурье-разложения  $T(z, t)$ . Имеем

$$T_{\text{я}}(\lambda, t) = \int_0^{\infty} T(z, t) K(\lambda, z) dz = \sum_{i=1}^{\infty} T_{\text{я}}(\omega_i, \lambda) \cos(i\omega t) + T_{\text{я}}^0(\lambda), \quad (6)$$

где  $\omega_i = i\omega$ ,  $T_{\text{я}}^0(\lambda)$  - постоянная составляющая  $T_{\text{я}}$ . Аналогично представим  $T(z, t)$  в виде

$$T(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T(\omega_i, z) \cos(i\omega t) + T^0(z). \quad (7)$$

Компоненты  $T_{\text{я}}(\omega_i, \lambda)$  определяются из

$$T_{\text{я}}(\omega_i, \lambda) = \int_0^{\pi/\omega} T_{\text{я}}(\lambda, t) \cos(i\omega t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Временной интервал, на котором разлагается функция  $t_{\text{я}} = \pi/\omega$ , выбирается достаточно большим, так что  $\omega \ll N$ , и среди слагаемых ряда (6) будут гармоники, заведомо близкие к частоте  $N$ . Тогда, очевидно,

$$T_{\text{я}}(\omega_i, \lambda) = \int_0^{\infty} T(\omega_i, z) K(\lambda, z) dz, \quad (9)$$

что является аналогом (5) для спектральных компонент  $T_{\text{я}}$  и  $T(z)$ . Для постоянных составляющих имеем

$$T_{\text{я}}^0(\lambda) = \int_0^{\infty} T^0(z) K(\lambda) dz. \quad (10)$$

На основе (9) и (10) возможна постановка задачи определения спектральной амплитуды ВГВ  $T(\omega_i, z)$  и стратификации  $T^0(z)$ , по которым легко восстанавливается и само распределение  $T(z, t)$  из (7). При

обработке фурье-анализ проводился за период 64 мин с дискретизацией 30 с.

На рис. 2а представлены результаты спектральной обработки динамики яркостных температур на частотах 53,5, 54,5 и 55 ГГц (кривые 1 - 3;  $\tau = 2\pi/\omega$ ), а на рис. 2б - соответствующее распределение  $T^0(z)$ , полученное из решения (10) методом статистической регуляризации (максимальной энтропии) аналогично [3] с использованием априорной информации о ковариационной межуровневой матрице температуры  $B_{TT}$ . Видно, что в приведенном на рис. 2б случае существуют слои, для которых выполняется необходимое условие для распространения ВГВ  $\gamma > \gamma_a$ . Действительно, от поверхности до высоты

~ 1 км существует слой с распределением  $T^0(z)$ , близким к изотермическому ( $\gamma = 0$ ). Выше, в интервале высот  $z \geq 1$  км, градиент  $\gamma = -6$  К/км. Учитывая, что  $\gamma > \gamma_a$ , видим, что в этом слое также возможен волновой процесс, но с другой характерной частотой. Оценки Б-В частот  $N$  из (2) составляют соответственно  $N_1 = 0,019$  с<sup>-1</sup> для приземного слоя и  $N_2 = 0,0126$  с<sup>-1</sup> во втором слое, что находится в хорошем соответствии с частотами максимумов спектральных амплитуд  $T_{Я}$  на рис.

2а ( $\omega_1 = 0,018$  с<sup>-1</sup> и  $\omega_2 = 0,014$  с<sup>-1</sup>) и показывают, что наблюдаемые спектральные особенности действительно связаны с ВГВ. При спектральном анализе яркостных температур при абсолютной калибровке по эталонам никаких особенностей не обнаруживается, что исключает возможность интерпретации наблюдаемого эффекта как проявление периодических вариаций коэффициента усиления радиометра. Уровень спектральных амплитуд шума при калибровке, а также на частотах вне наблюдаемых максимумов дает оценку погрешности  $\delta T_{Я}$  правой части уравнения (9), которое использовалось для восстановления соответствующих гармоник возмущения профиля температуры. Из рис. 2а видно, что  $\delta T_{Я} \approx 0,01 + 0,03$  К. Спектральные амплитуды  $T_{Я}(\omega, \lambda)$  для данных рис. 2 представлены в табл. 1.

Таблица 1

$\nu$ , ГГц		53,5	54	54,5	55
$T_{Я}(\omega_1)$	$\theta = 0$	0,08	0,12	0,16	0,2
	$\theta = 76^\circ$	0,26	0,28	0,3	0,26
$T_{Я}(\omega_2)$	$\theta = 0$	0,16	0,18	0,15	0,06

3. Восстановление высотного профиля возмущения температуры в ВГВ по многочастотным радиометрическим измерениям. Задача восстановления спектральной амплитуды  $T(\omega_1, z)$  из уравнения (9) по форме эквивалентна задаче восстановления постоянной составляющей  $T^0(z)$  из уравнения (10). Для компактности перепишем оба уравнения в операторном виде

$$KT = T_{Я}^{\delta}$$

$$KT = \int_0^{\infty} T(z) K(z, \lambda) dz, \quad (11)$$

где  $T_{Я}^{\delta}$  - измеренная реализация правой части, погрешность которой  $\delta T_{Я}$

удовлетворяет неравенству

$$\delta^2 T_{\text{Я}} \leq \|KT - T_{\text{Я}}^\delta\|_{L_2}^2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [T_{\text{Я}}(\lambda) - T_{\text{Я}}^\delta(\lambda)]^2 d\lambda, \quad (12)$$

$T_{\text{Я}}(\lambda)$  соответствует точному решению  $T(z)$ . При решении (11) приходится иметь дело не с точным ядром  $K$ , а с приближенным ядром  $K_h$ , мера погрешности которого  $h$  оценивается из

$$h \geq \sup \frac{\|KT - K_h T\|}{\|T\|}. \quad (13)$$

Это происходит как из-за дискретизации задачи при ее численном решении, так и из-за некоторой нелинейности ядра  $K$ , обусловленной слабой зависимостью коэффициента поглощения радиоволн от температуры. Следует также отметить, что сглаживающее действие ядра ограничивает класс возможных реализаций  $T_{\text{Я}}(\lambda)$  и при наличии

случайной погрешности функция  $T_{\text{Я}}^\delta$  может выйти из допустимого класса, что приводит к несовместности уравнения (11), мера несовместности удовлетворяет

$$\mu = \inf \|K_h T - T_{\text{Я}}^\delta\|. \quad (14)$$

Очевидно, имеет место

$$\mu \leq \delta T_{\text{Я}} + h\|T\|. \quad (15)$$

Уравнение (11) относится к типу уравнений Фредгольма 1-го рода, решение которых, как известно, является некорректной задачей, т. е. при решении (11) без использования достаточной дополнительной априорной информации о виде распределения  $T(z)$  малым значениям погрешности  $\delta T_{\text{Я}}$  соответствуют сколь угодно большие ошибки определения  $T(z)$ , говорят, что оператор, обратный вполне непрерывному оператору  $K$ , неограничен. От вида используемой априорной информации зависит выбор конкретного алгоритма решения (11). Уравнение для периодической составляющей нельзя, к сожалению, решать с применением статистической информации о ее среднем значении и ковариационной функции, как это с успехом делается для постоянной составляющей, о которой для большинства климатических условий имеются обширные аэрологические данные. Поэтому для решения задачи использовался метод Тихонова в форме принципа обобщенной невязки, использующий информацию о гладкости точного решения [6]. Возможности применения этого метода для радиометрического зондирования профилей температуры в пограничном слое рассмотрены в [7].

Согласно [6] для нахождения приближенного решения (11) необходимо минимизировать на множестве дифференцируемых функций функционал

$$M^\alpha(t) = \|K_h T - T_{\text{Я}}^\delta\|_{L_1}^2 + \alpha \|T\|_{W_2}^2 = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \left[ \int_0^\infty K_h(\lambda, z) T(z) dz - T_{\text{Я}}^\delta(\lambda) \right]^2 d\lambda + \alpha \int_0^\infty \left[ T^2(z) + \left( \frac{dT}{dz}(z) \right)^2 \right] dz, \quad (16)$$

$\|x\|$  - обозначает норму функции  $x$  как элемента пространства  $L_2$  или  $W_2^1$

(определения см. в [6]). При этом показано, что если параметр регуляризации согласован с погрешностью измерений определенным образом, в частности, если он определяется как корень одномерного нелинейного уравнения обобщенной невязки

$$\rho(\alpha) = \|K_h T^\alpha - T_\gamma^\delta\|_{L_2}^2 - (\delta T_\gamma + h \|T^\alpha\|)^2 - \mu^2 = 0, \quad (17)$$

где  $\|T\|_{W_2^1}^2 = \int_0^\infty (|T(z)|^2 + |T'(z)|^2) dz$ , то при  $\delta T_\gamma \rightarrow 0$  приближенное

решение  $T^\alpha$  равномерно стремится к точному решению  $T(z)$ , что составляет большое преимущество рассматриваемого метода по сравнению с большинством других методов, сходимость решений для которых, как правило, доказать не удается. Минимизация выпуклого функционала (16) осуществляется градиентными методами, которые представляют собой хорошо изученные с вычислительной точки зрения задачи квадратичного программирования. Мера несовместности  $\mu$  определяется в процессе минимизации (17) и для рассматриваемой задачи обычно  $\mu \sim \delta T_\gamma$ , мера погрешности ядра  $h$  также находится путем численного эксперимента. В данном случае  $h$  определяется нелинейностью уравнения, связанной с температурной зависимостью ядра  $K$ , и величина соответствующей погрешности  $h \|T\|$  в (17) составляет для различных функций  $T(z)$  от  $10^{-6}$  до  $3 \cdot 10^{-2}$  К.

Метод позволяет гибко использовать и дополнительную информацию о точном решении  $T(z)$  в виде ограничений, если известно, что точное решение заведомо больше (или меньше) некоторой функции, или если функция финитна и известен ее носитель. Более точное решение можно получить, если существует возможность искать решение как отклонение от "среднего" модельного или "вероятного" распределения [7].

При решении некорректной задачи нельзя установить справедливые во всех случаях соотношения между погрешностью измерения и ошибкой восстановления. Необходим численный эксперимент по замкнутой схеме, который позволяет судить о качестве восстановления для рассматриваемого класса точных решений и для рассматриваемого типа погрешностей, а также позволяет выбрать оптимальные параметры (набор длин волн и их число) измерений.

В рассматриваемом случае об интервалах высот, на которых возможно существование возмущения  $T(z)$ , можно судить по профилю постоянной составляющей  $T^0(z)$ . В качестве дополнительной информации можно использовать условие неотрицательности  $T(z)$ . Численные эксперименты (см. рис. 3а) позволили установить, что для распределений типа (4) с амплитудой 0,5 К при точности измерения  $\delta T_\gamma$  0,01 ÷ 0,03 К восстановленные профили по форме близки к исходным; погрешность определения амплитуды составляет ~ 0,2 К. Аналогичные возмущения на высотах больше 1 км (рис. 3 б) восстанавливаются хуже и требуют более высокой точности (~ 0,015 К), причем такая точность находится уже на уровне погрешности  $h^0 \|T\|$ , вносимой температурной зависимостью ядра (на рис. 3 кривые 1 - исходные профили, кривые 2 - восстановленные). Число используемых длин волн вполне достаточно при существующем уровне погрешности, однако при зондировании слоя 0 - 1 км целесообразно выбирать их значения ближе к резонансу кислородного спектра либо осуществлять наклонные измерения при значениях  $\theta \approx 70+80^\circ$ . Полученные результаты вполне согласуются с результатами в близком по физической ситуации случае, рассмотренном в [7].

В анализируемой задаче есть возможность альтернативного подхода



к решению, поскольку известен точный теоретический вид высотного распределения амплитуд ВГВ (4), хотя, разумеется, следует иметь в виду, что заложенные при выводе (4) предположения в реальной атмосфере выполняются лишь приближенно. Тем не менее, подставив (4) в (9), можно получить систему уравнений на разных длинах волн относительно параметров синусоидального возмущения. Перепишем (4) в форме

$$T(z) = A \sin\left(\pi \frac{z - h_0}{\Delta h}\right), \quad h \leq z \leq h_0 + \Delta h \quad (18)$$

с учетом возможности существования ВГВ в слое  $h_0 \leq z \leq h_0 + \Delta h$ . Тогда соответствующая система уравнений примет вид

$$T_{\text{я}}(\lambda_n) = \int_0^{\infty} A \sin\left(\pi \frac{z - h_0}{\Delta h}\right) K(\lambda_n, z) dz. \quad (19)$$

Формально для определения трех неизвестных параметров (18) достаточно трех длин волн наблюдений. С учетом погрешностей полезно использование и большего числа длин волн с применением, например, метода наименьших квадратов. Поскольку интеграл в (19) нельзя взять аналитически, соответствующая задача решалась численно путем перебора значений параметров  $A$ ,  $h_0$  и  $\Delta h$  соответственно в интервалах  $0,1 \div 2 \text{ К}$ ,  $0 \div 2 \text{ К} \cdot \text{км}$ ,  $0,5 \div 4 \text{ км}$  с дискретизацией  $0,1 \text{ К}$ ,  $0,1 \text{ км}$ ,  $0,1 \text{ км}$  соответственно. Решениями считались функции (18), удовлетворяющие условиям

$$T_{\text{я}}(\lambda_n) \leq \delta T_{\text{я}}, \quad n = 1 - 4. \quad (20)$$

**4. Результаты восстановления.** Из результатов восстановления двумя рассмотренными выше методами профилей амплитуд колебаний температуры в ВГВ, представленных на рис. 4 (а - восстановление методом Тихонова, б - семейства решений (заштрихованные области), удовлетворяющие (20) для модели (18)), видно, что волновые процессы на двух различных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  действительно локализируются в различных слоях по высоте и их характерные масштабы согласуются со структурой постоянной составляющей температурного профиля  $T^\circ(z)$  (см. рис. 2б). В слое 0 - 1 км существует процесс с характерным периодом  $\lambda_1 = 350 \text{ с}$ . Высотные распределения амплитуды колебаний в этом слое, восстановленные двумя разными методами, близко совпадают (см. рис. 4а, б, кривые 1).

В слое выше 1 км также существует волновой процесс, но с другим характерным периодом  $\lambda_2 = 450 \text{ с}$ , который соответствует другому градиенту температуры. Как уже отмечалось, точность восстановления при одинаковом уровне погрешностей измерения уменьшается с ростом высоты, поэтому восстановление двумя методами обнаруживает больший разброс значений. Однако оба метода согласуются в том, что процесс локализован в основном на высотах больше 1 км (см. рис. 4а, б, кривые 2). Следует отметить, что чисто синусоидальный процесс типа (18) удается согласовать с измерениями на основе (20), полагая  $\delta T_{\text{я}}$  не менее  $0,06 \text{ К}$ , тогда как метод Тихонова дает решение при более реальной оценке  $\delta T_{\text{я}} = 0,03 \text{ К}$ . Есть основания полагать, что форма процесса в слое 1 - 6 км может отличаться от синусоидальной, поскольку плотность воздуха существенно уменьшается с ростом высоты, что не учитывается при выводе (3).

По амплитудам колебаний температуры из (4) можно оценить амплитуды колебаний вертикальной скорости и смещения воздуха в ВГВ, описываемые соотношением (3). Для слоя 0 - 1 км  $W_0 = T_{\text{max}} \omega / (\gamma_\alpha - \gamma) =$

= 1,1 м/с, а амплитуда смещения  $\lambda = W_0/\omega = 60$  м. В слое 1 - 6 км, соответственно,  $W_0 = 3,2$  м/с,  $\lambda = 250$  м.

Оценки согласуются с характерными параметрами ВГВ.

Полученные результаты показывают возможности использования многочастотных радиометрических измерений для обнаружения и определения вертикальной структуры и параметров ВГВ даже в сложных случаях, когда процесс существует одновременно в разных высотных интервалах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. - М.: Наука. - 334 с.
2. Алешин В. И., Наумов А. П. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т.20. N 2. С.193.
3. Троицкий А. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.26. N 8. С.878.
4. Троицкий А. В. //Тезисы докл. Всесоюзного симпозиума по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. - Фрунзе, 1986. С.139.
5. El-Raeys M. //Radio Sci. 1982. V.17. N 14. P.766.
6. Тихонов А. Н., Гончарский А. В. и др. Регулирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983. - 200 с.
7. Гайкович К. П., Сумин М. И. //Тезисы докл. Всесоюзного совещания по радиометеорологии. - М., 1986. С.6.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
3 ноября 1989 г.

HIGH STRUCTURE RETRIEVAL OF ATMOSPHERIC WAVES IN THE  
TROPOSPHERE BY MULTIFREQUENCY MEASUREMENTS IN SPECTRAL O<sub>2</sub> LINE

*K. P. Gaikovich, A. V. Troitzkij*

Frequencies and brightness temperature variations related with atmospheric waves have been derived from spectra analysis of thermal emission on 53,5; 54,0; 54,5 and 55 GHz. Methods for retrieval of temperature disturbance high profile related with atmospheric waves are proposed. These methods are based on the analysis of brightness temperature spectral amplitudes derived from multifrequency measurements in O<sub>2</sub> spectral line.

УДК 538.56:519.25

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АКТИВНОГО ОТКРЫТОГО ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

*С. С. Михайловский, П. М. Гусак, Л. С. Ненов*

Исследовались спектральные плотности (СП) временных флуктуаций амплитуды установившейся генерации на двух длинах волн  $\lambda_1 = 0,63$  и  $1,15$  мкм в условиях турбулентных флуктуаций показателя преломления в волноводном канале открытого оптического резонатора. Анализируются частотные зависимости СП при различных состояниях турбулентности атмосферы, в том числе и создаваемой в аэродинамической камере. Для длины волны  $\lambda_2$  флуктуации концентрации водяного пара образуют случайное поле поглощения. Обсуждаются особенности частотной зависимости СП, которые связываются с временной взаимной корреляцией случайных полей пассивной примеси концентрации водяного пара, температуры и турбулентной скорости потока. Асимптотическое поведение частотных зависимостей СП анализируется с точки зрения автомодельности стохастических характеристик системы волноводный канал - среда.

Волновые стохастические краевые задачи являются актуальными в различных радиофизических исследованиях. В последнее время в теоретических работах большое внимание уделяется рассмотрению распространения электромагнитной волны в многомодовом волноводе со слоисто-неоднородным показателем преломления, стохастические флуктуации которого обладают конечными корреляциями. При этом процесс переноса, описываемый в рамках модового представления, характеризуется статистикой случайных амплитуд и собственных чисел мод [1-4].

В данной экспериментальной работе проводятся исследования одной из возможных моделей стохастической волноводной системы, реализованной в виде открытого резонатора типа Фабри - Перо, помещенного в воздушный поток с развитой турбулентностью показателя преломления. На рис. 1 (см. на вклейке) схематично показаны основные элементы исследуемого устройства. На расстоянии  $L + l = 1$  м, составляющем полную базу интерферометра, закреплены два зеркала:  $R_1$  - плоское,  $R_2$  - сферическое с радиусом кривизны  $2$  м. На оптической оси интерферометра размещен активный элемент He - Ne-лазера, занимающий часть базы  $l = 0,25$  м. Большая часть резонатора  $L = 0,75$  м открыта для воздушных потоков, средняя скорость которых  $v_0$  во всех экспериментах ориентирована перпендикулярно оптической оси резонатора. Активный элемент непрерывно возбуждается разрядом постоянного тока. Посредством выбора селективных отражающих покрытий зеркал осуществляется генерация на одной из длин волн  $\lambda_1 = 0,63$  мкм либо  $\lambda_2 = 1,15$  мкм. Оптическая электромагнитная мода представляет собой локализованный вблизи оси гауссов пучок с эффективным диаметром  $d_1 =$

$= 1,2 \text{ мм}$  ( $\lambda_1 = 0,63 \text{ мкм}$ ) и  $d_2 = 1,6 \text{ мм}$  ( $\lambda_2 = 1,15 \text{ мкм}$ ). Необходимо заметить, что для атмосферного воздуха электромагнитные колебания с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  качественно отличаются, поскольку длина волны  $\lambda_2 = 1,15 \text{ мкм}$  попадает в континуум линий резонансного поглощения водяного пара. Поэтому для моды с данной длиной волны среда характеризуется комплексным показателем преломления  $n = \eta + i\mu$ , тогда как для моды с длиной волны  $\lambda_1$  существенна только его действительная часть. При достаточно узких пучках излучения и выбранного направления  $v_0$  случайное поле флуктуаций показателя преломления в атмосфере можно считать слоисто-неоднородным в широком интервале масштабов инерциальных турбулентных процессов вплоть до внутренних масштабов  $l_0 \sim 1 - 2 \text{ мм}$  [3,5].

В эксперименте производились оценки временных флуктуаций интенсивности излучения, частично прошедшего через одно из зеркал и преобразованного фотодиодом ФД. Одновременно производились оценки состояния среды по измерениям средних величин скорости потока  $v_0$ , величины среднеквадратичного отклонения  $\sigma_v$ . Измерения средней температуры  $\theta^\circ\text{C}$  и  $\sigma_\theta$  осуществлялись в двух точках:  $\theta_0$  - вблизи оси резонатора и  $\theta_h$  - на расстоянии  $h$  от него. Оценивалась также средняя величина влагосодержания как парциальное давление водяных паров в атмосфере  $e$  в миллибарах.

Ниже обсуждаются некоторые результаты, полученные в воздушных потоках, создаваемых аэродинамической трубой. Важность данных стеновых исследований заключается в том, что аэродинамическая камера позволяет целенаправленно варьировать случайное поле показателя преломления в резонаторе при неизменных параметрах скорости турбулентного переноса. Во всех экспериментах сохранялись условия однородности и стационарности, при которых средние значения  $v_0$ ,  $\sigma_v$ ,  $\sigma_\theta$  вдоль оси резонатора отличались не более чем на 5% и оставались неизменными в течение времени измерения. Экспериментально полученные спектрограммы представляют собой усреднение 512 реализаций временных СП. Спектрограммы  $W(F)$  имеют вид монотонно убывающих функций по мере возрастания частоты разложения  $F$ . Анализ наблюдаемых зависимостей  $W(F)$  выявляет высокочастотную асимптотику, которую удобно представить в виде

$$W(F) = c_1^2 F^{-8/3} \exp(-F^2/\gamma^2), \quad (1)$$

где  $c_1^2$  и  $\gamma^2$  - некоторые параметры среды. Для изучения данного явления перейдем к координатам  $Y = \lg W + (8/3) \lg F - A$ ,  $X = F^2$ , где  $A$  - нормирующий параметр. Максимальная частота наблюдения спектрограмм  $F_m$  и точность измерения ограничиваются собственным шумом генерации, спектр которого учитывается как аддитивная добавка "белого" спектра в частотном диапазоне до  $F_m = 5 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ .

На рис. 2 и рис. 3 показаны СП флуктуаций интенсивности для электромагнитной моды с длиной волны  $\lambda_1 = 0,63 \text{ мкм}$  и моды с  $\lambda_2 = 1,15 \text{ мкм}$  в области частот от  $F_0 = 500 \text{ Гц}$  до  $F_m = 5 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ . Кривым с одинаковой нумерацией соответствуют идентичные условия эксперимента.

По мере увеличения частоты в зависимости  $Y(F^2)$  выделим следующие три характерные области поведения. Низкочастотная область  $-\Delta F_1^2$ , где наблюдается рост  $Y(F^2)$ . Среднечастотная область  $\Delta F_2^2$  -

переход к максимальным значениям и небольшим отклонениям от него. Высокочастотная область  $\Delta F_3^2$ , где наблюдается практически линейная

зависимость типа (1) при одинаковых наклонных  $\gamma^{-2}$  (см. рис. 2 и 3). Различаются вклады двух статистически независимых стохастических процессов - флуктуаций скорости и температуры. Исследования, проведенные при различных значениях  $v_0$  и  $\sigma_v$ , показывают, что угол

наклона линейного участка зависимости  $Y$  ( $F^2 \in \Delta F_3^2$ ) определяется

величиной дисперсии скорости потока, т. е.  $\gamma^2 \sim \sigma_n^2$ . Экспоненциальный множитель частотной зависимости (1) может быть связан с турбулентной составляющей локальных скоростей вдоль оси измерительного устройства [1,5]. По-видимому, в конструкции аэродинамической камеры генерируются мелкомасштабные флуктуации направления средней скорости, величина которых может быть описана статистическим нормальным законом распределения [5].

Кривые 1 и 2 (рис. 2 и 3) получены при одинаковых средних значениях  $v_0=4,2$  м/с и  $\theta_0=18,4^\circ\text{C}$ , однако в случае 2 уменьшены

градиент температуры  $(\theta_0 - \theta_h)/h$  на  $0,1^\circ\text{C}/\text{м}$ , а также  $\sigma_\theta$  на  $0,2^\circ\text{C}$ .

Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что вариации интенсивности флуктуаций температуры вызывает вертикальный параллельный сдвиг

линейного участка  $Y$  ( $F^2 \in \Delta F_3^2$ ). Таким образом, параметр  $C_1^2$  в (1)

является функцией  $d\theta/dh$  и соответствует структурной характеристике случайного поля показателя преломления  $C_n^2$  [5]. Аналогичные

изменения, сопровождающиеся изменениями ширины самой области,

наблюдаются для зависимости  $Y(F^2)$  в области  $F^2 \in \Delta F_2^2$ . Следует

отметить, что в выбранном масштабе горизонтальная прямая  $Y(F^2)=\text{const}$  соответствует СП типа

$$W(F) \sim C_2^2 F^{-8/3}, \quad (2)$$

где  $C_2^2$  - параметр.

На рис. 2 в области  $\Delta F_2^2$  с определенной степенью точности приемлемо соотношение (2), где  $C_2^2 \sim C_n^2$ .

Как обсуждалось выше, в данных экспериментах вихревые потоки асимметричны вдоль и поперек направления средней скорости  $v_0$  в масштабах, соизмеримых с диаметром  $d$  волнового канала. Положение верхней границы области  $\Delta F_2^2$  исследуемых спектров соответствует границе приближения изотропности коррелированных флуктуаций показателя преломления. Это наблюдение подтверждается следующим экспериментом.

При неизменных стационарных параметрах потока  $v_0$ ,  $\sigma_v$  и градиенте температуры, как и в случае 2, произведена вариация интенсивности случайного поля флуктуаций температуры добавлением мелкомасштабных температурных неоднородностей. Для этого на входе аэродинамической трубы механически смешиваются потоки воздуха с разницей температур  $\Delta\theta = 20^\circ\text{C}$ . Экспериментально наблюдаемый спектр представлен кривыми 3 на рис. 2 и 3. Для удобства сравнения частотных зависимостей в данном случае кривые 3 смещены произвольно по вертикали вниз и полный вклад энергии внесенного стохастического

процесса значительно больший, чем следует из сравнения кривых 2 и 3.

Отметим различие флуктуаций в волновых каналах с разными эффективными диаметрами. При одних и тех же стационарных условиях частоты флуктуаций, обусловленные одним и тем же масштабом турбулентности, для канала  $\lambda_1$  будут ниже, чем для канала  $\lambda_2$  в соотношении  $d_2/d_1 = 1,35$ . Поэтому кривые 1 и 2 рис. 3 и, соответственно, область  $\Delta F_3^2$  зависимости  $Y(F^2)$  смещены по оси частот по сравнению с аналогичными кривыми на рис. 2.

Помимо чисто масштабных эффектов имеются различия, связанные с участием в процессах еще одного случайного поля - поля концентрации водяного пара. Так, на рис. 2 и 3 кривые 4 получены после уменьшения концентрации водяного пара в атмосфере камеры на 28% по сравнению с условиями эксперимента 1.

Энергетический вклад флуктуаций концентрации в СП отличается от эффекта уменьшения интенсивности флуктуаций поля температуры (сравнить кривые 1 и 2 или 1 и 3). Наблюдения показывают, что неоднородности поглощающей компоненты могут подавлять результирующие колебания, обусловленные комплексным показателем преломления, преимущественно в низкочастотной области спектра  $\Delta F_1^2$ . В работе [6] описано уменьшение флуктуаций интенсивности радиоволн субмиллиметрового диапазона, наблюдавшееся при распространении по трассе с поглощением. Данное явление объясняется, если ввести корреляцию между флуктуациями действительной компоненты  $\eta$  и коэффициента поглощения в среде  $\mu$ . При этом СП флуктуаций логарифма амплитуды имеет вид [6,7]

$$W(F) = W_\eta + W_\mu - W_{\eta\mu} \quad (3)$$

где  $W_\eta$  и  $W_\mu$  - соответственно автоспектры действительных функций флуктуаций показателя преломления и коэффициента поглощения,  $W_{\eta\mu}$  - коспектр взаимных коррелированных колебаний. Для статистически независимых полей  $W_{\eta\mu} = 0$ , а при  $W_{\eta\mu} \neq 0$  возможно уменьшение результирующей мощности флуктуаций. Общий вид функции  $W_{\eta\mu}(F)$  зависит от нелинейного турбулентного процесса переноса импульса, массы и передачи тепла [8,9].

Исходя из описанных выше результатов экспериментов (см. рис. 2 и рис. 3) можно предположить, что максимум коспектра расположен в низкочастотной области  $\Delta F_1^2$  или в средних пространственных волновых числах инерциального интервала масштабов турбулентности. Это подтверждается следующими наблюдениями.

Проведены исследования низкочастотной области СП флуктуаций интенсивности генерации в оптическом резонаторе в открытой атмосфере с естественной турбулентностью ветровых потоков. В случае различных скоростей потока сравнение спектров  $W(F)$  для низкочастотной области удобно производить в двойном логарифмическом масштабе  $Y = \lg U$  и  $X = \lg f$ , где  $U = W/W_0$  и  $f = F/F_0$ ,  $W_0$  и  $F_0(\nu_0, \sigma_0^2)$  - нормирующие множители [8]. На рис. 4 показаны экспериментально полученные зависимости  $Y(\lg f)$ , отобранные по близким значениям усредненных параметров:  $\theta_0 = 17,5^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_\theta = 0,3^\circ\text{C}$ ,  $\bar{e} = 12,5$  мбар. Кривая 1 представляет типичную зависимость СП

от частоты в области  $F_0 = 0,5$  Гц и  $F_n = 2 \cdot 10^3$  Гц флуктуаций интенсивности в волноводном канале с модой  $\lambda_1 = 0,63$  мкм. Кривые 2-4 представляют спектр флуктуаций для канала с длиной волны  $\lambda_2 = 1,15$  мкм при разных высотах  $h$  над подстилающей поверхностью. Кривая 2 соответствует  $h_2 = 1,5$  м над плоской поверхностью суши, а кривые 3 и 4 получены для  $h_3 = 0,6$  м и  $h_4 = 6$  м над водной поверхностью.

В отличие от вышеописанных экспериментов в аэродинамической камере в условиях открытой турбулентности над подстилающей в умеренных ветровых потоках (например, до  $v_0 \approx 5$  м/с) существует более изотропное турбулентное поле скоростей. Поэтому экспоненциальная зависимость типа (1) практически не наблюдается.

В работе [4] для расчета параметров интерференционной картины в схеме Фабри - Перо со случайно-слоистой моделью показателя преломления использован метод инвариантного погружения [3]. В диффузионном приближении в пределе высоких коэффициентов отражения зеркал найдена контрастность максимумов интенсивности. Усредненная по ансамблю реализаций случайного процесса телеграфного типа в отсутствие поглощения контрастность  $P$  определяется единственным статистическим параметром, соответствующим коэффициенту диффузии  $D$  [3], а в асимптотике при  $DL \ll 1$  описывается простой зависимостью

$$P \approx (1 - DL)P_0,$$

где  $P_0$  - величина контрастности в отсутствие неоднородностей,

$D = (k^2/4)\Phi_n(2k)$ ,  $\Phi_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} B_n(x) \exp(ikx) dx$  - одномерная спектральная плотность поля показателя преломления с произвольной конечной функцией корреляции  $B_n(x)$  случайного процесса. При этом имеет место автомодельность по статистическим параметрам среды  $k \rightarrow 2k$  [3]. Следует заметить, что в поперечных ветровых потоках согласно гипотезе замороженности турбулентности дисперсия функции  $B_n$  при переходе от одной области турбулентности к другой будет изменяться. Практически  $D$  является функцией времени

$$D(t) = \frac{k^2}{4} I^2(t) \Phi_n(2k),$$

где  $I^2$  - дисперсия, плавно меняющаяся в поперечном направлении к оси под действием ветрового переноса,

$$I^2 = \int_{-\kappa_L}^{\infty} \Phi(k) dk. \quad (4)$$

В предположении локально-однородного изотропного случайного поля показателя преломления, характеризующегося пространственной трехмерной спектральной плотностью  $\Psi(|\kappa|)$ , где  $\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}$  [5], величину дисперсии можно записать в виде

$$I^2 = 2\pi \int_{\kappa_L}^{\infty} \Psi(|\kappa|) \kappa d\kappa. \quad (5)$$

На практике используются флуктуации контрастности, спектральная

плотность которых соответствует подынтегральному выражению для дисперсии (5)  $W(\kappa) = \Psi(\kappa)\kappa$ . В модели изотропной локально-однородной турбулентности [5] трехмерный спектр показателя преломления описывается соотношением

$$\Psi(\kappa) = AC_n^2 \left( \frac{d\theta}{dh} \right) \kappa^{-11/3}, \quad (6)$$

где  $\kappa$  изменяется в инерциальном интервале характерных масштабов турбулентности. Исходя из (5), (6) и представления "замороженной" турбулентности, когда  $\kappa = 2\pi F/v_0$ , получим

$$W(F) \sim C_n^2 F^{-8/3}.$$

Степенное соотношение с показателем степени  $\alpha = -8/3$  наблюдается для асимптотики зависимости  $Y(\lg f)$  в области больших частот (рис. 4, кривая 1), а также на рис. 2 для зависимостей  $Y(F^2)$ , где  $F^2 \in \Delta F_2^2$ .

Теоретическими работами [3] в рамках метода инвариантного погружения рассматривается процесс распространения колебаний с учетом поглощения. Показано, что простой учет постоянного коэффициента затухания амплитуды волн может существенно изменить распределение статистических моментов интенсивности внутри пространства со слоисто-неоднородной средой.

В экспериментах, представленных на рис. 4, можно выделить динамические эффекты флуктуаций поглощения. Для этого сравним кривые 2-4 - спектральные плотности флуктуаций контрастности для излучения с длиной волны  $\lambda_2 = 1,15$  мкм, с кривой 1, частотная зависимость которой обусловлена неоднородностями действительной части показателя преломления  $W_\eta(F)$  в соотношении (3). Учтем также частотную зависимость СП  $W_\eta(F)$ , заданную исключительно флуктуациями поглощения в объеме канала  $V \sim Ld^2$ , определяемого концентрацией водяного пара.

В стационарном и пространственно однородном приближении, отвечающем постоянному диффузионному турбулентному потоку пассивной примеси, локальный спектр автомодельно описывается трехмерной спектральной плотностью (6), где  $\kappa \rightarrow q$  - волновое число инерциальных интервалов масштабов неоднородностей для плотности примеси [3, 11]. При условии поперечного ветрового переноса флуктуации концентрации в объеме определяются одномерным спектром

$$W_q(F) \sim \frac{2\pi}{v_0} \int_{2\pi F/v_0}^{\infty} \Psi(q) q dq.$$

При постоянном коэффициенте молекулярного поглощения спектральная плотность флуктуаций интенсивности поглощения с учетом (6) определяется соотношением

$$W_\mu(F) \sim W_0(q) \sim C_q^2 F^{-5/3}, \quad (7)$$

где  $C_q^2 (dq/dh)$  - структурная характеристика однородного изотропного поля концентрации. Данная частотная зависимость наблюдалась и исследована в работе [12] для крупных масштабов флуктуаций потоков водяного пара в атмосфере.

В экспериментах, результаты которых представлены на рис. 4, условия выбирались такими, чтобы измерения 2 - 4 отличались друг от друга определенными вариациями случайного поля концентрации



водяного пара в турбулентной атмосфере. Так, в ситуации 2 над водной поверхностью на расстоянии  $h_2 = 0,6$  м от источника водяного пара следует ожидать наибольшую величину потока концентрации пассивной примеси, наибольшее значение  $C_q^2$  при наименьших внешних масштабах турбулентного потока ( $L_0 \sim h/4$ ).

В ситуации 3, когда измерительное устройство удалено на высоту  $h_2 = 6$  м над подстилающей поверхностью, интенсивность флуктуаций потока от источника уменьшена по сравнению с предыдущей.

В ситуации 4 при  $h_4 = 1,5$  м над сушей исключен мощный источник потока концентрации водяных паров. Случайное поле поглощения формируется перемежающейся турбулентностью ветрового переноса водяных паров в атмосфере.

Как можно видеть из рис. 4, для каждой из экспериментально полученных кривых 2 - 4 (в отличие от 1) существуют области частот  $\Delta F$ , в которых зависимости  $F(\lg f)$  экстраполируются степенной функцией показателем  $\alpha = -5/3$ . Уменьшение потока флуктуаций поглощения производит параллельный (по координате  $Y$ ) сдвиг, соответствующий уменьшению  $C_q^2(dq/dn)$  в зависимости (7). Следует отметить, что исследуемая частотная зависимость СП во всем диапазоне частот (рис. 4) соответствует турбулентным инерциальным процессам трансформации масштабов неоднородностей вниз по спектру. Однако в определенном интервале волновых масштабов  $\Delta k \sim \Delta F$  для комплексного спектра, описываемого соотношением (3), практически наблюдается приближение  $\lg W \approx \lg W_\mu(F)$ , где  $f \in \Delta F/F_0$ , что возможно в случае, если  $W_\eta - W_{\eta\mu} < W_\mu$  при  $W_{\eta\mu} \geq 0$ . В ситуации 4 (кривая 4, рис. 4) в области частот  $\Delta F$ , по-видимому, имеет место  $W_{\eta\mu} > 0$ . По мере возрастания частоты в спектре наблюдается подавление спектральных амплитуд  $W(F)$  и переход  $Y(\lg f)$  к степенной зависимости с  $\alpha = -5/3$ , а при  $f > \Delta F/F_0$  - выход на асимптотику степенной зависимости с  $\alpha = -8/3$  (сравнить с зависимостью 1, полученной в тех же условиях эксперимента).

Аномалия деформации частотной зависимости СП обнаружена также при исследовании распространения в атмосфере пучков излучения с длиной волны  $\lambda_2 = 1,15$  мкм по трассе длиной 240 м с отражением [13].

Зафиксированное на рис. 4 явление относится к особенностям турбулентного переноса водяного пара в атмосфере. Как показано в работе [8], динамический обмен между молекулярной диффузией и турбулентными флуктуациями температуры и скорости переноса может приводить к перемежающейся изотропизации потоков пассивной примеси. Виртуальный коэффициент турбулентной диффузии при этом отличается от закона Ричардсона - Обухова наличием характерного времени взаимодействия между процессами, для которых  $W_{\eta\mu} \neq 0$ .

Таким образом, в зависимости от соотношения между интенсивностью потока концентрации и флуктуацией температуры и скорости переноса возможно как увеличение, так и уменьшение дисперсии амплитуды волны, что объясняет результаты наблюдений в работах [6,7] для случая распространения электромагнитных волн в атмосфере с поглощением молекулами воды.

В результате проделанной работы можно сделать следующие выводы.

В открытом оптическом резонаторе реализуется принцип автоматичности статистических параметров волнового поля и характеристик случайных флуктуаций показателя преломления. Оценки частотной зависимости СП в высокочастотной области спектра могут быть использованы для изучения свойств случайных полей показателя

преломления, например фрактальной структуры турбулентных вихрей.

Важным фактором статистических состояний волнового поля моды является флуктуирующее поглощение среды, влияние которого недостаточно учтено в теоретических работах. Динамическое взаимодействие поглощающей пассивной примеси с турбулентным потоком обладает особенностями, которые для водяного пара в турбулентной атмосфере исследовались в данной работе. Проведенные исследования показали, что активный открытый лазерный резонатор, настроенный на волну поглощения компоненты среды, может применяться для исследования турбулентной диффузии пассивной примеси.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 9. С.1149.
2. Вировлянский А. Л. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 7. С.832.
3. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. - М.: Наука, 1986.
4. Барабаненков Ю. Н., Дородных В. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 1. С.84.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. - М.: Наука, 1968.
6. Арманд Н. А., Изюмов А. О., Соколов А. В. //Радиотехника и электроника. 1971. Т.13. N 8. С.1333.
7. Брюховецкий А. С., Фукс И. М., Жирманова С. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 7. С.878.
8. Чефранов С. Г. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т.24. N 8. С.800.
9. Чефранов С. Г. //ЖЭТФ. 1989. Т.96. N 1(7). С.171.
10. Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В. Оптика турбулентной атмосферы. - Л.: Гидрометиздат, 1988, Т.5. С.264.
11. Лутовинов В. С., Чечеткин В. Р. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1989. Т.25. N 3. С.266.
12. Волков Ю. А., Елагина Л. Т., Лазарев А. И., Ломадзе С. О. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1986. Т.22. N 7. С.765.
13. Гусак П. М., Михайловский С. С. //Оптика атмосферы. 1989. Т.2. N 1. С.32.

Одесский гидрометеорологический институт

Поступила в редакцию  
2 января 1990 г.

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF ACTIVE OPEN OPTICAL RESONATOR IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

*S. S. Mikhajlovskij, P. M. Gusak, L. S. Nenov*

The spectral densities (SD) of time fluctuations of the amplitude of steady-state generation at two wavelengths  $\lambda_1 = 0,63 \text{ mkm}$  and  $\lambda_2 = 1,15 \text{ mkm}$  under the conditions of turbulent fluctuations of refraction index in the waveguide channel of the open optical resonator are investigated. The frequency dependenced by various states of the atmosphere turbulence including that, which are generated in aerodynamical camera, are analysed. The peculiarities of the SD forms, which are bounded with time reciprocal fields of passive impurity of water vapor concentration, temperature and turbulent velocity of the flow are discussed. The asymptotic behaviour of the frequency dependences is analysed from the point of view of the automodality of the stochastic characteristics waveguide channel-medium system.

УДК 550.388.2

ЭФФЕКТЫ ОТКЛОНЕНИЯ ДЕКАМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН  
ОТ ДУГИ БОЛЬШОГО КРУГА В ВЫСОКИХ ШИРОТАХ*Н. Э. Благовещенская, А. Н. Баранец, Т. Д. Борисова, В. А. Бубнов*

Рассмотрены вариации азимутальных отклонений траекторий декаметровых радиоволн от дуги большого круга на высокоширотных радиотрассах протяженностью 7-9 тыс. км. Проведено сопоставление экспериментальных данных и результатов расчетов с учетом специфических особенностей высокоширотной ионосферы.

Одной из характерных особенностей распространения декаметровых радиоволн на высокоширотных трассах является эффект отклонения траектории волны от дуги большого круга. Вопросы азимутальных отклонений радиоволн в высоких широтах изучались достаточно широко [1-4]. Однако результаты этих исследований в основном относятся к радиотрассам протяженностью менее 4 тыс. км или характеризуют сверхдальнее распространение. Целью настоящей работы является исследование отклонений траекторий декаметровых радиоволн от дуги большого круга на высокоширотных радиолиниях протяженностью 7-9 тыс. км на основе сопоставления экспериментальных данных и результатов расчетов с учетом специфических особенностей высокоширотной ионосферы.

Экспериментальные наблюдения проводились в зимний период 1979-82 гг. в ночные часы с 22 до 02 ч московского декретного времени (МДВ). Осуществлялась регистрация азимутальных отклонений радиоволн от дуги большого круга одновременно на четырех радиотрассах, секущих зону полярных сияний под различными углами. Измерения проводились один раз в 10 мин. Радиотрасса 1 является широтной и частично проходит вдоль авроральной зоны. Дуги большого круга для радиолиний 2, 3 и 4 расположены к северу соответственно на  $\Delta\theta_0 = 10, 24$  и  $40^\circ$  относительно радионаправления 1. На первом направлении использовались рабочие частоты  $f_p \approx 15, 17$  и  $21$  МГц, на втором и третьем -  $15$  МГц и на четвертом -  $17$  и  $21$  МГц. Таким образом, была возможность исследования азимутальных характеристик радиоволн на трассах, расположенных вдоль зоны полярных сияний (направление 1), поперек зоны (направление 4) и промежуточных между ними направлениях 2 и 3. Объем экспериментальных данных, который подвергался статистической обработке, составлял около 2000 измерений для каждой частоты и направления.

Для интерпретации экспериментальных данных были проведены численные расчеты способов распространения, азимутальных углов прихода радиоволн на исследуемых радиотрассах, а также максимально применимых частот (МПЧ) распространения декаметровых радиоволн в рассматриваемых условиях. Расчеты проводились по программе определения траекторно-энергетических характеристик декаметровых радиоволн, описанной в [5]. В качестве модели ионосферы использовалась глобальная модель ионосферы с квазипараболической высотной зависимостью электронной концентрации внутри каждого слоя [5]. В модель ионосферы включен блок расчета положения границ

главного ионосферного провала (ГИП) в зависимости от местного времени и планетарного индекса магнитной активности  $K_p$  согласно модели [6]. При расчетах учитывались изменения модельных профилей электронной концентрации из-за спорадических слоев в E- и F-областях согласно данным [7,8].

Данные траекторных расчетов свидетельствуют, что в условиях проведения эксперимента (зимний период, 22 - 02 ч московского декретного времени) на рассматриваемых радиотрассах реализуются волноводные траектории радиоволн. Захват волн в ионосферный волновой канал (ИВК) происходит в сумеречной зоне, где имеются регулярные горизонтальные градиенты в F-области ионосферы порядка 0,1-0,2 МГц/град. Вывод радиоволн из ИВК на ночной стороне обусловлен либо рефракцией на горизонтальных градиентах  $N_o$  на полюсной стенке главного ионосферного провала, либо ракурсным рассеянием радиоволн на магнитоориентированных мелкомасштабных неоднородностях E- и F-областей ионосферы.

В табл. 1 приведены результаты расчетов азимутальных отклонений радиоволн  $\Delta\theta$  на градиенте электронной концентрации на полюсной границе главного провала ионизации и дальности  $D_o$  от области отражения до пункта приема на радиотрассах 1 и 2 для различного местного времени и уровней магнитной активности в  $K_p$ -индексах.

Таблица 1

Время МДВ, ч	Т р а с с а 1				Т р а с с а 2			
	$K_p = 2$		$K_p = 4$		$K_p = 2$		$K_p = 4$	
	$\Delta\theta$ , град	$D_o$ , км	$\Delta\theta$ , град	$D_o$ , км	$\Delta\theta$ , град	$D_o$ , км	$\Delta\theta$ , град	$D_o$ , км
22	16	2844	12	2110	08	3315	4	3130
23	13	1870	5	2200	6	3140	1	3100
00	6	2190	-	-	1	3700	-	-
01	2	2400	-	-	-	-	-	-
02	-	-	-	-	-	-	-	-

Результаты модельных вычислений  $\Delta\theta$ , вызванных ракурсным рассеянием радиоволн в E- и F-областях, на радиотрассе 1 для рабочих частот  $f_p = 15$  и 20 МГц в зависимости от времени суток и  $K_p$ -индекса, сведены в табл. 2.

Таблица 2

Время МДВ, ч	Неоднородности расположены в F-слое				Неоднородности расположены в E-слое			
	$f_p = 15$ МГц		$f_p = 20$ МГц		$f_p = 15$ МГц		$f_p = 20$ МГц	
	$K_p = 2$	$K_p = 4$	$K_p = 2$	$K_p = 4$	$K_p = 2$	$K_p = 4$	$K_p = 2$	$K_p = 4$
22	22-26	20-24	18-22	10-14	25-30	22-26	21-25	18-22
23	18-22	12-16	12-17	5-9	15-19	18-22	14-18	18-22
0	15-19	9-13	5-9	-1+3	12-16	20-24	11-15	15-19
01	12-16	8-12	2-6	-5+0	15-19	21-25	11-15	15-19
02	11-15	6-10	0-4	-8+3	15-19	21-25	11-15	15-19

Рассмотрим экспериментальные данные по азимутальным характеристикам радиоволн на высокоширотных трассах протяженностью 7-9 тыс. км.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведены гистограммы распределений азимутальных отклонений от дуги большого круга  $\Delta\theta$  для различных

частот и направлений. Группа графиков "а" описывает случаи слабозмущенных условий (сумма  $K_p$ -индексов магнитной активности за сутки  $\Sigma K_p \leq 16$ ), группа "б" - возмущения средней активности ( $16 < \Sigma K_p < 25$ ) и группа "в" - сильновозмущенные периоды ( $\Sigma K_p \geq 25$ ). Значение  $\Delta\theta = 0$  для каждого из направлений соответствует распространению по дуге большого круга.

На рис. 2 приведены зависимости медианных значений азимутальных отклонений  $\Delta\theta$  от ориентации радиолинии  $\Delta\theta_0$ . Значение  $\Delta\theta = 0$  соответствует распространению по дуге большого круга на радиотрассе 1 (вдоль зоны сияний). Значения  $\Delta\theta_0 = 10, 24$  и  $40^\circ$  характеризуют распространение по дуге большого круга на линиях 2, 3 и 4. Оценки достоверности усредненных значений  $\Delta\theta$  показывают, что при доверительной вероятности  $\gamma = 0,9$  границы доверительных интервалов составляют не более  $\pm 20\%$  от усредненных значений  $\Delta\theta$ . Кривая 1 описывает случаи  $\Sigma K_p \leq 16$ , кривая 2 -  $16 < \Sigma K_p < 25$  и кривая 3 -  $\Sigma K_p \geq 25$ .

Анализ данных, представленных на рис. 1 и 2, показывает, что наибольшие азимутальные отклонения от дуги большого круга наблюдаются во время возмущений средней активности. На радионаправлении 1 вдоль зоны полярных сияний отмечаются наибольшие значения  $\Delta\theta$  ( $\Delta\theta = 12 \pm 20^\circ$  в зависимости от степени магнитной активности). На трассе 4 поперек авроральной зоны боковые отклонения незначительны.

Влияние магнитной активности (в  $K_p$ -индексах) на усредненные по всему периоду наблюдений значения азимутальных отклонений радиоволн  $\Delta\theta$  для различных направлений и частот проиллюстрировано на рис. 3. Границы доверительных интервалов составляют не более  $\pm 20\%$  от усредненных значений  $\Delta\theta$  при доверительной вероятности  $\gamma = 0,9$ . Отличительной закономерностью вариаций  $\Delta\theta = f(K_p)$  на радиотрассах 1, 2 и 3 является двугорбый характер их распределения. Первый максимум  $\Delta\theta$  наблюдается при магнитной активности  $K_p = 2$ , а второй - при  $K_p = 4+5$ . Оба максимума сравнимы по величине. Наиболее вероятно, что первый максимум  $\Delta\theta$  обусловлен либо горизонтальными градиентами  $\Delta N_o / \Delta\phi$ , либо интенсивными мелкомасштабными неоднородностями в F-области ионосферы, а второй - теми же факторами в E-области. При магнитной активности  $K_p \leq 3$  в основном происходят отклонения азимутов к северу (положительные значения  $\Delta\theta$ ), а при  $K_p > 3$  наблюдаются отрицательные значения  $\Delta\theta$ , что свидетельствует об отклонении азимутов сигналов к югу от дуги большого круга.

На рис. 4 приведены усредненные по всему периоду наблюдений вариации азимутальных отклонений  $\Delta\theta$  в зависимости от московского декретного времени (МДВ) на радиолинии 1 для различных рабочих частот (обозначения кривых такие же, как и на рис. 2). Вариации  $\Delta\theta$  при различной магнитной активности объясняются как закономерностями изменения широтного горизонтального градиента электронной концентрации, так и динамикой полярной границы главного ионосферного провала в зависимости от местного времени и уровня возмущенности.

Сравнение экспериментальных данных и результатов вычисления азимутальных отклонений от дуги большого круга  $\Delta\theta$  в зависимости от ориентации радиолиний показало в целом удовлетворительное соответствие, выражающееся в уменьшении значений  $\Delta\theta$  при переходе от широтных направлений (вдоль зоны полярных сияний) к меридиональным (поперек зоны). Для получения качественного и количественного соответствия расчетных и экспериментальных значений  $\Delta\theta$  в зависимости от времени суток необходимо предположить смену механизма вывода

радиоволн из ИВК. Предположение, что в вечерние и предполуночные часы наиболее значимы механизм рефракции и ракурсное рассеяние на неоднородностях F-слоя, а в послеполуночные часы преимущественно наблюдается ракурсное рассеяние на неоднородностях E-слоя, приводит к лучшему согласию численных и экспериментальных зависимостей  $\Delta\theta$  от времени. Данное предположение подтверждается также сравнительным анализом вариаций  $\Delta\theta$  от магнитной активности.

В результате проведенных экспериментальных исследований и численных расчетов азимутальных характеристик декаметровых радиоволн установлено, что имеют место устойчивые закономерности изменения азимутальных отклонений от дуги большого круга в зависимости от ориентации трассы, степени возмущенности магнитного поля и местного времени, что позволяет производить прогнозирование азимутальных характеристик КВ сигналов при дальнем распространении декаметровых радиоволн в высоких широтах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бояринцев Е. А. Распространение декаметровых радиоволн. - М.: Наука, 1976. С. 56.
2. Hunsucker R.D., Bates H.F. //Radio Sci. 1969. V.4. N 4. P.347.
3. Голян С. Ф., Панченко В. А. Дифракционные эффекты декаметровых радиоволн в ионосфере. - М.: Наука, 1977. С. 71.
4. Бубнов В. А., Румянцев Г. А. Вопросы распространения радиоволн в высоких и средних широтах. - М.: ИЗМИРАН, 1979. С. 94.
5. Борисова Т. Д., Баранец А. Н., Черкашин Ю. Н. Распространение радиоволн в ионосфере. - М.: ИЗМИРАН, 1986. С. 12.
6. Halcrow B., Nisbet J.S. //Radio Sci. 1977. V.12. N 5. P.815.
7. Беспрозванная А. С., Шука Т. И. //Геомagnetизм и аэрoнoмия. 1986. Т. 26. N 5. С. 849.
8. Беспрозванная А. С., Шука Т. И. Полярная иoнoсфepa и магнитoсфepнo-иoнoсфepные связи. - Апатиты: Полярный геофизический ин-т, 1978. С. 13.

Арктический и Антарктический  
научно-исследовательский институт

Поступила в редакцию  
26 декабря 1989 г.

#### EFFECT OF NON-GREAT CIRCLE ARE HF PROPAGATION AT HIGHER LATITUDES

*N. F. Blagoveshchenskaya, A. N. Baranetz, T. D. Borisova, V. A. Bubnov*

Azimuthal deviation variations are considered for non-great circle are decametric propagation at high latitude lines of 7000 - 9000 km long. A comparison is made between experimental data and results of calculation taking account of specific properties of high latitude ionosphere.

УДК 550.388.2

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
МГД-ВОЛН ПО ИОНОСФЕРНОМУ ВОЛНОВОДУ**

**А. О. Овчинников**

Рассматривается модель ионосферного МГД-волновода, позволяющая с помощью достаточно наглядных и простых формул описать основные физические особенности волноводного распространения геомагнитных пульсаций. Предложенная модель дает возможность выделить ряд ионосферных параметров, через которые выражаются частоты отсечки мод, фазовые и групповые скорости мод.

Проблема распространения МГД-волн в ионосферном волноводе изучалась теоретически в работах [1-7].

Работа [1] фактически является пионерской, в ней рассмотрена простейшая модель волновода, затем некоторые уточнения были сделаны в работе [5]. В работах [2,3] рассмотрены модели, которые приводят авторов к достаточно громоздким дисперсионным уравнениям, требующим численного расчета и очень больших затрат машинного времени [2]. Модели, рассмотренные в [4,6], сразу ориентированы на численное решение задачи. Расчеты, выполненные в работе [6] на основе новых ионосферных моделей, оказываются столь трудоемкими, что автор ограничивается исследованием свойств только нулевой нормальной волны, хотя и при различных ионосферных условиях. Вместе с тем, представляет интерес аналитически исследовать распространение МГД-волн в ионосферном волноводе. Для этого мы используем модель волновода, адекватно описывающую свойства реальной ионосферы, и позволяющую сравнительно просто оценить эффективность возбуждения ионосферного МГД-волновода реальными источниками, такими, как землетрясения, извержения вулканов, движущийся солнечный терминатор, ядерные взрывы, полеты ракет с работающими двигателями, промышленные взрывы, мощные радиоволны и др. (Предложенная ниже модель волновода впервые была рассмотрена автором в работе [7] и более детально разработана в дальнейшем.)

**Модель волновода**

Свойства ионосферы считаем зависящими только от вертикальной координаты  $z$ : ось  $z$  ориентирована перпендикулярно к плоской бесконечно проводящей поверхности Земли. Распространение происходит в плоскости  $x, z$ . От координаты  $y$  ничего не зависит ( $\partial/\partial y = 0$ ). Зависимость фазовой скорости БМЗ волны от высоты  $z$  над поверхностью Земли представлена на рис. 1 (см. на вклейке). Область  $A$  расположена выше максимума слоя  $F_2 (z \geq 0)$ . Область  $B$  расположена между максимумом  $F_2$  и бесконечно проводящей поверхностью Земли ( $h \leq z < 0$ ).

В области  $A$  показатель преломления БМЗ-волны  $n(z)$  аппроксимируется законом Эпштейна

$$n^2(z) = n_\infty^2 \left( 1 + \frac{M}{ch^2 \alpha z} \right) . \tag{1}$$

Здесь  $n_\infty$  - значение показателя преломления на бесконечности,  $\alpha^{-1}$  -

характерный масштаб изменения свойств среды,  $M$  - комплексная константа,  $|M| > 1$  и, как правило,  $\text{Re}M > \text{Im}M$ . (Поэтому в первом приближении можно положить  $\text{Im}M = 0$ .)

Зависимость от координаты  $x$  зададим в виде  $\exp(i\xi x)$ . Тогда волновое уравнение для компоненты электрического поля волны  $E_y = E$  записывается в форме [7]

$$\partial^2 E / \partial z^2 + (n^2(z)k^2 - \xi^2)E = 0, \quad (2)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c_A(0)}, \quad c_A(z) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_1}} H,$$

$$n^2(z) = \frac{c_A^2(0)}{c_A^2(z)} \frac{(\nu_{in} + \nu_{ni} - i\omega)}{(\nu_{ni} - i\omega)} \quad [8],$$

$c_A$  - альфвеновская скорость,  $\nu_{in}$  и  $\nu_{ni}$  - частоты соударений ион-нейтрал и нейтрал-ион,  $\rho_1$  - плотность ионов,  $H$  - напряженность геомагнитного поля,  $\mu_0$  - магнитная постоянная.

Решение уравнения (2), убывающее на бесконечности в области  $A$ , с точностью до постоянного множителя можно выразить через присоединенные функции Лежандра первого рода

$$E(z) = P_{\nu-1}^{-\mu}(\text{th}az), \quad (3)$$

где

$$\nu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{Mk_\infty^2}{\alpha^2}}, \quad \mu^2 = \frac{\xi^2 - k_\infty^2}{\alpha^2}, \quad \text{Re}\mu \geq 0,$$

$k_\infty$  - волновое число на бесконечности.

В области  $B$  решение (2) строится в виде квазистатического ряда по степеням  $k^2$ :

$$E = E_0(z) + k^2 E_1(z) + \dots + k^{2n} E_n(z) + \dots \quad (4)$$

Этот ряд хорошо сходится при  $k \rightarrow 0$  ( $\omega \rightarrow 0$ ). Последующий член квазистатического ряда (4) определяется предыдущим с помощью рекуррентного соотношения

$$E_1 = - \int_0^z \frac{n^2(x) \text{sh}\xi(z-x)}{\xi} E_{1-1}(x) dx. \quad (5)$$

Заметим, что этот ряд всегда сходится, так как последующий его член получается из предыдущего применением к нему интегрального оператора

$$\text{Вольтерра } \hat{A}(z) = - \int_0^z \frac{n^2(x) \text{sh}\xi(z-x)}{\xi} ( \quad ) dx \text{ и } E_n = \hat{A}^n E_0.$$

Следовательно, взяв достаточное количество членов ряда (4), всегда можно построить решение (2) с любой требуемой степенью точности.

В МГД-диапазоне ( $f < 5$  Гц) основным является нулевой член ряда (4), а остальные можно рассматривать в качестве поправочных [7, 9]. Особенно хорошо ряд (4) сходится в низкочастотной,  $f \leq 0,1$  Гц, области спектра.

Используя стандартную процедуру сшивания решений при  $z = 0$ , требуя выполнения граничных условий ( $E(h) = 0$ ,  $E(\infty) = 0$ ), получим



характеристическое уравнение для определения волновых чисел мод  $\xi_n$  ионосферного МГД-волновода:

$$\frac{P_{\nu-1}^{-\mu}(0)}{dP_{\nu-1}^{-\mu}(0)/dz} = \frac{\alpha}{\xi} \frac{\hat{B}(h) \operatorname{sh} \xi z}{\hat{B}(h) \operatorname{ch} \xi z}, \quad (6)$$

где оператор  $\hat{B}(z) = [1 - k^2 \hat{\lambda}(z)]^{-1}$ . При этом  $\hat{B}^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^n k^{2m} \hat{\lambda}^m(z)$ ,

$\hat{B}(z) = \hat{B}(z) = \hat{B}^n(z) + O(k^{2n+2})$ . Учитывая, что

$$P_{\nu-1}^{-\mu}(0) = -\frac{2^{-\mu}}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{2} (\nu - \mu) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}\right),$$

$$\frac{dP_{\nu-1}^{-\mu}(0)}{dz} = \frac{\alpha 2^{-\mu+1}}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi}{2} (\nu - \mu) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right).$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (\nu - \mu) \left[ \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right) \right] \left[ \Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}\right) \right]^{-1} = \\ = \frac{2\alpha}{\xi} \frac{\hat{B}(h) \operatorname{sh} \xi z}{\hat{B}(h) \operatorname{ch} \xi z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя соотношения для  $\Gamma(z)$  и разложения Стирлинга, найдем

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right) \right] \left[ \Gamma\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}\right) \right]^{-1} = \\ = \frac{2 \prod_{m=0}^n [(\nu + 2m + 1)^2 - \mu^2] [1 + O(1/6(\nu - \mu + 2n))]}{\prod_{m=0}^n [(\nu + 2m)^2 - \mu^2] [(\nu + 2n)^2] [(\nu + 2n) - \mu^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

В нулевом приближении квазистатического метода имеем

$$\frac{\hat{B}^{(0)}(h) \operatorname{sh} \xi z}{\hat{B}^{(0)}(h) \operatorname{ch} \xi z} = \operatorname{th} (\xi h). \quad (9)$$

В первом приближении с точностью до членов порядка  $k^2$  получим

$$\frac{\hat{B}^{(1)}(h) \operatorname{sh} \xi z}{\hat{B}^{(1)}(h) \operatorname{ch} \xi z} = \operatorname{th} \xi h + \quad (10)$$

$$+ k^2 \operatorname{th} \xi h \int_0^h \frac{n^2(x) \operatorname{sh}^2 \xi(h-x)}{\xi \operatorname{sh} \xi h \operatorname{ch} \xi h} dx + O(k^4).$$

Следовательно, необходимое условие применимости нулевого приближения можно записать в форме (см. Приложение)

$$k^2 \left| \int_0^h \frac{n^2(x) \operatorname{sh}^2 \xi(h-x)}{\xi \operatorname{sh} \xi h \operatorname{ch} \xi h} dx \right| \leq 1. \quad (11)$$

Неравенство (11) обычно выполняется для частот  $f \leq 1$  Гц, соответствующих наблюдаемым геомагнитным пульсациям  $Pc1$ . При анализе неравенства (11) надо иметь в виду, что  $|n(z)|$  в области  $z < 0$  быстро убывает (за исключением оптически тонкого слоя в области  $E$ ).

Заметим, что гиротропный слой с  $\sigma_n \neq 0$  учитывается только во втором приближении квазистатики ( $E_2 \sim k^4$ ) [9]. Локализация поля моды в окрестности слоя  $F2$  и резкое убывание поля моды при увеличении частоты вне слоя в области  $B$  приводит к тому, что влияние гиротропного слоя мало как на низких, так и на высоких частотах [9].

Полагая в разложении Стирлинга (8)  $n = 1$ , что обеспечивает точность  $\sim 6\%$ , и ограничиваясь нулевым приближением оператора  $\hat{B}(z)$  (см. (9)), характеристическое уравнение (7) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (\nu - \mu) = \frac{\alpha}{\xi} \frac{(\nu^2 - \mu^2) \sqrt{(\nu + 2)^2 - \mu^2}}{(\nu + 1)^2 - \mu^2} \operatorname{th} \xi h, \quad (12)$$

удобном для аналитического исследования.

Решение трансцендентного уравнения (12) позволяет определить спектр значений постоянных распространения мод  $\xi_n$ .

Для частот, достаточно удаленных от частот отсечки  $|\mu| > 1,5$ , учитывая реальные значения ионосферных параметров ( $\alpha, h, M, k_\omega, c_A(0)$ ), имеем

$$\xi \approx \alpha \mu, \quad \operatorname{th} \xi h \approx -1, \quad \frac{(\nu^2 - \mu^2) \sqrt{(\nu + 2)^2 - \mu^2}}{(\nu + 1)^2 - \mu^2} \approx \sqrt{\nu^2 - \mu^2}.$$

В этом случае уравнение (12) после небольших преобразований принимает особенно простой вид

$$\cos \left[ \frac{\pi}{2} (\nu - \mu) + n\pi \right] = \frac{\mu}{\nu}. \quad (13)$$

Частоты отсечки мод  $f_n$  можно определить из условия  $\operatorname{Re} \mu_n = 0$ . Детальный анализ высотной зависимости поля мод и условий распространения при частоте, близкой к  $f_n$ , показывает, что и  $\operatorname{Im} \mu_n \rightarrow 0$  при  $f \rightarrow f_n$ .

Частоты отсечки  $f_n$  могут быть найдены с помощью уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \nu_n = -\nu_n \alpha |h|, \quad (14)$$

решение которого относительно  $\nu_n$  ( $\nu_n = \nu(f_n)$ ) с учетом связи между  $f$  и  $\nu$  дает

$$f_n = \frac{\alpha c_A(\omega) \sqrt{\nu_n (\nu_n - 1)}}{\sqrt{M} 2\pi} \quad (c_A(\omega) = \sqrt{M} c_A(0)). \quad (15)$$

Заметим, что в общем случае  $M = M(f)$ . При  $f \rightarrow f_n$   $\operatorname{Im} M(f) \rightarrow 0$ .

Частоты отсечки для первых пяти мод, рассчитанные для экстремальных ионосферных условий, приведены в табл. 1.

Сравним данные, приведенные в последней строке таблицы, с данными, полученными в работе [2] для первых пяти мод  $f_0 = 0,2$  Гц,  $f_1 = 0,5$  Гц,  $f_2 = 0,85$  Гц,  $f_3 = 1,2$  Гц,  $f_4 = 1,5$  Гц. В целом видно хорошее соответствие результатов. Заметим, что на расчет одного

корня характеристического уравнения в работе [2] затрачивается 45 мин (ИВН 1130), а по представленной в настоящей работе методике - около 0,2 с (БЭСМ-6).

Пренебрегая затуханием ( $\text{Im } M = 0$ ), решая уравнение (12), (13) методом итераций в нулевом и первом приближениях, найдем

$$\mu_n^{(0)} = \nu - \nu_n; \quad (16)$$

$$\mu_n^{(1)} = (\nu - \nu_n) + \left[ \nu_n - 2(n+1) + \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{\nu_n}{\nu}\right) \right], \quad (17)$$

$$\mu_n^{(1)} = (\nu - \nu_n) + \left\{ \nu_n - 2(n+1) - \frac{2}{\pi} \arctg \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{k_\omega^2 + \alpha^2(\nu - \nu_n)^2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\nu_n(2\nu - \nu_n) \sqrt{(2 + \nu_n)(2\nu + 2 - \nu_n)}}{(\nu_n + 1)(2\nu + 1 - \nu_n)} \text{th} \left( \sqrt{k_\omega^2 + \alpha^2(\nu - \nu_n)^2} h \right) \right] \right\}. \quad (18)$$

Уже формула (16) позволяет определить  $\mu_n$  с точностью  $(1 + 4)\%$ . Формулы (17), (18) дают корни соответствующих уравнений с точностью до десятых долей процента. Таким образом, первый член формул (17), (18) можно рассматривать как основной, а второй, стоящий в квадратных скобках, как поправочный. Учитывая, что при различных ионосферных условиях достаточно хорошо выполняется соотношение

$$\nu - \nu_n \approx (k - k_n) / \alpha,$$

где  $k_n$  - волновое число на оси волновода, взятое при частоте, равной частоте отсечки данной моды.

Получим аналитическую формулу для нахождения волнового числа моды  $\xi_n$  в виде

$$\xi_n = \sqrt{k_\omega^2 + (k - k_n)^2}. \quad (19)$$

Результаты расчета  $\xi_n$  по формуле (19) сравнивались с результатами определения  $\xi_n$  при численном решении характеристического уравнения (12) с учетом затухания мод. Средняя относительная погрешность определения  $\xi_n$  по формуле (19) изменялась от 1 - 2% в условиях день-максимум солнечной активности (с. а.) до 2 - 4% в условиях ночь-минимум с. а. с характерной погрешностью ~ 2%. Усреднение производилось для частот в интервалах  $[f_n, f_n + 1 \text{ Гц}], \dots, [f_n, f_n + 5 \text{ Гц}]$  с шагом  $\Delta f = 0,01 \text{ Гц}$ . Средние значения погрешностей для различных частотных интервалов примерно одинаковы. Заметим также, что формула (19) описывает линейный закон дисперсии  $\xi_n(f)$  и хорошо соответствует численным расчетам [3].

Пренебрегая затуханием мод, с помощью формулы (19) получим аналитические выражения для фазовых и групповых скоростей мод:

$$c_{\phi n} = \frac{\omega}{\text{Re} \xi_n} = \frac{c_A(\omega)}{\sqrt{1 + M(1 - f_n/f)^2}}; \quad (20)$$

$$c_{гр\ n} = \left( \frac{d \operatorname{Re} \xi_n}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_A(\omega) \sqrt{1 + M(1 - f_n/f)^2}}{1 + M(1 - f_n/f)}. \quad (21)$$

Поскольку параметр  $M$  велик ( $M \geq 10^2$ ), то уже при  $f \geq 1,1f_n$  можно пользоваться формулами

$$c_{ф\ n} = \frac{c_A(0)}{1 - f_n/f}, \quad c_{гр\ n} = c_A(0). \quad (22)$$

Формулы (20)-(22) наглядно демонстрируют, что при незначительном увеличении частоты по сравнению с частотой отсечки данной моды групповая скорость моды быстро уменьшается примерно на порядок от значения  $c_A(\omega)$  до значения  $c_A(0)$ . Для фазовой скорости моды зависимость от частоты значительно более плавная. Результаты (20)-(22) хорошо соответствуют как данным работы [3], так и результатам расчета по современным ионосферным моделям [6].

С помощью численного решения уравнения (12) найдены фазовые и групповые скорости пяти первых мод, а также затухания этих мод для четырех различных экстремальных ионосферных условий, представленных в табл. 1.

Таблица 1

Ионосферные условия	$c_A(0)$ , км/с	$\alpha^{-1}$ , км	$h$ , км	$f_{0'}$ , Гц	$f_{1'}$ , Гц	$f_{2'}$ , Гц	$f_{3'}$ , Гц	$f_{4'}$ , Гц
Ночь-макс. с. а.	395	450	-300	0,13	0,38	0,65	0,92	1,20
Ночь-мин. с. а.	720	300	-300	0,31	1,01	1,76	2,51	3,27
День-макс. с. а.	190	435	-250	0,067	0,19	0,33	0,46	0,59
День-мин. с. а.	375	350	-220	0,164	0,47	0,80	1,13	1,47

На рис. 2 в качестве примера представлены зависимости фазовых (пунктир) и групповых (сплошная линия) первых пяти мод в условиях ночь-максимум с. а.

#### Высотная зависимость поля мод

Представляет интерес изучить, как меняется величина поля моды в зависимости от высоты ( $h$ ) над поверхностью Земли. Рассмотрим эту зависимость для относительной величины напряженности электрического поля ( $E = E_y$ ) моды.

Расчеты, выполненные для двух первых мод по формулам

$$E_{отн} = \frac{P_{\nu-1}^{-\mu_n}(\text{th}az)}{P_{\nu-1}^{-\mu_n}(\text{th}az_0)} \quad \text{при } z \geq 0,$$

где уровень  $z_0$  - соответствует максимуму поля нормальной волны,

$$E_{отн} = \frac{P_{\nu-1}^{-\mu_n}(0) \operatorname{sh} \xi(h-z)}{P_{\nu-1}^{-\mu_n}(\text{th}az_0) \operatorname{sh} \xi h} \quad \text{при } h \leq z \leq 0,$$

для условий ночь-максимум солнечной активности, представлены на рис. 3 (профиль нулевой моды, кривая 1 - частота отсечки  $f_0 = 0,13$  Гц, 2 -

0,42 Гц, 3 - 0,65 Гц) и рис. 4 (профиль первой моды, кривая 1 - частота отсечки  $f_1 = 0,38$  Гц, 2 - 0,75 Гц, 3 - 1,5 Гц).

Как видно из приведенных рисунков, по мере приближения частоты к частоте отсечки главный максимум поля смещается вверх, уходя на бесконечность при частоте, равной частоте отсечки для данной моды (при этом мода уже больше не удерживается волноводом). При возрастании частоты происходит обратный процесс, положение максимума поля моды стабилизируется, приближаясь к уровню минимума альфвеновской скорости, т.е. к оси волновода. Отсюда, в частности, следует, что при частотах  $f \geq 1$  Гц электрическое поле моды велико в слое F2 и мало во всей остальной ионосфере; при любых частотах  $f \geq f_n$  поле мод мало в слое E. Значит, область E будет сравнительно мало влиять на свойства нормальных волн.

Очевидно, что при любой фиксированной частоте большее влияние на свойства мод должны оказывать те области ионосферы, где поле моды максимально. Поэтому затухание моды при частоте, стремящейся к частоте отсечки, будет исчезающе малым, а затухание мод с большими номерами будет на данной частоте заметно меньше, чем с меньшими. Подробно затухание мод будет исследовано нами во второй части работы.

Выражаю искреннюю благодарность В. Н. Красильникову за обсуждение работы и сделанные замечания.

### Приложение

Методом теории возмущений покажем, что полученные результаты применимы и к дневной ионосфере, оптическая толщина которой не обязательно мала. Для этого введем оператор

$$\hat{L} = \begin{cases} \hat{L}'(z) = \frac{d^2}{dz^2} + k^2 n^2(z), & z > 0 \\ \hat{L}' - k^2 n^2(z), & h < z < 0 \end{cases} \quad (\text{П. 1})$$

Обозначим через  $E_n$  и  $E'_n$  собственные функции соответствующих операторов, обращающиеся в нуль при  $z = h$  и  $z = \infty$ .

Представим  $E'_n$  в виде разложения по собственным функциям  $E_n$ . Тогда, учитывая ортогональность функций  $E_n$  соответствующих разным значениям  $\xi$ , в первом приближении теории возмущений найдем

$$|\xi_n^2 - \xi_n'^2| = k^2 \int_0^{|h|} \frac{n^2 \text{sh}^2 \xi_n (z - h)}{\text{sh}^2 \xi_n h} dz \times \quad (\text{П. 2})$$

$$\times \left[ \int_0^{|h|} \frac{\text{sh}^2 \xi_n (z - h)}{\text{sh}^2 \xi_n h} dz + \int_0^{\infty} \left( \frac{P_{\nu-1}^{-\mu_n}(\text{th } az)}{P_{\nu-1}^{-\mu_n}(0)} \right)^2 dz \right]^{-1}.$$

Интегралы в знаменателе (П. 2) численно равны площади под кривой  $E_{\text{отн}}$  и ось  $h$  (см. рис. 3, 4). Очевидно, что при расчетах, близких к частотам отсечки,  $\mu_n \rightarrow 0$ , второй интеграл в знаменателе (2) становится бесконечно большим и  $|\xi_n^2 - \xi_n'^2| \rightarrow 0$ . Для высоких частот

начинает действовать экспоненциальный фактор

$$\text{sh}^{-2}(\xi_n h) \approx \frac{\exp(-2\xi_n |h|)}{4} < 1 \quad (\xi_n h \geq 1),$$

влияние которого приводит также к выполнению условия  $|\xi_n^2 - \xi_n'^2| < \xi_n^2$  при  $\xi_n h > 1$ . Приведенные оценки применимы как к ночной, так и к дневной ионосфере. Они улучшают необходимое условие применимости нулевого приближения (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tepley Z.R., Zandshoff R.K. // Geophys. Res. 1966. V.71. P. 1499.
2. Manchester R.N. // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. P. 3549.
3. Greifinger C., Greifinger P. // J. Geophys. Res. 1968. V.73. P. 7473.
4. Горбачев Л. П., Савченко Ю. Н. // Геомagnetизм и аэрoнoмия. 1972. Т. 12. N 1. С. 71.
5. Duong M.D. // Planet. Space Sci, 1976. V. 24. P. 915.
6. Fujita S. // Planet. Space Sci. 1987. V. 35. N 1. P. 91.
7. Овчинников А. О. // Проблемы диффракции и распространения волн. 1979. N 17. С. 121.
8. Овчинников А. О. // Проблемы диффракции и распространения волн. 1981. N 18. С. 137.
9. Овчинников А. О. /Статья депонирована в ВИНТИ, рег. N 8098-84. Деп. от 19 декабря 1984 г.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
2 января 1990 г.

#### ANALYTICAL STUDY OF THE WAVEGUIDE PROPAGATION IN THE IONOSPHERIC MHD-DUCT

*A. O. Ovchinnikov*

This model of ionospheric MHD duct allows one to describe the principle physical properties of the waveguide propagation of the geomagnetic pulsations in terms of quite straight forward and simple formulae. The principle parameters of ionosphere are singled out which define the cutoff frequencies and phase and mode group velocities.

УДК 551.510.535

### ВЕРОЯТНЫЙ МЕХАНИЗМ ИЗМЕНЕНИЯ КРУТИЗНЫ СПЕКТРОВ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

*В. Д. Озеров, Г. Л. Гдалевич, И. С. Всехсвятская, Л. Н. Новикова,  
Т. Н. Соболева*

Обсуждается вероятная картина изменчивости крутизны спектров ионосферных неоднородностей, основанная на способности интенсивных продольных волн плазмы создавать возмущения плотности с крутыми фронтами. Показано, что приведенные результаты имеют экспериментальное подтверждение

О поведении спектрального индекса  $\beta$ , характеризующего крутизну падающего участка степенного спектра, в настоящее время имеется достаточно сведений. Например, результаты локальных исследований ионосферной плазмы по методу ионных ловушек [1-3] и данные, основанные на измерениях флуктуаций сигналов внеземных источников [4-8], показывают уменьшение спектрального индекса с ростом амплитуды возмущений. Например, по данным работы [3]  $\beta \sim 3+1$ , причем значение  $\beta \sim 1$  соответствует наибольшим амплитудам неоднородностей  $\Delta n/n$  электронной концентрации. Отношение  $\Delta n/n$  растет с увеличением размеров этих неоднородностей [9]; все спектры при  $l$  от 3 до  $10+20$  км, за редким исключением, подчиняются степенному закону вида  $\Delta n \sim f^{-\beta} \sim l^{\beta}$ , а для размеров неоднородностей, больших  $10+20$  км, наклон спектра уменьшается [10]. Но это означает, что с ростом амплитуды неоднородностей спектральный индекс должен падать. Тем не менее в работе [11] существование зависимости крутизны спектра от амплитуды неоднородностей отрицается. Кроме того, изменение спектрального индекса от эксперимента к эксперименту влиянием магнитной возмущенности, широты, времени суток полностью не объясняется [11] в отличие от влияния числа солнечных пятен, которому, по-видимому, придается первостепенное значение. Между тем, например, влияние широты на спектральный индекс отмечается в ряде работ: обычно для средних и низких широт  $\beta \sim 1+1,5$ , а для высоких -  $\beta \sim 0,75+0,95$  [11-13].

Приведенный краткий обзор свидетельствует о необходимости поиска физического механизма, влияющего на крутизну спектра при изменениях различных геофизических факторов.

Причина увеличения или уменьшения  $\beta$  заключена в особенностях формы сигнала, разлагаемого в спектр: меньшие величины  $\beta$  соответствуют более широкому частотному интервалу в спектре сигнала. На этом основании нетрудно заключить, что малые значения  $\beta$  можно получить, если взять сигнал, обладающий достаточно крутыми фронтами нарастания [14].

С ростом высоты над поверхностью Земли растет амплитуда колебательных смещений частиц и интенсивности продольных волн, измеряемой скалярным произведением  $\zeta$  волнового вектора  $\vec{k}$  на амплитудное смещение  $\vec{a}$  частиц от положений равновесия:

$$\zeta = \vec{a} \cdot \vec{k} \quad (|\zeta| \leq 1).$$

Вследствие этого колебания концентрации  $n$ , плотности потока частиц и пространственно-временные изменения фазы волны приобретают существенно нелинейный характер. Иначе говоря, изменения фазы в пространстве и времени являются периодически модулированным линейно нарастающим (или убывающим) процессом с глубиной модуляции, определяемой значением интенсивности  $\zeta$ . Для поперечных волн колебательные изменения фазы отсутствуют.

Из уравнения непрерывности в лагранжевой форме ([15], с.10]) следует выражение для колебаний концентрации частиц в продольной волне:

$$n/n_0 = \frac{1}{1 + \text{div} \vec{\xi}} = \frac{1}{1 - \vec{k} \cdot d\vec{\xi}/d\varphi} \quad (|\vec{k} \cdot d\vec{\xi}/d\varphi| \leq 1),$$

где  $\varphi$  - фаза волны,  $\vec{\xi}$  - смещение частиц от положения равновесия.

Колебаниям концентрации  $n/n_0$  свойственна островершинная, квазициклоидальная форма. Примеры такого сигнала часто встречаются среди экспериментальных результатов исследования флуктуаций концентрации плазмы по методу сферических ионных ловушек на ИСЗ "Космос-900" [16], "Космос-378" [17-19], "Интеркосмос-8" [18] и других (рис. 1, см. на вклейке). (Методика таких исследований изложена в работе [20].) В этих экспериментах часто встречаются записи неоднородной структуры с крутыми и заостренными максимумами концентрации по отношению к сглаженным и уплощенным минимумам. К такому виду колебаний плазмы может приводить только наличие нелинейных процессов в механизме образования неоднородности. Наиболее вероятной причиной этого явления можно считать фазовую автомодуляцию непоперечных волн [16-19]. Итак, предположим, что в соответствии с [16,18] относительная интенсивность сигнала на выходе ионной ловушки представима в виде (рис. 2)

$$n/n_0 = \left( 1 + \zeta \sum_{j=1,10,100} j \alpha_j \sin j\varphi \right)^{-1} \quad \left( \left| \zeta \sum_{j=1,10,100} j \alpha_j \sin j\varphi \right| \leq 1 \right), \quad (1)$$

где фаза  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (см. Приложение)

$$\varphi - \zeta \sum_{j=1,10,100} \alpha_j \cos j\varphi = \Omega_0 t, \quad (2)$$

$\Omega_0$  - частота повторения наблюдаемых колебаний,  $n_0 = \text{const}$  - невозмущенное значение концентрации,  $t$  - время,  $\alpha_j$  - нормированные к единице коэффициенты разложения фурье величины смещения частиц от положения равновесия,  $\zeta$  - параметр нелинейности анализируемого сигнала, равный скалярному произведению волнового вектора на амплитудное значение смещения частиц от положения равновесия, имеющего соответствующую полигармоническую форму:

$$\vec{\xi} = \vec{a} \sum_{j=1,10,100} \alpha_j \cos j\varphi.$$

На рис. 2 представлен характерный фрагмент реализации сигнала колебаний концентрации. Реализация использована в модельном расчете энергетических спектров мелкомасштабных неоднородностей сложной квазициклоидальной формы. Сигнал представляет собой результат воздействия на структуру сжимаемой среды полигармонического смещения частиц в виде суммы трех гармонических компонент с соотношением



частот  $f_1 : f_2 : f_3 = 1:10:100$  и амплитуды  $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1}$ . Из сопоставления рис. 1 и 2 видно, что по своему характеру анализируемая форма сигнала сопоставима с формой наблюдаемых вариаций  $n$ .

В предположении стационарности выборок исследуемой случайной величины вычислялись оценки спектральной плотности неоднородностей концентрации ионосферной плазмы методом Блэкмана-Тьюки [21]. Величина  $\beta$ , характеризующая распределение спектральной интенсивности по частоте, вычисляется как тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей истинную кривую частотной зависимости спектральной интенсивности  $S=S(f)$ . Аппроксимация наклона спектральной кривой проводится по методу наименьших квадратов.

Частоты повторения основных компонент сигнала были взяты достаточно разнесенными между собой (1:10:100), чтобы избежать искажающего влияния взаимного наложения близких частот [23]. Результаты расчета зависимостей (1) и  $\beta(\zeta)$  приведены на рис. 2 и 3. Из рис. 3 видно, что увеличение крутизны фронта периодического сигнала, нелинейно нарастающее с ростом  $\zeta$ , приводит к нелинейно усиливающемуся падению  $\beta$ . Спектральный анализ неоднородностей, исследуемых в спутниковых экспериментах, нередко приводит к малым значениям  $\beta \sim 1$ , что, с учетом характера зависимости  $\beta(\zeta)$ , можно объяснить влиянием квазициклоидального, островецинного характера профиля концентрации ионосферных неоднородностей.

Из выражений для  $\xi$  и  $n/n_0$  непосредственно виден нелинейный механизм уменьшения значений  $\beta$  с ростом  $\zeta$ . По сравнению с заданным законом спадания кривой спектра частотных компонент смещения  $\xi$  с ростом частоты частотная зависимость спектральной мощности колебаний  $n/n_0$  падает медленнее благодаря множителю в знаменателе выражения для  $n/n_0$ , возрастающему с увеличением номера спектральной компоненты. Это замедление резко возрастает по мере приближения  $\zeta$  к единице вследствие все ускоряющегося уменьшения значений знаменателя выражения для  $n/n_0$  в пиковых фазах функции  $\sin j\varphi$ . Аналогичные расчеты  $\beta$  в случае треугольной волны, постепенно превращающейся в пилообразную, также свидетельствуют об уменьшении  $\beta$  с ростом крутизны фронта волны. На рис. 4 для треугольной волны изображена зависимость  $\beta=\beta(\eta)$ , где  $\eta$  - доля периода волны, приходящаяся на прямолинейный участок ее профиля. Одновременно с уменьшением  $\beta$  происходит уширение спектра в области верхних частот (ср. [2]). Этот результат сопоставим с суточным ходом ширины горизонтального участка спектра в области наибольших интенсивностей (названного в работе [24] "шириной спектра"), которая в ночное время, когда амплитуда неоднородностей велика, оказывается вчетверо большей, чем в дневное время [24]. Возможно, что это является признаком удлинения всей шкалы частот (волновых чисел) спектра.

В соответствии со сказанным полученный авторами статьи результат свидетельствует о кажущемся множестве новых мелкомасштабных неоднородностей, хотя ясно, что в результате увеличения  $\zeta$  новые, более высокие частоты повторения не возникают. В уменьшении  $\beta$  с усилением негармоничности анализируемого сигнала отражается влияние спектральных отличий негармонического сигнала от гармонического, которое проявляется в целой области частот, главным образом, более высоких, чем частота повторения. Изменение крутизны профиля неоднородностей может быть одной из причин увеличения энергии более высокочастотных гармоник, а следовательно, и больших волновых чисел в экспериментальных спектрах.

С учетом всевозможных физических процессов в плазме указанный способ "перекачки" спектральной мощности по шкале волновых чисел -

не единственный. Возбуждение градиентно-дрейфовой неустойчивости на крутом фронте волны концентрации порождает более мелкие неоднородности в виде зазубрин на исходном профиле концентрации. Такой процесс может быть многоступенчатым, способным создать совокупность неоднородностей с размерами, отличающимися на несколько порядков от размеров исходной неоднородности.

1) Результаты модельного расчета спектрального индекса обнаружили нелинейную падающую зависимость  $\beta$  от параметра  $\zeta$ , пропорционального амплитуде колебаний частиц в плазме. Это может быть одним из возможных механизмов влияния амплитудных волновых возмущений на спектр возбуждаемых ими неоднородностей. Приведенные результаты показывают, что форма профиля неоднородности существенным образом влияет на крутизну спектра.

2) В рамках предложенной модели ионосферных неоднородностей объяснено появление широтных, высотных, суточных и т.п. зависимостей крутизны и ширины спектра. Меньшая крутизна спектра в авроральной области по сравнению со среднеширотными и даже низкоширотными областями обычно связана с преобладанием более интенсивных неоднородностей, что может быть обусловлено как наличием более мощных и постоянно действующих возмущающих факторов, так и относительно большей величиной волнового числа, а следовательно, и большей величиной  $\zeta$ .

3) Падающая зависимость спектрального индекса  $\beta$  от числа солнечных пятен, т.е. от уровня солнечной активности, найденная в работе [11], вероятно, обусловлена соответствующей зависимостью  $\beta$  от интенсивности и, следовательно, степени заостренности формы неоднородностей.

### Приложение

Вывод зависимости фазы волны от времени с точки зрения наблюдателя, движущегося со скоростью  $\vec{v}$  (соотношение (2)).

Исходя из общеизвестного выражения для фазы волны

$$\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{x}, \quad (\text{П. 1})$$

где  $\omega$  - частота волны,  $\vec{x}$  - положение равновесия колеблющейся частицы (ср., например, [25], с. 186), и учитывая, что текущая координата наблюдаемой частицы равна

$$\vec{x}_T = \vec{v} \cdot t = \vec{x} + \xi,$$

имеем

$$\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{x}_T + \vec{k}\xi, \quad \varphi - \vec{k}\xi = (\omega - \vec{k}\vec{v})t.$$

Подставив

$$\vec{\xi} = \vec{a}_{j=1, \Sigma_{0,100}} \alpha_j \cos j\varphi$$

и обозначив

$$\Omega_0 = \omega - \vec{k}\vec{v},$$

получим окончательно

$$\varphi - \zeta_{j=1, \Sigma_{0,100}} \alpha_j \cos j\varphi = \Omega_0 t. \quad (\text{П. 1})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гдалевич Г. Л., Озеров В. Д. и др. //Геомagnetизм и астрономия. 1980. Т. 20. N 5. С. 809.
2. Гдалевич Г. Л., Губский В. Ф. и др. Препринт ИКИ АН СССР. Пр-938.- М., 1984.
3. Basu S., Basu S. //J.Geophys. Res. 1984. V. 89. N A7. P.5554.
4. Murthy B.V.K., Moorthy K.K. et al. //Nature. 1976. V. 262. N 5563. P.38.
5. Whitney H.E., Basu S. //Radio Sci. 1977. V. 12. N 1. P. 123.
6. Umeki R., Liu C.H., Yeh K.C.//Radio Sci. 1977. V. 12. N 2. P.311.
7. Fremouw E.J., Leadabrand R.L. et al.//Radio Sci. 1978. V. 13. N 1. P. 167.
8. Алимов В. А., Рахлин А. В. Препринт НИРФИ N 132. - Горький, 1979.
9. Гетманцев Г. Г., Комраков Г. П. и др. //Космические исследования. 1973. Т. 11. Вып. 2. С. 335.
10. Комраков Г. П., Скребкова Л. А. //Сб.: Ионосферные исследования. 1980. N 30. С. 49.
11. Комраков Г. П., Лернер А. М., Скребкова Л. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. N 6. С. 770.
12. Dyson P.L., McClure J.P., Hanson W.B.// J.Geophys. Res. 1974. V. 79. N 10. P. 1497.
13. Аксенов В. И., Артемьева Г. М. и др. //Космические исследования. 1982. Т. 20. N 4. С. 542.
14. Харкевич А. А. Спектры и анализ. - М.: Гостехиздат, 1962.-236 с.
15. Красильников А. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. - М.: Наука, 1984. - 400 с.
16. Ozerov V.D. In: World Data Center a for Solar-Terrestrial Physics: Boulder, Colorado, 1982. Sol.-Geophys. Activity Reports for September 7-24 and November 22, 1977. Report VAG-83, pt.I, p.174.
17. Ozerov V.D. In: Space Research XVI. 1976, V.16. P.479.
18. Озеров В. Д. //Сб. трудов Международного симпозиума по физике ионосферы, магнитосферы и солнечного ветра. -Гурбаново (ЧССР): ГФИ САН, ИКИ АН СССР, 1977. Т. 2. С. 243.
19. Озеров В. Д. В кн.: Волновые возмущения в атмосфере (по результатам исследований в рамках Всесоюзной программы "Волновые возмущения"). -Алма-Ата: Наука, 1980. с. 173.
20. Беляшин А. П., Гдалевич Г. Л. и др. В кн.: Космическое приборостроение. -М.: Наука, 1982. С. 89.
21. Всехсвятская И. С., Гдалевич Г. Л. и др. Препринт ИЗМИРАН N 32(443). - М., 1983.
22. Хэррис Р. Дж. //ТИИЭР. 1978. Т. 66. N 1. С. 60.
23. Loumos G.L., Deeming T.-J.//Astrophys. Space Sci. 1978. V. 56. N 2. P. 285.
24. Elkins T.J., Papagiannis M.D.//J.Geophys. Res. 1969. V. 74. N 16. P.4105.
25. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. -М.: Наука, 1988. 303с.

Институт космических исследований  
АН СССР

Поступила в редакцию  
7 августа 1989 г.

### PROBABLE MECHANISM FOR SPECTRAL INDEX VARIATION OF IONOSPHERIC IRREGULARITY SPECTRA

*V. D. Ozerov, G. L. Gdalevich, I. S. Vsechsvyatskaya,  
L. N. Novikova, T. N. Soboleva*

A possible cause is discussed of the main ionospheric irregularity spectrum parameter variability based on the capacity of intense longitudinal waves for the creation of the density disturbances with steep fronts. The conclusions are verified by experiments.

УДК 621.373.826

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕПЛОВОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

*В. А. Алешкевич, Г. Д. Кожоридзе, А. Н. Матвеев, М. В. Шамонин*

Аналитически методом нелинейного фазового канала исследовано нестационарное тепловое самовоздействие лазерного излучения с ограниченной пространственной когерентностью. Акцент сделан на выяснении механизма действия основных эффектов, связанных со случайной модуляцией поля. Дано объяснение немонотонному изменению радиуса корреляции по длительности импульса. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с имеющимися данными лабораторных и численных экспериментов.

В последнее время в связи с широким практическим использованием мощных лазеров возрос интерес к задачам теплового самовоздействия частично когерентных в пространстве и во времени импульсов. В работе [1] на основе численного моделирования было показано появление характерного минимума радиуса корреляции поля во времени по длительности импульса при его нестационарном тепловом самовоздействии. Эксперименты с импульсным излучением [2] показали, что ослабление флуктуации поля в начале импульса сменяется их усилением к концу импульса. Этот результат подтвержден и расчетами методом статистических испытаний [3,4], в которых установлено немонотонное изменение во времени дисперсии флуктуаций интенсивности и радиуса корреляции. Выполненный сравнительно позже эксперимент [5] также зарегистрировал немонотонное изменение радиуса корреляции по длительности импульса. Изучение пространственной когерентности лазерного поля методом статистических испытаний в нестационарном режиме [6] показало улучшение пространственной когерентности в начале импульса, а с дальнейшим нагревом среды и с увеличением оптической силы тепловых линз - ее ухудшение.

В настоящей работе аналитически методом фазового канала [7] детально исследовано нестационарное тепловое самовоздействие частично когерентного лазерного излучения. При этом посредством анализа полученных формул акцент сделан на выяснении механизма действия основных эффектов некогерентного нестационарного режима теплового самовоздействия.

При распространении лазерного излучения в газовой или жидкой среде неравномерный нагрев вследствие поглощения света приводит к нелинейным искажениям лазерного поля в поперечном сечении пучка и по длительности импульса. Нелинейное возмущение показателя преломления среды задается как  $n_{нл} = (\partial n / \partial T) \Delta T = n_T \Delta T$  ( $n_T < 0$  в дефокусирующей среде). В неподвижной среде приращение абсолютной температуры  $\Delta T$  за счет нагрева определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta T) - \chi \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta T) = \frac{\alpha}{\rho c_p} |A(\vec{r}, \tau, z)|^2, \tag{1}$$

где  $A(\vec{r}, \tau, z)$  - комплексная амплитуда лазерного поля волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  - коэффициенты молекулярной теплопроводности и затухания,  $\rho c_p$  - теплоемкость единицы объема среды при постоянном давлении,  $\tau = t - z/v_{гр}$  - время в сопровождающей системе координат,  $\partial^2/\partial r^2$  - поперечный к направлению распространения лапласиан.

Если длительность импульса  $\tau_{И}$  намного меньше характерного времени теплопереноса среды  $\tau_{\chi} = a_{\Pi}^2/\chi$  ( $a_{\Pi}$  - ширина пучка), то реализуется нестационарный режим теплового самовоздействия, когда среда "не успевает" мгновенно "отслеживать" быстрые изменения интенсивности лазерного поля. При этом в уравнении (1) термодиффузией можно пренебречь и температурный нагрев среды задается как

$$\Delta T = \frac{\alpha}{\rho c_p} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' |A(\vec{r}, \tau', z)|^2. \quad (2)$$

Например, в атмосфере для ограниченного в пространстве и во времени лазерного излучения при ширине пучка  $a_{\Pi} \sim 1$  см и длительности импульса  $\tau_{И} < 0,1$  с выполняется условие  $\tau_{И} \ll \tau_{\chi}$ .

Динамика развития ограниченного в пространстве и во времени лазерного поля с комплексной амплитудой  $A$  в наведенном тепловом канале  $\Delta T(\vec{r}, \tau, z)$  описывается нелинейным уравнением квазиоптики

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{2} A = - \frac{ik_0}{n_0} n_T \Delta T A, \quad (3)$$

где  $k = (\omega_0/c) n_0$  - волновое число на несущей частоте  $\omega_0$  при невозмущенном значении показателя преломления. При нестационарном режиме теплового самовоздействия нелинейные эффекты носят накапливающийся характер по длительности импульса. Введем характерную нелинейную длину для регулярного излучения

$$L_{НЛ}(\tau) = a_{\Pi} \left( \frac{n_0}{|\Delta n_{\max}|} \right)^{1/2} = a_{\Pi} \left( \frac{|n_T| \alpha I_0}{\rho c_p n_0} \int_{-\infty}^{\tau} f^2(\tau') d\tau' \right)^{-1/2}, \quad (4)$$

где  $\Delta n_{\max}$  - максимальное нелинейное возмущение показателя преломления в поперечном сечении пучка,  $f(\tau)$  - временная огибающая по длительности импульса,  $I_0$  - пиковое значение интенсивности излучения. В атмосфере для центральной части излучения ( $\vec{r} = 0, \tau = 0$ ) при мощности  $P = I_0 a_{\Pi}^2 \sim 1$  кВт и ширине пучка  $a_{\Pi} \sim 1+10$  см нелинейная длина  $L_{НЛ}(\tau = 0) \sim 100$  м + 10 км. В жидкости  $L_{НЛ}$  на несколько порядков меньше.

На входе в нелинейную среду рассмотрим частично когерентное в пространстве и ограниченное в пространстве и во времени лазерное поле с комплексной амплитудой

$$A_0(\vec{r}, \tau) = \sqrt{I_0} \xi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{2a_{\Pi}^2} - \frac{\tau^2}{2\tau_{И}^2}\right), \quad (5)$$

где  $\xi(\vec{r})$  - комплексное случайное однородное поле в поперечном сечении пучка с нулевым средним значением  $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$  и корреляционной функцией гауссова типа

$$\langle \xi(\vec{r}_1) \xi^*(\vec{r}_2) \rangle = \exp [-(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 / r_K^2] \quad (6)$$

с радиусом корреляции  $r_K$ .

В начальном условии (5) не учтены временные флуктуации лазерного поля. В реальном эксперименте такое излучение реализуется в том случае, когда время измерения лазерного поля  $\tau_{\text{изм}}$  намного превышает или намного меньше характерного времени когерентности  $\tau_K$ . При  $\tau_{\text{изм}} \gg \tau_K$  временные флуктуации поля усредняются, а при  $\tau_{\text{изм}} \ll \tau_K$  поле "не успевает" измениться.

В результате двухэтапного решения системы (2), (3) с начальным условием (5) на основе метода фазового канала [7, 8] получим выражение для модуля пространственной корреляционной функции поля (ПКФП) в приосевом приближении ( $|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2| < \alpha_{\Pi}$ ):

$$|\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau, z)| = I_0 \left( \frac{\alpha_{\Pi}}{\alpha_{\Pi}(\tau, z)} \right)^2 \exp \left[ - \frac{\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2}{2\alpha_{\Pi}^2(\tau, z)} - \frac{\tau^2}{\tau_K^2} - \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}{r_K^2(\tau, z)} - \alpha z \right], \quad (7)$$

где ширина пучка

$$\alpha_{\Pi}(\tau, z) = \alpha_{\Pi} \left\{ \left[ 1 + \frac{h(\alpha z)}{2} \frac{z^2}{L_{\text{НЛ}}^2(\tau)} \right]^2 + \frac{z^2}{L_{\text{дФ}}^2} + 2N \frac{z^2}{L_{\text{дФ}}^2} + Nh(\alpha z) \frac{z^4}{L_{\text{НЛ}}^4(\tau)} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

и радиус корреляции

$$r_K(\tau, z) = \left\{ \left[ 1 + \frac{h(\alpha z)}{2} \frac{z^2}{L_{\text{НЛ}}^2(\tau)} \right]^2 \left[ 1 + [h^2(\alpha z) z^2 L_{\text{дФ}}^2] / [2L_{\text{НЛ}}^4(\tau)] \right]^{-1} + \frac{z^2}{L_{\text{дФ}}^2} + 2N \frac{z^2}{L_{\text{дФ}}^2} \right\}^{1/2} r_K \quad (9)$$

являются функциями продольной координаты  $z$  и времени  $\tau$  по длительности импульса. В (8) и (9)  $N = (\alpha_{\Pi} / r_K)^2$  - число начальных пространственных неоднородностей в сечении пучка и  $h(\alpha z) = (1 - e^{-\alpha z}) / \alpha z$ .

Анализ достаточно сложных формул (8) и (9) дает возможность выделить четыре основных фактора [7, 8], влияющих на преобразование средних пространственных масштабов при совместном действии эффектов дифракции и нелинейности: это дифракционное когерентное и

некогерентное уширение пучка и увеличение его радиуса корреляции на характерных расстояниях  $L_{дф}$  и  $L_{дф}/\sqrt{2N}$ , когерентная тепловая дефокусировка пучка и увеличение его радиуса корреляции (член  $h(\alpha z) z^2/2L_{нл}^2(\tau)$ ), и, наконец, нелинейный некогерентный эффект, приводящий к уширению пучка и уменьшению его радиуса корреляции, всегда независимы от знака нелинейности. Наличие когерентного дифракционного и нелинейного эффектов связано со средней пространственной огибающей пучка  $f(\vec{r}) = \exp(-\vec{r}^2/2\alpha_{п}^2)$ . Что касается некогерентных эффектов, то они проявляются за счет пространственных флуктуаций лазерного поля.

Остановимся подробно на нелинейных эффектах. В любом сечении пучка с продольной координатой  $z$  и в момент времени  $\tau$  возмущение показателя преломления среды можно представить в виде  $n_{нл} = \langle n_{нл} \rangle + \tilde{n}_{нл}$ , где  $\langle n_{нл} \rangle$  - средняя и  $\tilde{n}_{нл}$  - флуктуационная части. Средняя огибающая  $\langle n_{нл} \rangle$  наводится средним значением интенсивности светового поля и способствует проявлению когерентного нелинейного эффекта, который в свою очередь приводит к дефокусировке или фокусировке пучка в зависимости от знака  $n_{т}$  ( $n_{т}$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения). Видимо поэтому нелинейный некогерентный эффект способствует увеличению средней ширины пучка и уменьшению пространственного масштаба корреляции независимо от знака  $n_{т}$ .

Как показывают расчеты, без учета нелинейного некогерентного эффекта, когда фазовая самомодуляция поля происходит в регулярном канале  $\langle n_{нл} \rangle$ , преобразование ширины пучка  $\alpha_{п}$  и радиуса корреляции  $r_{к}$  происходит одинаковым образом. По этой причине число пространственных неоднородностей по трассе распространения сохраняется:  $N(z) = (\alpha_{п} // r_{к})^2 = \text{const}$ . Учет наведенных флуктуаций показателя преломления  $\tilde{n}_{нл}$  приводит к некогерентному нелинейно дифракционному преобразованию масштабов пучка (последний член в (8) и знаменатель первого члена в (9)). При этом изменение приведенного радиуса корреляции  $r_{к}(\tau, z)/r_{к}$  за счет нелинейных эффектов происходит независимо от  $N$ .

В результате совместного действия всех четырех эффектов в дефокусирующей среде ( $n_{т} < 0$ ) ширина пучка всегда увеличивается, при этом уширение некогерентного пучка ( $N > 0$ ) происходит на более коротких трассах, чем уширение регулярного пучка ( $N = 0$ ). На дефокусировку регулярного пучка влияют только два эффекта (см. (8) и (9) при  $N = 0$ ): когерентные дифракционный и нелинейный эффекты, которые проявляются на характерных длинах  $L_{дф}$  и  $L_{нл}(\tau)h^{-1/2}$ . К более быстрому уширению частично когерентного пучка приводят еще два дополнительных эффекта: некогерентный дифракционный и некогерентный нелинейный (см. (8) и (9) при  $N > 0$ ), которые проявляются на более коротких длинах  $L_{дф}(2N)^{-1/2}$  и  $L_{нл}(\tau)h^{-1/2}N^{-1/2}$ . Например, в атмосфере при критической мощности, когда  $L_{дф} = L_{нл}(\tau)$ , на расстоянии  $z \sim L_{нл}(\tau)$  ширина некогерентного пучка в центральной части излучения ( $\tau = 0$ ) при  $N = 1$  уже в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем ширина когерентного пучка.

На рис.1 (см. на вклейке) изображены графики зависимости

приведенной ширины пучка  $\alpha'_\Pi = \alpha_\Pi(\tau=0, z)/\alpha_\Pi$  от приведенной координаты  $z' = z/L_{\text{дф}}$  для  $L_{\text{нл}}(0) = L_{\text{дф}}$  в атмосфере при  $N=0(1), 1(2), 5(3), 10(4)$ .

Характер изменения ширины пучка  $\alpha_\Pi$  существенно меняется в зависимости от коэффициента затухания  $\alpha$ . В атмосфере  $\alpha \sim 10^{-5} \text{ м}^{-1}$  и длина затухания  $L_\alpha \sim 100$  км, поэтому на дооблачных трассах протяженностью порядка  $1 + 10$  км затуханием можно пренебречь и  $h(\alpha z) \approx 1$ . Несколько иначе обстоит дело при распространении пучков в жидкости, где имеет место сильное затухание и на характерных трассах  $z \sim L_{\text{дф}}, L_{\text{нл}}$  функция  $h(\alpha z) \approx L_\alpha/z$ . На рис. 2 показана зависимость  $\alpha'_\Pi$  от  $z'$  в случае слабого (пунктир) и сильного (сплошные линии,  $L_\alpha = 0, 1L_{\text{дф}}$ ) затухания для  $N = 5$  при  $L_{\text{нл}}(0)/L_{\text{дф}} = 1(1), 0,5(2), 0,1(3)$ .

Сложным образом ведет себя радиус корреляции  $r_K(\tau, z)$ . В результате действия всех четырех эффектов  $r_K$  может как увеличиваться, так и уменьшаться. В закритическом режиме, когда  $L_{\text{нл}}(\tau) < L_{\text{дф}}$ , радиус корреляции на начальной трассе  $z < L_{\text{нл}}(\tau)$  практически всегда уменьшается. В среде со слабым затуханием такое уменьшение происходит монотонно по трассе  $z < L_{\text{нл}}(\tau)$ , а при сильном затухании только до расстояния  $z \sim L_\alpha L_{\text{дф}}^2 / NL_{\text{нл}}^2(\tau)$ ; далее, за счет ослабления нелинейных эффектов, дифракция начинает доминировать и радиус корреляции растет. На рис. 3 приведена динамика изменения приведенного радиуса корреляции  $r'_K = r_K(0, z)/r_K$  от  $z'$  в среде со слабым (пунктир) и с сильным (сплошные линии,  $L_\alpha = 0, 1L_{\text{дф}}$ ) затуханием для  $N = 1$  при  $L_{\text{нл}}(0)/L_{\text{дф}} = 0,3(1), 0,1(2)$ . Заметим, что ранее проведенное экспериментальное исследование [9] стационарной тепловой самодефокусировки частично когерентных в пространстве лазерных пучков также показало немонотонное поведение радиуса корреляции.

Нетрудно видеть из (9), что радиус корреляции также меняется немонотонно по длительности импульса. В передней части импульса ( $\tau < \tau^*$ ) с ростом  $\tau$  падает, а далее ( $\tau > \tau^*$ ) начинает расти. Для импульсов с прямоугольной огибающей ( $f(\tau) = 1, 0 < \tau < \tau_0$ ) из условия минимума функции  $r_K(\tau, z)$  по  $\tau$  нетрудно найти значение для  $\tau^*$ , где реализуется минимальное значение радиуса корреляции:

$$\tau^* = \frac{2\alpha_\Pi^2 |n_T| \alpha I_0}{h(\alpha z) \rho c n_0 (2L_{\text{дф}}^2 - z^2)} \quad (10)$$

Немонотонное поведение  $r_K$  по длительности импульса вызвано конкуренцией дифракции, нелинейного когерентного и некогерентного эффектов. Нелинейный когерентный эффект совместно с дифракцией способствует увеличению  $r_K$ , а некогерентный - уменьшению. При  $\tau < \tau^*$  некогерентный нелинейный эффект превалирует над когерентным нелинейным и дифракционным эффектами, поэтому радиус корреляции уменьшается. В области же  $\tau > \tau^*$  доминирующее действие когерентного нелинейного и дифракционного эффектов приводит к росту  $r_K$ . Заметим, что такое немонотонное поведение радиуса корреляции по длительности импульса аналогично также немонотонному изменению  $r_K$  по  $z$ .

Немонотонное поведение  $r_K$  по  $z$  и по  $\tau$  тесно взаимосвязано. С ростом  $z$  в области  $z < z^*$ , где происходит уменьшение  $r_K$  по  $z$ ,



увеличивается время  $\tau^*$ , в течение которого радиус корреляции падает по длительности импульса. На трассе  $z > z^*$ , где наблюдается увеличение  $r_K$  с распространением, время  $\tau^*$  будет постепенно падать. Численный эксперимент [1] также показал уменьшение  $\tau^*$  с ростом  $z$  в области  $z > L_{дф}$ , где должно наблюдаться увеличение  $r_K$  с распространением.

В заключение отметим, что если на входе в нелинейную среду лазерное поле случайно модулировано во времени  $A_0(\vec{r}, \tau) = \sqrt{I_0} \xi(\tau) f(r, \tau)$  ( $\xi(\tau)$  - случайный процесс во времени  $\tau$ ), то при нестационарном тепловом самовоздействии время когерентности  $\tau_K$  даже в бездисперсионном режиме будет сложным образом меняться по длительности импульса. Однако очевидно, что в областях  $\tau < \tau_K$  и  $\tau > \tau_K$  наведенный температурный канал можно считать регулярным и временная когерентность с распространением импульса по  $z$  будет сохраняться. В области же  $\tau \sim \tau_K$  в температурном канале присутствуют временные флуктуации, которые способствуют проявлению нелинейного некогерентного эффекта, приводящего к уменьшению  $\tau_K$  с распространением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабиченко С. М., Кандидов В. П. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. С. 1372.
2. Агровский Б. С., Воробьев В. В. и др. // Квантовая электроника. 1980. Т. 7. С. 545.
3. Кандидов В. П., Леденев В. И. // Квантовая электроника. 1981. Т. 8. С. 873.
4. Кандидов В. П., Шленов С. А. // Тезисы докл. VI Всесоюзного симпозиума по распространению излучения в атмосфере. - Томск, 1981. Ч. 3. С. 199.
5. Мякинин В. А., Тихонова Н. С. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. С. 1074.
6. Бабиченко С. М., Кандидов В. П. и др. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. С. 2183.
7. Алешкевич В. А., Кожоридзе Г. Д., Матвеев А. Н. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. С. 829.
8. Алешкевич В. А., Кожоридзе Г. Д., Матвеев А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 7. С. 816.
9. Чиркин А. С., Юсубов Ф. М. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. С. 1833.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
2 января 1990 г.

#### NON-STATIONARY THERMAL SELF-ACTION OF PARTIALLY COHERENT LASER RADIATION

*V. A. Aleshkevich, G. D. Kozhoridse, A. N. Matveev, M. V. Shamonin*

The non-stationary thermal self-action of laser radiation with limited spatial coherency has been investigated by analytical nonlinear phase channel method. The main effects, connected with random field modulation, have been emphasized. The results are in a good agreement with lab and numerical experiments data obtained. The nonmonotonous behaviour of correlation radius along pulse length is explained.

УДК 534.015; 537.86:519

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ  
У ПОРОГА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОСА**

*А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов*

Исследуются мультистабильные состояния диссипативных решеточных систем у порога возникновения динамического хаоса. Развита классификация возможных пространственных структур, рассмотрены закономерности их сосуществования и формирования.

1. Введение. Исследование решеточных моделей пространственно-развитых систем, построенных из элементов, демонстрирующих сложную динамику и переход к хаосу, позволило пролить свет на многие принципиальные вопросы нелинейной физики (гидродинамическая турбулентность, хаос в системах радиофизики и электроники, нелинейной оптики и др.) [1-4]. С другой стороны, решеточные системы из элементов со сложной динамикой могут создаваться искусственно, например, в радиотехнике или оптике с целью реализации устройств с новыми функциональными возможностями. Как показывает анализ, одним из важных свойств этих систем является то, что вблизи порога возникновения хаоса они демонстрируют огромное многообразие устойчивых состояний, различающихся пространственной структурой. Наличие такой мультистабильности делает системы указанного класса перспективными с точки зрения приложений в целях хранения и обработки информации.

Наиболее простой как с точки зрения динамики, так и с точки зрения практической реализации является решеточная система, составленная из элементов, демонстрирующих переход к хаосу через бифуркации удвоения периода, с диссипативной связью между соседними элементами. В физических приложениях это может быть, например, цепочка нелинейных колебательных контуров под внешним периодическим воздействием. Для описания динамических процессов в данном классе решеточных систем может быть использована универсальная модель

$$u_{n+1,m} = 1 - \lambda[u_{n,m}^2 + \epsilon(u_{n,m-1}^2 - 2u_{n,m}^2 + u_{n,m+1}^2)]. \quad (1)$$

Здесь  $u_{n,m}$  - значение динамической переменной в  $m$ -м пространственном узле решетки в  $n$ -й момент дискретного времени,  $\lambda$  - параметр, управляющий переходом к хаосу,  $\epsilon$  - параметр связи между соседними подсистемами. Такая модель предложена независимо в работах [1, 5]. Численные расчеты, описанные в [1], продемонстрировали возможность реализации в данной модели доменов, число и размер которых зависят от начальных условий. В работах [5, 6] в рамках ренормгруппового анализа обоснована универсальность модели (1), а также вскрыты скейлинговые закономерности для пространственных структур, формирующихся на пути к хаосу. Настоящая статья посвящена обсуждению взаимосвязи между этими результатами и имеет целью классификацию и дальнейшее изучение пространственных структур, закономерностей их образования и сосуществования.

**2. Классификация пространственных структур.** В основу классификации пространственных структур в диссипативной среде оказывается возможным положить типы структур, существующих при выключенной связи между пространственными элементами среды (ячейками решетки). Каждая ячейка - это система, демонстрирующая при увеличении параметра  $\lambda$  бифуркации удвоения периода. Выберем сначала  $\lambda$  так, чтобы реализовался цикл периода 2. Тогда каждая ячейка может совершать движение в одной из двух фаз:  $u_1, u_2, u_1, \dots$  или  $u_2, u_1, u_2, \dots$ . В общем случае среда будет представлять собой совокупность доменов - областей, в пределах которых ячейки колеблются в одной фазе. Будем называть их доменами первого порядка.

Пусть теперь параметр  $\lambda$  таков, что при выключенной связи реализуется цикл периода 4. Элементы цикла  $u_1, u_2, u_3, u_4$  образуют два кластера, о которых будем говорить как о кластерах первого уровня:

$$\underbrace{u_3 \quad u_1}_{\text{два кластера первого уровня}} \quad \underbrace{u_4 \quad u_2}$$

При этом в один кластер объединяются элементы, ближайшие друг к другу по величине. Для областей среды, в которых мгновенные состояния ячеек относятся к одному и тому же кластеру, сохраним термин домены первого порядка, а области, внутри которых состояния совпадают, назовем доменами второго порядка.

Перейдем теперь к циклу периода 8. Его структура представляется так:

два кластера первого уровня

$$\underbrace{u_3 \quad u_7} \quad \underbrace{u_5 \quad u_1} \quad \underbrace{u_4 \quad u_8} \quad \underbrace{u_6 \quad u_2}$$

четыре кластера второго уровня

Домены первого и второго порядка определим теперь как области среды, где состояния ячеек попадают в один кластер соответственно первого или второго уровня, а домены третьего порядка - как области, где состояния совпадают.

При дальнейших удвоениях периода принцип классификации сохраняется. Для цикла периода  $2^p$  элементы  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2^p}$  распределены по кластерам уровней  $i = 1, \dots, p-1$ . Имеется  $2^i$  кластеров  $i$ -го уровня. Каждый такой кластер содержит элементы цикла с номерами, отличающимися на  $2^{i-1}$ . Домены, внутри которых состояния ячеек среды относятся к одному кластеру  $i$ -го уровня, - это домены  $i$ -го порядка.

В критической точке  $\lambda_c = 1,401155$  аттрактор индивидуального отображения принимает вид канторова множества, а в протяженной среде могут быть реализованы домены произвольного порядка.

При включении диссипативной связи между ячейками среды возможность существования доменных структур сохраняется, но накладываются ограничения на минимальный пространственный размер доменов, тем более сильные, чем выше порядок доменов.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведен пример диаграммы координата - амплитуда, полученной в численном эксперименте с модельной системой (1) при  $\varepsilon = 1/3$  со случайными начальными условиями и с граничными условиями типа свободных концов

$$u_{n,0} = u_{n,-1}, \quad u_{n,L} = u_{n,L+1}, \quad (2)$$

обеспечивающими симметричное продолжение решения влево и вправо за пределы рассматриваемого интервала. На диаграмме по горизонтальной оси отложена пространственная координата  $m$ , а по вертикали — значения динамической переменной  $u$ , принимаемые в различные моменты времени. Здесь можно видеть семь доменов первого порядка. Внутри самого протяженного из них имеется два домена второго порядка, один из которых, в свою очередь, содержит два домена третьего порядка.

В закритической области параметра  $\lambda$  в точечной системе наблюдается, как известно, обратная последовательность слияния полос аттрактора. При этом в среде последовательно аннулируется возможность существования доменов сначала высокого, а затем все более низкого порядка.

3. Скейлинг пространственных структур. Исходя из развитого в работах [3-6] ренормгруппового анализа, можно утверждать, что рассматриваемые пространственные структуры должны обладать определенными свойствами подобия или скейлинга. В частности, структура доменной стенки, разделяющей два домена порядка  $p$ , должна приобретать при больших  $p$  универсальный вид, а ширина ее увеличиваться пропорционально  $2^{p/2}$ . Грубо это можно усмотреть уже из рис. 1, сравнивая конфигурацию присутствующих там доменных стенок различного порядка. Специальные численные расчеты позволяют подтвердить данное свойство с высокой точностью. Для этого задаются начальные условия, из которых возникает конфигурация, имеющая в центре рассматриваемого участка решетки доменную стенку порядка  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Выбирая значения параметра  $\lambda$  по правилу

$$\lambda_p = \lambda_c + (\lambda_{p-1} - \lambda_c) / \delta, \quad (3)$$

где  $\delta = 4,6692$ , сопоставляем для разных  $p$  конфигурации, установившиеся после достаточно большого числа предварительных итераций. Оказывается, что, будучи представлены в скейлинговых переменных  $m \cdot 2^{-p/2}$ ,  $u \cdot \alpha^p$ ,  $\alpha = -2,5029$ , они хорошо совпадают уже при  $p \geq 2$ .

Свойство скейлинга позволяет также предложить оценочное соотношение, определяющее ограничение на размер домена порядка  $p$ :  $l \geq 2^{p/2} \epsilon^{1/2}$ .

Численные расчеты показывают, что если в среде образована доменная структура, то динамика внутри каждого домена в высокой степени независима от динамики внутри других доменов. При этом характер динамики внутри доменов определяется двумя параметрами:  $\lambda$  и размером домена  $L$ . Для однодоменных состояний конечного участка среды это утверждение было высказано и проверено с высокой точностью в работах [3,5]. Оказывается, что вид карты динамических режимов на плоскости параметров  $(L, \lambda)$  является универсальным и не зависит от конкретного выбора модели и типа локальных неоднородностей на концах системы; в частности, это могут быть и доменные стенки. Для доменов высших порядков карта динамических режимов получается преобразованием подобия с пересчетом масштабов по вертикальной оси в  $\delta^{p-1}$  раз и по горизонтальной оси в  $2^{-(p-1)/2}$  раз.

Согласно [3,5], переход к хаосу внутри домена при увеличении параметра  $\lambda$  происходит через последовательность бифуркаций удвоения временного периода. При этом бифуркационные значения параметра  $\lambda$  возрастают при уменьшении размера домена.

Скейлинговые свойства присущи и хаотическим режимам динамики среды. Верхние диаграммы на рис. 2 демонстрируют пространственно временной хаос при значениях параметра, отвечающих слиянию полос в

точечной системе:  $\lambda = 2$  и  $\lambda = 1,5437$ . Начальным условием служило почти однородное состояние с малыми случайными возмущениями. На каждой картинке приводятся конфигурации соответственно для 6 и 12 последовательных моментов времени после достаточно большого числа предварительных итераций, чтобы режим установился в статистическом смысле. Рассматриваемые динамические режимы должны быть подобными с точки зрения их статистических характеристик: по правилу скейлинга характерный пространственный масштаб во втором случае должен возрасти в  $2^{1/2}$  раза, а характерный масштаб изменения динамической переменной уменьшиться в  $\alpha$  раз. На "глазомерном" уровне это подтверждается рассматриваемыми диаграммами.

Один из возможных способов количественной проверки скейлинга хаотических состояний основан на сопоставлении ляпуновских показателей при значениях параметра  $\lambda$ , связанных по правилу (3). Например, наибольший ляпуновский показатель в системе достаточно большой длины должен вести себя как  $\Lambda \sim c2^p$ . В табл. 1 представлены результаты расчета этого показателя для модели (1) при  $\epsilon = 1/3$  с граничными условиями (2). Длина системы  $L = 60$ , значения параметра  $\lambda$  соответствуют точкам слияния полос аттрактора индивидуального отображения, начальные условия - почти однородные состояния с малым шумовым возмущением. После достаточно большого числа предварительных итераций для каждого значения  $\lambda_p$  производилось семикратное вычисление наибольшего ляпуновского показателя. Каждый раз производилось  $N_p$  совместных итераций уравнения (3) и соответствующего уравнения в вариациях. Полученные данные обрабатывались по стандартной методике и определялись средние значения  $\Lambda$  и 95-процентные доверительные интервалы, приведенные в таблице. Сравнивая величины  $\Lambda 2^p$  в четвертом столбце таблицы, можно видеть, что они согласуются в пределах точности оценки.

В работе [7] были подтверждены численно скейлинговые свойства пространственной корреляционной функции и пространственного спектра хаотических состояний, реализующихся в точках слияния полос  $\lambda_p$ .

4. Образование пространственных структур при мгновенном переключении управляющего параметра. Показанные на рис. 2 сверху состояния не содержат перепадов между различными полосами аттрактора, т.е. являются однородными. В них, однако, благодаря хаосу непрерывно возникают и исчезают пространственные структуры с определенным характерным пространственным масштабом - радиусом корреляции  $r_{хар}$  и определенной характерной амплитудой  $u_{хар}$ . Согласно результатам ренормгруппового анализа [3] эти величины оцениваются как

$$r_{хар} \sim (\lambda - \lambda_c)^{-1 \log 2 / 2 \log \delta}, \quad u_{хар} \sim (\lambda - \lambda_c)^{\log |a| / \log \delta}.$$

Таблица 1  
Наибольший ляпуновский показатель  $\Lambda$  в пространственно протяженной системе (1)

$p$	$\lambda_p$	$N_p$	$\Lambda$	$\Lambda \cdot 2^p$
0	2	480	0,387 ± 0,020	0,387 ± 0,020
1	1,543689	960	0,202 ± 0,005	0,404 ± 0,010
2	1,430357	1920	0,0997 ± 0,0024	0,399 ± 0,010
3	1,407405	2560	0,0519 ± 0,0016	0,415 ± 0,013
4	1,4024922	5120	0,0256 ± 0,0009	0,410 ± 0,015

Предположим теперь, что мы мгновенно переключаем параметр  $\lambda$  из закрíticoй в докритическую область. В результате в среде может возникнуть доменная структура. При этом если переключение

осуществляется из однодоменного состояния, отвечающего  $2^p$ -полосному аттрактору, то могут возникнуть домены порядка не меньше  $p + 1$ . Характерный пространственный масштаб этих доменов определяется радиусом корреляции исходного состояния, и тем больше, чем оно ближе к критической точке.

Нижние диаграммы на рис. 2 иллюстрируют процесс формирования доменных структур при мгновенном переключении параметра от 2 до 1 (а) и от 1,5437 до 1,3106 (б). В рассмотренных примерах возникают пространственные структуры, содержащие, соответственно, семь доменов первого порядка (а) и четыре домена второго порядка (б) различной протяженности. В других реализациях возникали иные конфигурации доменных структур.

Мы полагаем, что рассмотренный механизм формирования пространственных структур представляет интерес, во-первых, как способ приготовления, например, в эксперименте, различных пространственных структур в отсутствие контроля начальных условий, во-вторых, как метод своего рода мгновенного замораживания хаотической структуры для изучения пространственных статистических свойств, в-третьих, как практически реализуемый способ приготовления случайных состояний (своего рода датчик случайных чисел).

Исследованы и продемонстрированы в численном эксперименте основные свойства пространственных структур, реализующихся у порога возникновения хаоса в одномерной решеточной модели среды, построенной из систем Фейгенбаума. Дана классификация этих структур и рассмотрены закономерности их возникновения и сосуществования, в том числе скейлинг доменных стенок. Качественно проиллюстрирован скейлинг хаотических состояний среды в закритической области, изучен эффект формирования доменных структур при мгновенном переключении управляющего параметра и указаны возможности его использования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kaneko K. // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. N 3. P. 480.
2. Анищенко В. С., Арансон И. С. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. N 5. С. 1120.
3. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 3. С. 308.
4. Ikeda K., Matsumoto K. // Physica. 1987. V. D29. N 1-2. P.223.
5. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 11. С.1364.
6. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 8. С.888.
7. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. In: Nonlinear World. Proc. IV. Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. - Kiev, Naukova Dumka. 1989. V. 2. P.383.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
15 сентября 1989 г.

#### SPATIAL PATTERS IN DISSIPATIVE MEDIA NEAR ONSET OF CHAOS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov

The multistability of dissipative lattice systems is investigated near the onset of chaos. The classification of different spatial patterns is developed and laws of its coexistence and formation are considered. Scaling properties of patterns are illustrated by a number of spatial-temporal diagrams.

УДК 621.371; 551.501.8

## О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ К РАСЧЕТУ ИЗЛУЧЕНИЯ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. В. Кузьмин, В. Д. Райзер

Предложена и реализована феноменологическая модель для расчета электродинамических и излучательных характеристик мелкомасштабной статистически неровной поверхности. Используются элементы теории выбросов случайного поля, что позволяет достаточно просто найти эффективные параметры переходного слоя по заданным характеристикам случайной поверхности. Рассмотрен численный пример, иллюстрирующий основные зависимости излучения гауссовой поверхности с широким спектром неровностей. Ограничений на крутизну неровностей не накладывается.

При решении практических задач о распространении электромагнитных волн через шероховатую (статистически неровную) поверхность исходят, как правило, из хорошо разработанных асимптотических методов теории дифракции. Так, известны методы геометрической и физической оптики, методы возмущений, различные численные схемы [1-3]. Однако решение дифракционных задач наталкивается на значительные трудности, когда речь идет о частых  $k_0 \ll K$  и крутых  $Ka \geq 1$  неровностях ( $K = 2\pi/\Lambda$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ;  $\Lambda$  и  $a$  - их горизонтальный и вертикальный размеры,  $\lambda$  - длина радиоволны). При таких условиях импедансные приближения не всегда оправданы [1,4], но можно воспользоваться более универсальным феноменологическим (или квазистатическим) подходом [5,6]. Он заключается в введении переходного слоя с эффективными параметрами, моделирующими шероховатую границу раздела сред.

Простейшие квазистатические модели шероховатой поверхности в радиодиапазоне были рассмотрены в [7-9]. Они касались одномерных (цилиндрических) детерминированных и случайных поверхностей. Для расчета эффективных параметров переходного слоя использовались формулы макроскопической электродинамики двухфазных систем. Настоящая работа посвящена развитию этой теории для статистически неровной поверхности с непрерывным двумерным спектром мелкомасштабных возмущений. Существенным элементом рассматриваемой ниже модели является использование положений теории выбросов случайного поля, что позволяет избежать трудностей при решении соответствующей краевой задачи на реализациях случайной поверхности и провести необходимые статистические операции для ансамбля макропараметров. В качестве примера проведен расчет теплового излучения водной поверхности с анизотропными возмущениями.

Эффективные параметры. Пусть задано стационарное и однородное в пространстве поле возмущений  $z = \xi(x, y)$  с корреляционной функцией  $B(r_2 - r_1) = B(\Delta x, \Delta y)$  или спектральной плотностью

$$S(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta x, \Delta y) \exp[-i(K_x \Delta x + K_y \Delta y)] d\Delta x d\Delta y.$$

В рамках вероятностного макроскопического подхода шероховатая поверхность интерпретируется как реализация случайного поля  $\xi(x, y)$ ,

ограниченная область  $x, y \in [0, T]$ . Граница раздела двух сред моделируется сплошным переходным слоем с эффективным профилем диэлектрической проницаемости  $\epsilon_f(z)$  (аналогично рис. 1 [9]).

Глубинный профиль  $\epsilon_f(z)$  должен описывать геометрические и статистические особенности поверхности; его нахождение составляет основную задачу макроскопической теории шероховатых поверхностей. Переходной слой охватывает границу раздела двух сред и является двухфазным. Обозначим через  $c$  величину объемной концентрации подстилающей среды. Именно этот параметр, точнее его профиль  $c(z)$ , отражает распределение фаз в слое, которое зависит от геометрии поверхности. Зная  $c(z)$ , по формулам макроскопической электродинамики можно найти эффективный профиль  $\epsilon_f(z)$  и затем решить задачу об отражении и излучении неоднородного полупространства. В силу случайности поля  $\xi(x, y)$  величины  $c$  и  $\epsilon_f$  являются функционалами этого поля.

Вывод выражения для  $\epsilon_f$  основан на решении материальных уравнений Максвелла, одно из которых связывает электрическую индукцию  $\vec{D}$  и напряженность электрического поля  $\vec{E}$  в линейной диэлектрической среде [10]:

$$\langle \vec{D} \rangle = \epsilon_f \langle \vec{E} \rangle.$$

В квазистатическом приближении это уравнение можно разрешить тривиальным образом:

$$\epsilon_f = \frac{(1-c)\epsilon_1 E_1 + c\epsilon_2 E_2}{(1-c)E_1 + cE_2} = \frac{(1-c)\epsilon_1 + c\epsilon_2 q}{1 - c + cq}, \quad (1)$$

$q = E_2/E_1$ . Поля  $E_1$  и  $E_2$  связаны двусторонними граничными условиями на поверхности раздела  $z = \xi(x, y)$  равенством нормальных компонент вектора индукции и тангенциальных компонент электрического поля ( $\epsilon_{1,2} \neq \infty$ ):

$$(\vec{n}, \epsilon_1 \vec{E}_1) = (\vec{n}, \epsilon_2 \vec{E}_2), \quad [\vec{n}, \vec{E}_1] = [\vec{n}, \vec{E}_2], \quad (2)$$

где  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  - диэлектрические проницаемости фаз и  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности

$$\vec{n} = \frac{1}{\gamma_0} \left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right\}, \quad \gamma_0 = (1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}. \quad (3)$$

Раскрывая (2), (3), получим следующую систему уравнений для компонент полей:

$$E_{1y} - E_{2y} + (E_{1z} - E_{2z})\gamma_y = 0, \quad (4)$$

$$E_{1x} - E_{2x} + (E_{1z} - E_{2z})\gamma_x = 0,$$

$$-\epsilon_1 E_{1x} \gamma_x - \epsilon_1 E_{1y} \gamma_y + \epsilon_1 E_{1z} = -\epsilon_2 E_{2x} \gamma_x - \epsilon_2 E_{2y} \gamma_y + \epsilon_2 E_{2z}.$$

Решение (4) дает

$$q = \frac{E_2}{E_1} = \left( \frac{E_{2x}^2 + E_{2y}^2 + E_{2z}^2}{E_{1x}^2 + E_{1y}^2 + E_{1z}^2} \right)^{1/2} =$$



$$= \left[ 1 - \frac{(E_{1z} - \gamma_x E_{1x} - \gamma_y E_{1y})^2}{E_{1x}^2 + E_{1y}^2 + E_{1z}^2} \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

В нулевом приближении\* полагаем  $\vec{E}_1 = \vec{E}_0$ . Внешнее поле  $\vec{E}_0$  задается в виде (индексы "1" и "1" - вертикальная и горизонтальная поляризации)

$$\vec{E}_{11} = E_0 \{-\cos\theta \cos\varphi, -\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta\}, \quad \vec{E}_{11} = E_0 \{\sin\varphi, -\cos\varphi, 0\}, \quad (6)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  - углы ориентации плоскости падения. После некоторых преобразований получим

$$\epsilon_{f11} = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sum_{n=1}^{\infty} q_{11,n} (1 - q_{11,n})^{n-1} c^n, \quad (7)$$

$$q_{11,n} = (1 - \alpha_{11}^2 \eta^2 \gamma_0^{-2})^{1/2}, \quad \eta^2 = \frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}{\epsilon_2^2},$$

$$\alpha_1 = \sin\theta + \gamma_x \cos\varphi \cos\theta + \gamma_y \sin\varphi \cos\theta,$$

$$\alpha_1 = \gamma_x \cos\varphi - \gamma_y \sin\varphi.$$

Поскольку случайная величина  $\epsilon_f$  является нелинейной функцией случайной величины  $c$ , для дальнейших статистических операций удобно пользоваться разложением (1) в ряд по степеням  $c^n$ . Выделим два частных случая при нормальном падении  $\theta = 0$ .

1) Цилиндрическая поверхность,  $\gamma_y = 0$ ; угловые множители равны

$$q_1(0, \pi/2) = q_1(0, 0) = 1, \quad q_{11}(0, 0) = q_1(0, \pi/2) = [\cos^2 \psi + ((\epsilon_2/\epsilon_1) \sin\psi)^2]^{1/2}, \quad \text{tg}\psi = \gamma_x - \text{уклон поверхности.}$$

Формулы (7) преобразуются в полученные ранее [7].

2) Цилиндрическая регулярная поверхность с прямоугольными выступами,  $\gamma_y = 0$ ,  $\psi = \pi/2$  - этот случай рассмотрен в [8]; тогда получаются известные формулы для эффективной проницаемости слоистого анизотропного диэлектрика в статическом поле:

$$\epsilon_{f11} = (1 - c)\epsilon_1 + c\epsilon_2, \quad \vec{E}_0 \perp \vec{k},$$

$$\frac{1}{\epsilon_{f11}} = \frac{1-c}{\epsilon_1} + \frac{c}{\epsilon_2}, \quad \vec{E}_0 \parallel \vec{k},$$

$\vec{k}$  - волновой вектор поверхностной структуры.

Макропараметры как функционалы случайного поля. Для того, чтобы вычислить среднее значение и дисперсию эффективной диэлектрической проницаемости  $N_{\epsilon}$ ,  $D_{\epsilon}$ , необходимо найти соответствующие моменты случайной величины  $c$ . Это можно сделать на основании положений теории выбросов случайного поля [8-10]. Действительно, разобьем неоднородное полупространство на систему плоскопараллельных однородных слоев, тогда величина  $c(u)$  в элементарном слое толщиной  $\Delta u$  есть отношение суммарного объема всех областей, ограниченных уровнями  $u$  и  $u + \Delta u$ , к полному объему слоя

\*Приближения более высокого порядка обсуждаются в Приложении.

$$c(u) = \frac{V_T(u) - V_T(u+\Delta u)}{\Delta u T^2}. \quad (8)$$

Согласно [11] объем выбросов случайного поля на фиксированный уровень определяется  $Z_0$ -характеристикой:

$$Z_0(u) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T g(x, y, u) dx dy, \quad g(x, y, u) = \begin{cases} 1, & \xi > u \\ 0, & \xi \leq u \end{cases}$$

- индикаторная функция. Следовательно,

$$V_T(u) - V_T(u + \Delta u) = \int_u^\infty Z_0(u_1) du_1 - \int_{u+\Delta u}^\infty Z_0(u_1) du_1 = \int_u^{u+\Delta u} Z_0(u_1) du_1,$$

и в пределе  $\Delta u \rightarrow 0$  получаем

$$c(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} \int_u^{u+\Delta u} Z_0(u_1) du_1 = Z_0(u), \quad (9)$$

причем  $Z_0(u) = Z_0(-u)$ .

Вычислим два первых момента случайной величины  $c$  для однородного гауссова поля с функцией плотности

$$p(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2 [1-\rho^2(\tau)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\xi_1^2 - 2\rho(\tau)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2\sigma_\xi^2 [1-\rho^2(\tau)]}\right\},$$

где  $\xi_1 = \xi(x_1, y_1)$ ,  $\xi_2 = \xi(x_2, y_2)$  и  $\rho(\tau) = \sigma_\xi^{-2} B(\Delta x, \Delta y)$  - пространственный коэффициент корреляции,  $\sigma_\xi^2$  - дисперсия поля. с учетом (9) для первого момента имеем

$$\begin{aligned} M_c = \bar{c} = \bar{Z}_0 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T P\{\xi > u\} dx dy = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T dx dy \int_u^\infty \int_u^\infty p(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma_\xi}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

и для второго момента -

$$\begin{aligned} \overline{c^2} = \overline{Z_0^2} &= \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T P\{\xi_1 > u, \xi_2 > u\} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \\ &= \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \int_u^\infty \int_u^\infty p(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Используя известное разложение [12]  $p(\xi_1, \xi_2, \tau)$  в ряд по степеням  $\rho^n$ ,

$$p(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma_\xi}\right) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma_\xi}\right) \rho^n(\tau),$$

$\Phi^{(n)}(x)$  - производная от интеграла вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

получим

$$\begin{aligned} \overline{c^2} &= [-1 - \Phi(u/\sigma_\xi)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \Phi^{(n)}\left(\frac{u}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \frac{1}{T^4} \times \\ &\times \int_0^T \int_0^T \int_0^T \rho^n(x_2-x_1, y_2-y_1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Следовательно, дисперсия объема выбросов равна

$$D_c = \overline{c^2} - \bar{c}^2 = 4/T^2 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \sigma_\xi^{2n}} \left[ \Phi^{(n)}\left(\frac{u}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \int_0^T \int_0^T \left(1 - \frac{r_1}{T}\right) \left(1 - \frac{r_2}{T}\right) B^n(r_2-r_1) dr_1 dr_2.$$

Если корреляционная функция  $B(r_2-r_1)$  интегрируема в пределах от 0 до  $\infty$ , то для больших  $T$

$$T^2 D_c = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \sigma_\xi^{2n}} \left[ \Phi^{(n)}\left(\frac{u}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B^n(r_2-r_1) dr_1 dr_2. \quad (11)$$

Как видно, дисперсия объема выбросов полностью определяется видом корреляционной функции  $B(r_2-r_1)$  случайного поля возвышений  $\xi(x, y)$  и значением уровня  $u$ . Наличие факториального множителя в (11) приводит к быстрой сходимости ряда.

Ограничиваясь для простоты первыми двумя членами ряда (7), найдем среднее и дисперсию случайной величины эффективной проницаемости  $\epsilon_f$  на уровне  $z = u$ :

$$M_{\epsilon_f}(z) = \bar{\epsilon}_f = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) M_q M_c + (\epsilon_2 - \epsilon_1) M_q (1 - M_q) [M_c^2(z) + D_c(z)]; \quad (12)$$

$$D_{\epsilon_f}(z) = \overline{\epsilon_f^2} - \bar{\epsilon}_f^2 = (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 [D_q D_c(z) + M_c^2(z) D_q + M_q^2 D_c(z)], \quad (13)$$

где  $M_q$  и  $D_q$  - среднее и дисперсия случайной величины  $q(\gamma_x, \gamma_y)$  (при усреднении предполагается статистическая независимость  $q$  и  $c$ ). Таким образом, получаются непрерывные по  $z$  профили  $M_{\epsilon_f}$  и  $D_{\epsilon_f}$ , которые необходимы для решения задач распространения электромагнитного излучения тем или иным методом (в зависимости от величины относительных флуктуаций  $(\epsilon_f^2 - \bar{\epsilon}_f^2)^{1/2} / \bar{\epsilon}_f$ .

Приложение к расчету СВЧ излучения водной поверхности. В радиогидрофизических исследованиях представляет интерес оценка различных механизмов излучения поверхности океана. С этой точки зрения макроскопическое приближение возможно использовать для оценки влияния мелкомасштабных случайных возмущений типа коротких капиллярных волн и турбулентной шероховатости, связанной с режимами обтекания поверхности воздушным потоком. Конфигурации профиля возмущений предсказать здесь практически невозможно. Особенно весомым вклад этих составляющих в излучение может быть при

зондировании на волнах дециметрового диапазона, наименее подверженных влиянию атмосферы. В диапазоне  $\lambda \geq 10$  см толщина скин-слоя морской воды превышает характерные масштабы поверхностных возмущений, и вместе с тем последние много меньше длины волны излучения. Эти условия укладываются в рамки применимости указанного приближения.

Для примера рассмотрим излучение поверхности с модельным анизотропным спектром возвышений\*

$$S(k_x, k_y) = \frac{4\lambda\alpha\beta}{(\alpha^2 + k_x^2)^\nu (\beta^2 + k_y^2)^\mu}. \quad (14)$$

При  $\nu = \mu = 1$  ему соответствует экспоненциальная корреляционная функция

$$B(\Delta x, \Delta y) = \lambda \exp(-\alpha|\Delta x| - \beta|\Delta y|). \quad (15)$$

Полная дисперсия поля возвышений  $\delta_\xi^2 = 1/(2\pi)^2 \iint S(k_x, k_y) dk_x dk_y$ . Моменты угловых множителей  $q(\gamma_x, \gamma_y, \theta, \varphi)$ , входящие в формулы (12), (13), равны

$$\overline{q^i} = \iint q^i(\gamma_x, \gamma_y) p(\gamma_x, \gamma_y) d\gamma_x d\gamma_y, \quad i = 1, 2,$$

$$p(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi\Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{m_0\gamma_x - 2m_{11}\gamma_x\gamma_y + m_{20}\gamma_y}{2\Delta}\right), \quad (16)$$

$$\Delta = m_{20} m_{20} - m_{11}^2,$$

где  $p(\gamma_x, \gamma_y)$  - распределение уклонов мелкомасштабной шероховатости, которое будем считать гауссовым. Моменты распределения связаны с двумерным спектром возвышений

$$m_{ij} = \int_{\Delta k_x} \int_{\Delta k_y} S(K_x, K_y) K_x^i K_y^j dK_x dK_y. \quad (17)$$

Таким образом, свойства переходного слоя зависят от моментов спектра  $m_{ij}$ , граничных волновых чисел  $\Delta k_x, \Delta k_y$  и углов ориентации  $\theta, \varphi$ . Далее, используя методику вычисления коэффициентов отражения и излучения многослойной структуры с произвольным комплексным профилем  $\epsilon_f(z)$  [7], определяется яркостная температура поверхности  $T_\lambda(\theta, \varphi)$ .

Следует отметить, что такой метод решения задачи неявно учитывает спектральные характеристики излучения, так как ответ зависит от "дифракционного" параметра  $h/\lambda$ ,  $h$  - общая толщина переходного слоя. Последняя определяется в основном нулевым моментом спектра (дисперсией высот  $h \sim \sqrt{\delta_\xi^2}$ ).

Проиллюстрируем некоторые результаты численных расчетов.

На рис. 1 (см. на вклейке) показаны спектральные зависимости среднего значения яркостной температуры  $T_\lambda(\lambda)$  при наблюдении в надир  $\theta = 0$  для изотропной поверхности  $\varphi = 0$ . В этом случае поляризационные различия отсутствуют. Кривые построены для нескольких значений  $\lambda$  при  $\alpha = \beta = 0,01$  и  $\nu = \mu = 1$ ; расчетные

\*При  $\alpha, \beta \ll K_x, K_y$  этот спектр приводится к виду

$$S(K) \sim K^{-2(\nu+\mu-1/2)}, \quad K = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2},$$

который близок к пространственному спектру высокочастотных компонент волнения.

дисперсии высот  $\delta_{\xi}^2 = m_{\infty} \sim 5(10^{-3} + 10^{-2})$ . По критерию  $k_0 \delta_{\xi} \ll 1$  условия применимости модели заведомо реализуются в диапазоне  $\lambda > 6$  см. На рис. 2 представлены зависимости  $T_{Я||}(\delta_{\xi}^2)$  - сплошная кривая и  $T_{Я\perp}(\delta_{\xi}^2)$  - штриховая на волнах  $\lambda = 1$  и 18 см при тех же параметрах спектра, но различных показателях степени  $\nu = 1$ ,  $\mu = 1,5$  (анизотропный спектр). Как видно, поляризационная анизотропия  $T_{Я||} - T_{Я\perp}$  увеличивается с ростом дисперсии высот, причем на волне  $\lambda = 18$  см она сильнее (углы  $\theta, \varphi = 0$ ).

Важным вопросом в постановке задач о тепловом радиоизлучении поверхности океана является выбор физически обоснованных значений показателей степени в спектрах мелкомасштабного волнения, а также граничного волнового числа, по которому осуществляют низкочастотную отсечку спектра. Так, при использовании теории критических явлений [14] было показано, что эти параметры регулируют интенсивность излучения возмущенной водной поверхности и заметно влияют на радиояркостные контрасты. В нашей модели они не менее существенны. Изменение параметров  $\nu$  и  $\Delta K_{x,y}$  приводят к сравнительно сильным вариациям радиояркостной температуры поверхности. Аналогичное обстоятельство уже отмечалось [9], однако частая модель дает более разумные количественные результаты: реальные значения дисперсий высот приводят к наблюдаемым в экспериментах яркостным контрастам [14]. Это позволяет предполагать, что механизмы "согласования" за счет мелкомасштабной шероховатости вполне возможны.

Угловые зависимости  $T_{Я}(\theta)$  отражают закономерности излучения плоского полупространства с промежуточным между единицей и  $\epsilon_2(\lambda)$  - воды - значением диэлектрической проницаемости. Однако величины  $T_{Я}$  выше, чем в случае гладкой водной поверхности на волнах  $\lambda = 8$  и 18 см [15]. Для азимутальных зависимостей  $T_{Я}(\varphi)$  характерен эффект поляризационной анизотропии, который составляет несколько кельвинов. Этот эффект в дециметровом диапазоне при натуральных самолетных измерениях пока не обнаружен (по крайней мере за счет мелкомасштабной шероховатости).

Завершая обсуждение результатов расчета, можно сказать, что механизмы "согласования" будут работать при больших пятнах усреднения, когда в поле зрения антенны реализуется статистически хорошо обеспеченный ансамбль мелкомасштабных возмущений. Применительно к дециметровому диапазону СВЧ измерений поверхности океана эти условия наблюдаются практически всегда. Известно, что динамические параметры приводного слоя существенно влияют на условия возбуждения мелкомасштабных компонент волнения, их спектральную плотность. Таким образом, в рамках указанной электродинамической модели, по-видимому, удастся через параметризацию спектра возвышений  $S(K_x, K_y)$ , его высокочастотной области связать радиояркостные контрасты с режимами возбуждения короткой капиллярной ряби и турбулентными пульсациями параметров приводного слоя. В этом смысле "дифракционные" модели, настроенные на определенные резонансные компоненты волнения, будут менее эффективными.

**Заключение.** В работе рассмотрена макроскопическая модель гауссовой шероховатой поверхности с мелкомасштабными возмущениями произвольной конфигурации. Входными параметрами модели являются пространственный спектр или корреляционная функция поля возвышений, а выходными - коэффициенты отражения, излучения и яркостная температура среды. С помощью теории выбросов случайного поля

проведен расчет макропараметров шероховатой поверхности. Возможности модели проиллюстрированы на примере СВЧ излучения возмущенной водной поверхности с анизотропным спектром неровностей. Показано, что яркостные характеристики чувствительны к вариациям спектра. Модель может найти применение не только в СВЧ радиометрии, но также в оптике и эллипсометрии шероховатых поверхностей.

Авторы признательны В. П. Носко за обсуждение математических вопросов и В. С. Эткину за критические замечания.

### Приложение

Электродинамическая часть задачи нуждается в некотором пояснении. Действительно, все результаты получены в "простейшем" нулевом приближении, когда поле вблизи границы раздела двух сред и внешнее поле тождественно совпадают  $\vec{E}_1 = \vec{E}_0$ . На самом же деле поле  $\vec{E}_1$  является наведенным и, вообще говоря, равно сумме  $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}^*$ ,  $\vec{E}^*$  - деполяризующее поле. Определение последнего представляет сложную вычислительную задачу и требует решения уравнения Лапласа. Некоторые примеры для шероховатой поверхности рассмотрены в [16,17], однако в них используется поле Лоренца для сферических включений. С другой стороны, соответствующая квазистатическому приближению асимптотика  $k_0 \rightarrow 0$  известных дифракционных решений с нелокальными граничными условиями в интегральной форме [1] приводит к возникновению сингулярных особенностей в функции Грина [6,18]. С учетом этих обстоятельств, а также трудоемкости численного решения уравнения Лапласа (или уравнения Гельмгольца) для случайной трехмерной поверхности и был выбран рассмотренный выше метод.

Между тем вклад деполяризующего поля в излучение можно, на наш взгляд, учесть с помощью следующей итерационной схемы. Предположим, что абсолютное значение поля у границы раздела двух сред  $E_1$  есть сумма падающего и отраженного полей

$$E_1^{(0)} = E_0, \quad (П. 1)$$

$$E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + R_f^{(1)} E_1^{(0)},$$

$$E_1^{(2)} = E_1^{(1)} + R_f^{(2)} E_1^{(1)},$$

.....

$$E_1^{(m+1)} = E_1^{(m)} + R_f^{(m+1)} E_1^{(m)},$$

где  $R_f^{(m+1)}$  - коэффициент отражения Френеля от однородного полупространства с комплексным профилем  $\overline{\varepsilon_f(z)}$ , рассчитанным при подстановке в (12) среднего значения:

$$\overline{q^{(m)}} = \overline{q^{(0)}} \prod_{j=1}^m [1 + R_f^{(j)}]^{-1}, \quad (П. 2)$$

где  $\overline{q^{(0)}}$  отвечает нулевому приближению и определяется по формуле (5). Теперь вопрос сводится к исследованию сходимости  $\overline{q^{(m)}}$  и, соответственно, ее влияния на яркостную температуру системы  $T_{я}$ .

Как показывают специальные расчеты, достаточно пяти-семи итераций для того, чтобы устремить  $q \rightarrow 0$  при  $|\varepsilon_2| \rightarrow \infty$ . Фактически

эти условия реализуются при больших значениях  $|\varepsilon_2| \approx 50+80$ , что полностью отвечает случаю водной поверхности в диапазоне  $\lambda = 8+18$  см [15]. Несмотря на довольно слабую сходимость  $q^{(m)}$  погрешность в определении результирующего значения яркостной температуры при выполнении последовательных итераций невелика. На рис. 3 показаны зависимости  $T_{\text{я}}^{(m)}(|\varepsilon_2|)$  при параметрах модели:  $\lambda = 18$  см;  $\theta=\varphi=0$ ;  $A = 40$ ;  $\nu = \mu=1$ ;  $\alpha = \beta = 0,01$ . В области малых масштабов вариации яркостной температуры за счет последовательного изменения числа итераций не превышают 2К.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. - М.: Наука, 1972.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. - М.: Наука, 1978.
3. Kong J. A., Lin S. L., Chuang S. L. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1984. N 4. P. 377.
4. Брюховецкий А. С., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 11. С. 1400.
5. Рязанов М. И. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 4(10). С. 1281.
6. Слущкий А. Г., Якушкин И. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 2. С. 183.
7. Гершензон В. Е., Райзер В. Ю., Эткин В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 11. С. 1279.
8. Гершензон В. Е., Райзер В. Ю., Эткин В. С. // ДАН СССР. 1982. Т. 263. N 4. С. 959.
9. Гершензон В. Е., Новак Б. Л. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. N 5. С. 587.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982.
11. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. - М.: Мир, 1969.
12. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. - М.: Наука, 1987.
13. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. - М.: Наука, 1975.
14. Ирисов В. Г., Трохимовский Ю. Г., Эткин В. С. // ДАН СССР. 1987. Т. 297. N 3. С. 587.
15. Райзер В. Ю., Шарков Е. А., Эткин В. С. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1975. Т. 11. N 6. С. 652.
16. Chan E. C., Marton J. P. // J. Appl. Phys. 1974. N 11. P. 5004.
17. Nee S. M. F. // Appl. Opt. 1988. N 4. P. 2819.
18. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. - Киев: Наукова думка, 1986.

Институт космических исследований  
АН СССР

Поступила в редакцию  
16 октября 1989 г.,  
после доработки  
17 мая 1990 г.

**APPLICATION OF THE THEORY OF RANDOM FIELD EJECTION TO CALCULATION  
OF THE REUGH SURFACE RADIATION IN QUASI-STATIC APPROXIMATION**

*A. V. Kuz'min, V. Yu. Raizer*

The quasistatics model of statistical rough surface is considered. It's based on some results on the level crossing intervals of Gaussian random processes. The examples of microwave emission from water surface with anizotropic 2D-wavenumber elevation spectrum are presented also.



УДК 621.391.81:536.758

## МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В СПЕКТРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ

В. Т. Сарычев

Предложен алгоритм получения оценок спектра плотности мощности (СПМ) стационарных процессов, использующий больцмановское определение энтропии. Следующее из этого определения выражение энтропии в общем случае отличается от соответствующего выражения, предложенного Шенноном; вскрываются причины расхождения.

В основе многих современных методов спектрального оценивания заложено определение энтропии стационарных процессов, данное Шенноном [1]:

$$H_s = \int_0^{2\pi} \ln G(\omega) d\omega / 2\pi, \quad (1)$$

где  $G(\omega)$  - СПМ; рассматриваются процессы с ограниченной полосой частот, выбором системы единиц эта полоса всегда может быть сведена к интервалу  $(0, 2\pi)$ .

При выводе (1) неявно предполагалось равномерное распределение источников излучения по полосе частот. Совершенно очевидно, что значение энтропии определяется не только способом распределения энергии излучения между источниками, но и каким образом эти источники распределены в частотном интервале. Ниже, определяя функцию  $\rho(\omega)$  - спектр плотности числа источников (СПИ), получается более общее, чем (1), выражение энтропии в виде функционала двух функций: СПМ и СПИ. На основе этого выражения выводится формула СПМ, максимизирующего значения энтропии.

### 1. Оценивание функции распределения стационарного процесса по максимуму энтропии

Стационарный в широком смысле процесс в согласии с теоремой Зинера-Хинчина можно представить системой некоррелирующих между собой осцилляторов, каждый из которых характеризуется двумя параметрами: интенсивностью  $p$  и частотой  $\omega$ ; автокорреляционная функция (АКФ) осциллятора имеет вид  $r(\tau) = p \exp(i\omega\tau)$ . Усредненное по ансамблю состояние такой системы можно описать одночастичной функцией распределения  $f(p, \omega)$ . Величина  $\int f dp d\omega$  равняется среднему числу осцилляторов в фазовом объеме  $dp d\omega$ . Согласно Больцману [2], энтропию можно следующим образом выразить через функцию распределения:

$$H = - \int_0^{\infty} dp \int_0^{2\pi} f(p, \omega) \ln f(p, \omega) d\omega / 2\pi. \quad (2)$$

Как правило, функция распределения непосредственно не измеряется, а информация о системе задается в виде некоторых функционалов этой функции. В данной работе рассматриваются следующие формы функциональной зависимости:

$$\int_0^{\infty} dp \int_0^{2\pi} f(p, \omega) \varphi_{\alpha}(p, \omega) d\omega / 2\pi = E_{\alpha}, \quad (3)$$

где индекс  $\alpha$  может принимать как дискретные, так и непрерывные значения,  $\varphi_{\alpha}(p, \omega)$  и  $E_{\alpha}$  - известные функции и величины.

Из множества функций, удовлетворяющих условиям (3), практический интерес представляют функции, максимизирующие значение энтропии. Поиск таких функций сводится к отысканию безусловного экстремума следующего функционала:

$$\Phi = H + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left( E_{\alpha} - \int_0^{\infty} dp \int_0^{2\pi} f \varphi_{\alpha} d\omega / 2\pi \right). \quad (4)$$

Приравнявая к нулю вариацию  $\delta\Phi/\delta f$ , легко получить выражение для функции распределения в следующем виде:

$$f(p, \omega) = \exp(-1 - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}(p, \omega)), \quad (5)$$

где неопределенные множители Лагранжа  $\lambda_{\alpha}$  находятся из условий (3).

Приведенные выше выкладки представляют общую схему решения вариационной задачи, согласно которой ниже будут рассмотрены более частные случаи.

## 2. Определение энтропии в виде функционала СПИ и СПМ

При описании стационарных в широком смысле процессов вместо функции распределения достаточно использовать лишь два первых момента этой функции по интенсивности: момент нулевого порядка представляется функцией  $\rho(\omega)$ , а момент первого порядка -  $G(\omega)$ . Запись этих моментов в соответствующих выражениям (3) форме имеет вид

$$\int_0^{\infty} dp \int_0^{2\pi} f(p, \omega) \delta(\omega - \omega') d\omega / 2\pi = \rho(\omega'); \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} dp \int_0^{2\pi} f(p, \omega) p \delta(\omega - \omega') d\omega / 2\pi = G(\omega'), \quad (7)$$

где роль индекса  $\alpha$  играет частота  $\omega'$ , а функции  $\varphi_{\alpha}$  имеют соответственно вид

$$\varphi_{\rho, \omega'}(p, \omega) = \delta(\omega - \omega'), \quad \varphi_{G, \omega'}(p, \omega) = p \delta(\omega - \omega').$$

Подставляя эти функции в выражение (5) и производя интегрирование по частоте  $\omega'$ , можно получить

$$f(p, \omega) = \exp(-1 - \lambda_{\rho}(\omega) - \lambda_G(\omega)p). \quad (8)$$

Из условий (6) и (7) следуют выражения для множителей Лагранжа:

$$\lambda_{\rho}(\omega) = \ln(G(\omega)/\rho^2(\omega)) - 1; \quad \lambda_G(\omega) = \rho(\omega)/G(\omega). \quad (9)$$

Окончательно функция распределения принимает вид

$$f(p, \omega) = \rho^2 \exp(-p\rho/G) / G. \quad (10)$$

Проводя интегрирование по интенсивности в выражении (2) с учетом (10), можно представить энтропию в виде следующего

функционала:

$$H = \int_0^{2\pi} \rho (\ln(G/\beta^2) + 1) d\omega/2\pi. \quad (11)$$

Если на СПИ наложить условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} \rho(\omega) d\omega/2\pi = 1, \quad (12)$$

то (11) представляет собой выражение удельной энтропии из расчета на один осциллятор. Это выражение переходит в шенноновское (1) при  $\rho(\omega) = 1$ .

Для выяснения характера поведения СПИ, обеспечивающего максимум значения энтропии, необходимо решить вариационную задачу  $\delta H/\delta\rho = 0$  при соблюдении условий (12). В результате можно получить

$$\rho(\omega) = (G(\omega)/z)^{1/2}, \quad (13)$$

где так называемый статистический интеграл  $z$  определяется выражением

$$z = \int_0^{\infty} dp \int_0^{2\pi} \exp(-p\rho/G) d\omega/2\pi = \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\omega/2\pi \right)^2. \quad (14)$$

С учетом (13) выражение (11) принимает вид

$$H_B = \ln z + 1. \quad (15)$$

Это определение энтропии в дальнейшем называется больцмановским для отличия его от шенноновского определения (1).

Чтобы показать, что экстремум энтропии соответствует максимуму, а не минимуму ее значения, достаточно сравнить  $H_B$  с величиной энтропии, соответствующей любому, отличному от (13), СПИ, например  $\rho(\omega) = 1$  (шенноновская энтропия). Подобное сравнение сводится к доказательству неравенства

$$2 \ln \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\omega/2\pi \geq \int_0^{2\pi} \ln G d\omega/2\pi,$$

справедливость которого устанавливается с помощью теоремы о средних арифметическом и геометрическом [3] при замене интегралов соответствующими суммами Дарбу.

### 3. Определение СПМ по ограниченной последовательности АКФ

**3.1. Задача Берга.** Традиционно при оценке СПМ по ограниченной последовательности АКФ  $R_k$  ( $|k| \leq N$ ) полагалось  $R_k = 0$  при  $|k| > N$ . Берг поломал традицию, потребовав максимизации значения энтропии в форме (1) по неизвестным отсчетам АКФ [4]. В результате он получил следующее выражение для СПМ:

$$G_S(\omega) = \left( \sum_{k=-N}^N a_k \exp(-i\omega k) \right)^{-1}. \quad (16)$$

Значения неопределенных множителей Лагранжа  $a_k$  должны обеспечивать выполнение условий

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\omega k) G(\omega) d\omega/2\pi = R_k, \quad |k| \leq N. \quad (17)$$

В отличие от Берга, выражение (16) можно получить традиционным

способом Лагранжа, вводя функционал

$$\Phi = H_S + \sum_{k=-N}^N \alpha_k \left( R_k^* - \int_0^{2\pi} \exp(-i\omega k) G(\omega) d\omega / 2\pi \right). \quad (18)$$

Из равенства нулю вариации  $\delta\Phi/\delta G$  сразу следует выражение (16).

Хотя до сих пор не предложен строгий метод вычисления неопределенных множителей Лагранжа, идея использовать метод максимальной энтропии (ММЭ) для оценки спектров оказалась революционной. Ценность метода не в том, что он позволяет проводить "сверхразрешение" линий, а в том, что он дает наиболее надежную оценку спектра, поскольку максимум энтропии соответствует состояниям, которые могут быть реализованы наибольшим числом способов (НЧС) [5]. Но как показано в предыдущем разделе, НЧС при использовании шенноновской энтропии носит условный характер, требуя равномерности распределения источников излучения по частоте. Абсолютное НЧС реализуется для состояний, соответствующих максимуму энтропии в форме (15).

Для получения СПМ, максимизирующего энтропию  $H_B$ , достаточно в функционале (16) заменить  $H_S$  на  $H_B$  и приравнять нулю вариацию  $\delta\Phi/\delta G$ . В результате получается следующее выражение для СПМ:

$$G_B(\omega) = \lambda^{-2}(\omega) / z, \quad (19)$$

где

$$\lambda(\omega) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \exp(-i\omega k), \quad z = \int_0^{2\pi} d\omega / 2\pi \lambda(\omega). \quad (20)$$

Чтобы различать формы спектров (16) и (19), первый традиционно называется СПМ по ММЭ, а второй - СПМ по ММБЭ (метод максимальной больцмановской энтропии).

**3.2. Вычисление множителей Лагранжа.** В выражении (17) неизвестные множители Лагранжа входят нелинейным способом под знаком интеграла, что существенно затрудняет их вычисление. Лишь при  $N = 1$  эти множители могут быть точно вычислены непосредственно из условия (17). Во всех остальных случаях используются приближения. Так в методе Берга поиск множителей Лагранжа заменен процедурой Левинсона вычисления коэффициентов линейного предсказания.

Можно предложить итерационную процедуру вычисления неизвестных множителей, используя свойства потенциала  $\Phi$ . Если в выражение (18) подставить СПМ в любой из форм (16) или (19), то функционал превратится в функцию коэффициентов  $\alpha_k$ , обладающую следующими свойствами.

а) Значения множителей Лагранжа, обеспечивающих выполнение условий (17), соответствуют экстремуму  $\Phi$ . Действительно, непосредственным дифференцированием (18) можно убедиться, что для этих значений

$$\delta\Phi / \delta\alpha_k = 0. \quad (21)$$

б) Экстремум  $\Phi$  является минимумом. В результате повторного дифференцирования  $\Phi$  в случае шенноновской энтропии можно получить

$$\delta^2\Phi / \delta\alpha_k \delta\alpha_k^* = \int_0^{2\pi} G^2(\omega) d\omega / 2\pi.$$

Для больцмановской энтропии вторая производная  $\Phi$  имеет вид

$$\partial^2 \Phi / \partial \alpha_k \partial \alpha_k^* = \int_0^{2\pi} \lambda^{-3}(\omega) d\omega / 2\pi z.$$

Это выражение также больше нуля в силу положительной определенности полинома  $\lambda(\omega)$ . Действительно, наличие отрицательных значений у  $\lambda(\omega)$  нарушает интегрируемость функции распределения (10), поскольку при  $p \rightarrow \infty$  в этом случае наблюдается ее экспоненциальный рост.

Учитывая, что экстремум  $\Phi$  является минимумом, для его поиска можно воспользоваться теорией овражных функций. Траектория спуска к экстремуму  $\Phi$  описывается системой дифференциальных уравнений

$$\partial \alpha_k / \partial t = - \partial \Phi / \partial \alpha_k = R_k - R_k^0, \quad (22)$$

где  $R_k^0$  - исходная АКФ, а  $R_k$  - модельная АКФ, значения которой вычисляются по текущим значениям  $\alpha_k$  согласно (17).

#### 4. Примеры оценок СПМ

4.1. Решение задачи Берга ММЭ и ММБЭ при  $N = 1$ . В рассматриваемом случае известны только два члена последовательности АКФ  $R_0$  и  $R_1$ , поэтому СПМ (16) и (19) содержат лишь два неизвестных множителя Лагранжа, которые легко вычисляются с помощью вычетов из условий (17). В результате получаются следующие выражения СПМ:

$$G_S(\omega) = (R_0^2 - R_1 R_1^*) / (R_0 + R_1 R_1^* / R_0 - 2 |R_1| \cos(\omega - \omega_0)); \quad (23)$$

$$G_B(\omega) = (R_0^2 - R_1 R_1^*)^{3/2} / (R_0 - |R_1| \cos(\omega - \omega_0))^2. \quad (24)$$

Положение максимумов у обоих спектров приходится на значение частоты  $\omega_0 = \arctg(\text{Im} R_1 / \text{Re} R_1)$ , а отношение максимальных значений СПМ определяется выражением  $G_{S_m} / G_{B_m} = R_0 / (R_0^2 - R_1 R_1^*)^{1/2}$ . Несмотря на большую степень тригонометрического полинома СПМ  $G_B$  имеет более широкий лепесток, чем  $G_S$ , т.е. СПМ ММБЭ соответствует более зашумленному процессу, чем СПМ ММЭ.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведены спектры  $G_S$  (кривая 1) и  $G_B$  (кривая 2); рис. 1а соответствует значениям АКФ  $\text{Re} R_1 = 0,5$ ,  $\text{Im} R_1 = 0,25$ , для рис. 1б -  $\text{Re} R_1 = 0,79$ ,  $\text{Im} R_1 = -0,59$ , значения  $R_0$  в обоих случаях брались равными единице.

4.2. Оценка СПМ при  $N = 2$ . Если при  $N = 1$  оценка СПМ находится строго, то уже при  $N = 2$  приходится ограничиваться приближениями. Оценку СПМ по ММЭ можно получить, решая соответствующее уравнение Бла-Уокера. СПМ  $G_B$  находится путем решения системы дифференциальных уравнений (22). Указанные оценки были проведены по последовательности значений АКФ  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , вычисленных для планковского спектра

$$G_3(\omega) = \omega^3 / (\exp(\beta\omega) - 1). \quad (25)$$

Результаты расчета приведены на рис. 2, соответствие кривых и спектров следующее: 1 -  $G_S$ , 2 -  $G_B$  и 3 -  $G_3$ ; значение коэффициента  $\beta = 2,8$ .

Итак, в отсутствие априорной информации о характере распределения источников излучения вычисление энтропии процесса следует проводить согласно выражению (15), а не (1). При этом максимуму энтропии будет соответствовать оценка СПМ в форме (19), а не традиционная оценка ММЭ в форме (16). Выражение (1) определяет энтропию процесса лишь для случая равномерного распределения источников излучения по частоте.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: ИЛ, 1963.
2. Больцман Л. Лекции по теории газов. - М.: Гостехиздат, 1953.
3. Харди В. Г., Литтлвуд Д. Е., Полюа Г. Неравенства. - М.: ИЛ, 1948.
4. Робинсон Э. А. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 6.
5. Джейнс Э. Т. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 33.

Сибирский физико-технический  
институт при Томском университете

Поступила в редакцию  
6 октября 1989 г.

#### MAXIMUM ENTROPY METHOD IN SPECTRAL ESTIMATION

*V. T. Sarychev*

To obtain power density spectrum estimations (PDS) of stationary processes the algorithm is suggested employing Boltzman determination of entropy by means of a distribution function. The entropy expression resulting from this determination as a PDS functional in the common case differs from the appropriate expression, suggested by Shannon, causes of divergence are revealed.

УДК 533.951

## О ДИСПЕРСИОННЫХ И СОГЛАСУЮЩИХ СВОЙСТВАХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДОВ

А. В. Кудрин, Г. А. Марков

В свистовом диапазоне частот определены дисперсионные характеристики и структура поля аксиально-симметричных типов волн, направляемых вытянутой вдоль внешнего магнитного поля плазменной неоднородностью с повышенной концентрацией. Теоретически и экспериментально показана возможность согласования малой антенны с фоновой плазмой с помощью плазменной неоднородности.

Использование неоднородных волноводов в магнитоактивной плазме, являющихся замедляющими системами для волн магнитного типа, представляет большой интерес для задач направленной передачи электромагнитной энергии. Подобные задачи возникают при решении самых разнообразных физических проблем - от ВЧ нагрева плазмы в термоядерных установках до возбуждения и распространения в ионосфере свистящих атмосфериков (вистлеров). Особенно интересные возможности связаны с формированием плазменных волноводов полем излучения антенны. Например, в [1] наблюдали образование канавки плотности в фоновой плазме и захват в нее излучения вибратора. Упрощенная теоретическая модель такого захвата приведена в [2]. В [3] наблюдали ионизационное самоканалирование вистлеров. Возможность самонастройки малой вибраторной антенны в резонанс за счет формирования полем вибратора плазменной неоднородности нужной плотности показана в [4].

В настоящей работе определены дисперсионные характеристики и структура поля аксиально-симметричных типов волн, направляемых вытянутой вдоль внешнего поля плазменной неоднородностью с повышенной концентрацией в свистовом диапазоне частот, рассчитано увеличение сопротивления излучения вистлеров вибратором в зависимости от параметров плазмы в неоднородности. Теоретически и экспериментально показана возможность согласования малого вибратора за счет плавной трансформации возбуждаемых им в неоднородности сильно замедленных вистлеров в собственные волны фоновой плазмы.

1. Рассмотрим вначале однородный в продольном направлении плазменный столб, считая, что плотность электронов  $N_0$  в нем и, следовательно, их плазменная частота  $\omega_p$  - монотонно убывающие функции поперечной координаты  $r$ . Пусть внешнее магнитное поле направлено вдоль оси  $z$  и гирочастота электронов  $\omega_H = \text{const}$ , причем выполняются следующие соотношения:

$$\omega_L < \omega < \omega_H/2 < \omega_p, \quad (1)$$

где  $\omega_L$  - нижняя гибридная частота,  $\omega$  - круговая частота. Полагая все процессы пропорциональными  $\exp(i\omega t - ihz)$ , в интервале частот (1) для компонент тензора диэлектрической проницаемости бесстолкновительной

плазмы имеем  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = v/u$ ,  $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = iv/\sqrt{u}$ ,  $\epsilon_{zz} = -v$ , где  $v = \omega_p^2(r)/\omega^2$ ,  $u = \omega_H^2/\omega^2$ . Предположим также, что характерный поперечный масштаб распределения концентрации плазмы  $N_0(r)$  больше или порядка радиального масштаба волнового поля.

Нетрудно показать, что при надлежащем выборе параметров, когда  $h^2u \gg k_0^2v$ ,  $\omega_H \gg \omega$ ,  $k_0 = \omega/c$  (см. Приложение), можно пренебречь утечкой энергии из канала, обусловленной трансформацией крупномасштабных мод вистлера в мелкомасштабные волны, вытекающие из волновода с повышенной плотностью частиц [5,6], и записать уравнения для собственных аксиально-симметричных мод вистлера, захваченных в канал, в виде [3]

$$\frac{d^2 E_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_\varphi}{dr} - \frac{E_\varphi}{r^2} + \frac{k_0^4 v^2 - h^2(h^2u - 2k_0^2v)}{h^2u - 2k_0^2v} E_\varphi = 0, \quad (2)$$

$$E_r = i \frac{hu(dE_z/dr) + k_0^2 v \sqrt{u} E_\varphi}{h^2u - k_0^2v}, \quad E_z = -\frac{1}{v} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rv \frac{h\sqrt{u} E_\varphi}{h^2u - k_0^2v} \right).$$

При выборе произвольного закона спада концентрации к фоновому значению решения уравнений (2) находятся численно. Так, на рис. 1а (см. на вклейке) сплошными линиями изображены дисперсионные кривые для основной моды, распространяющейся в цилиндрическом волноводе, концентрация электронов в котором распределена по закону

$$N_0 = N_0 \left( \frac{1 - \delta^2}{\text{ch}^2(r/d)} + \delta^2 \right)^{1/2}, \quad (3)$$

штриховой линией - дисперсионные кривые для плоского слоя с тем же профилем  $N_0(x)$  при  $\delta^2 = 0,1$ ,  $\omega_p(0)/\omega_H = 10$  и различных значениях параметра  $R = k_0 d$  (кривые 1, 2 -  $R = 0,2$ ; 3 -  $R = 0,5$ )<sup>\*</sup>. Кривые 4 и 5 отвечают строго продольному распространению вистлеров в однородной плазме с концентрацией  $N_0$  и  $N_0\delta$  соответственно. Структура поля основной моды изображена на рис. 1б, в для цилиндрического волновода при  $\delta^2 = 0,1$ ,  $\omega_p(0)/\omega_H = \omega_H/\omega = 10$ ,  $R = 0,1$ ,  $p = h/k_0 = 25,905$ .

В некоторых частных случаях решение уравнений (2) может быть получено аналитически. Например, для вистлеров, распространяющихся в плоском слое с профилем концентрации (3), предполагая, что  $h^2u \gg 2k_0^2v$ ,  $\omega_H/\omega > 4\omega_p^2(0)/\omega_p^2(\infty)$ , и вводя обозначения

$$\rho = x/d, \quad R = k_0 d, \quad p = h/k_0, \quad k_0 = \omega/c, \quad p_{||} = (v_0/\sqrt{u})^{1/2}, \quad (4)$$

$$p_\infty = (v_\infty/\sqrt{u})^{1/2}, \quad \lambda = R \sqrt{p^4 - p_\infty^4} / p, \quad v_0 = v(0),$$

$$v_\infty = v(\infty), \quad \nu = 1/2 + \sqrt{1/4 + R^2(v_0^2 - v_\infty^2)/p^2u},$$

<sup>\*</sup>Заметим, что  $N_0\sigma$  есть плотность фоновой плазмы.



получим уравнение

$$\frac{d^2 E_y}{d\rho^2} + \left[ \frac{\nu(\nu - 1)}{\text{ch}^2 \rho} - \lambda^2 \right] E_y = 0. \quad (5)$$

У уравнения (5) существует локализованное решение

$$E_y = E_0 e^{-\lambda \rho} (1 + e^{-2\rho}) F(\nu + \lambda, \nu, 1 + \lambda, -e^{-2\rho}),$$

где  $F$  - гипергеометрическая функция [7], если  $\lambda > 0$ . Последнее условие влечет за собой естественное требование, чтобы  $\rho > \rho_\infty$ , где  $\rho_\infty$  - постоянная строго продольного распространения вистлера в фоновой плазме. При  $\rho \rightarrow \infty$   $E_y = E_0 e^{-\lambda \rho}$ .

Используя связь гипергеометрических функций с шаровыми (сферическими) функциями  $P_a^b$  [8], можно записать

$$E_y = E_0 \Gamma(1 + \lambda) P_{\nu-1}^{-\lambda}(\text{th} \rho). \quad (6)$$

Остальные компоненты поля определяются из (6) с помощью (2). Удовлетворяя требованию  $E_y(0) = 0$ , имеем условие  $1 + (\lambda - \nu)/2 = -n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  [7], которое с учетом (4) можно представить в виде

$$\rho^4 + [4(n + 3/4)^2 - 1/4] \rho^2 / R^2 + 4\rho(n + 3/4) \sqrt{\rho^4 - v_\infty^2 / u} / R = \frac{v_0^2}{u}. \quad (7)$$

Заметим, что при  $R < R_{\text{cr},n}$ , где

$$R_{\text{cr},n} = \left\{ \frac{[4(n + 3/4)^2 - 1/4] \omega \omega_H \omega_p^2(\infty)}{\omega_p^4(0) - \omega_p^4(\infty)} \right\}^{1/2},$$

волновод непрозрачен для  $n$ -й моды.

В некоторых случаях, когда волновые поля сосредоточены в области плотной плазмы и профиль электронной концентрации может быть аппроксимирован квадратичным законом

$$N_e = N_0 (1 - r^2 / 2d^2), \quad (8)$$

уравнения (2) (при  $h^2 u \gg 2k_0^2 v_0$ ) имеют аналитическое решение, выражаемое через полиномы Лагерра [9]. Для поперечно-неоднородного плоского слоя с профилем концентрации (8) решения выражаются через полиномы Эрмита. На рис. 1а изображены дисперсионные кривые для основной моды, распространяющейся в цилиндрическом волноводе (кривая 6) и плоском слое (кривая 7), для случая параболического распределения концентрации ( $k_0 d = 0,2$ ,  $\omega_p(0) / \omega_H = 10$ ).

Заметим, что с ростом ширины волновода безразмерная постоянная распространения  $p = h/k_0$  для каждой моды стремится к величине

$p_{\parallel} = (v_c / \sqrt{u})^{1/2}$ , соответствующей строго продольному распространению вистлера в однородной плазме с концентрацией  $N_0$  (рис. 1). При этом продольные компоненты поля убывают по сравнению поперечным. Отметим также, что  $|B_r| \approx |B_\phi| \gg |E_\phi| \approx |E_r| \gg |E_z|, |B_z| \gg |E_z|$  (рис. 1). Большое значение  $|H_\phi|_{\text{max}}$  позволяет предположить возможность эффективного возбуждения данной моды витком

с магнитным током соответствующего радиуса.

Величину мощности  $W_n^{o,n}$ , излучаемой заданным электрическим (магнитным) током  $j^{o,n}$  в  $n$ - $v$  моду волновода, в общем случае следует определять численно. Для источника, взятого в виде тонкой рамки радиуса  $b$ , по которой течет ток  $j^{o,n} = \vec{\varphi}^0 I_0^{o,n} \delta(r - b) \delta(z) \exp(i\omega t)$ , значение  $W_n^{o,n}$  можно рассчитывать по формулам, справедливым для волновода с параболическим профилем концентрации:

$$\begin{pmatrix} W_n^o \\ W_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0^{o,2} \\ I_0^{n,2} \frac{v_0^2}{p_n^2 u} \end{pmatrix} \frac{4\pi^2 (b/a_n)^4 [L_n^{(1)}(b^2/a_n^2)]^2 \exp(-b^2/a_n^2)}{c p_n (n+1) (1 + v_0^2/p_n^4 u)}, \quad (9)$$

где  $a_n = (p_n d \sqrt{u} / k_0 v_0)^{1/2}$ ,  $L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} I^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} (I^{-z} z^{\alpha+n})$ , а  $p_n$  - корень уравнения

$$p^4 + 4p(n+1)v_0/k_0 d \sqrt{u} - v_0^2/u = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

В качестве  $d$  следует брать характерную ширину распределения концентрации. Заметим, что выражение для  $W_n^o$  в формуле (9) при условии  $k_0 d p_n > n+1$  переходит в соответствующую формулу из [9].

Для основной моды ( $n = 0$ ) величины  $W_0^{o,n}$  достигают максимальных значений при  $b/a_0 = \sqrt{2}$ . Можно сравнить их с величинами  $W^{o,n}$  мощности, излучаемой теми же источниками в вистлере в фоновой плазме ( $p_\infty = \omega_p(\infty)/\sqrt{\omega \omega_H}$ ,  $k_0 b p_\infty < 1$ ):

$$W^o = \frac{I_0^{o,2}}{12c} \pi^2 (k_0 b)^4 p_\infty^3, \quad W^n = \frac{I_0^{n,2}}{12c} \pi^2 (k_0 b)^4 p_\infty^5. \quad (11)$$

Выражения (11) получены из общих формул работы [10]. Так как  $k_0 b p_\infty < 1$ , а  $k_0 b p_\infty \sim 1$ , то справедливо неравенство  $W_{0,max}^{o,n}/W^{o,n} > 1$ , свидетельствующее о заметном увеличении сопротивления излучения антенны в присутствии плазменной неоднородности.

2. Для плазменного волновода с уплотнением, концентрация электронов в котором является функцией не только поперечной, но и продольной координаты, в случае  $|\frac{\partial}{\partial z} \ln N_e| < h$ , где  $h(z)$  - постоянная распространения, можно построить собственные моды в адиабатическом приближении.

Для этого будем искать решение уравнений Максвелла для комплексных амплитуд в квазиклассическом виде

$$\vec{E}_{r,\varphi,z}(r,z) = (h(0)/h(z))^{1/2} \vec{E}_{r,\varphi,z}(r,z) \exp(-i \int_0^z h(z') dz'),$$

где зависимость функций  $\vec{E}_{r,\varphi,z}$  от  $z$  предполагается более медленной по сравнению с быстро осциллирующей экспонентой. Потребуем, чтобы  $h\Lambda > h^2 u / k_0^2 v > 1$ , где  $\Lambda$  - характерный масштаб продольного измерения

функций  $\tilde{E}_{r,\varphi,z}$ . С учетом медленности изменения параметров волновода в продольном направлении приближение, рассмотренное в разд. 1, приводит к следующим уравнениям:

$$\tilde{E}_z = - \frac{h\sqrt{u}}{k_0^2 v} \frac{1}{dr} r \frac{k_0^2 v \tilde{E}_\varphi - h\sqrt{u} (\partial \tilde{E}_r / \partial z)}{h^2 u - k_0^2 v}, \quad (12)$$

$$\tilde{E}_r = \frac{1}{(h^2 u - k_0^2 v)^2} \left\{ \frac{h^3 u^2}{k_0^2 v} \hat{L} \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial z} - h^2 u^{3/2} \hat{L} \tilde{E}_\varphi + \right. \\ \left. + (h^2 u - k_0^2 v) \left( k_0^2 v \sqrt{u} \tilde{E}_\varphi - 2hu \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial z} \right) \right\}, \quad \hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2},$$

$$\hat{L} \tilde{E}_\varphi + (k_0^2 v - h^2 u) \tilde{E}_\varphi / u - ik_0^2 v \tilde{E}_r / \sqrt{u} = 2ih \frac{\partial \tilde{E}_\varphi}{\partial z}.$$

Аппроксимируем профиль  $v(r, z)$  функцией

$$v^2(r, z) = v_0^2(z) (1 - r^2/d^2(z)). \quad (13)$$

Подставляя выражение для  $\tilde{E}_r$  в последнее уравнение (12) и отбрасывая члены высшего порядка малости по сравнению с  $1/(h\Lambda)$ , имеем

$$\hat{L} \tilde{E}_\varphi + (k_0^4 v^2 / h^2 u - h^2) \tilde{E}_\varphi = 2i\tilde{H} (\partial \tilde{E}_\varphi / \partial z), \quad (14)$$

где  $\tilde{H} = h(z) (1 + k_0^4 v_0^2(z) / h^4(z) u)$ , а функция  $v_0(z)$  и  $1/d(z)$  плавно спадают к фоновым значениям. Фактически мы рассматриваем распространение вистлеров в "плазменном рупоре", задавая при этом естественное граничное условие  $v_0(z) = v_{00} = \text{const}$ ,  $d(z) = d_0 = \text{const}$  при  $z \leq 0$ . Функцию  $h_n(z) = p_n k_0$  для фиксированных номеров  $n$  можно найти в нулевом приближении из уравнения, аналогично (10).

В случае плоского слоя с профилем типа (13) для  $\tilde{E}_y$  можно получить уравнение, совпадающее с (14), но теперь  $\hat{L} = \partial^2 / \partial x^2$ . Уравнение для слоя можно решить точно, следуя схеме, изложенной в [11]. Для этого надо отыскать вначале решение уравнения

$$\xi_n'' + \Omega_n^2(T_n) \xi_n = 0$$

с "начальным" условием  $\xi_n(T_n) \rightarrow \exp(i\Omega_n(0)T_n)$  при  $T_n \rightarrow 0$ , где  $T_n = \int_0^z dz' / \tilde{H}(z')$ ,  $\Omega_n = k_0^2 v_0 / h_n d \sqrt{u}$  (точка означает дифференцирование по  $T_n$ ). Если  $r_n = |\xi_n|$ , то в квазиклассическом приближении  $r_n(T_n) = (\Omega_n(0) / \Omega_n(T_n))^{1/2}$ . Тогда для комплексной амплитуды  $n$ -й моды при  $E_y(0) = 0$  имеет место решение

$$E_y = \left( \frac{h_n(0)}{h_n(z)r_n} \right)^{1/2} E_0 H_{2n+1} \left( \frac{x}{x_n r_n} \right) \exp \left( - \frac{x^2}{2x_n^2 r_n^2} + \frac{ib_n x^2}{2} - i \int_0^x h_n(z') dz' \right),$$

где  $x_n = (h_n(0)d_0 \sqrt{u}/k_0^2 v_{00})^{1/2}$ ,  $b_n = -\tilde{r}_n/r_n$ ,  $H_n$  - полиномы Эрмита,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $E_0 = \text{const}$ . При этом, если  $(v_0 \sqrt{u})^{1/2} \gg \mu_n/4k_0 d$ ,  $\mu_n = 4n + 3$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , для оценок можно пользоваться формулами  $h_n(z) \approx k_0[(v_0/\sqrt{u})^{1/2} - \mu_n/4k_0 d]$ ,  $\Omega_n \approx k_0[(v_0/\sqrt{u})^{1/2} + \mu_n/4k_0 d]/d$ .

При убывании  $v_0(z)$ ,  $1/d(z)$  с ростом  $z$  до фоновых значений величина  $r_n$ , т.е. масштаб локализации моды возрастает, и волна трансформируется в собственные волны фоновой плазмы.

3. Экспериментальная проверка возможности плавного согласования излучения вибратора в плазменную неоднородность повышенной концентрации была выполнена в рейстрекковой магнитной ловушке [4,12] со стеклянными разрядными баллонами на линейных участках. Длина баллонов  $L \approx 1$  м, их диаметр  $d \approx 16$  см. В качестве петлевого ВЧ источника с магнитным током использовался пояс Роговского - тороидальная катушка с обратным проводом [13]. Большой радиус тора - 2,5 см, малый радиус - 4 мм, число витков - 100. Плоскость тора была ориентирована перпендикулярно внешнему магнитному полю  $B_0 \approx 330$  Гс. Проводимая к антенне мощность  $W_0 \sim 10$  Вт была замодулирована по амплитуде меандром с частотой модуляции  $f_M = 200$  Гц. Круговая частота поля  $\omega = 1,2 \cdot 10^9$  с<sup>-1</sup> ( $\omega_H/\omega \approx 4,8$ ). Рабочий газ - воздух, давление в разряде составляло  $p \leq 10^{-2}$  Тор. Для диагностики использовались электрические и магнитные зонды. Излучение из плазмы принималось измерительной антенной ПБ-22 и регистрировалось анализатором С4-27. Для определения пространственных характеристик волн, возбуждаемых в плазме разряда, использовался коррелометр ЧБ-4 с преобразователем ХБ-5, на вход которого подавались сигналы с разнесенных в пространстве магнитных зондов, один из которых был неподвижен, а второй перемещался вдоль разрядного баллона.

Рис. 2 иллюстрирует динамику автосогласования антенны при формировании ее полем неоднородного плазменного волновода. Кривые 1,2 на рис. 2 соответствуют сигналам с напарвленных ответвителей, пропорциональным подводимой  $W_0(t)$  и отраженной  $W_r(t)$  от антенны ВЧ мощности. Кривая 3 показывает изменения амплитуды продольной компоненты магнитного ВЧ поля  $B_z(t)$  снятой на расстоянии  $z_1 \approx 60$  см от источника у боковой стенки разрядного баллона измерительной катушкой (число витков - 30, диаметр - 4,5 мм, длина - 24 мм) в алюминиевом экране. Кривая 4 показывает изменения ионного тока насыщения  $i_H^+(t)$  на отрицательный зонд ( $u_3 = -30$  В).

Результаты эксперимента демонстрируют существенное уменьшение

коэффициента отражения  $\Gamma = W_r/W_0$  при возбуждении ВЧ разряда ( $\Gamma \sim 1$  при  $i_H^+ \sim 0$ ;  $\Gamma \sim 0,3$  при  $i_H^+ \sim i_{\max}^+$ ,  $N_0 \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ). Численные расчеты полной излучаемой мощности показывают, что в условиях эксперимента большая часть подводимой мощности ( $\sim 0,5 W_0$ ) идет на возбуждение плазменных волн, которые формируют разряд в виде вытянутой вдоль магнитного поля  $\vec{B}_0$  плазменной неоднородности [12]. В достаточно плотной плазме ( $N_0 > N_{cr} = m\omega^2/4\pi e^2$ ) антенна начинает эффективно возбуждать в разряде основную моду вистлера, что подтверждается возрастанием на полтора порядка величины  $B_z(t)$  (рис. 2) по сравнению со случаем, когда отсутствует плазменная неоднородность с концентрацией  $N_0 > N_{cr}$  и продольным масштабом  $L_p \geq Z_1$ . Измерения пространственных масштабов поля, возбуждаемого антенной, показывают наличие в плазме разряда как мелкомасштабных плазменных волн (длины волн  $\lambda_p < 5 \text{ см}$ ), так и крупномасштабных вистлеров с длиной волны  $\lambda_B \geq 25 \text{ см}$ . При увеличении расстояния  $z$  от источника величина  $\lambda_B$  возрастает со значения  $\lambda_B \approx 20 \text{ см}$  ( $z \leq 10 \text{ см}$ ) до значения  $\lambda_B \approx 35 \text{ см}$  ( $z \geq 40 \text{ см}$ ).

Отметим, что экспериментальная величина замедления вистлера  $p = 2\pi/(k_0 \lambda_B) \sim 6$  при  $z \sim 10 \text{ см}$  соответствует теоретическому значению замедления основной моды при  $N_0 \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$  и радиальном масштабе волновода  $r_B \sim 10 \text{ см}$ . Величина мощности, переносимой через поперечное сечение баллона вистлером, оцениваемая по экспериментальным значениям  $B_\varphi \sim B_z \approx 0,015 \text{ Гс}$ ,  $E_r \sim E_\varphi \approx 0,2 \text{ В/см}$  ( $z \approx 60 \text{ см}$ ,  $r \approx 8 \text{ см}$ ) с учетом радиальной структуры поля, составляет  $P_B \sim 1 \text{ Вт}$ , что согласуется с теоретическим расчетом мощности, излучаемой в основную моду вистлера,  $W_{\text{теор}} = 1,5 \text{ Вт}$ . Наблюдаемое в эксперименте увеличение длины волны вистлера вдоль волновода, обусловленное уменьшением плотности плазмы из-за потерь частиц из разряда, подтверждает возможность плавного согласования малой антенны с помощью плазменной неоднородности.

## Приложение

Использование приближенных уравнений (2) для описания собственных свистовых мод "узких" плазменных волноводов с повышенной концентрацией электронов (ширина волновода  $d \sim \lambda_B$ ,  $\lambda_B$  - длина волны вистлера, распространяющегося в канале) легко обосновать на примере волновода с резкими границами.

Рассмотрим однородный плоский волновод, граничащий с фоновой плазмой меньшей плотности. Пусть при  $|x| \leq d$   $\omega_p(x) = \tilde{\omega}_p$ , при  $|x| > d$   $\omega_p(x) = \omega_p$ ,  $\tilde{\omega}_p > \omega_p$ . Компоненты поля собственной моды при  $|x| > d$  можно записать в виде

$$E_y = \sum_{j=1}^2 A_j \sin(k_0 q_j x) \exp(-ik_0 p z),$$

$$E_z = -v^{-1} \sum_{j=1}^2 q_j \tilde{N}_j A_j \cos(k_0 q_j x) \exp(-ik_0 p z),$$

при  $|x| > d$  - в виде

$$E_y = \text{sign}x [B_1 \exp(-k_0 s_1 |x|) + B_2 \exp(ik_0 s_2 |x|)] \exp(-ik_0 p z);$$

$$E_z = v^{-1} [s_1 N_1 B_1 \exp(-k_0 s_1 |x|) - i s_2 N_2 B_2 \exp(ik_0 s_2 |x|)] \exp(-ik_0 p z),$$

где

$$q_{1,2}^2 = -\tilde{v} + (u/2-1)p^2 \mp (pu/2)\sqrt{p^2-4\tilde{v}/u}, \quad s_{1,2}^2 = (pu/2) \times \\ \times \sqrt{p^2-4\tilde{v}/u} \mp [(u/2-1)p^2 - v], \quad \tilde{N}_{1,2} = (p \mp \sqrt{p^2-4\tilde{v}/u})\sqrt{u}/2,$$

$$N_{1,2} = \left( p \mp \sqrt{p^2-4\tilde{v}/u} \right) \sqrt{u}/2, \quad \tilde{v} = \tilde{\omega}_p^2/\omega^2, \quad v = \omega_p^2, \quad A_j = \text{const}, \quad B_j = \text{const}.$$

Остальные компоненты поля находятся очевидным образом. Слагаемые в суммах соответствуют волнам с существенно различными поперечными масштабами - крупномасштабным вистлерам ( $q_1, s_1$ ) и мелкомасштабным волнам, вытекающим из волновода ( $q_2, s_2$ ). Из условия непрерывности тангенциальных компонент поля при  $x=\pm d$  получаем значения постоянных распространения  $p=p'-ip''$  собственных мод волновода и коэффициенты  $A_j, B_j$ . Численный анализ показывает, что в области значений параметров  $u > 1, p' > \sqrt{\tilde{v}/u}, d \geq d_{\text{min}} \sim (k_0 p')^{-1}$ , соответствующей существенному различию характерных поперечных масштабов захватываемых в канал вистлеров (ветвь  $q_1$ ), и "высвечивающихся" из волновода мелкомасштабных волн (ветвь  $q_2$ ), в которые частично трансформируется вистлер, в волноводе распространяются слабозатухающие моды.

На рис. 3а, б приведены зависимости величин  $p', p''/p', p''$  от частоты  $\omega$  в случае  $\tilde{\omega}_p/\omega_H = 10, \tilde{\omega}_p^2/\omega_p^2 = 3,162, k_0 d = 0,1$ . Кривая  $p''$  отвечает строго продольному распространению вистлера в однородной плазме с концентрацией  $\tilde{N}_0 = \tilde{\omega}_p^2 m / 4\pi e^2$ . Резонансы  $p''$  в этой  $p''(\omega)$  соответствуют выполнению условий  $k_0 d |q_2| = \pi n$  (максимумы  $p''$ ),  $k_0 d |q_2| = \pi(n+1/2)$  (минимумы  $p''$ ),  $n$  - целое число. Для плавного профиля концентрации эти резонансы сглаживаются. Соответствующие графики для цилиндрического волновода аналогичны приведенным на рис. 3а, б кривым.

Распределение поперечной составляющей электрического поля по сечению волновода  $\tilde{\omega}_p/\omega_H = 10, \tilde{\omega}_p^2/\omega_p^2 = 3,162, k_0 d = 0,1, p' = 30,297, p'' = 1,614 \cdot 10^{-2}$  показано на рис. 3в (ср. с рис. 1). На графике хорошо видны крупномасштабное поле вистлера и вытекающие

мелкомасштабные волны.

Таким образом, даже для весьма узких волноводов ( $k_0 d = 0,1$ ,  $p' \approx 30$ ) затухание собственных мод, обусловленное переизлучением в мелкомасштабные волны, при  $\omega_H/\omega > 1$  оказывается сравнительно малым ( $p''/p' < 10^{-2}$ ), что позволяет использовать приближенные уравнения (2) для описания крупномасштабного поля вистлера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stenzel R.L. // Phys. Fluids. 1976. V. 19. N 5. P. 857.
2. Карпман В. И., Шагалов А. Г. // Физика плазмы. 1986. Т. 12. N 2. С. 199.
3. Вдовиченко И. А., Марков Г. А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. N 5. С. 216.
4. Марков Г. А. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. N 9. С. 1094.
5. Карпман В. И., Каuffman Р. Н. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. N 5. С. 1845.
6. Карпман В. И., Каuffman Р. Н. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. N 5. С. 266.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. С. 294.
8. Градштейн С. И., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. С. 1021, 1023.
9. Голубятников Г. Д., Еремин С. В. и др. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. N 4. С. 124.
10. Беллюстин Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. N 1. С. 22.
11. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. - М.: Наука, 1971. С. 240, 248.
12. Марков Г. А., Попова Л. Л., Чугунов Д. В. // Письма в ЖЭТФ, 1985. Т. 11. N 23. С. 1465.
13. Диагностика плазмы / Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда. - М.: Мир, 1967. С. 17.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
10 января 1990 г.

## ABOUT DISPERSIONAL AND MATCHING PROPERTIES OF INHOMOGENEOUS PLASMA WAVEGUIDES

*A. V. Kudrin, G. A. Markov*

The dispersive characteristics and field structure of axially-symmetrical types of waves directed along the external magnetic field by plasma inhomogeneity with high concentration in the whistler-frequency range are determined. The possibility of

little antenna radiation matching with background plasma through plasma inhomogeneity is shown theoretically and experimentally.

### **Аннотации депонированных статей**

## **НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ШУМЫ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРАХ И УСТРОЙСТВАХ**

**(С б о р н и к)**

В сборнике публикуются статьи, посвященные анализу низкочастотных шумов в полупроводниковых приборах и устройствах. Большое внимание уделено тонким металлическим пленкам, как простейшему объекту, подверженному фликкерным флуктуациям. Содержится ряд работ, направленных на исследование связи фликкерных флуктуаций проводимости с движением дефектов в объеме твердого тела. В сборник включены статьи, посвященные изучению особенностей спектра и локализации источников фликкерных шумов в полевых транзисторах с затвором Шоттки, в диодах Ганна, в фотопроводящих кристаллах. Анализируются флуктуации амплитуды и частоты СВЧ генераторов на полевых и биполярных транзисторах и на диодах Ганна. Присутствуют работы, в которых исследуются низкочастотные флуктуации интенсивности продольных мод полупроводниковых лазеров.

Материалы, включенные в сборник, отражают современное состояние исследований низкочастотных шумов и позволяют определить перспективные направления дальнейших исследований.

Сборник депонирован в ВИНТИ,  
рег. N 5713-В90. Деп. от 14 ноября 1990 г.



УДК 621.396.677.8

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

Б. Е. Кунбер, Л. М. Лобкова, А. А. Савочкин

Определены особенности формирования поля излучения сферических зеркальных антенн. Показано, что в антеннах этого типа имеется возможность в два раза увеличить коэффициент направленного действия за счет смещения облучателя из параксиального фокуса. Выведены формулы для расчета величин оптимального смещения облучателя, эффективного радиуса апертуры, ширины диаграммы направленности и уровня бокового излучения. Показано, что боковое излучение сферической зеркальной антенны формируется за счет геометрического отражения поля облучателя на периферической части зеркала.

В диапазоне сверхвысоких частот наряду с параболическими антеннами используются антенны со сферическим зеркалом. Для полного использования поверхности такого зеркала, т. е. формирования плоской отраженной волны, поле, падающее на зеркало, должно отличаться от сферической волны, для чего применяют или корректирующие малые зеркала [1], или специальные линейные облучатели [2]. В ряде случаев, однако, допустимо использовать не всю поверхность сферического зеркала, а лишь часть его, что позволяет с помощью нескольких обычных облучателей создавать многолучевые антенны. В антеннах такого типа фронт, отраженный от сферического зеркала, близок к плоской волне лишь в центральной части зеркала и сильно отличается от нее на периферии зеркала (рис. 1, см. на вклейке). Специфика излучения таких антенн в литературе не рассматривалась, и анализ ее явился целью настоящей работы. При этом оказалось следующее.

Во-первых, отличие фронта отраженной волны от плоского приводит к тому, что эффективный размер апертуры отличается от размера зеркала и, следовательно, расчет коэффициента направленного действия (кнд) и ширины главного лепестка нельзя производить по известным формулам.

Во-вторых, в антеннах такого типа можно увеличить размер апертуры, т. е. уменьшить aberrации, за счет смещения облучателя из параксиального фокуса.

В-третьих, ближнее боковое излучение, в отличие от остронаправленных антенн обычного типа, формируется не за счет краевых волн, а путем чисто геометрического отражения поля облучателя от периферической части зеркала.

1. Эффективный размер апертуры. Оптимальное смещение облучателя. На рис. 2 приведено сечение антенны рассматриваемого типа плоскостью, проходящей через ось вращения  $00'$  осесимметричного сферического зеркала радиуса  $R$  (центр сферы точка  $0$ ), диаметра  $2L$ , и облучатель  $Q$ . Координаты облучателя  $(R/2 + \delta; \Omega)$ . Смещение  $\delta = QF$  отсчитывается от параксиального фокуса  $F$  ( $OF = R/2$ ). Лучевая структура отраженной волны осесимметрична относительно оси  $00'$ . Поверхность ее границ свет - тень образована лучами, отраженными от кромки зеркала. Пересечение этой поверхности с бесконечно удаленной сферой образует кольцо - границу области, освещаемой геометрическими лучами

отраженной волны. Угол  $\theta$  между этой границей и точкой, соответствующей направлению  $00''$ , лежит в пределах  $\alpha_0 - \Omega \leq \theta \leq \alpha_0 + \Omega$  ( $\sin \alpha_0 = l/R$ ). Лучи, отраженные от кольца  $r = \text{const}$  на поверхности зеркала с осью  $00''$  (луч BC на рис. 2), образуют конус с углом полураствора  $\theta$ .

Эффективным размером апертуры будем называть радиус  $r^*$  круговой области с малыми абберациями  $\Delta$  в направлении главного лепестка (т.е. направлении  $00''$ ), когда

$$k\sqrt{\Delta^2} = \mu\pi \quad (\mu = 1/4 - 1/8), \quad (1)$$

где  $k$  - волновое число,  $\Delta^2$  - второй центральный момент эйконала  $S$  полей токов в направлении  $00''$ ,

$$S = \rho - t, \quad \rho = QB, \quad t = AB; \quad (2)$$

$$\Delta^2 = \frac{2}{r^{*2}} \int_0^r (S - \bar{S})^2 r dr; \quad (3)$$

$$\bar{S} = \frac{2}{r^{*2}} \int_0^r S r dr. \quad (4)$$

Из изложенного следует, что геометрию антенны можно характеризовать четырьмя безразмерными параметрами  $kR$ ,  $\Omega$  и  $\tau = \delta/R$ . Однако отношение эффективного радиуса апертуры к радиусу сферы

$$\kappa = r^*/R \quad (5)$$

является функцией только двух параметров  $kR$  и  $\tau$ , если границы зоны, формирующей квазиплоский участок отраженной волны, не доходит до кромки зеркала, т.е.  $\kappa = \kappa(kR, \tau)$ .

Расчет  $\kappa$  по алгоритму (1)-(4) производился двумя способами - численно и разложением в ряды Тейлора по степеням  $\tau$  и  $\kappa$ , поскольку  $\tau \ll 1$  и, как видно из приводимых далее расчетов,  $\kappa < 1$ . Разложение  $S/R$  и  $\Delta^2/R^2$  в ряды Тейлора по степеням  $\tau$  и  $\kappa$  имеет вид

$$S/R \approx 1/2 - \tau + (2\tau + \tau^2)\kappa^2 + (-1/4 - (1/2)\tau - (3/4)\tau^2)\kappa^4 + \dots; \quad (6)$$

$$\frac{\Delta^2}{R^2} \approx \frac{1}{180}\kappa^8 + \left(-\frac{1}{12}\kappa^6 + \frac{1}{45}\kappa^8\right)\tau + \left(\frac{1}{3}\kappa^4 - \frac{5}{24}\kappa^6 + \frac{1}{18}\kappa^8\right)\tau^2 + \dots \quad (7)$$

Из (1), (6), (7) следует, что

$$\begin{aligned} \kappa(R/\lambda; \tau) \approx 1,609 \sqrt[4]{\mu(\lambda/R)} (1 - (1/2)\tau - (1/8)\tau^2 - \dots) \times \\ \times [1 + 0,362(2\tau - \tau^2)\sqrt{(1/\mu)(R/\lambda)} + \dots] \end{aligned} \quad (8)$$

и, в частности, при  $\tau = 0$  (т.е. при расположении облучателя в параксиальном фокусе)

$$\kappa(R/\lambda; 0) \approx 1,609 \sqrt[4]{\mu\lambda/R}. \quad (9)$$

Оптимальное положение облучателя ( $\delta = \delta^*$ ) соответствует минимуму величины  $\Delta^2$  по  $\tau$ , т.е. выполнению условия

$$\partial \Delta^2 / \partial \tau = 0, \quad (10)$$

из которого следует, что

$$\tau^* = \delta^*/R \approx (1/8)\kappa^2 + (43/960)\kappa^4 + (11/1536)\kappa^6 + \dots \quad (11)$$

и

$$\Delta^2/R^2 \approx (1/2880)\kappa^8 - (11/23040)\kappa^{10} + (83/460800)\kappa^{12} + \dots \quad (12)$$

Определяя из (1), (12)  $\kappa$ , получаем, что

$$\kappa(R/\lambda; \tau^*) \approx 2,276\sqrt[4]{\mu(\lambda/R)} (1+0,89\sqrt{\mu(\lambda/R)} - 6,96\mu(\lambda/R)+\dots). \quad (13)$$

Ширина главного лепестка диаграммы направленности определяется соотношением

$$\theta_{0,5}^0 = \frac{30\lambda}{r^*(R/\lambda; \tau)}$$

Тогда из (8) следует, что

$$\theta_{0,5}^0(R/\lambda; \tau) \approx (18,6/\sqrt[4]{\mu}) (\lambda/R)^{3/4} \frac{1-(1/2)\tau+(3/8)\tau^2+\dots}{1+0,362(2\tau-\tau^2)^4\sqrt{\mu\lambda/R}+\dots}. \quad (14)$$

При  $\tau = 0$ , т. е. расположении облучателя в параксиальном фокусе,

$$\theta_{0,5}^0(R/\lambda; 0) \approx (18,6/\sqrt[4]{\mu}) (\lambda/R)^{3/4}. \quad (15)$$

При оптимальном смещении облучателя

$$\theta_{0,5}^0(R/\lambda; \tau^*) \approx 13,18/\sqrt[4]{\mu} (\lambda/R)^{3/4} (1-0,89\sqrt{\mu(\lambda/R)}+6,96\mu(\lambda/R)+\dots). \quad (16)$$

Отношение площадей апертур при нулевом и оптимальном смещении

$$\frac{\kappa^2(R/\lambda; \tau^*)}{\kappa^2(R/\lambda; 0)} \approx 2(1+0,89\sqrt{\mu(\lambda/R)}-6,96\mu(\lambda/R)+\dots)$$

показывает, что выигрыш кнд за счет смещения облучателя составляет около 100%, поскольку квадрат величины в скобках близок к единице.

На рис. 3,4 приведены графики зависимостей  $\kappa(R/\lambda; 0)$ ,  $\kappa(R/\lambda; \tau^*)$ ,  $\tau^*(R/\lambda)$ ;  $\Delta(R/\lambda; 0)/R$ ,  $\Delta(R/\lambda; \tau^*)/R$ , рассчитанные численными методами (сплошные линии) и по формулам (7), (9), (11)-(13) (прерывистые линии).

2. Диаграмма направленности. Как было указано выше, боковое излучение (вне области главного лепестка  $\theta > 2\theta_{0,5}^0$ ) определяется геометрическим полем, отраженным от периферической части зеркала. Используя закон сохранения энергии, можно записать диаграмму направленности  $F(\theta)$  в виде

$$F(\theta) = f(\psi) \sqrt{\sin\psi d\psi / \sin\theta d\theta}, \quad (17)$$

где  $\psi$  - угол падения,  $\theta$  - угол отражения луча на зеркале,  $f(\psi)$  - диаграмма направленности облучателя.

Связь  $\theta$  и  $\psi$  следует из рис. 2:

$$\theta = 2\alpha - \psi = 2\arcsin[\rho(\psi)\sin\psi/R] - \psi, \quad (18)$$

где

$$\rho(\psi) = (R/2+\delta) \left[ \sqrt{(R/(R/2+\delta))^2 - \sin^2\psi} - \cos\psi \right].$$

Тогда из (18) получаем, что

$$d\theta/d\psi = 1 - 2\cos\psi/\sqrt{(R/(R/2+\delta))^2 - \sin^2\psi} . \quad (19)$$

Из (17) следует, что при обычных размерах облучателя (т.е. освещении зеркала главным лепестком диаграммы направленности облучателя) боковое излучение не имеет осциллирующего характера, т.е. монотонно убывает с ростом  $\theta$  и не зависит от радиуса зеркала.

На рис. 5 приведены диаграммы направленности для трех радиусов зеркала ( $R/\lambda = 17,2$  - штрихпунктирная кривая; 34,4 - штриховая; 68,8 - точечная), рассчитанные токовым методом, а также по формуле (17). Как следует из рис. 5, оба метода дают хорошее согласие вне области главного лепестка, а влияние радиуса зеркала сказывается лишь в изменении КНД и ширины главного лепестка диаграммы направленности антенны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Holt F.S., Bouche E.L.//IEEE Trans. 1964.V. AP-12. N 1. P.44.
2. Per-Simon Kildal//IEEE Trans. 1986. V.AP-34. N 2. P. 197.

Севастопольский приборостроительный  
институт

Поступила в редакцию  
28 ноября 1989 г.

#### SPHERICAL MIRROR ANTENNA RADIATION PECULIARITIES

*B. E. Kinber, L. M. Lobkova, A. A. Savochkin*

The peculiarities of radiation field formation of spherical mirror antennas are defined. There is a possibility of a twofold increase of the directivity due to the irradiator shift from paraxial focus. The formulas for calculation of optimal irradiator shift values, effective aperture radius, antenna pattern width, the level of side-lobe radiation are deduced. The formation of spherical mirror antenna side radiation caused by geometroptical reflection irradiator field on peripheral part of the mirror is shown.

УДК 621.385.6

## К ТЕОРИИ КЛИСТРОНА НА ЦИКЛОТРОННОМ АВТОРЕЗОНАНСЕ

Г. Т. Смирнов

Теоретически исследуется новая разновидность генератора на циклотронном авторезонансе с клистронным механизмом группировки электронов (КЦАР). Получены выражения для тарттового и оптимального токов, для КПД КЦАР с учетом начального разброса электронов по энергии и углу инжекции. Показано, что в КЦАР, построенном по аналогии с двухрезонаторным пролетным клистроном, КПД может превышать 50%, а в КЦАР - аналоге трехрезонаторного клистрона - КПД достигает 60%. При этом требования к качеству электронного пучка оказываются довольно низкими. Так, в высокомоощных КЦАР начальный разброс электронов по энергии и углу инжекции без большого ущерба для КПД может составлять несколько процентов.

Генераторы на эффекте циклотронного авторезонанса (ЦАР) в настоящее время рассматриваются как одни из наиболее перспективных для освоения субмиллиметрового диапазона длин волн [1-5]. Кроме присущих всем типам ЛСЭ свойств, таких, как широкая перестраиваемость по частоте и высокая выходная мощность, генераторы на ЦАР имеют также следующие достоинства:

- высокий КПД (десятки процентов);
- слабая чувствительность к разбросу электронов по энергии;
- для генерации излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах в генераторах на ЦАР требуются существенно меньшие энергии электронов и, соответственно, более простые ускорители, чем в ЛСЭ-убитронах.

В настоящем сообщении рассмотрим еще одну схему генератора на ЦАР, которую будем называть клистроном на циклотронном авторезонансе (КЦАР). Как будет показано ниже, КЦАР имеет некоторые преимущества перед интенсивно обсуждаемыми в последнее время мазерами на циклотронном авторезонансе (МЦАР) [1-4]. Главные из них - это более высокий КПД и простота электродинамической системы. Как известно, [1,2], трудности с электродинамическими системами являются одним из наиболее серьезных препятствий на пути практической реализации МЦАР субмиллиметрового диапазона. В КЦАР же проблема электродинамических систем не стоит столь остро, поскольку для селекции электромагнитных колебаний в этом приборе могут применяться двухзеркальные открытые резонаторы, подобные тем, что используются в обычных лазерах.

На принципе КЦАР может быть построен широкий класс приборов, таких, как генераторы, усилители, модуляторы и т.п. Ниже мы будем рассматривать в основном КЦАР-генераторы, хотя многие из полученных ниже результатов применимы также и к КЦАР-усилителям. В дополнение к уже изложенному в работах [6,7] в данной статье мы рассмотрим также такие вопросы, как влияние дисперсии электронов по энергии и углу инжекции на КПД, зависимость КПД от тока электронного пучка и от частоты электромагнитной волны и т.п.

1. Схема и электронный КПД клистрона на циклотронном авторезонансе. Схема КЦАР приведена на рис. 1 (см. на вклейке). Основное отличие КЦАР от МЦАР состоит в неоднородности распределения статического магнитного поля вдоль оси генератора. КЦАР работает по

традиционной клистронной схеме: модуляция входного электронного пучка по энергии - инерциальная группировка - отбор энергии у сгруппированного пучка. При этом функции первого и второго резонаторов пролетного клистрона в КЦАР выполняют область модуляции 1 и область отбора энергии 3, а функции пространства дрейфа - область 2. В отличие от МЦАР и КЦАР электромагнитная волна может распространяться строго параллельно направлению поступательного движения электрона 4, что позволяет использовать в данном приборе в качестве резонатора обычный двухзеркальный резонатор 5, ориентированный параллельно статическому магнитному полю  $\vec{H}$ .

Рассмотрим стационарный поток релятивистских электронов, движущихся вдоль статического магнитного поля  $H_0$ . Будем считать, что электроны на входе имеют одинаковые энергии иpitch-углы и распределены равномерно по фазам вращения. Предположим, что вдоль магнитного поля в том же направлении, что и электронный поток, распространяется однородная циркулярно поляризованная электромагнитная волна с частотой  $\omega$  и напряженностью электрического поля  $E_w$ . Уравнения движения электрона в однородном магнитном поле и в поле электромагнитной волны, распространяющейся вдоль поля  $H_0$  с фазовой скоростью  $v_\phi = c$ , имеют вид [8]

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{dp_{\parallel}}{dz} = -\alpha_E \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \cos \alpha; \quad (1)$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\delta}{p_{\parallel}} + \alpha_E \frac{C}{p_{\parallel} p_{\perp}} \sin \alpha, \quad (2)$$

где

$$p_{\parallel} = \frac{|\vec{p}_{\parallel}|}{mc} \cos \theta, \quad p_{\perp} = \frac{|\vec{p}_{\perp}|}{mc} \sin \theta, \quad \gamma = \sqrt{1 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}, \quad \alpha_E = \frac{eE_w L}{mc^2},$$

$\vec{p}$  - импульс электрона,  $\theta$  - угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{H}$ ,  $\alpha$  - фаза электрона (угол между вектором электрического поля волны  $\vec{E}_w$  и вектором поперечной к полю  $\vec{H}$  составляющей импульса  $\vec{p}$ ),  $\delta = (L/c)(\omega_H - \omega)$  - расстройка синхронизма,  $C = \gamma - p_{\parallel} = \text{const}(z)$ ,  $z = Z/L$ ,  $Z$  - расстояние вдоль поля  $\vec{H}$ ,  $L$  - некоторый характерный размер,  $\omega_H = eH_0/mc$ ,  $e$  и  $m$  - заряд и масса электрона,  $c$  - скорость света. При анализе работы КЦАР будем ограничиваться линейным разложением уравнений (1), (2), считая, что необходимые для такого приращения условия выполнены. Кроме того, будем считать, что второй член в правой части уравнения (2) достаточно мал и им можно пренебречь. Полагая, что в области модуляции расстройка синхронизма  $\delta = \delta_0 = 0$ , найдем приращения продольного импульса  $p_{\parallel}$  и фазы  $\alpha$  в этой области:

$$\Delta p_{\parallel 1} = p_{\parallel}(z_1) - p_{\parallel 0} = -\alpha_E I_1 \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}} \cos \alpha_0, \quad \Delta \alpha_1 = \alpha(z_1) - \alpha_0 = 0, \quad (3)$$

где  $I_1 = L_1/L$ ,  $L_1$  - длина области модуляции (см. рис. 1). Здесь и далее индексом "0" отмечены начальные значения переменных. В пространстве дрейфа электроны выходят из синхронизма с волной, так как изменяется частота циклотронного вращения  $\omega_H/\gamma$ . Считая, что

магнитное поле на границе между областью модуляции и пространством дрейфа меняется достаточно плавно, так, что при пересечении этой границы электронами выполняется условие

$$p_{\perp}^2(z)/H(z) = \text{const}(z), \quad (4)$$

в приближении  $|\Delta h|p_{\perp 10}^2/p_{\parallel 0}^2 \ll 1$  найдем возникающую в пространстве дрейфа расстройку синхронизма

$$\delta = \delta_1 = \alpha_H \Delta h \frac{1 - C_0^2}{2C_0 p_{\parallel}(z_1)}, \quad (5)$$

где  $\alpha_H = eH_0 L / mc^2$ ,  $\Delta h = \Delta H / H_0$ ,  $C_0 = \gamma_0 - p_{\parallel 0}$ . Далее, подставляя  $\delta_1$  в уравнение (2) и учитывая (3), найдем приращение  $p_{\parallel}$  в пространстве дрейфа и фазу электрона  $\alpha(z_2)$  на выходе из пространства дрейфа:

$$\Delta p_{\parallel 2} = p_{\parallel}(z_2) - p_{\parallel}(z_1) = -\alpha_E \frac{p_{\perp 0}}{\delta_1} (\sin \alpha(z_2) - \sin \alpha_0); \quad (6)$$

$$\alpha(z_2) = \alpha_0 + l_2 \left[ \alpha_H \Delta h \frac{1 - C_0^2}{2C_0 p_{\parallel 0}^2} + \Delta p_{\parallel 1} \frac{d}{dp_{\parallel}(z_1)} \left( \frac{\delta_1}{p_{\parallel}(z_1)} \right) \right] = \alpha_0 + \varphi_0 + X \cos \alpha_0, \quad (7)$$

где  $l_2 = L_2/L$ ,  $L_2$  - длина пространства дрейфа,

$$\varphi_0 = \alpha_H \Delta h l_2 \frac{1 - C_0^2}{2C_0 p_{\parallel 0}^2}; \quad (8)$$

$$X = 2\alpha_E l_1 \frac{p_{\perp 0}}{p_{\parallel 0}^2} \varphi_0. \quad (9)$$

Выражение (7), описывающее процесс фазовой группировки электронов в КЦАР, хорошо известно из теории пролетного клистрона (см., например, [9]). По аналогии с соответствующими величинами в пролетном клистроне величину  $\varphi_0$  будем называть углом пролета невозмущенного электрона, а величину  $X$  - параметром группировки.

При выводе (7) было предположено, что

$$|\Delta p_{\parallel 1}| \ll p_{\parallel 0} \quad (10)$$

и

$$|\Delta p_{\parallel 2}| \ll |\Delta p_{\parallel 1}|. \quad (11)$$

В дальнейшем нас будет интересовать область только таких значений  $\varphi_0$  и  $X$ , где  $|\varphi_0| \gg 1$  и  $|X| \approx 2$ . Сравнивая (3), (6), (8) и (9), находим, что в этом случае условие (10) выполняется всегда, а условие (11) эквивалентно следующему:

$$l_2/l_2 \ll |\varphi_0|. \quad (12)$$

В области отбора энергии синхронизм между электронами и электромагнитной волной восстанавливается. Подставив выражение для фазы из (7) в (1) и усреднив по начальным фазам  $\alpha_0$  найдем среднее изменение энергии электронов в области отбора энергии

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\gamma} &= -\alpha_{\varepsilon} l_3 \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha_0 + \varphi_0 + X \cos \alpha_0) d\alpha_0 = \\ &= \alpha_{\varepsilon} l_3 \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}} \sin \varphi_0 J_1(X) \end{aligned} \quad (13)$$

и кпд КЦАР

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\overline{\Delta\gamma}}{\gamma_0 - 1} = -\frac{\alpha_{\varepsilon} l_3}{\gamma_0 - 1} \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}} \sin \varphi_0 J_1(X) = \\ &= -\frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0 - 1} \frac{l_3}{l_1 |\varphi_0|} \sin \varphi_0 \frac{X J_1(X)}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $l_3 = L_3/L$ ,  $L_3$  - длина области отбора энергии. Максимум кпд достигается при  $|\varphi_0| = \varphi_{opt} = 2\pi(n-1/4)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) и  $|X| = X_{opt1} = 2, 4$  и равен

$$\eta_{max} = 0,62 \frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0 - 1} \frac{L_3}{l_1 |\varphi_0|}. \quad (15)$$

Как видно из (14) и (15), при увеличении  $L_3$  кпд КЦАР растет. Однако в области значений  $l_3 \sim l_1 |\varphi_0|$ , представляющих наибольший интерес, формулы (14)-(15) становятся неприменимыми. В этом случае кпд КЦАР можно найти численным интегрированием системы уравнений (1), (2) с последующим усреднением приращения энергии электронов по начальным фазам  $\alpha_0$ . В качестве примера подобного рода расчета на рис. 2

приведены зависимости энергии электронов  $\gamma$  и их фазы  $\alpha$  от расстояния  $\alpha$ . Расчет выполнен при  $\gamma_0 = 10$ ,  $\theta_0 = 0,2$ ,  $\varphi_0 = 3,5 \pi$ ,  $X = 1,6$ .

Численно рассчитанные зависимости от  $X$  орбитального кпд  $\eta_1 = \eta/\eta_{s.p.}$ , оптимизированного по длине области отбора энергии  $l_3$ ,

приведены на рис. 3а (здесь величина  $\eta_{s.p.} = [\gamma_0 = (k + k^{-1})/2](\gamma_0 - 1)^{-1}$

- так называемый одночастичный кпд [1],  $k = C_0^{-1} = (\gamma_0 - P_{\parallel 0})^{-1} \approx \omega/\omega_n$  - коэффициент доплеровского преобразования частоты). Расчеты

проводились при  $|\varphi_0| = \varphi_{opt}$ . Кривые 1, 2 и 3 на этом рисунке соответствуют следующим условиям расчета: 1 -  $\gamma_0 = 10$ ,  $\theta_0 = 0,2$ ,  $N_0 = 100$  кГц,  $\Delta N = 47,4$  кГц,  $L_1 = 5$  см,  $L_2 = 20$  см; 2 -  $\gamma_0 = 10$ ,  $\theta_0 = 0,1$ ,  $N_0 = 100$  кГц,  $\Delta N = -36$  кГц,  $L_1 = 5$  см,  $L_2 = 10$  см. Как видно из этого рисунка, кпд КЦАР в широком диапазоне энергий и углов приближенно может быть вычислен по формуле



$$\eta \approx \eta_{s.p.} J_1(|X|). \quad (16)$$

В максимуме (при  $|X| = X_{opt2} = 1,84$ ) КПД равен  $\eta_{max} \approx 0,58 \eta_{s.p.}$  и в некоторых случаях может превышать 50%.

Множитель  $J_1(|X|)$  в формулах (14) и (16) характеризует степень компактности группировки электронов в КЦАР. Естественно, что чем выше качество группировки (чем больше орбитальный КПД  $\eta_1$ ), тем ближе должны быть параметры генератора к тем значениям, которые соответствуют генератору с идеально сгруппированным электронным пучком. В частности, оптимальная длина области отбора энергии  $l_3 = l_{opt}$ , на которой КЦАР имеет наивысший КПД, при возрастании  $\eta_1$  должна стремиться к одночастичной длине торможения

$$l_{s.p.} = \frac{L_{s.p.}}{L} = \frac{k^2}{2\alpha} \left( \frac{p_{10}^3}{3} + p_{10} (1 - k^{-2}) \right). \quad (17)$$

Здесь  $L_{s.p.}$  - наименьшее расстояние, которое должен пройти электрон вдоль магнитного поля, прежде чем он отдаст электромагнитной волне энергию  $\eta_{s.p.} (\gamma_0 - 1) mc^2$ . На рис. 3б приведены рассчитанные численно зависимости  $l_{opt}/l_{s.p.}$  от  $x$  (условия расчета те же, что и на рис. 3а), из которых видно, что

$$l_{opt} \approx l_{s.p.} \quad \text{при} \quad |X| \sim X_{opt2}. \quad (18)$$

Таким образом, формула (17) может служить для оценки  $l_{opt}$ .

Для упрощения выкладок ранее нами было предположено, что электромагнитная волна однородна вдоль  $z$ . В том случае, если амплитуда волны зависит от  $z$ , полученные выше результаты сохраняют свой смысл, если величины  $\alpha_E l_1$  и  $\alpha_E l_3$  заменить на интегралы  $\int_{l_1} \alpha_E(z) dz$  и  $\int_{l_3} \alpha_E(z) dz$ . То же самое относится и к величине  $\Delta h l_2$  в формуле (8), которую следует заменить на интеграл  $\int_{l_2} \alpha_E(z) dz$ , если магнитное поле в пространстве дрейфа неоднородно вдоль  $z$ .

Хотя формула (14) была получена в приближении  $l_3 \ll l_1 |\varphi_0|$ , более тщательные расчеты показывают, что она дает верную оценку для КПД и в случае  $l_3 \ll l_1 |\varphi_0| \sim l_{opt}$ , т.е. величина  $\eta$  зависит от  $l_3$  практически линейно вплоть до  $l_3 \sim l_{opt}$  (в качестве примера см. рис. 2б). В конечном счете именно благодаря близкой к линейной зависимости  $\eta$  от  $l_3$  мы имеем приближенную формулу (16).

В заключение этой части укажем на некоторые геометрические особенности КЦАР с высоким КПД. Поскольку в генераторе с  $\eta \sim 1$  характерные изменения продольных импульсов электронов в области отбора энергии по порядку величины должны быть близки к начальному значению импульса  $|\Delta p_{||3}| \sim p_{||0}$ , то сравнивая (3) и (9), найдем, что

$$l_3 \sim l_1 |\varphi_0| \gg l_1, \quad (19)$$

а из (12) и (19) получим

$$l_3 \sim l_2. \quad (20)$$

Таким образом, в высокоэффективных КЦАР основную часть длины

генератора составляет область отбора энергии. Отметим, что условия (11) и (12), а следовательно, и (20) не являются необходимыми для работоспособности КЦАР и нужны были лишь для наших вычислений. Расчеты, однако, показывают, что при  $l_2 \sim l_{opt}$  кпд КЦАР падает, а при  $l_2 \gg l_{opt}$  этот прибор становится неработоспособным.

2. Зависимость кпд КЦАР от частоты электромагнитной волны. Предположим теперь, что частота электромагнитной волны  $\omega$  несколько отличается от частоты синхронной волны  $\omega_s = k\omega_H$ :

$$\omega = \omega_s + \Delta\omega, \quad (21)$$

что соответствует наличию в области модуляции начальной расстройки синхронизма:

$$\delta = \delta_0 = -\alpha_H \Delta\omega / \omega_s. \quad (22)$$

Повторяя рассуждения разд. 1 для случая, когда  $\delta_0 \neq 0$ , вместо (14) получим следующее выражение для кпд КЦАР:

$$\eta' = - \left( \frac{\sin(\psi_{3/2})}{\psi_{3/2}} \right) \frac{\alpha_E l_3}{\gamma_0 - 1} \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}} \sin \left( \varphi_0 + \varphi_2 + \frac{\psi_1 + \psi_3}{2} \right) \times \quad (23)$$

$$\times J_1 \left[ \left( \frac{\sin(\psi_{1/2})}{\psi_{1/2}} \right) X' \right],$$

где  $H' = 2\alpha_E l_1 (P_{10}/P_{\parallel 0}^2)(\varphi_0 + \psi_2/2)$ ,

$$\psi_1 = \frac{\delta_0 l_1}{P_{\parallel 0}}, \quad \psi_2 = \frac{\delta_0 l_2}{P_{\parallel 0}} \left( 1 + \frac{P_{10}}{2P_{\parallel 0} C_0} \Delta h \right), \quad \psi_3 = \frac{\delta_0 l_3}{P_{\parallel 0}}. \quad (24)$$

Формула (23), описывающая зависимость кпд КЦАР от частоты  $\omega$ , была получена в предположении  $l_3 \ll l_{opt}$ . Однако она, как и (14), может использоваться как приближенная и при  $l_3 \leq l_{opt}$ .

Рассмотрим частный случай, когда  $L_3 \gg l_1, l_2$ . В этом случае  $|\psi_3| \gg |\psi_1|, |\psi_2|$ , и если  $|\psi_3| \leq \pi$ , то влиянием сдвигов фаз  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на кпд можно пренебречь. Тогда из (23) получим ( $|\varphi_0| \approx \varphi_{opt}$ )

$$\eta' = \left( \frac{\sin \psi_3}{\psi_3} \right) \frac{\alpha_E l_3}{\gamma_0 - 1} \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}} J_1(|X|) = \left( \frac{\sin \psi_3}{\psi_3} \right) \eta, \quad (25)$$

где  $\eta$  - кпд КЦАР при  $\Delta\omega = 0$ .

С помощью (25) найдем ширину полосы генерации КЦАР, которую определим как диапазон частот, в котором кпд превышает половину от своего максимального значения:

$$\Delta\omega_g = 2|\Delta\omega_{1/2}| = 3,8 (P_{\parallel 0}/\alpha_H l_3) \omega_s = 0,6 (\omega_s/N_3). \quad (26)$$

Здесь  $\Delta\omega_{1/2}$  - отстройка частоты, при которой  $\eta' = \eta/2$ ,  $N_3 = (1/2\pi) \times (\alpha_H l_3/P_{\parallel 0})$  - количество оборотов, совершаемых электроном за время прохождения им расстояния  $L_3$ .

Если для селекции мод колебаний в КЦАР используется

двухзеркальный резонатор длиной  $L_r$ , то число продольных мод резонатора, попадающих в полосу генерации, по порядку величины равно  $M \sim (L_r/L_3)\gamma_0^2$ . При больших  $\gamma_0$  число мод  $M \geq 1$ . Однако и в этом случае в КЦАР оказывается возможной генерация, поскольку уширение линии генерации является однородным. В случае неоднородного уширения линии, обусловленного, например, разбросом электронов по энергиям, для обеспечения одномодового режима генерации необходимо дополнительно порезивать спектр собственных частот резонатора.

3. Влияние дисперсии электронов по энергиям и углу инжекции на кпд КЦАР. Выражение (14) для кпд было получено для случая когда входной электронный пучок моноэнергетичный. Предположим теперь, что пучок на входе имеет разброс по энергиям, причем функции распределения электронов по энергиям имеет вид

$$f(\gamma(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\gamma(0) - \gamma_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (27)$$

где  $\gamma_0$  - некоторая средняя энергия в распределении,  $\sigma$  - величина дисперсии. Будем предполагать также, что генерация одночастотная, все электроны вводятся в магнитное поле под одним и тем же углом  $\theta_0$  и при  $\gamma(0) = \gamma_0$  начальная расстройка синхронизма  $\delta_0 = 0$ ; кпд каждой отдельной фракции электронов с фиксированным значением энергии  $\gamma(0)$  в этом случае описывается выражением (23), в котором величины  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi_3$  в линейном по  $\Delta\gamma = \gamma(0) - \gamma_0$  приближении равны

$$\psi_1 = \frac{\alpha_H I_1 \gamma_0}{C_0 P_{\parallel 0}^2} \left( \cos^2 \theta_0 - \frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0} \right) \Delta\gamma = \alpha_1 \Delta\gamma; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{\alpha_H I_2 \gamma_0}{C_0 P_{\parallel 0}^2} \left( \cos^2 \theta_0 - \frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0} \right) \Delta\gamma - \frac{\alpha_H \Delta h I_2 \gamma_0}{P_{\parallel 0}^3} \cos^2 \theta_0 \Delta\gamma = \\ &= \alpha_2 \Delta\gamma; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\psi_3 = \frac{\alpha_H I_3 \gamma_0}{C_0 P_{\parallel 0}^2} \left( \cos^2 \theta_0 - \frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0} \right) \Delta\gamma = \alpha_3 \Delta\gamma. \quad (30)$$

Полный кпд КЦАР можно вычислить, выполнив усреднение (23) по  $\gamma(0)$ :

$$\bar{\eta} = \int_1^{\infty} \eta'(\gamma(0)) f(\gamma(0)) d(\gamma(0)). \quad (31)$$

В представляющих практический интерес схемах КЦАР с высоким кпд как это было показано выше, выполняется условие  $I_3 \geq I_1$  и, следовательно, согласно (28) и (30)  $|\psi_3| \gg |\psi_1|$ . Поэтому влиянием множителя  $\sin(\psi_1/2)/(\psi_1/2)$  в формуле  $\eta'$  (23) можно пренебречь, и интегрирование дает

$$\bar{\eta} = \eta \frac{\sqrt{\pi/2}}{\alpha_3 \sigma} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{(\alpha_1/2 + \alpha_2 + \alpha_3)\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(\alpha_1/2 + \alpha_2)\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right] = \eta \Gamma_{\sigma}, \quad (32)$$

где  $\eta$  - кпд КЦАР при  $\sigma = 0$  (здесь предполагается, что  $\sigma < \gamma_0$ ).

В случае моноэнергетичного пучка, который имеет разброс по углу инжекции  $\theta(0)$  с функцией распределения электронов по  $\theta(0)$ ,

$$f(\theta(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \Sigma} \exp\left[-\frac{(\theta(0) - \theta_0)^2}{2 \Sigma^2}\right], \quad (33)$$

получим аналогичный (32) результат

$$\bar{\eta} = \eta \frac{\sqrt{\pi/2}}{A_3 \Sigma} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{(A_1/2 + A_2 + A_3)\Sigma}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(A_1/2 + A_2)\Sigma}{\sqrt{2}}\right) \right] = \eta \Gamma_{\Sigma} \quad (34)$$

Здесь  $\theta_0$  - некоторый средний угол инжекции,  $\Sigma$  - дисперсия по углу

инжекции,  $A_1 = \frac{\alpha_H I_1 P_{10}}{C_0 P_{\parallel 0}}$ ,  $A_2 = \frac{\alpha_H I_2 P_{10}}{C_0 P_{\parallel 0}} (1 + \Delta h)$ ,  $A_3 = \frac{\alpha_H I_3 P_{10}}{C_0 P_{\parallel 0}}$ . Хотя формулы (32), (34) были получены в приближении  $l_3 \ll l_{\text{opt}}$ , численные расчеты показывают, что они позволяют оценивать допустимые значения  $\sigma$  и  $\Sigma$  и в случае  $l_3 \sim l_{\text{opt}}$ .

Ограничение на дисперсию электронов по энергии согласно (32) имеет вид

$$\frac{\sigma}{\gamma_0} \leq \frac{1}{\gamma_0} \min \left( \frac{1}{|a_1 + 2a_2|}; \frac{1}{|a_3|} \right). \quad (35)$$

Как правило,  $|a_3| > |a_1 + 2a_2|$ , поэтому ограничение на  $\sigma$  можно записать как

$$\frac{\sigma}{\gamma_0} \leq \frac{P_{\parallel 0}}{\alpha_H I_3} \left| \frac{C_0 P_{\parallel 0}}{\gamma_0^2 (\cos^2 \theta_0 - P_{\parallel 0} / \gamma_0)} \right| \sim \frac{1}{N_3}. \quad (36)$$

Аналогично ограничение на дисперсию по углу инжекции  $\Sigma$  будет

$$\frac{\Sigma}{\theta_0} \leq \frac{P_{\parallel 0}}{\alpha_H I_3} \frac{C_0}{P_{10} \theta_0} \sim \frac{1}{N_3 \gamma_0^2 \theta_0^2}. \quad (37)$$

Число оборотов в области отбора энергии по порядку величины равно  $N_3 \approx (\gamma_0 / 2\pi) (H_0 / E_H)$  и при больших интенсивностях электромагнитной волны может быть меньше десяти. В этом случае разброс электронов по энергии и углу инжекции без большого ущерба для кпд может составлять несколько процентов.

Отличительной особенностью эффекта ЦАР является то, что в синхронизме с одной и той же электромагнитной волной одновременно могут находиться электроны, имеющие разные энергии. Угол инжекции электронов в магнитное поле  $\theta(0)$  при этом должен быть связан с энергией  $\gamma(0)$  соотношением

$$\theta(0) = \arccos[(\gamma(0) - C_0) / (\sqrt{\gamma^2(0) - 1})]. \quad (38)$$

Это свойство, вообще говоря, позволяет использовать в генераторах на ЦАР электронные пучки с довольно большим разбросом по энергии. Однако осуществить на практике зависимость угла инжекции  $\theta(0)$  от  $\gamma(0)$  в соответствии с (38) довольно сложно. Степень приближения зависимости  $\theta(0)$  от  $\gamma(0)$  к закону (38) определяет допустимый разброс электронов

по энергиям. Так, например, при  $\theta(0) = \theta_0 = \text{const}(\gamma(0))$  ограничение на дисперсию по энергии имеет вид (36). При наличии линейной зависимости между  $\theta(0)$  и  $\gamma(0)$  вида

$$\theta(0) = \theta_0 + \frac{\gamma_0 \cos \theta_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{(\gamma_0^2 - 1) \sin \theta_0} (\gamma(0) - \gamma_0) \quad (39)$$

это ограничение становится более мягким:

$$\sigma/\gamma_0 \leq 1/\sqrt{N_3} \quad \text{и т. д.} \quad (40)$$

Ограничения на энергетический разброс типа (36) и (40) связаны с выходом электронов из синхронизма с электромагнитной волной при больших значениях  $|\Delta\gamma|$ . При стремлении зависимости  $\theta(0)$  от  $\gamma(0)$  к закону (38) эти ограничения становятся все более мягкими, а при выполнении (38) исчезают совсем. В КЦАР, однако, существует еще одно ограничение на разброс электронов по энергии, которое является характерным для генераторов клистронного типа (см., например, [10]). Получим его. Для этого предположим, что  $\gamma(0)$  и  $\theta(0)$  связаны между собой соотношением (39). Тогда величины  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi_3$  в линейном по  $\Delta\gamma$  приближении будут равны

$$\psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \psi_2 = -\frac{2\varphi_0}{P_{\parallel 0}} \Delta\gamma. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (23) и выполняя усреднение по формуле (31), получим

$$\bar{\eta} = \eta \exp\left[-2(\varphi_0 \sigma / P_{\parallel 0})^2\right]. \quad (42)$$

Из (42) найдем ограничение на разброс электронов по энергии:

$$\frac{\sigma}{\gamma_0} \leq \frac{1}{|\varphi_0|} \frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0} \sim \frac{1}{|\varphi_0|}. \quad (43)$$

Дисперсия, при которой  $\eta = \eta/2$ , равна  $\sigma = \sigma_{1/2} = \sqrt{2 \ln 2} P_{\parallel 0} / 2|\varphi_0|$ . Максимум  $\sigma_{1/2}$  достигается при  $|\varphi_0| = 1,5\pi$  и равен  $\sigma_{1/2 \max} = 0,125 P_{\parallel 0}$ . Поскольку при  $\gamma_0 > 1$   $P_{\parallel 0} \approx \gamma_0$ , то в этом случае величина  $\sigma_{1/2 \max}$  составляет 12,5% от начальной энергии электронов.

4. Стартовый и оптимальный токи КЦАР. Запишем уравнение баланса энергии электромагнитного излучения в резонаторе

$$2V \frac{d}{dt} \left( \frac{E_w^2 + H_w^2}{8\pi} \right) = P_{\text{tr}} - P_{\text{out}}, \quad (44)$$

где  $P_{\text{tr}} = \eta I (\gamma_0 - 1) mc^2/e$  - мощность, передаваемая от электронного пучка к электромагнитному излучению,  $P_{\text{out}} = c(E_w^2/4\pi)S(1-R_1R_2)$  - мощность излучения, покидающего резонатор. Выше использованы следующие обозначения:  $t$  - время,  $H_w$  - магнитное поле волны,  $I$  - ток пучка,  $S$  - сечение пучка электромагнитного излучения в резонаторе,  $V = SL_r$  - объем, занятый излучением,  $L_r$  - длина резонатора,  $R_1$  и  $R_2$  -

коэффициенты отражения зеркал резонатора (предполагается, что  $(1 - R_1 R_2) \ll 1$ ). Коэффициент 2 в левой части уравнения (44) учитывает наличие в резонаторе двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Поскольку в электромагнитной волне  $E_w = H_w$ , то с учетом (9) и (14) уравнение (44) можно переписать в виде  $(|\varphi_0| \approx \varphi_{opt})$

$$\frac{4L_r}{c(1-R_1R_2)} \frac{dX}{dt} = 2 \frac{I}{I_{st}} J_1(X) - X, \quad (45)$$

где  $I_{st} = I_0 \frac{P_{\parallel 0}^3}{P_{\perp 0}^2} \frac{S(1-R_1R_2)}{4\pi L_1 L_3 |\varphi_0|}$ ,  $I_0 = \frac{mc^3}{e} = 17$  кА. Стационарные

ненулевые решения уравнения (45) существуют лишь при условии  $I > I_{st}$ , поэтому  $I_{st}$  является стартовым током КЦАР. Вообще говоря, при  $I > I_{st}$  уравнение (45) имеет много стационарных решений. нас будет интересовать только наименьшее по абсолютной величине ненулевое решение, поскольку именно оно соответствует наиболее высоким значениям КПД. Из (45) следует, что это решение устойчиво.

Вычислив  $X$  из уравнения (45) и подставив его в выражение для КПД (14), можно определить  $\eta$  в зависимости от тока можно получить и в явном виде. Для этого заменим в уравнении (45) функцию Бесселя ее разложением вблизи нуля  $J_1(X) = \frac{X}{2} - \frac{X^3}{16} + \frac{X^5}{384} - \frac{X^7}{18432}$  и получим стационарное решение этого уравнения

$$X = 2\sqrt{2} \left[ 2 + (A-B)^{1/3} - (A+B)^{1/3} \right]^{1/2}, \quad (46)$$

где  $A = 3 \left( 9 \frac{I_{st}^2}{I^2} + 2 \frac{I_{st}}{I} + 1 \right)^{1/2}$ ,  $B = 9 \frac{I_{st}}{I} + 1$ . Подставляя  $X$  из (46) в (14), получим для  $\eta$  следующую формулу:

$$\eta = 2 \frac{P_{\parallel 0}}{\gamma_0 - 1} \frac{l_3}{l_1 |\varphi_0|} \frac{I_{st}}{I} \left[ 2 + (A-B)^{1/3} - (A+B)^{1/3} \right]. \quad (47)$$

Уравнение (45), как и выражение для КПД (14), имеет смысл лишь при выполнении условия  $l_3 < l_1 |\varphi_0|$ . В этом случае максимум КПД достигается при значении параметра группировки  $|X| = X_{opt1} = 2,4$ . Подставляя  $X_{opt1}$  в (45), получим следующее решение для оптимального тока (КПД, соответствующий этому току, определяется по формуле (15)):

$$I_{opt1} = \frac{X_{opt1}}{2J_1(X_{opt1})} I_{st} = 2,3 I_{st}. \quad (48)$$

При  $l_3 = l_{opt}$  уравнение баланса энергии излучения в резонаторе (44) с учетом выражения для КПД (16) преобразуется к виду

$$\frac{4L_r}{c(1-R_1R_2)} X \frac{dX}{dt} = 2 \frac{I}{I_{st}} \frac{l_0 \varphi_0}{l_{opt}} \frac{P_{\perp 0}^2}{C_0 P_{\parallel 0}} J_1(X) - X^2. \quad (49)$$

Подставляя в (49) в соответствии с (18)  $l_{opt} = l_{s.p.}$ , получим

выражение для оптимального тока, при котором КЦАР имеет максимальный КПД ( $\eta_{\max} \approx 0,58\eta_{s.p.}$ ):

$$I_{opt2} = \frac{X_{opt2}}{3J_1(X_{opt2})} \left( 1 + \frac{1-C_0^2}{C_0 P_{II0}} \right) I_{st} = 1,06 \left( 1 + \frac{1-C_0^2}{C_0 P_{II0}} \right) I_{st}. \quad (50)$$

В зависимости от  $\theta_0$   $I_{opt2}$  может изменяться в пределах  $1,06I_{st} < I_{opt2} < 3,2I_{st}$ . Формула (50), как и использованные при ее выводе формулы (16) и (18), является приближенной и позволяет получать лишь оценку оптимального тока.

Если входной электронный пучок имеет разброс по энергии или углу инжекции, то стартовый и оптимальный токи КЦАР возрастает, соответственно, в  $\Gamma_\sigma^{-1}$  или в  $\Gamma_\epsilon^{-1}$  раз.

Как известно [10], клистронная схема генератора по сравнению с монотронной имеет значительно меньший стартовый ток. Так, например, в КЦАР с большой добротностью резонатора и высокочастотным электронным пучком стартовый ток может составлять порядка  $10^{-3}$  А. В то же время на основе КЦАР возможна разработка генераторов и усилителей мультигигаваттной мощности с током лучка в несколько килоампер. Заметим, что стартовый и оптимальный токи КЦАР пропорциональны величине  $\sigma_{1/2}$ , поэтому генераторы с низким качеством электронного пучка должны иметь сильноточный пучок, в то время как в маломощных генераторах со слабыми токами предъявляются высокие требования к качеству электронного пучка.

В заключение этого раздела рассмотрим КЦАР в режиме малого сигнала ( $|X| \ll 1$ ). В этом случае функцию Бесселя  $J_1(x)$  можно заменить ее разложением  $J_1(x) = x/2$  и уравнение (45) преобразуется к виду

$$\frac{4L_r}{c(1-R_1R_2)} \frac{dX}{dt} = \frac{I-I_{st}}{I_{st}} X. \quad (51)$$

Интегрируя его, найдем

$$X(t) = X(0)e^{t/\tau}, \quad E_w(t) = E_w(0)e^{t/\tau}, \quad P_{out}(t) = P_{out}(0)e^{2t/\tau}, \quad (52)$$

где  $\tau = 4L_r / [c(1-R_1R_2)] [I_{st} / (I-I_{st})]$ . Формулы (52) описывают процесс нарастания амплитуды и мощности электромагнитной волны в КЦАР с момента его включения. Ясно, что при работе КЦАР с импульсными электронными пучками необходимо, чтобы длительность импульса тока была много больше характерного времени  $\tau$ .

5. Другие схемы КЦАР. До сих пор мы рекомендовали схему КЦАР, в которой электроны в пространстве дрейфа выводятся из синхронизма с электромагнитной волной благодаря скачкообразному изменению магнитного поля на границе между областью модуляции и пространством дрейфа. Эту же задачу - вывод электронов из синхронизма с волной - можно решать и другим способом, а именно: сделать неоднородным распределение потенциала вдоль пути движения электронов. В этом случае электроны в пространстве дрейфа выходят из синхронизма с волной за счет изменения их кинетической энергии. Угол пролета невозмущенного электрона  $\phi_0$  и параметр группировки  $X$  в случае, когда пространство дрейфа представляет собой прямоугольную потенциальную

яму (или горб), равны

$$\varphi_0 = - \frac{\alpha_n l_2}{P_{\parallel 0}^2} \frac{eU_0}{mc^2}, \quad X = - \alpha_{\varepsilon 1} \alpha_n l_2 \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}^4} \frac{eU_0}{mc^2}, \quad (53)$$

где  $U_0$  - разность потенциалов между пространством дрейфа и область модуляции. Все остальные формулы, полученные выше, при соответствующей замене  $\varphi_0$  и  $X$  на (53) применимы и для КЦАР с пространством дрейфа в виде потенциальной ямы.

Необходимая для работы КЦАР величина  $|U_0|$  оказывается довольно большой, что является недостатком этой схемы. В то же время данная схема может представлять интерес, поскольку позволяет изменением разности потенциалов  $U_0$  осуществлять модуляцию мощности выходного излучения. Значение  $|U_0|$  можно уменьшить, если объединить схему КЦАР с потенциальным пространством дрейфа со схемой, изображенной на рис. 1. В этом случае  $\varphi_0$  и  $X$  запишутся как

$$\varphi_0 = \alpha_n \Delta h l_2' \frac{1 - C_0^2}{2C_0 P_{\parallel 0}^2} - \alpha_n l_2'' \frac{1}{P_{\parallel 0}^2} \frac{eU_0}{mc^2}, \quad X = 2\alpha_{\varepsilon 1} l_1 \frac{P_{10}}{P_{\parallel 0}^2} \varphi_0. \quad (54)$$

Здесь длина "магнитного" пространства дрейфа  $l_2'$  может не совпадать с длиной "потенциального" пространства дрейфа  $l_2''$ .

КПД КЦАР можно повысить, применяя каскадную группировку [9]. В табл. 1 приведены результаты численных расчетов КПД "трехрезонаторного" КЦАР (т.е. такой схемы КЦАР, в которой имеются две области модуляции и два пространства дрейфа). Углы пролета невозмущенного электрона в первом и во втором пространствах дрейфа и соответствующие им параметры группировки обозначены в таблице как  $\varphi_0'$ ,  $\varphi_0''$  и  $X'$ ,  $X''$ . Как видно из таблицы, КПД "трехрезонаторного" КЦАР в отдельных случаях может достигать 60%.

Таблица 1

$\gamma_0$	$\theta_0$	$\varphi_0'$	$X'$	$\varphi_0''$	$X''$	$k$	$\eta_{\perp}$	$\eta$
2	0,5	12π	1,8	3,5π	1,8	2,08	0,73	0,53
5	0,4	-8π	-1,4	-3,5π	-1,5	2,05	0,64	0,60
10	0,2	-8π	-1,3	-3,5π	-1,6	4,03	0,64	0,56

Высокое качество группировки электронов в КЦАР, кроме всего прочего, позволяет эффективно осуществлять рекурпацию энергии отработанного электронного пучка, поскольку большая часть электронов на выходе из генератора сосредоточена в узком энергетическом диапазоне (см. рис. 2). Генератор с простейшей одноступенчатой системой рекурпации имеет наивысший КПД если низкоэнергетичные электроны отработанного пучка тормозятся в электростатическом поле рекурператора до полной остановки. В этом случае доля возвращаемой в рекурператоре энергии по отношению к начальной энергии пучка составляет величины  $1 - \eta_{\text{э.р.}}$ , а полный КПД генератора становится равным  $\eta_{\perp}$  независимо от значения  $\eta_{\text{э.р.}}$ . В "трехрезонаторном" КЦАР, например, полный КПД в данном случае может превышать 70%.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Офицеров М. М. // Сб.: Релятивистская высокочастотная электроника. - Горький: ИПФ АН СССР, 1983. Вып. 3. С. 127.
2. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Коровин С. Д. и др. // Сб.: Релятивистская высокочастотная электроника. - Горький: ИПФ АН СССР, 1984. Вып. 4. С. 119.
3. Братман В. Л., Новожилова Д. В., Сергеев А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. N 10. С. 1261.
4. Жураховский В. А. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 585.
5. Sprangle P., Tang C. M., Serafim P. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 49. N 18. P. 1154.
6. Смирнов Г. Т. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 15. С. 1366.
7. Смирнов Г. Е. // Тезисы докл. VII Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. - Томск, 1988. Ч. 1. С. 268.
8. Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. N 6. С. 902.
9. Клистроны. - М.: Сов. радио. 1952.
10. Винокуров Н. А., Скринский А. Н. // Сб.: Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. - Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 204.

Институт электрофизики  
Уральского отделения АН СССР

Поступила в редакцию  
28 сентября 1989 г.

## THE THEORY OF CYCLOTRON AUTORESONANCE KLYSTRON

*G. T. Smirnov*

A cyclotron autoresonance klystron (CARK), a new type of cyclotron autoresonance maser, is theoretically investigated. The formulae of efficiency, threshold current and optimum current are obtained with taken into account and initial electron beam energy spread and pitch angle spread. It is shown, that the efficiency of the CARK, which is constructed by the analogy with a two-resonator klystron, may be more than 50%, and the efficiency of the CARK, which is constructed by the analogy with a three-resonator klystron, reaches 60%. The CARK relatively intensive to the electron beam quality. For example, in the powerful CARK the initial electron beam energy spread and pitch angle spread may amount several per cent. without the sufficient loss of efficiency.

УДК 533.951

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСПОРТИРОВКИ В ПЛОТНОМ ГАЗЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА. II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

*М. А. Власов, А. А. Королев, Ю. Д. Носач, В. В. Попович, .  
А. В. Рыхлов, В. А. Сафонов*

Приводятся результаты экспериментальных исследований взаимодействия квазистационарного релятивистского электронного пучка (300 кэВ, 20 А, 500 мкс, 0,3 см) с плотным газом. Исследования выполнены в воздухе при атмосферном давлении и с целью моделирования транспортировки магнитоограниченного РЭП - при пониженном давлении (3+300 Тор). Изучена динамика прорежения прогреваемого пучком канала и определены предельные длины транспортировки его в плотном газе. Полученные результаты сопоставляются с рассмотренной ранее теоретической моделью.

Экспериментальные исследования взаимодействия квазистационарного релятивистского электронного пучка (РЭП) с плотным газом проводились в воздухе в широком диапазоне давлений. В качестве источника электронов использовался одноазорный ускоритель со сферической оптикой Пирса и электростатическим компрессором, формирующим равновесный пучок с энергией  $E = 300$  кэВ, током  $I_b \approx 25$  А, длительностью импульса до 500 мкс и радиусом  $0,2 + 0,25$  см. Для выпуска пучка в плотный газ использовалась система дифференциальной откачки и импульсный вакуумный затвор [1], что позволяло поддерживать в ускорителе давление  $P \approx 10^{-5}$  Тор и формировать необходимый газовый режим в компрессоре. Исследования транспортировки РЭП в камере дрейфа и выходных секциях системы перепада давления подробно описаны в работах [2-4]. На выходе из затвора пучок имел параметры:  $I_b \approx 20$  А, радиус  $R_0 \approx 0,3$  см, среднеквадратичная дисперсия по поперечным скоростям  $\overline{\theta_1^2} \approx 10^{-3}$ .

**Диагностическая аппаратура.** Для получения информации о пространственном и временном изменении параметров пучка в газе в прогреваемом газе использовалась диагностическая аппаратура, включающая систему подвижных коллекторов, датчик рентгеновского излучения, интерферометр Маха - Цендера, фотографическую аппаратуру.

Поперечный размер электронного пучка определялся по отпечаткам на алюминиевом или графитовом коллекторе, по диаметру образующегося отверстия в тонкой алюминиевой мишени ( $\delta \sim 1,5$  мм), устанавливаемой на любом расстоянии от плоскости инъекции РЭП в газ. Проходящий в это отверстие ток пучка регистрировался дополнительным коллектором, установленным за мишенью. Все токовые измерения проводились с помощью поясов Роговского.

Фотографирование плазменного канала осуществлялось фотокамерой с электронно-оптическим преобразователем с коэффициентом усиления -50 и разрешающей способностью не хуже 30 штр./мм. Время экспозиции могло изменяться в пределах от 1 мкс до 1 мс.

С целью получения информации о концентрации газа в прогретом канале проводилась регистрация тормозного излучения, возникающего в результате взаимодействия электронного пучка со средой. Как известно, интенсивность тормозного излучения не зависит от температуры газа, а определяется только плотностью среды и концентрацией электронов в пучке. Для определения абсолютных значений необходимо учитывать поглощение рентгеновского излучения на пути к детектору и проводить калибровку используемых датчиков излучения. Однако при исследовании динамики прорежения газа в канале возможно ограничиться относительными измерениями и тем самым существенно упростить методику обработки экспериментальных результатов. Для регистрации излучения использовалась камера-обскура с детектором из органического сцинтиллятора и фотоумножителем.

Импульс давления на фронте возникающей в атмосфере ударной волны и скорость ее распространения регистрировались пьезодатчиком, конструкция которого описана в [5]. Электромагнитное излучение из плазменного канала исследовалось с применением внешних антенн, перекрывающих диапазон частот от 10 до 35 ГГц.

В качестве основного прибора для регистрации прорежения газа в канале применялся интерферометр с источником излучения на гелий-неоновом лазере. Регистрация интерференционной картины осуществлялась электронно-оптическим преобразователем с экспозицией ~2,5 мкс. Переход от интегральных по линии наблюдения величин (сдвиг интерференционных полос) к соответствующим локальным параметрам газа (показатель преломления) проводился путем численного решения уравнения Абея [6]. Оценки параметров плазмы в канале транспортировки РЭП показали, что регистрируемое интерферометром изменение показателя преломления среды ( $\Delta n_p$ ) обусловлено, главным образом, изменением плотности газа ( $\rho/\rho_0$ ), а вклад электронной компоненты в рефракцию излучения незначителен. В этом случае

$$\rho/\rho_0 \approx (1 - 0,342 \cdot 10^{-4} \Delta n_p) / (1 + 0,28\alpha), \quad (1)$$

где  $\rho_0$  - невозмущенная плотность среды,  $\alpha$  - степень диссоциации молекул в прогреваемом канале. Используя равновесные значения  $\alpha$  для воздуха при высоких температурах [7], можно показать, что вклад диссоциации в (1) лежит в пределах ошибки измерений  $\rho/\rho_0$  и, следовательно, величиной  $\alpha$  можно пренебречь.

Транспортировка РЭП в воздухе при атмосферном давлении. В экспериментах в воздухе при атмосферном давлении пучок принимался на коллектор, расположенный на расстоянии ~40 см от затора. Ток пучка составлял  $18 + 20$  А, характерное время нарастания фронта импульса тока  $\tau_{\Phi} \approx 4$  мкс.

Измерения поперечного размера пучка по диаметру отверстия в тонкой алюминиевой мишени и по отпечаткам на графитовом и алюминиевом коллекторах показали, что на расстоянии  $z = 6,5$  см от критического сечения сопла затвора [3] диаметр пучка составляет ~0,9 см. При этом через отверстие в мишени (0,8 см) проходит до 80% от тока пучка.

Фотографии плазменного канала свидетельствуют о существенном увеличении поперечного размера пучка с расстоянием от затвора в соответствии с законом рассеяния. Одновременно наблюдается отчетливо выраженный эффект прогрева газа, проявляющийся в образовании цилиндрического "керна" пучка, продольный размер которого увеличивается со временем.

Осциллограмма сигнала с датчика рентгеновского излучения подтверждает прорежение газа в канале - после некоторой задержки во времени ( $18 + 20$  мкс) амплитуда сигнала уменьшается, что говорит о

понижении плотности среды. Продолжительность динамической стадии расширения газа [8] определяется интервалом  $t_{\text{дин}} \approx 180 + 250$  мкс, после чего наступает равновесие в балансе энергии в прогретом канале и  $\rho_{\text{мин}} \approx \text{const}$ . При этом измеренное относительное изменение плотности среды достигает значений  $\rho_0/\rho_{\text{мин}} \approx 28+30$  при  $I_b \approx 18+20$  А. Точность измерений составляла  $\pm 10\%$ .

Фотометрирование снимков плазменного канала позволило определить зависимость поперечного размера наиболее ярко светящейся зоны от времени. Из результатов обработки следует  $t_{\text{дин}} \approx 150 + 200$  мкс. Измерения проводились при  $z = 9$  см от плоскости затвора.

Скорость распространения ударной волны, возникающей в процессе расширения газа из прогретого канала, измерялась пьезодатчиками на расстояниях от 1 до 5 см от оси пучка при  $z = 4$  см. Величина скорости оказалась равной  $v \approx 5 \cdot 10^4$  см/с, а изменение давления в ударной волне составляло  $P/P_0 \approx 1,5$ .

При работе с интерферометром исследуемая область охватывала начальный участок транспортировки РЭП в газе и составляла  $\sim 10$  см. Оптическая схема настраивалась таким образом, чтобы место локализации интерференционной картины совпадало с плоскостью пучка. Полученные интерферограммы хорошо иллюстрируют динамику прорезания канала, сопровождающуюся радиальным расширением газа с образованием ударной волны. На рис. 1 (см. на вклейке) приводятся зависимости плотности газа на оси канала от времени при  $z = 0, 2, 4, 6$  см - кривые а, б, в, г соответственно. Видно, что в законе изменения  $\rho/\rho_0$  от  $t$  существует временная задержка  $\sim 20$  мкс. Полученные результаты хорошо согласуются с показаниями датчика рентгеновского излучения и результатами обработки фотоснимков плазменного канала. Зависимости изменения показателя преломления среды и плотности газа от  $r$  при  $z=2$  см показаны на рис. 2 для различных моментов времени (30, 50, 70, 100 и 150 мкс) от начала импульса тока.

Измерения поперечной координаты фронта (волны) сжатия показали, что вначале скорость волны не превышает скорости звука и только к 70-й микросекунде от начала импульса тока на расстоянии  $\sim 1,8$  см от оси канала формируется ударная волна. Уплотнение газа на фронте волны достигает  $\rho/\rho_0 \approx 1,2$ , что согласуется с показаниями пьезодатчиков.

С использованием СВЧ аппаратуры проводилось просвечивание плазмы излучением на частоте 75 ГГц. Момент записи СВЧ сигнала практически совпадал с началом импульса тока на приемный коллектор, что позволило определить нижнюю границу концентрации плазмы в канале:  $n_e > 8 \cdot 10^{13}$  см $^{-3}$ .

Из обработки результатов коллекторных измерений, интерферограмм и фотографий канала следует, что предельная длина распространения электронного пучка в газе, определенная в [8], при атмосферном давлении в нашем случае составляет  $L_{\infty} \approx (11,4 \pm 1)$  см, в холодном газе  $L_0 \approx 3,75$  см.

Транспортировка РЭП в воздухе при пониженном давлении. Из зависимости предельной длины транспортировки РЭП в плотном газе от параметров пучка и среды (выражение (6) в работе [8]) следует критерий подобия

$$L_{\infty} \sim I_b/P. \quad (2)$$

Отсюда вытекает возможность при пониженном давлении среды осуществить моделирование распространения сильноточного

магнитоограниченного пучка в плотном газе при рассматриваемых параметрах РЭП. С этой целью электронный пучок через систему дифференциальной откачки и импульсный затвор инжектировался в камеру дрейфа ( $d = 25$  см,  $l = 150$  см), заполненную воздухом при  $P = 1 + 300$  Тор.

Транспортировка РЭП в воздухе при пониженном давлении сопровождалась высокочастотной неустойчивостью пучка, приводящей к "зажиганию" пучково-плазменного разряда [9]. Исследования этой неустойчивости подробно описаны в [10,11]. В результате прогрева среды электронным пучком наблюдалось расширение области существования пучково-плазменного разряда до  $P \leq P_{гр} = 63$  Тор. При этом, как показывают оценки, величина граничного давления должна увеличиваться с током пучка:  $P_{гр} \sim I_b^{0,45}$ .

С целью расширения области устойчивой транспортировки РЭП были приняты меры по стабилизации наблюдаемой неустойчивости. Для этого в камере дрейфа был организован продольный градиент концентрации, который создавался стационарным напуском газа через натекающий, установленный вблизи затвора, и его откачкой в конце трубы дрейфа. Стабилизация неустойчивости наблюдалась при  $\rho(0)/\rho(l) \geq 1,5$ . Создаваемый таким образом градиент концентрации в газе обеспечивал устойчивость РЭП при  $l \leq 150$  см. Никаких других неустойчивостей пучка при его транспортировке в камере дрейфа обнаружено не было.

Исследования геометрии пучка в камере дрейфа проводились по фотографиям плазменного канала и коллекторным измерениям. На основании полученных результатов восстанавливалась зависимость поперечного размера РЭП от продольной координаты  $R(z)$  и определялись величины  $L_\omega$ , представленные в табл. 1.

Для фиксированных значений  $P$  решалось уравнение баланса энергии в прогревом канале и определялась температура газа  $T$  и степень его прорежения  $\rho_0/\rho_{мин}$ . Результаты расчетов также представлены в табл. 1, в которую включены и результаты для воздуха при атмосферном давлении. Величина  $L$  для  $P = 3$  Тор определялась путем экстраполяции экспериментальной зависимости  $R(z)$  в соответствии с законом изменения поперечного размера магнитоограниченного РЭП [8].

Таблица 1

$P$ , Тор	$T$ , эВ	$\rho_0/\rho_{мин}$	$L_\omega$ , см	Обозначения на рис. 3
760	0,69	56	11,4	o
300	0,63	53	14,0	Δ
50	0,50	34	33,0	v
20	0,40	22	61,5	□
10	0,34	18	87,0	<
3	0,25	12	243	▷

**Обсуждение экспериментальных результатов.** По интерферограммам, полученным на начальной стадии прорежения газа ( $\sim 20 + 30$  мкс), возможно оценить область максимального энерговыделения. В эксперименте уверенно регистрировалось изменение плотности газа в канале транспортировки на  $\sim 3\%$  от  $\rho_0$ . Обработка интерферограмм показала, что в плоскости затвора ( $z = 0$ ) уменьшение плотности наступает примерно на 10-й микросекунде от начала импульса тока. При этом протяженность области возмущения  $\rho$  по  $z$  составляет  $\sim (3,5 \pm \pm 0,5)$  см, что совпадает с величиной  $L_0$ .

С целью оценки доли энергии, пошедшей на нагрев газа в равновесном состоянии ( $t \geq 200$  мкс), определялось приращение

внутренней энергии газа  $\Delta U_T$  в результате его нагрева электронным пучком. На единицу длины

$$\Delta U_T = \frac{1}{\gamma_p - 1} \int_0^{\infty} k \Delta T(r) n(r) 2\pi r dr, \quad (3)$$

где  $\gamma_p$  - показатель адиабаты,  $n(r)$  - концентрация газа,  $\Delta T = T - T_0$  - приращение температуры. Величина  $n(r)$  определялась из интерферограмм при  $t = 200$  мкс, когда состояние газа в канале близко к равновесному.

С учетом экспериментальных зависимостей  $I_b(t)$  и  $\rho(t)$  находим, что ионизационные потери энергии в начале составляют  $Q_{\text{ион}} = 2,73$  Дж. Рассмотрим два крайних случая. При адиабатическом законе изменения состояния среды из (3) следует, что на нагрев газа затрачивается энергия  $\Delta U_T = 2,68$  Дж, что составляет 98% от ионизационных потерь. Для изобарического процесса получаем  $\Delta U_T = 1,92$  Дж, т.е. 70% от  $Q_{\text{ион}}$ . Остальная энергия расходуется на работу, совершаемую при расширении газа, уносится из объема излучением.

На рис. 1 пунктиром показан расчетный закон изменения плотности газа в канале -  $\rho(t)$  при использовании вместо  $q_{\text{ион}}$  величины  $q = 0,8q_{\text{ион}}$  в выражении (10) работы [8] (кривые 1,2). Видно, что с экспериментальными результатами (зависимость  $\alpha$  при  $z = 0$ ) хорошо согласуется кривая 2, полученная при значении удельной теплоемкости газа  $c_v = (7/2)k$ , кривая 1 соответствует  $c_v = (5/2)k$ . Это может говорить о влиянии колебательных степеней свободы молекул на нагрев газа в канале пучка.

Поток энергии в колебательные степени свободы существенно зависит от средней энергии электронов плазмы [13] -  $\bar{\epsilon}_e$  и при  $\bar{\epsilon}_e \sim 0,4 + 1,0$  эВ может составлять от 20 до 90% от передаваемой газу энергии. Для разряда, контролируемого электронным пучком, величина  $\bar{\epsilon}_e$ , а значит, и доля передаваемой газу энергии, зависят от квазистационарной степени ионизации газа:  $n_e/n_0$  [14]. Оценим  $n_e$  в нашем случае. С помощью интерферометра можно было зафиксировать концентрацию плазменных электронов  $n_e \geq 3,5 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Причем при  $t < 20$  мкс изменения  $n_e$  не завуалированы изменением показателя преломления за счет прорежения среды. Поскольку на начальной стадии взаимодействия электронного пучка с газом ( $t < 15$  мкс) изменений в интерференционной картине не наблюдалось, можно считать, что в этом случае  $n_e < 3,5 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Это определяет верхнюю границу концентрации плазменных электронов. Нижняя граница следует из экспериментов по просвечиванию плазмы СВЧ излучением:  $n_e > 6,4 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>. Расчеты показывают, что в нашем случае в канале разряда концентрацию электронов следует ожидать равной  $n_e \sim (0,5 + 1,0) \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>. При этом до 20 + 30% энергии электронов закачивается в колебательные степени свободы, что, возможно, и отражается на характере зависимости  $\rho(t)$  на инерциальной стадии и оправдывает использование в расчетах  $c_v = (7/2)k$ . При температуре

газа  $T > 700 + 1000 \text{ К}$  [13] происходит интенсивная релаксация колебательной энергии в поступательные степени свободы молекул и отток части энергии плазменных электронов в колебательные степени уже не будет сказываться на характере зависимости  $\rho(t)$ .

При  $t > t_{\text{инер}}$  экспериментальная зависимость  $\rho(t)/\rho_0$  достаточно хорошо описывается выражением (11) работы [8] (пунктирная кривая 3 на рис. 1). Измеренное значение  $t_{\text{инер}} = 25 \text{ мкс}$  также близко к расчетной величине [8]. Это говорит о том, что полученные в [8] соотношения для  $\rho(t)$  для инерциальной и динамической стадий разлета газа из прогреваемого канала правильно отражают характер изменения плотности со временем.

Полученная в результате обработки экспериментальных данных зависимость скорости распространения электронного пучка в плотном газе,  $u(t) = dL/dt$ , также хорошо совпадает с расчетной зависимостью  $u(t)$ , определяемой выражением (16) в [8]. Максимальная скорость при  $P = 1 \text{ атм}$  достигалась при  $t \sim 80 \text{ мкс}$  от начала динамической стадии и составляла  $\sim 4,8 \cdot 10^4 \text{ см/с}$ .

Следует отметить, что с увеличением мощности пучка при достижении высоких значений концентрации плазменных электронов может сложиться ситуация, когда кинетика возбуждения и девозбуждения колебательных состояний молекул будет определяться в основном электронным газом. Электроны плазмы будут находиться в состоянии равновесия с колебательно-возбужденными молекулами, и их температура будет равна колебательной температуре. В этом случае система уравнений (7) в [8] должна быть дополнена уравнениями баланса энергии для плазменных электронов и колебательных степеней свободы молекул. Это означает, что полученные соотношения для  $\rho(t)$  и  $u(t)$  применимы только для сравнительно слабых пучков.

Из рассмотрения равновесной стадии взаимодействия РЭП с газом при атмосферном давлении следует, что в прогретом канале  $\rho_0/\rho_{\text{мин}} = 56$  и  $T = 0,69 \text{ эВ}$ . Экспериментальные величины  $\rho_0/\rho_{\text{мин}}$ , полученные из интерферограмм и показаний датчика рентгеновского излучения, изменятся в пределах от 30 до 60. Различие в полученных значениях степени прорежения газа в канале объясняется логарифмически медленным переходом системы пучок - газ в равновесное состояние, что затрудняет определение истинных величин  $\rho_0/\rho_{\text{мин}}$  и приводит к ошибкам в измерениях.

Остановимся еще раз на характере расширения газа из прогреваемого канала. Отметим, что с увеличением характерного времени нарастания импульса тока  $\tau_{\Phi}$  скорость разлета  $v(r, t)$  и скорость прорежения газа в канале уменьшаются. Это означает, что необходимо стремиться к формированию пучков с  $\tau_{\Phi} < \tau_p =$

$$= \left( \frac{15}{4} R^2 \frac{\rho_0}{q_{\text{ион}}} \right)^{1/3} [8], \text{ где } \tau_p - \text{характерное время разлета газа. Из}$$

полученных интерферограмм следует, что изменение плотности газа на расстоянии, равном среднему радиусу пучка  $R$ , составляет  $[\rho(R, t) - \rho(0, t)]/\rho(0, t) \sim 0,1$ . Видно, что с точностью не хуже 10% в пределах РЭП можно считать  $\rho(r) \approx \text{const}$  и принятые предположения при решении системы (7) в [8] подтверждаются экспериментально.

Величина  $v(r, t)$  при  $\tau_{\Phi} = 0$  равна [8]

$$v(r, t) = \frac{3}{2} \frac{R}{\tau_p} \frac{r}{R} \left( \frac{t}{\tau_p} \right)^3 \exp(-r^2/R^2). \quad (4)$$

Для  $t = \tau_p \approx 15$  мкс и  $r = R \approx 0,45$  см из (4) имеем  $v(R, \tau_p) = 1,3 \cdot 10^4$  см/с  $< c_s$ , где  $c_s$  - скорость звука. Известно, что если скорость разлета газа из зоны энерговыделения с характерным радиусом  $R$  меньше скорости звука, то ударная волна является слабой, а формирование ее фронта происходит при  $r > R$  за счет накопления нелинейных эффектов при расширении газа. Сказанное достаточно хорошо подтверждается результатами выполненных экспериментов. Из интерферограмм и показаний пьезодатчика следует, что формирование фронта волны происходит при  $r \approx 3$  см  $\gg R$ , а максимальное избыточное давление во фронте не превышает  $\sim 0,5$  атм.

Полученные экспериментальные данные по предельным длинам транспортировки РЭП в газе при различных давлениях сопоставлялись с решением уравнения огибающей пучка, приведенным в [8]. Из рис. 3 следует, что имеет место хорошее совпадение результатов измерений с предполагаемой теоретической зависимостью. При этом подтверждается и характер изменения  $L_{\infty}$  с параметрами электронного пучка и величина критерия магнитоограниченности, определяемого выражением (5) в [8]. Все это указывает на правильность выполненных теоретических оценок, результаты которых могут быть использованы при анализе транспортировки пучков в плотном газе.

Используемые на рис. 3 обозначения соответствуют давлениям газа, указанным в табл. 1. Светлые точки - холодный, а темные - прогретый газ. Прямые 1 и 2 - теоретические зависимости для слаботоочного и магнитоограниченного пучка, экспериментальные точки а) и б) получены при атмосферном давлении и соответствуют  $\rho_0/\rho_{\min} = 30$  и 50.

Выполненные теоретические и экспериментальные исследования убедительно продемонстрировали возможность транспортировки квазистационарных РЭП в плотном газе с переносом высокой удельной энергии на большие расстояния до мишени. При этом во всем исследуемом диапазоне давлений не зарегистрированы существенные отклонения от принятой модели взаимодействия пучка со средой. Это позволяет рассмотреть полученные результаты как основу для оценки параметров современных технологических электронно-лучевых установок с выпуском пучка в плотный газ.

В то же время круг рассмотренных задач не исчерпывает полностью научную проблематику транспортировки интенсивных квазистационарных РЭП в плотном газе. К числу нерешенных задач следует отнести вопрос об устойчивости пучка в плотном газе. В работе не затрагивался вопрос о возможности существования резистивной шланговой неустойчивости пучка. В рассматриваемых условиях эта неустойчивость не наблюдалась. Тем не менее, согласно многочисленным теоретическим исследованиям, такая неустойчивость вполне реальна и ее необходимо принимать во внимание, рассматривая транспортировку РЭП на большие расстояния в газе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Артемов В. А., Малафеев О. А. и др. // ПТЭ. 1978. № 2. С. 190.
2. Власов М. А., Выборнов С. И. и др. // Тезисы докл. 5-го Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. - Томск, 1984. Ч. 1. С. 210.
3. Власов М. А., Попович В. П. и др. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 8. С. 1638.



4. Власов М. А., Выборнов С. И. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 8. С. 891.
5. Артемов В. А., Невзоров П. И. //ПТЭ. 1981. № 2. С. 226.
6. Островская Г. В. //ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 12. С. 2529.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М. Наука, 1966. Гл. 1.
8. Власов М. А., Рыжлов А. В., Сафонов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 1. С. 70.
9. Иванов А. А., Лейман В. Г. //Физика плазмы. 1977. Т. 3. Вып. 4. С. 780.
10. Власов М. А., Ельчин Ю. А. и др. //Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. Вып. 11. С. 652.
11. Власов М. А., Ельчин Ю. А. и др. // Тезисы докл. 5-го Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. - Томск, 1984. Ч. 1. С. 199.
12. Баранов В. Д., Низьев В. Г., Пикульский С. В. //Физика плазмы. 1979. Т. 5. Вып. 1. С. 198.
13. Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М. Явления переноса в слабоионизованной плазме. - М.: Атомиздат, 1976. С. 208.
14. Бычков В. Л., Елецкий А. В. //ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 8. С. 1484.

Всесоюзный электротехнический  
институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
6 июля 1989 г.

INVESTIGATION OF THE QUASI-STATIONARY RELATIVISTIC ELECTRON  
BEAM PROPAGATION IN THE DENSE GAS.  
II. THE EXPERIMENTAL RESEARCH

*M. A. Vlasov, A. A. Korolev, Yu. D. Nosach, V. P. Popovich,  
A. V. Rykhlov, V. A. Safonov*

Results of the experimental investigation of the quasi-stationary relativistic electron beam (300 keV, 20 A, 500  $\mu$ s, 0,3 cm) with a dense gas are given. The investigations were carried out in air at the atmospheric and reduced pressures (of 3 to 300 Tor) with the aim of modeling the propagation of magnet-bounded relativistic electron beam. The dynamics of rarefaction of the beam heated channel is studied and the limit propagation length of the relativistic electron beam in the dense gas is defined. The obtained results are compared with the previously discussed theoretical model of interaction of the relativistic electron with medium.

УДК 621.382.3.323:621.391.822

ИСТОЧНИКИ НИЗКОЧАСТОТНОГО ШУМА В ПОЛЕВОМ ТРАНЗИСТОРЕ С ЗАТВОРОМ ШОТКИ

*В. Л. Лосев, А. В. Мещеряков, В. М. Пригоровский*

Рассчитано воздействие источников НЧ шума, локализованных в различных областях транзистора, на ток стока в статическом режиме. Предложена методика экспериментальной оценки спектральных интенсивностей основных источников шума. Приведено сопоставление расчетов с экспериментом. Модель удовлетворительно описывает шумовое поведение ПТШ.

Согласно [1-8] НЧ флуктуации в полевом транзисторе с затвором Шоттки (ПТШ) могут определяться действием нескольких статистически независимых источников шума: флуктуациями концентрации электронов в активной  $\delta n$  и пассивной  $\delta n_p$  областях канала (рис. 1, см. на вклейке) в домене  $\delta n_d$ , возникающем под затвором в режиме насыщения ВАХ, флуктуациями концентрации ионизированной примеси в обедненной подзатворной области  $\delta N$ . В [9] рассмотрены также флуктуации подвижности электронов в канале. Однако в [5] показано, что этот источник не дает заметного вклада. При рассмотрении процессов шумообразования в приборах на ПТШ необходима информация о спектральных интенсивностях источников шума. Поскольку теория НЧ шумов в настоящее время имеет качественный характер, то для их нахождения более надежны экспериментальные методы. Одним из путей является измерение шумов транзистора в статическом режиме, наиболее простым образом связанных с флуктуациями  $\delta n$ ,  $\delta n_p$ ,  $\delta n_d$ ,  $\delta N$ . Анализ этой связи проводился в [10-12] лишь в линейной области ВАХ. В настоящей работе выполнен более общий расчет, справедливый и для режима насыщения ВАХ.

1. Результаты расчета. Использована одномерная аналитическая модель ПТШ, предложенная в [13]. Согласно этой модели насыщение ВАХ транзистора связано с образованием в канале стационарного домена. Домен возникает при электрических полях, превышающих пороговое значение  $E_g$ . Его центр, соответствующий максимальному значению поля в канале, расположен под концом затвора, прилегающим к стоку (рис. 1). Выражение для падения напряжения на домене  $U_d$  получено в [14]:

$$U_d = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{r_D E_c^3}{(E_r - E_g)^2}, \tag{1}$$

где  $E_c \approx 3,2 \cdot 10^5$  В/м для GaAs,  $r_D = [\epsilon \epsilon_0 kT / (q^2 n_d)]^{1/2}$  - радиус Дебая,  $n_d$  - равновесная концентрация электронов в области возникновения домена,  $E_r = U_1 / (L-d)$  - равномерно распределенное вне домена электрическое поле,  $U_1$  - падение напряжения на незанятой доменом части

канала,  $L$  - длина затвора,  $2d$  - ширина домена:

$$d = \sqrt{8r_p U_d / 3\sqrt{2} E_c} . \quad (2)$$

В области канала, не занятой доменом, подвижность электронов  $\mu$  не зависит от поля. Для тока, протекающего через эту область, в соответствии с [13] можно записать

$$I = g_0 \left\{ U_1 - \frac{3}{2} U_p^{-1/2} \left[ \left( U_1 + U_{b1} + U_c \right)^{3/2} - \left( U_{b1} + U_c \right)^{3/2} \right] \right\} , \quad (3)$$

где  $g_0 = qn\mu aZ / (L-d)$ ,  $a, Z$  - глубина и ширина канала,  $n$  - концентрация электронов в канале,  $U_{b1} \approx 0,8$  В - встроенный потенциал контакта металл - полупроводник,  $U_c$  - абсолютное значение напряжения на затворе,  $U_p$  - напряжение на стоке,  $U_p = qa^2 N / (2\epsilon\epsilon_0)$  - напряжение отсечки канала,  $N$  - концентрация донорной примеси в подзатворной области. Напряжение на стоке транзистора равно

$$U_D = U_1 + U_d + IR, \quad (4)$$

где  $R = (L_1 + L_2) / (qn_p \mu aZ)$  - суммарное сопротивление пассивных частей канала исток - затвор и затвор - сток (рис. 1),  $n_p$  - концентрация электронов в них. Решив систему уравнений (1)-(4), можно рассчитать ВАХ транзистора  $I = I(U_D, U_c)$ . При напряжениях  $U_1 \leq E_s L$  домен не образуется и линейная область ВАХ описывается соотношениями (3), (4) при  $d = 0$ ,  $U_d = 0$ . Выражения (1)-(3) справедливы для однородно легированного канала. Это означает, что средние значения концентрации  $n$ ,  $n_p$ ,  $n_d$ ,  $N$  равны между собой. Разные обозначения введены для того, чтобы подчеркнуть локализацию связанных с ними статистически независимых источников шума  $\delta n$ ,  $\delta n_p$ ,  $\delta n_d$ ,  $\delta N$ .

Рассчитаем теперь воздействие этих источников на ток стока ПТШ. Если транзистор питается от генератора напряжения, то флуктуации напряжения  $\delta U_D$  на стоке отсутствуют. Тогда флуктуации величин, входящих в (4), порождаемые совместным действием источников шума, запишутся в виде

$$\delta U_1 + \delta U_d + R\delta I + I\delta R = 0. \quad (5)$$

Конкретные выражения для них можно получить из (1)-(4). Например, из (3) имеем

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial n} \delta n + \frac{\partial I}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial N} \delta N + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial U_d} \delta U_d + \frac{\partial I}{\partial U_1} \delta U_1.$$

Решая уравнение (5) относительно  $\delta I$  и переходя к энергетическим спектрам, будем иметь

$$S_I(f) = c_n^2 W_n(f) + c_N^2 W_N(f) + c_d^2 W_d(f) + c_p^2 W_p(f), \quad (6)$$

где  $S_I(f)$ ,  $W_n(f)$ ,  $W_N(f)$ ,  $W_d(f)$ ,  $W_p(f)$  - спектральные интенсивности относительных флуктуаций тока стока и концентрации электронов в соответствующих областях транзистора,  $c_n, c_N, c_d, c_p$  - коэффициенты модуляционной чувствительности, зависящие от параметров материала,

геометрии транзистора и режима его работы:

$$c_n = (1 + \alpha/\gamma)^{-1}, \quad c_p = 1 - c_n,$$

$$c_n = c_n(g_0 U_1 / 2I - 1/2),$$

$$c_d = c_n \left\{ \frac{\sqrt{2} E_c (1+\beta) r_D}{3 E_s \beta d} \left[ 1 - \frac{2\alpha U_d}{\beta IR} \frac{U_1}{U_1 - E_s (L-d)} \right] + \frac{\alpha U_d}{\gamma IR} \right\},$$

$$\alpha = g_0 R \{1 - [(U_1 + U_{bi} + U_c) / U_p]^{1/2}\} = \alpha_0 \quad \text{при } d = 0,$$

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{(1+\beta) IR}{\beta E_s (L-d)} \quad \text{при } d > 0, \quad (7)$$

$$\beta = \left[ 1 + \frac{16\sqrt{2} E_c E_s r_D L}{3 (E_s L - U_1 - (4\sqrt{2}/3) E_c r_D)^2} \right]^{1/2},$$

$$\gamma = 1 + \frac{U_d}{U_1 - E_s (L-d)} \left[ \frac{U_1 (1+\beta)}{E_s (L-d) \beta} - 2 \right].$$

Известно, что относительная интенсивность флуктуаций концентрации частиц в некотором объеме обратно пропорциональна объему. Геометрические размеры обедненной подзатворной области, открытой части канала и домена меняются при изменении напряжений на стоке и затворе прибора. Поэтому интенсивности источников шума  $W_n$ ,  $W_n'$ ,  $W_d$  будут зависеть от режима работы транзистора. Учтем эту зависимость, введя новые коэффициенты модуляционной чувствительности  $C_{n,n,d,p}^2 =$

$$= C_{n,n,d,p}^2 V_0 / V_{n,n,d,p}, \quad \text{где } V_{n,n,d,p} = V_{n,n,d,p}(U_c, U_d) - \text{объем}$$

соответствующей области образца,  $V_0 = \alpha LZ$  - объем канала под затвором. Тогда выражение (6) примет вид

$$S_1(F) = C_n^2 S_n(F) + C_n'^2 S_n'(F) + C_d^2 S_d(F) + C_p^2 S_p(F), \quad (8)$$

где  $S_n$ ,  $S_n'$ ,  $S_d$ ,  $S_p$  - спектральные плотности относительных флуктуаций концентрации, пересчитанных к объему  $V_0$ , не зависящие от напряжений  $U_c$ ,  $U_d$ .

Таблица 1

N	L, мкм	$\alpha$ , мкм	Z, мкм	$n$ , см <sup>-3</sup>	R, Ом	F = 2 кГц		
						S <sub>n</sub> , Гц <sup>-1</sup>	S <sub>n'</sub> , Гц <sup>-1</sup>	S <sub>p</sub> , Гц <sup>-1</sup>
1	2	0,2	350	10 <sup>17</sup>	50	5·10 <sup>-15</sup>	2·10 <sup>-14</sup>	2·10 <sup>-15</sup>
2	2	0,1	350	10 <sup>17</sup>	35	2·10 <sup>-14</sup>	6·10 <sup>-14</sup>	4·10 <sup>-14</sup>
3	2	0,2	350	10 <sup>17</sup>	10	2·10 <sup>-14</sup>	-	6·10 <sup>-16</sup>
4	1	0,16	300	10 <sup>17</sup>	10	10 <sup>-13</sup>	4·10 <sup>-14</sup>	-
5	1	0,16	300	10 <sup>17</sup>	10	8·10 <sup>-14</sup>	10 <sup>-14</sup>	-

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета коэффициентов  $C_n$ ,  $C_n'$ ,  $C_n''$ ,  $C_p$  для одного из исследуемых нами транзисторов. Его параметры представлены в табл. 1 (ПТШ № 1). При напряжениях на стоке, близких к напряжению насыщения ВАХ  $U_{DS}$ , использованная нами модель транзистора неприменима [13]. Как видно из рис. 2, в этой области рассчитанные ВАХ качественно отличаются от измеренных. Поэтому значения коэффициентов модуляционной чувствительности при  $U_D \approx U_{DS}$  не рассчитывались и кривые  $C^2(U_D)$  на рисунке имеют разрыв, показанный пунктиром. С увеличением запирающего напряжения на затворе  $U_C$  коэффициенты  $C_n''$ ,  $C_n'$  возрастают в линейной области ВАХ ( $U_D = 0,4$  В) на 20-30 дБ, а в режиме насыщения ( $U_D = 5$  В) на 5-10 дБ (рис. 2). Такое поведение связано, в первую очередь, с увеличением относительных флуктуаций глубины открытой части канала  $\delta h / (a - h)$  (рис. 1). Рост  $U_C$  приводит к быстрому уменьшению величины  $a - h$ , в то время как абсолютные флуктуации глубины обедненной области  $\delta h$ , вызываемые источниками шума  $\delta n$ ,  $\delta N$ , слабо зависят от  $U_C$ . Этим же объясняется увеличение коэффициентов  $C_n''$ ,  $C_n'$  на 3-4 дБ с ростом  $U_D$  на линейном участке ВАХ. Относительно малая величина коэффициентов  $C_n$ ,  $C_n'$  при  $U_D < U_{DS}$  вызвана наличием отрицательной обратной связи, возникающей за счет сопротивления пассивной части канала R. Как видно из (7), в этом случае  $C_n$ ,  $C_n' \sim R_1 / (R + R_1)$ , где  $R_1 = R / \alpha_0$  - дифференциальное сопротивление активной части канала. В режиме насыщения коэффициенты  $C_n''$ ,  $C_n'$  возрастают на 10 - 15 дБ, что связано с образованием домена. При этом величина электрического поля в незанятой доменом части канала  $U_1 / (L - d)$  практически не зависит от напряжения  $U_D$  и тока стока I. Тогда, пренебрегая в (3) при  $U_C < U_p$  вторым слагаемым, получаем простую оценку  $\delta I / I \approx \delta n / n$ ,  $C_n \approx 1$ . Величина  $C_n''$  на 10 - 20 дБ меньше значений  $C_n''$ ,  $C_n'$ . Это позволяет в первом приближении не рассматривать флуктуации  $\delta n_d$  как источник шума в статическом режиме. Коэффициент  $C_p$ , описывающий вклад в шумы тока флуктуаций сопротивления пассивных частей канала R, пропорционален величине  $R / (R + R_1)$ . Он максимален при  $U_C = U_D = 0$  ( $R_1$  минимально) и уменьшается с ростом  $R_1$  по мере увеличения  $U_D$ ,  $U_C$ .

Из рис. 2 видно, что в режиме насыщения ( $U_D > U_{DS}$ ) и при малых

напряжениях на затворе  $U_C \leq 0,2 U_P$  коэффициент  $C_n^2$ , определяющий вклад флуктуаций  $\delta n$  в шумы тока, не менее чем на 20 дБ превосходит значения  $C_n^2$ ,  $C_p^2$ . При  $U_D < U_{DS}$  и  $U_C > 0,5 U_P$  в шумах тока наилучшим образом проявляются флуктуации  $\delta N$ , так как  $C_n > C_n \gg C_p$ . Как уже отмечалось, источник шума  $\delta n_p$  дает наибольший вклад при  $U_D < U_{DS}$ ,  $U_C = 0$ . Если спектральные интенсивности источников шума  $S_n$ ,  $S_N$  действительно не зависят от напряжения  $U_D$ ,  $U_C$ , то, измерив шумы тока транзистора в указанных трех режимах и зная коэффициенты  $C_n$ ,  $C_N$ ,  $C_p$ , можно с помощью (8) оценить величину  $S_n$ ,  $S_N$ ,  $S_p$ .

2. Результаты измерений. Для экспериментальной проверки шумовой модели и предложенной на ее основе методики оценки интенсивностей источников шума были проведены измерения шумов тока в статическом режиме нескольких ПТШ разных типов. Измерения проводились в диапазоне частот анализа  $F = 20 \text{ Гц} + 600 \text{ кГц}$  с помощью методики, описанной в [15]. Относительная погрешность измерений спектральной плотности мощности шума не превышала  $\pm 1$  дБ. Обследовались транзисторы с длиной затвора  $L = 1+2 \text{ мкм}$  и глубиной канала  $a = 0,1+0,2 \text{ мкм}$ . Параметры транзисторов приведены в табл. 1.

На рис. 3-5 представлены шумовые характеристики транзистора N 1. В линейной области ВАХ величина  $S_1$  практически не зависит от  $U_D$ ,  $U_C$ , что характерно для флуктуаций линейной проводимости. При увеличении  $U_D$  уровень шума сначала возрастает, а затем насыщается в области насыщения ВАХ (рис. 3, где точками и крестиками обозначены экспериментальные данные). С ростом  $U_C$  уровень  $S_1$  возрастает монотонно. Спектр флуктуаций  $S_1(F)$  при малых  $U_D$ ,  $U_C$  имеет вид, близкий к  $F^{-1}$  при  $F \leq 10^4 \text{ Гц}$  и меняется как  $F^{-2}$  на более высоких частотах (рис. 4). С увеличением  $U_D$  на частотах  $F \geq 10^5 \text{ Гц}$  проявляется переход спектра к равномерному. Равномерный участок имеет, по-видимому, генерационно-рекомбинационное (ГР) происхождение, так как его уровень более чем на 20 дБ превосходит уровень естественных шумов транзистора. Рост  $U_C$  приводит к увеличению наклона спектра  $S_1(F)$ , он принимает вид  $F^{-1,1}$  во всем анализируемом диапазоне частот (рис. 5). Аналогичные зависимости, измеренные для транзисторов N 2-5, качественно соответствуют представленным на рисунках. В целом шумовые характеристики обследованных ПТШ являются типичными и не противоречат описанным в [7, 8, 11, 16].

3. Оценка интенсивности источников шума. Обсуждение. Оценим спектральные интенсивности источников шума  $S_n$ ,  $S_N$ ,  $S_p$  транзисторе N 1 на частоте анализа  $F = 2 \text{ кГц}$ . Для этого, в соответствии с (8), результатами расчета, приведенными на рис. 2, и данными рис. 3 запишем

$$S_1(U_D = 7 \text{ В}, U_C = 0) = 1,2 \cdot 10^{-14} = 0,13 S_n + 2,0 S_N,$$

$$S_1(U_D = 0,4 \text{ В}, U_C = 3,5 \text{ В}) = 2 \cdot 10^{-14} = S_n + 0,75 S_N + 7 \cdot 10^{-2} S_p,$$

$$S_1(U_D = 0,4 \text{ В}, U_C = 0) =$$

$$= 1,6 \cdot 10^{-15} = 2 \cdot 10^{-3} S_n + 1,6 \cdot 10^{-2} S_N + 0,8 S_p.$$

Решая эти уравнения, найдем значения  $S_n$ ,  $S_n'$ ,  $S_p$ , представленные в табл. 1. При расчетах полагалось, что они не зависят от напряжений  $U_D$ ,  $U_C$ . Справедливость этого предположения можно проверить, сопоставив зависимости  $S_1(U_D)$ ,  $S_1(U_C)$ , измеренные во всем диапазоне напряжений питания (рис. 3), с рассчитанными на основании (8) и сделанных выше для фиксированных  $U_D$ ,  $U_C$  оценок  $S_n$ ,  $S_n'$ ,  $S_p$ . Результаты расчета представлены на рис. 3 пунктиром и показывают хорошее соответствие с экспериментом. Такой же результат получен и для других исследуемых транзисторов. Интенсивности источников шума в них приведены в табл. 1. Таким образом, найденные с помощью методики значения  $S_n$ ,  $S_n'$ ,  $S_p$  характеризуют шумовое качество транзистора в различных режимах его работы и могут использоваться при анализе НЧ флуктуаций в различных устройствах на ПТШ.

В работах [3,4,12,17] НЧ шумы ПТШ характеризуются мощностью эквивалентного генератора шумового напряжения  $S_e$ , включенного в затворную цепь транзистора. Величина  $S_e$  для транзистора N 1 представлена на рис. 3 сплошной линией. Видно, что она зависит от напряжений  $U_D$ ,  $U_C$  и поэтому неудобна для описания шумовых свойств транзистора. По-видимому, случай  $S_e = \text{const} (U_D, U_C)$  возможен при условии существования лишь одного источника шума, действующего во входной цепи транзистора, например флуктуаций  $\delta n$ .

Согласно сделанным оценкам (табл. 1) во всех обследованных ПТШ действуют несколько независимых шумовых источников, причем их интенсивности могут существенно различаться от образца к образцу. В транзисторах N 1-2 величина  $S_n$  на 3+5 дБ превосходит  $S_n'$ , в то время как в транзисторах N 4-5 значение  $S_n$  на 4+9 дБ больше  $S_n'$ . В образце N 3 флуктуации  $\delta n$  не проявляются вовсе, что приводит в этом приборе к сравнительно малым уровням шумов тока  $S_1$  при больших напряжениях на затворе. Из полученных оценок, в частности, видно, что уменьшение размеров активной области канала  $a$ ,  $L$  приводит к росту интенсивности источника  $S_n$ .

О спектрах источников шума можно судить по измеренным спектрам  $S_1(F)$ . Оценки вкладов отдельных источников в шумы тока показывают, что основной вклад при  $U_D < U_{DS}$ ,  $U_C = 0$  дают флуктуации  $\delta n_p$ . Следовательно, спектр  $S_p(F)$  совпадает по форме со спектром  $S_1(F)$  в этом режиме и имеет вид суперпозиции ГР-составляющих с временами релаксации  $\tau = (2\pi F_0)^{-1} \approx 10^{-4}$  с (рис. 4), аналогичный описанному в [16]. При  $U_D > U_{DS}$ ,  $U_C = 0$  шумы тока на 80% определяются флуктуациями  $\delta n$ . В этом случае спектр  $S_1(F)$  преимущественно повторяет спектр  $S_n(F)$ . В обследованных транзисторах он характеризуется фликкерным законом на низких частотах и проявлением равномерного участка на частотах  $F \approx 10^5$  Гц (рис. 4). При  $U_D < U_{DS}$ ,  $U_C \geq 0,5 U_D$  основной вклад в шумы тока дают флуктуации  $\delta n$ . В этом режиме совпадающие спектры  $S_1(F)$  и  $S_n(F)$  имеют вид  $F^{-(1,1-1,3)}$  (рис. 5).

Таким образом, разработанная шумовая модель правильно описывает шумовые характеристики ПТШ в статическом режиме. На ее основе предложена методика, позволяющая оценить интенсивности действующих в

транзисторе источников НЧ шума, получить информацию об их спектральных характеристиках. Получено, что интенсивности шумовых источников и соотношение между ними в транзисторе могут существенно меняться от образца к образцу. Уменьшение глубины канала и длины затвора приводит к росту величины  $S_n$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ca // ТИИЭР. 1964. Т. 52. N 7. С. 849.
2. Lauritzen P.O.//Sol. Stat. Electr. 1965. V. 8. N 1. P. 45.
3. Das M.B., Moore J.M.//IEEE Trans. 1974. V. ED-21. N 4. P. 247.
4. Liu S.M., Das M.B.//UGIM-83: Proc. 5 Bien. Univ. Gov. Ind. Microelectron. Symp., College Station, Tex. 25-27 May 1983. P. 169.
5. Su C., Rohdin H., Stalte C.//Int. Election. Devices Meet. Washington. D.C. 5-7 Dec. 1983. - Techn. Dig. P. 601.
6. Forbes L., Canfield P., Gleason R., Mc Camant A.//Semi-Insul. III - V Mater. 3 Conf. Kahmetra, Ore. 1984. P. 392.
7. Hashiguchi S., Aoki N., Ohkubo H.//Sol. Stat. Electr. 1986. V.29. N 7. P. 745.
8. Duh K.H., Zhu X.C., Van der Ziel A.//Sol. Stat. Electr. 1984. V.27. N 11. P. 1003.
9. Suh C.H., Van der Ziel A., Jindal R.P.//Sol. Stat. Electr. 1981. V. 24. N 8. P. 717.
10. Suh C.H.//IEEE Trans. 1981. V. ED-28. N 5. P. 596.
11. Graffeuil J.//Electronn. Lett. 1981. V.17. N 11. P. 387.
12. Graffeuil J., Tantrarongroj K., Sautereau J.F.//Sol. Stat. Electr. 1982. V. 25. N 5. P. 367.
13. Shur M.S.//IEEE Trans. 1978. V. ED-25. N 6. P. 612.
14. Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С. Эффект Ганна. - М: Сов. радио, 1975. - 288 с.
15. А.с. N 125594 СССР. Лосев В.Л., Киреев О.А. и др. - Оpubл: в Б.И., 1986. N 33. С. 177.
16. Suh C.H., Van der Ziel A.//Appl. Phys. Lett. 1980. V. 37. N 9. P. 565.
17. Rohdin H., Su C.Y., Stolte C.//IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig., San-Francisco, Calif. May 29 - June 1. 1984. P. 267.

Ленинградский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
17 июля 1989 г.,  
после переработки  
11 марта 1990 г.

#### THE SOURCES OF LOW-FREQUENCY NOISE IN METAL-SEMICONDUCTOR FIELD EFFECT TRANSISTOR

*V. L. Losev, A. V. Meshcheryakov, V. M. Prigorovskij*

The influence of LF-noise source, located in different regions of the transistor on drain current in static regime is determined. The method of experimental estimation of spectral intensity of the main sources is suggested. The comparison of calculations with the experiment is done. The model describes satisfactorally the noise behavior of MESFET.



УДК 621.385.69

## ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДВУХЛУЧЕВЫХ ГИРОТРОНОВ

В. Е. Запелалов, В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг

Описывается геометрия и обсуждается практическая реализуемость ряда вариантов двухлучевых магнетронно-инжекторных пушек, формирующих винтовые электронные пучки мощных гиротронов. Приведены некоторые результаты траекторного анализа двухлучевых электронно-оптических систем, подтверждающие возможность получения приемлемых параметров обоих пучков.

1. Увеличение поперечного сечения пространства взаимодействия гиротронов, необходимое для повышения их выходной мощности, ухудшает при прочих равных условиях селекцию колебаний. Однако при этом облегчается техническая реализация идеи [1,2], заключающейся во введении в рабочее пространство нескольких соосных винтовых электронных пучков (ВЭП), что способствует при адекватных параметрах пучков усилению устойчивости одномодовой генерации и тем самым создает условия для дальнейшего наращивания выходной мощности [3].

Ниже рассматриваются основные варианты конструктивно наиболее простых двухлучевых систем на базе магнетронно-инжекторных пушек (МИП) [4]. Оцениваются ограничения на геометрию систем, вытекающие из адиабатической теории МИП. Приводятся результаты траекторного анализа двухлучевых систем, подтверждающие возможность получения удовлетворительных параметров обоих пучков.

Цилиндрические однолучевые МИП включают, как известно, две разновидности - прямые и обращенные (см., например, [5,6]). Поэтому двухлучевые системы можно представить в виде различных сочетаний однолучевых пушек. При этом имеется возможность применения в рассматриваемых структурах как обоих излучающих пучков (с питч-фактором  $g \geq 1$ ), так и комбинации излучающего пучка с поглощающим на основной гармонике гирочастоты [1], для которого питч-фактор  $g < 1$ . Этот пучок может выполнять функцию избирательного поглотителя паразитных мод. Геометрия электродов электронно-оптической системы (ЭОС) в обоих случаях имеет сходные черты (см. ниже).

Рассмотрим приведенные на рис. 1 (см. на вклейке) варианты двухлучевых МИП [4].

а) Оба эмиттирующих пояска 3 расположены на общем катоде 1 традиционной МИП. Аноды над первым и вторым эмиттерами могут иметь одинаковый или разный потенциалы.

б) Эмиттеры 3 расположены на общем катоде 1 обращенной МИП.

в) Эмиттер 1 на общем катоде 2 образует с внутренним анодом 3 обращенную пушку, а эмиттер 4 с внешним анодом 5 - обычную прямую МИП.

г) Общий анод 1 с катодом 2 образует прямую, а с катодом 3 - обращенную пушку.

д) Вариант в), но катоды электрически разделены.

е) Вариант г), но разделены аноды.

ж), з) Основной эмиттер располагается обычным образом в прямой или обращенной МИП, а дополнительный эмиттер 2, помещенный на анод 3 пушки, является катодом в системе анод - резонатор.

Варианты а) и б) (оба с бипотенциальным анодом) и в) позволяют

независимо управлять осцилляторной энергией обоих пучков (при одинаковой полной энергии), а варианты г) - е) допускают раздельное управление как осцилляторной, так и полной энергией пучков. Выбор того или иного варианта в значительной мере зависит от назначения второго пучка (излучатель или поглотитель).

2. Системы с двумя излучающими пучками должны удовлетворять следующим условиям:

- достаточно большие значения питч-факторов  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  или эквивалентных им отношений осцилляторной энергии электронов к их полной энергии  $t_1^{(1)}$ ,  $t_1^{(2)}$ ,

- близкий к единице коэффициент токопрохождения,  
- малый разброс осцилляторных скоростей  $\delta v_1$ ,

- встрел пучков на заданные радиусы  $R_0^{(1)}$ ,  $R_0^{(2)}$  в рабочем пространстве.

Указанные условия в общем противоречивы. В той связи важное значение имеет выбор следующих геометрических параметров: радиуса катода  $R_K$ , расстояния анод-катод  $d_K$  и высоты над эмиттером первого максимума электронной траектории  $H$ ; здесь и ниже под  $R_K$ ,  $d_K$  подразумевается наименьшая из величин  $R_K^{(1)}$ ,  $R_K^{(2)}$  и соответствующего

$d_K^{(1)}$ . Всего возможны четыре случая:

$$H/R_K \ll 1, H/d \sim 1; \quad H/R_K \sim 1, H/d \ll 1; \quad H/R_K \sim 1, H/d \sim 1; \quad H/R_K \ll 1, H/d \ll 1.$$

В некоторых вариантах существенным параметром является также отношение  $|R_K^{(1)} - R_K^{(2)}|/H$ . Рассмотрим указанные случаи раздельно.

а)  $H/R_K \sim 1$ ,  $H/d \sim 1$ . В системах типа рис. 1а для ослабления взаимодействия парциальных пучков радиусы ведущих центров в пучечной области должны быть разнесены на величину  $\Delta R_K \geq H$ . Это практически исключает резонансную раскачку осцилляторных скоростей одного пучка кулоновским полем второго пучка [7]. Тогда при малых углах наклона  $\psi_a$  образующей анода к оси симметрии [7] (однопотенциальный вариант) и при условии полного токопрохождения

$$n = E_K^{(1)}/E_K^{(2)} \approx d^{(2)}/d^{(1)} \geq 2, \quad (1)$$

где  $E_K^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) - электрическое поле на эмиттерах. Последние должны быть также разнесены по оси  $z$  на расстояние, превышающее  $H + (l^{(1)} + l^{(2)})/2$  ( $l^{(i)}$  - ширина  $i$ -го эмиттирующего пояска). Следовательно, отношение магнитных полей на эмиттерах

$$\alpha_{12} \equiv B_K^{(2)}/B_K^{(1)} \geq 1 + \frac{1}{B_K^{(1)}} \frac{dB_z}{dz} \left[ H + (l^{(1)} + l^{(2)})/2 \right]. \quad (2)$$

Согласно адиабатической теории МИП [8] при заданном магнитном поле в рабочем пространстве  $B_0$  поперечная энергия электронов в нем

$$2\eta u_0 t_1 \sim E_K^2 B_0 \cos^2 \varphi. \quad (3)$$

Здесь  $u_0$  - ускоряющее напряжение,  $\eta$  - удельный заряд электрона,  $\varphi$  - угол наклона магнитного поля к поверхности эмиттера. Комбинируя (1)-(3), находим отношение поперечных энергий электронов в обоих

пучках:

$$t_1^{(1)}/t_1^{(2)} = \frac{\cos^2 \varphi^{(1)}}{\cos^2 \varphi^{(2)}} n^2 \alpha_{12}^3 \approx 4 \frac{\cos^2 \varphi^{(1)}}{\cos^2 \varphi^{(2)}} \alpha_{12}^3. \quad (4)$$

Согласно (4) получение одновременно приемлемых значений осцилляторной энергии частиц в обоих пучках возможно для однопотенциальных систем лишь при существенной модификации традиционной геометрии МИП. В частности, для системы рис. 1а необходимо значительное увеличение  $\varphi^{(1)}$  (вплоть до  $60^\circ$ ). При этом, однако, неизбежно возрастание разброса ведущих центров первого пучка в рабочем пространстве и увеличение скоростного разброса. При больших  $\alpha_{12}^3$  эта мера недостаточна и предпочтительны системы с бипотенциальным анодом. Заметим, наконец, что при условии а) отношение  $R^{(2)}/H \approx 1$ , что затрудняет формирование широких ( $l^{(2)} \geq H$ ) внутренних пучков с малым позиционным разбросом осцилляторных скоростей.

Применение обращенных пушек (рис. 1б) при условии а) нецелесообразно, так как параметр  $n$  увеличивается при наличии магнитного поля, нарастающего к рабочему пространству, из-за уменьшения радиуса ведущего центра внутреннего пучка. Увеличение же  $\varphi^{(1)}$  и  $d^{(1)}$  создает конструктивные сложности и затрудняет обеспечение электрической прочности зазора катод - анод. Использование бипотенциального анода в этом случае еще больше усложняет конструкцию.

Для систем рис. 1в,г удастся получить  $n^2 \alpha_{12}^3 \approx 1$  (ср. (4)). Однако если разнос средних радиусов пучков в рабочем пространстве не слишком велик (что обычно имеет место), то  $|R_K^{(2)} - R_K^{(1)}| \approx H$  и центральный электрод должен иметь малую толщину (в масштабе  $H$ ), что существенно усиливает неоднородность электрического поля в области формирования и скоростной разброс.

Таким образом, при условии а) наиболее просто реализуется пушка рис. 1а.

б)  $H/R_K \sim 1$ ,  $H/d \ll 1$ . Параметр  $n$  в (4) для систем рис. 1а близок к единице и отношение осцилляторных энергий частиц при малых  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$  равно  $\alpha_{12}^3$ . Выравниванию осцилляторных энергий электронов в обоих пучках способствует использование квазиоднородного магнитного поля в области катода ( $\alpha_{12} \approx 1$ ) и/или больших значений  $\psi$  и  $\psi_a$ . Помимо этого может применяться бипотенциальный анод. Остальные типы пушек при условиях б) практически нереализуемы.

в)  $H/R_K \ll 1$ ,  $H/d \sim 1$ . Если отношение  $|R_K^{(1)} - R_K^{(2)}|/H \approx 1$ , то для систем рис. 1а,б сохраняются рекомендации случая а) за исключением ограничений на ширину внутреннего эмиттирующего пояса для прямой пушки и на минимальный радиус анода для обращенной. В результате прямая и обращенная система оказываются примерно равноценными. Пушки рис. 1в,г имеют в этом случае малую толщину центрального электрода, и их применение нецелесообразно.

Наоборот, при  $|R_K^{(1)} - R_K^{(2)}|/H \gg 1$  реализация систем типа рис. 1в,г не встречает затруднений, тогда как для пушек рис. 1а,б  $n \gg 1$  и их использование (особенно обращенного варианта) затруднительно.

г)  $H/R_K \ll 1$ ,  $H/d \ll 1$ . В этом случае при  $|R_K^{(1)} - R_K^{(2)}|/H \approx 1$

легко обеспечивается условие  $E_{1K}^{(1)} \approx E_{1K}^{(2)}$  как для прямой, так и для обращенной пушек. Кроме того, подбором  $d^{(1)}$ ,  $d^{(2)}$  можно, в принципе, компенсировать влияние фактора  $\alpha_{12}^3$  в (4). Применение систем рис. 1в, г нецелесообразно (ср. в)).

При  $|R_K^{(1)} - R_K^{(2)}|/H \gg 1$  параметр в (4) может оказаться достаточно большим и эффективность рассмотренных при условии а) способов уравнивания  $t_1^{(1)}$ ,  $t_1^{(2)}$  для пушек рис. 1а, б оценивается отдельно в каждом конкретном случае. Возможность применения пушек рис. 1в, г определяется в этом случае только электрической прочностью промежутка катод - анод.

Окончательно можно резюмировать, что при условиях а), б) следует использовать пушки с обоими эмиттерами на внутреннем катоде. При условиях в), г) наиболее просто реализуются системы рис. 1а, б или 1в, г (в зависимости от соотношения между  $|R_K^{(1)} - R_K^{(2)}|$  и  $H$ ).

3. Простейшей конструктивно и наиболее универсальной является пушка рис. 1а. Ниже приведены результаты траекторного анализа некоторых вариантов этой системы. Наибольшие трудности при определении оптимальной геометрии и электрических режимов вызывает пушка с большими характерными масштабами осцилляций электронных траекторий. В этих случаях для обеспечения близких значений питч-факторов обоих пучков и исключения токоперехвата требуется увеличивать угол  $\psi^{(1)}$ , снижать коэффициент  $\alpha_{12}$  (ср. (2)) и применять двухпотенциальный анод. Каждая из указанных мер, как правило, приводит к увеличению степени неадиабатичности системы и связанной с этим большей критичности характеристик скоростного распределения пучков к вариациям параметров системы.

На рис. 2 показана схема двухлучевой бипотенциальной пушки типа рис. 1а с большой высотой первого максимума электронных траекторий. Траекторный анализ (см., например, [8]), проведенный без учета поля пространственного заряда\*, дает следующие значения параметров скоростного распределения:  $t_1^{(1)} = 0,75$ ,  $\delta v_1^{(1)} = 22\%$ ,  $t_1^{(2)} = 0,65$ ,  $\delta v_1^{(2)} = 18\%$ . В однопотенциальной системе с такой же геометрией электродов  $t_1^{(1)}/t_1^{(2)} > 2$  при  $t_1^{(2)} = 0,7$ . Здесь  $\alpha_{12}^3 = 2$ . В указанных системах магнитное поле в области пушки неоднородно. Его распределение стандартно для краевого поля соленоида. Если же магнитное поле в области между эмиттерами устанавливается близким к однородному (с помощью дополнительной катушки), то применим и эквипотенциальный анод (рис. 3). Для соответствующей структуры

$t_1^{(1)} = 0,67$ ,  $\delta v_1^{(1)} = 19\%$ ,  $t_1^{(2)} = 0,5$ ,  $\delta v_1^{(2)} = 11\%$ .

Получение приемлемых характеристик пучков существенно упрощается для пушек, работающих в сильнозакритическом режиме. На рис. 4 показана схема пушки со следующими параметрами:

$t_1^{(1)} = 0,61$ ,  $\delta v_1^{(1)} = 9\%$ ,  $t_1^{(2)} = 0,69$ ,  $\delta v_1^{(2)} = 13\%$ .

\* Качественная зависимость  $t_1$  и  $\delta v_1$  от тока пучка в двухлучевых ЗОС аналогична однолучевым и существенно связана со значениями углов  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$ , определяющих топологию пучков (см. подробнее [9]).

4. Двухлучевые пушки с поглощающим пучком конструктивно существенно проще. Электроны поглощающего пучка должны иметь возможно меньшую осцилляторную энергию. Эффективность поглощения повышается также и при уменьшении их полной энергии. Допустимый минимум определяется расстройкой циклотронных частот основного (излучающего) и дополнительного пучков [3].

Варианты рис. 1а-в при соответствующей модификации геометрии электродов, минимизирующей закрутку одного из пучков, по указанной причине менее эффективны, чем системы рис. 1г-е. Однако они проще в реализации. Вариант рис. 1к соединяет высокую эффективность с относительной простотой конструкции. Для него возможна и обратная модификация.

Использование подобных систем позволяет при достаточной длине анода дополнительно уменьшить  $t_1^{(2)}$  в  $(B_K^{(2)}/B_K^{(1)})^3$  раз, если радиусы ведущих центров в рабочем пространстве можно разнести на величину  $|R_0^{(1)} - R_0^{(2)}| > 2r_{10}$  ( $r_{10}$  - ларморовский радиус электронной орбиты излучающего пучка в рабочем пространстве). Если  $|R_0^{(1)} - R_0^{(2)}| \leq 2r_{10}$ , реализация указанного варианта встречается с рядом трудностей, в частности с трудностью обеспечения токопрохождения.

5. Приведенные результаты устанавливают возможность создания двухлучевых магнетронно-инжекторных пушек с удовлетворительным качеством излучающих и поглощающих пучков. Проектирование ЭОС существенно облегчается, когда характерные масштабы электронных траекторий излучающих пучков в пушке существенно меньше зазоров между электродами. В противоположном случае при использовании однопотенциальных анодов коррекция только геометрии электродов может оказаться недостаточной для получения приемлемых значений питч-факторов обоих пучков. Здесь определенные преимущества имеют системы с однородным магнитным полем в области пушки, которые, однако, более критичны по токопрохождению (ср. рис. 3). Ввиду этого для двухлучевых систем, работающих в слабокритических режимах, целесообразно использовать бипотенциальные аноды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. N 786677 СССР. Мазер на циклотронном резонансе В. Е. Запелалов, В. И. Курбатов, О. В. Мальгин и др. Приоритет от 25.07.79. Зарегистрировано в Гос. реестре 07.08.80. - Оpubл.
2. Wang Hui, Zhu Jin-lin et al. // X Int. Conf. on infrared and millimeter waves. - Florida, USA, 1985. P. 265.
3. Запелалов В. Е., Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 11. С. 1288.
4. А. с. N 897039 СССР. Двухлучевая электронная пушка мазера на циклотронном резонансе (варианты) / В. Е. Запелалов, В. И. Курбатов, О. В. Мальгин и др. Приоритет от 28.07.80г. Зарегистрировано в Гос. реестре 07.09.81 г. - Оpubл. в Б. И.
5. Гольденберг А. Л., Панкратова Т. Б. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1971. N 9. С. 81.
6. Мануилов В. Н. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. N 11. С. 2425.
7. Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1977. N 4. С. 67.
8. Лыгин В. К., Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1987. N 7. С. 36.

9. Цимринг Ш. Е. Формирование винтовых электронных пучков. В кн. Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар для инженеров). - Саратов: Гос. ун-т. 1974. Кн. 4. с.3.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
19 октября 1989 г.

ELEKTRON-OPTIKAL SYSTEMS OF TWO-BEAM GYROTRONS

*V.E. Zapevalov, V.N. Manuilov,  
Sh.E. Tsimring*

The geometry and practical realization of several variants of several variants of two-beam magnetron-injector guns producing helical electron beams of powerful gyrotros are described. Some results of trajectory analysis of two-beam electronoptical systems are presented which confirm the possibility of obtaining abequate parameters of both beams.

Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 533, 951

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ  
В ПЛОСКОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

В. М. Накаряков, С. М. Файнштейн

Взаимодействие и самовоздействие различных типов волн в безграничных средах изучено весьма подробно (см., например, [1]). Несомненный интерес с точки зрения практических приложений в лабораторной и космической плазме представляет исследование резонансного взаимодействия мод в ограниченной плазме, в частности в плазменном волноводе. В [2] проведен анализ самомодуляции пакета альфвеновских волн в плоском волноводе с жесткими границами при произвольном соотношении газокINETического и магнитного давлений. В данной заметке обращается внимание на возможность генерации второй гармоники волны Альфвена в плоском волноводе, причем для простоты рассматривается случай "холодной" плазмы, т.е. когда  $C_A \gg C_S$  ( $C_{A,S}$  - скорость альфвеновской и звуковой моды). Показано, что в данной плазменной системе возможно эффективное возбуждение гармоники альфвеновской волны. На основе МГД-уравнений решена нелинейная краевая задача, выведены укороченные уравнения для комплексных амплитуд волн и найден инкремент генерации второй гармоники альфвеновской моды.

Рассмотрим плоский волновод, заполненный "холодной" плазмой с постоянным магнитным полем  $\vec{H}_0$ , направленным вдоль стенок волновода ( $\vec{H}_0 \parallel OX$ , ось OZ перпендикулярна стенкам).

Плазма описывается системой МГД-уравнений без учета теплового движения частиц плазмы:

$$\partial \vec{H} / \partial t = \text{rot}[\vec{v} \vec{H}], \quad \partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - (1/4\pi\rho) [\vec{H} \text{rot} \vec{H}], \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Граничные условия имеют вид

$$v_z(0) = v_z(d) = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{H}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\rho$  - соответственно магнитное поле, скорость и плотность частиц плазмы,  $d$  - толщина волновода. Для безразмерных переменных  $H_\delta = H/H_0$ ,  $v_\delta = v/C_A$ ,  $\rho_\delta = \rho/\rho_0$ ,  $x_\delta = x$ ,  $z_\delta = z/d$ ,  $t_\delta = C_A t/d$  ( $\rho_0$  - равновесная плотность) из (1) с точностью до малых квадратичных членов получим нелинейное дифференциальное уравнение для  $v_z(z, t)$  (зависимость от координат  $t, x$  имеет вид  $\exp(i\omega t - ikx)$ ,  $\omega, k$  - частота и продольный волновой вектор):

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + (\omega^2 - k^2) v_z = i\omega \mu \left[ H_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \right.$$

$$+ \rho \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{k}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} (v_z H_x) - \frac{i}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (v_z H_x) \quad (3)$$

( $\mu < 1$  - параметр, показывающий малость правых частей (3)),

$$H_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{k}{\omega} v_z, \quad \rho = \frac{i}{\omega} \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

При  $\mu = 0$  получим дисперсионное уравнение для нормальных мод системы:

$$\omega^2 - k^2 = n^2 \pi^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Из анализа (4) легко заметить, что для модифицированных волн Альфвена выполнены условия синхронизма

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_1, \quad k_2 = k_1 + k_1, \quad (5)$$

т. е. возможна генерация второй гармоники альфвеновской моды. При  $\mu \neq 0$  решение (3) ищем в виде

$$\dot{P} = \sum_s \dot{\psi}_s(z) A_s(\mu t, \mu x) \exp(i\omega_s t - ik_s x) + \mu Q_s + \text{к. с.},$$

где  $\dot{P}$  - вектор переменных задачи,  $\dot{\psi}$  - поляризационный вектор линейной задачи,  $s$  - номер моды,  $Q_s$  - малый нелинейный добавок,  $A_s$  - комплексная амплитуда. Используя условия ортогональности  $Q_s$  к собственной функции линейной задачи (см. [2]), получим уравнения для амплитуд первой и второй гармоники альфвеновской волны:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_{\text{Гр}}^{(1)} \frac{\partial A_1}{\partial x} = \sigma_1 A_2 A_1^*, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_{\text{Гр}}^{(2)} \frac{\partial A_2}{\partial x} = \sigma_2 A_1^2. \quad (6)$$

Здесь

$$\sigma_1 = \frac{0,5 \cdot \pi \omega_1^2}{\omega_1^2 + k_1^2 + \pi^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{k_1^2}{\omega_1^2} \right), \quad \sigma_2 = \frac{0,5 \cdot \pi \omega_1^2}{\omega_1^2 + k_1^2 + \pi^2} \left( 1 + \frac{2k_1^2}{\omega_1^2} \right),$$

$v_{\text{Гр}}^{(1),(2)}$  - групповые скорости.

Для пространственно однородной задачи ( $\partial/\partial x = 0$ ) из (6) получим систему уравнений, решение которой выражается через эллиптические функции [3]. Здесь приведем выражение для инкремента генерации второй гармоники в заданном поле первой гармоники;

$$\Gamma = 0,5 \cdot \pi \omega_1^2 (1 + 2k_1^2/\omega_1^2) (\omega_1^2 + k_1^2 + \pi^2)^{-1} |A_1|^2. \quad (7)$$

Таким образом, в магнитогидродинамическом волноводе возможна резонансная генерация второй гармоники альфвеновской моды. Этот результат может быть использован для создания параметрического усилителя, например, в твердотельной плазме, а также для диагностических целей в лабораторной и космической плазме [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. - М.: Наука, 1976.
2. Дворяковский В. П., Петрухин Н. С., Файнштейн С. М. // Физика плазмы. 1979. Т. 5. N 1. С. 79.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - М.:



УДК 539.194

## СУБМИЛЛИМЕТРОВЫЙ ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ СПЕКТР МОЛЕКУЛЫ ФОРМАМИДА В ОСНОВНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

*Е. М. Москиенко, С. Э. Дюбка*

В настоящей работе представлены результаты исследования субмиллиметрового вращательного спектра молекулы формамида в основном колебательном состоянии. Объект изучения ( $\text{NH}_2\text{CHO}$ ) представляет собой простейшее соединение с пептидной связью; это одна из немногих биологически важных молекул, найденных в космическом пространстве [1].

Впервые частоты ряда линий вращательного спектра формамида в микроволновом диапазоне волн были измерены в 1955 г. [2], после чего последовали многочисленные работы, посвященные спектральным характеристикам этой молекулы, ее строению, жесткости, возможностям инверсии и т. д. [3,4]. Были изучены спектры серий изотропических разновидностей формамида [3], его комплексов с водой и метанолом [5]. В работе [4] определены вращательные и центробежные постоянные  $\text{NH}_2\text{CHO}$ , удовлетворительно описывающие спектр основного состояния молекулы в диапазоне до 50 ГГц.

Однако до сих пор практически неисследованной остается высокочастотная (свыше 200 ГГц) область спектра, содержащая основной массив линий вращательного спектра формамида. Нами установлено, что расчет частот вращательных переходов, выполненный с использованием данных [4] (даже для линий Q-типа), в субмиллиметровой области плохо согласуется с результатами эксперимента. Измерения показали наличие для молекулы формамида трех типов переходов, что свидетельствует о непланарности этой молекулы. В субмиллиметровый диапазон длин волн попадает множество линий спектра, принадлежащих малоисследованным P- и R-ветвям, включение которых в решение обратной спектроскопической задачи представляется очень полезным.

Сказанное выше побудило нас начать исследование вращательного спектра формамида в субмиллиметровом диапазоне длин волн. Экспериментальные измерения частот переходов вращательного спектра формамида проводились на спектрометре ХГУ в диапазонах частот 211-290 и 400-490 ГГц. Давление паров в поглощающей ячейке было близким к  $10^{-2}$  мм рт. ст.; точность измерения частот линий поглощения - не хуже  $\pm 50$  кГц. Измерялись частоты относительно интенсивных линий поглощения. Всего измерено 230 частот переходов; большая часть из них впоследствии была идентифицирована и использована для уточнения и определения молекулярных постоянных, описывающих вращательный спектр.

Теоретическая обработка спектра осуществлялась с использованием вращательного гамильтониана Уотсона A-редукции в первом правом ( $\Gamma'$ ) координатном представлении:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{rot}}^{(\Lambda)} = & B J_b^2 + C J_c^2 + A J_a^2 - \Delta_J (J(J+1))^2 - \Delta_{JK} J^2 J_a^2 - \Delta_K J_a^4 - \\
 & - \frac{1}{2} [\delta_J J(J+1) + \delta_K J_a^2, J_+^2 + J_-^2] + \Phi_J (J(J+1))^3 + \Phi_{JK} (J(J+1))^2 J_a^2 + \\
 & + \Phi_{KJ} (J(J+1)) J_a^4 + \Phi_K J_a^6 + \frac{1}{2} [\varphi_J (J(J+1))^2 + \varphi_{JK} J(J+1) J_a^2 + \\
 & + \varphi_K J_a^4, J_+^2 + J_-^2],
 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J_{\pm} = J_b \pm i J_c$ ,  $[A, B]_{\pm} = AB + BA$ .

Таблица 1

Частоты наиболее интенсивных переходов молекулы формамида  
в основном колебательном состоянии

$J_{k_{-1} k_1} \rightarrow J'_{k'_{-1} k'_1}$	$\nu_{\text{эксп}}$ (МГц)	$\nu_{\text{э}} - \nu_{\text{т}}$ (МГц)
1	2	3
9 <sub>2,8</sub> → 10 <sub>2,9</sub>	211328,870	0,050
9 <sub>3,6</sub> → 10 <sub>3,7</sub>	212832,127	-0,046
9 <sub>3,7</sub> → 10 <sub>3,8</sub>	212572,715	0,002
9 <sub>4,5</sub> → 10 <sub>4,6</sub>	212433,300	-0,057
9 <sub>4,6</sub> → 10 <sub>4,7</sub>	212427,935	0,041
9 <sub>5,5</sub> → 10 <sub>5,6</sub>	212323,450	-0,033
9 <sub>6,4</sub> → 10 <sub>6,5</sub>	212275,877	-0,080
9 <sub>7,3</sub> → 10 <sub>7,4</sub>	212256,652	-0,040
9 <sub>8,2</sub> → 10 <sub>8,3</sub>	212253,283	-0,036
12 <sub>1,11</sub> → 13 <sub>1,12</sub>	282569,179	-0,105
12 <sub>2,10</sub> → 13 <sub>2,11</sub>	282529,420	-0,035
12 <sub>3,9</sub> → 13 <sub>3,10</sub>	277513,955	0,127
12 <sub>3,10</sub> → 13 <sub>3,11</sub>	276555,243	0,117
12 <sub>4,9</sub> → 13 <sub>4,10</sub>	276400,128	0,121
12 <sub>6,7</sub> → 13 <sub>6,8</sub>	276052,541	0,071
12 <sub>7,6</sub> → 13 <sub>7,7</sub>	275994,386	0,033
12 <sub>8,5</sub> → 13 <sub>8,6</sub>	275968,809	0,013
12 <sub>9,4</sub> → 13 <sub>9,5</sub>	275963,187	-0,081
12 <sub>10,3</sub> → 13 <sub>10,4</sub>	275971,320	-0,002
12 <sub>11,2</sub> → 13 <sub>11,3</sub>	275989,349	0,060
20 <sub>4,16</sub> → 21 <sub>4,17</sub>	448733,793	-0,188
20 <sub>4,17</sub> → 21 <sub>4,18</sub>	447720,486	-0,004
20 <sub>5,15</sub> → 21 <sub>5,16</sub>	447112,268	0,100
20 <sub>5,16</sub> → 21 <sub>5,17</sub>	447057,870	0,173
20 <sub>7,14</sub> → 21 <sub>7,15</sub>	446222,722	0,080
20 <sub>8,13</sub> → 21 <sub>8,14</sub>	446046,341	0,052
20 <sub>9,12</sub> → 21 <sub>9,13</sub>	445945,872	0,045
20 <sub>10,10</sub> → 21 <sub>10,11</sub>	445893,798	-0,017
20 <sub>11,10</sub> → 21 <sub>11,11</sub>	445874,966	-0,035

1	2	3
20 <sub>12,8</sub> → 21 <sub>12,9</sub>	445880,289	-0,070
7 <sub>3,5</sub> → 7 <sub>4,4</sub>	434364,982	-0,142
8 <sub>3,5</sub> → 8 <sub>4,4</sub>	434119,578	0,056
8 <sub>3,6</sub> → 8 <sub>4,5</sub>	434270,636	-0,136
9 <sub>3,7</sub> → 9 <sub>4,6</sub>	433849,145	0,121
10 <sub>3,7</sub> → 10 <sub>4,6</sub>	433450,175	-0,033
11 <sub>3,8</sub> → 11 <sub>4,7</sub>	432880,260	-0,089
14 <sub>3,12</sub> → 14 <sub>4,11</sub>	433400,892	-0,131
15 <sub>3,13</sub> → 15 <sub>4,12</sub>	433345,580	-0,100
16 <sub>3,14</sub> → 16 <sub>4,13</sub>	433390,343	-0,071
17 <sub>3,15</sub> → 17 <sub>4,14</sub>	433576,545	-0,028
18 <sub>3,16</sub> → 18 <sub>4,15</sub>	433950,856	0,031
31 <sub>2,30</sub> → 31 <sub>3,29</sub>	488921,413	0,000

Для идентификации вновь измеренного спектра были задействованы переходы всех трех типов (в основном, переходы  $20_{k-1k_1} \rightarrow 21_{k'-1k'_1}$ ).

Частоты некоторых наиболее интенсивных ( $\gamma \geq 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ) из них приведены в табл. 1. Максимальные значения  $J$  и  $K$  идентифицированных переходов составляли 37 и 12 соответственно. Вращательные и центробежные постоянные, входящие в выражение (1), определялись стандартным методом наименьших квадратов. В качестве начального приближения использовались данные [4], а также справочные значения констант гамильтониана Вильсона. Полученные значения констант гамильтониана Уотсона приведены в табл. 2.

Таблица 2  
Вращательные и центробежные постоянные молекулы формамида  
в основном состоянии

Константы гамильтониана Уотсона	Полученные значения констант	Данные [4]
$A$ (МГц)	72716,768(47)	72716,12
$B$ (МГц)	11373,5711(71)	11373,75
$C$ (МГц)	9833,8898(79)	9833,72
$\Delta_J$ (кГц)	8,021(22)	
$\Delta_{JK}$ (кГц)	-69,285(96)	
$\Delta_K$ (кГц)	1,3946(18)	
$\delta_J$ (кГц)	1,524(13)	
$\delta_K$ (кГц)	35,4(19)	
$\Phi_{KJ}$ (Гц)	7,360(64)	
$\varphi_{JK}$ (Гц)	14,60(52)	

Авторы выражают искреннюю признательность сотрудникам кафедры квантовой радиофизики ХГУ за любезно предоставленный нам в распоряжение спектрометр.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rubih R.H., Swenson G.W. // *Astrophys. J.* 1971. V. 169. L39.
2. Kurland R.J. // *J. Chem. Phys.* 1955. V. 23. P. 2202.
3. Costain C.C., Dowling J.M. // *J. Chem. Phys.* 1960. V. 32. N 58.
4. Hirota E., Sugisaki R. // *JMS.* 1974. V. 49. P. 251.
5. Lovas F.G. // *J. Chem. Phys.* 1988. V. 88. N 2. P. 722.

Радиоастрономический институт  
АН УССР

Поступила в редакцию  
3 апреля 1990 г.

УДК 621.371.165

## ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ МЕЙКСНЕРА

Б. В. Будаев

Как известно, волновое поле в клиновидной области во многих случаях может быть представлено в форме дробно-степенного ряда (ряда Мейкснера) по цилиндрической координате  $\rho$ , выражающей расстояние от точки наблюдения до ребра клина [1-3]. При этом коэффициенты рядов Мейкснера последовательно вычисляются из рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по угловой координате  $\theta$ . Известно, однако, и то, что имеются клиновидные структуры, для которых невозможно построить волновые поля в виде ряда Мейкснера [4-7]. Для таких случаев в [7] разработана методика построения обобщенных рядов Мейкснера, содержащих помимо степенной еще и логарифмическую зависимость от координаты  $\theta$ .

В настоящей работе излагается более простой и общий метод построения обобщенных рядов Мейкснера, применяемый нами ранее к задачам теории упругости и акустики [8-10].

Предположим, что в клиновидной области  $\Gamma = \{\rho, \theta: \rho \geq 0, |\theta| \leq \alpha\}$ , заданной в полярной системе координат  $\{\rho, \theta\}$ , определено волновое поле  $\varphi(\rho, \theta)$ , удовлетворяющее двумерному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что поле  $\varphi(\rho, \theta)$  ограничено при  $\rho \rightarrow 0$ , а на границах  $\theta = \pm \alpha$  области  $\Gamma$  потребуем выполнения условий импедансного типа

$$T\varphi(\rho, \pm \alpha) = \left\{ \mp \frac{2}{k\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mu \varphi \right\} \Big|_{\theta=\pm\alpha} = 0. \quad (2)$$

Наконец, для упрощения выкладок, будем рассматривать только симметричные поля, удовлетворяющие условию четности по углу  $\theta$ :

$$\varphi(\rho, \theta) = \varphi(\rho, -\theta). \quad (3)$$

Рассмотрим поля  $\varphi_p(\rho, \theta)$  вида

$$\varphi_p(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu}(p) J_{p+\nu}(k\rho) \cos(p + \nu)\theta, \quad (4)$$

где  $p$  - некоторый комплексный параметр, а  $J_p(k\rho)$  - функция Бесселя. Поля (4) по построению удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1) и соотношению симметрии (3). На основании известного тождества

$$\frac{2p}{k\rho} J_p(k\rho) = J_{p+1}(k\rho) + J_{p-1}(k\rho)$$

находим, что граничное поведение поля  $\varphi_p(\rho, \theta)$  определяется рядом

$$T\varphi_p(\rho, \pm\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu}(p) \left[ J_{p+\nu-1}(k\rho) \sin(p + \nu - 1)\alpha + J_{p+\nu-1}(k\rho) \sin(p + \nu - 1)\alpha + \mu J_{p+\nu}(k\rho) \cos(p + \nu)\alpha \right],$$

который после тривиальной перегруппировки членов приводится к виду

$$T\varphi_p(\rho, \pm\alpha) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} b_{\nu}(p) J_{p+\nu}(k\rho); \quad (5)$$

$$b_{-1}(p) = \alpha_0(p) \sin p\alpha,$$

$$b_0(p) = \alpha_1(p) \sin(p + 1)\alpha + \mu\alpha_0(p) \cos p\alpha,$$

$$\text{-----} \quad (6)$$

$$b_{\nu}(p) = \alpha_{\nu+1}(p) \sin(p + \nu + 1)\alpha + \mu\alpha_{\nu}(p) \cos p\alpha + \alpha_{\nu-1}(p) \sin(p + \nu - 1)\alpha,$$

где условлено, что  $\alpha_{-2}(p) = \alpha_{-1}(p) = 0$ .

Очевидно, что для всех комплексных значений  $p$ , за исключением, быть может, некоторого счетного множества точек, соотношения (6) обратимы, т. е. для всякой заданной последовательности  $b_{\nu}(p)$ ,  $\nu \geq 1$ , однозначно определена последовательность  $\alpha_{\nu}(p)$ ,  $\nu \geq 0$ , удовлетворяющая уравнениям (6). Действительно, соотношения (6) представляют собой рекуррентную систему линейных уравнений, решение которой задается рекуррентными формулами

$$\alpha_{\nu+1}(p) = \frac{b_{\nu}(p) - \mu\alpha_{\nu}(p) \cos(p + \nu)\alpha - \alpha_{\nu-1}(p) \sin(p + \nu - 1)\alpha}{\sin(p + \nu + 1)\alpha}, \quad (7)$$

теряющими смысл только при  $p = p_{na}$ , где

$$p_{na} = \frac{\pi}{\alpha}n - m, \quad n \in L, \quad m \in N. \quad (8)$$

Пусть  $L$  - некоторый замкнутый контур на комплексной плоскости  $p$ , не проходящий через точки  $p_{na}$ , а функции  $b_{\nu}(p)$  определены на

контуре  $l$  и выбраны таким образом, что

$$\int_1 \sum_{\nu=-1}^{\infty} b_{\nu}(p) J_{p+\nu}(kp) dp = 0.$$

Тогда, если функциональная последовательность  $a_{\nu}(p)$ ,  $\nu \geq 0$ , вычислена по последовательности  $b_{\nu}(p)$  посредством рекуррентных формул (7), то поле

$$\varphi(\rho, \theta) = \int_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(p) J_{p+\nu}(kp) \cos(p+\nu)\theta \quad (9)$$

по построению удовлетворяет граничным условиям

$$T\varphi(\rho, \pm\alpha) = \int_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(p) J_{p+\nu}(kp)$$

заданного типа (2).

В таком случае, выбирая подходящим образом последовательность  $b_{\nu}(p)$ ,  $\nu \geq -1$ , и контур  $l$ , мы будем получать различные волновые поля, удовлетворяющие условиям (1)-(3). Выберем, например,

$$b_{-1}(p) = 1/2\pi i, \quad b_{\nu}(p) = 0 \quad \text{при } \nu \geq 0,$$

а в качестве контура  $l$  возьмем бесконечно малую петлю, охватывающую один из неотрицательных корней  $p = p_n = \pi n/\alpha \geq 0$  уравнения  $\sin p\alpha = 0$ .

Тогда, если  $\alpha$  таково, что  $p_n + \nu \neq p_m$  ни при каких значениях  $\nu \geq 0$ ,  $m \geq 0$ , то, вычисляя интеграл (9) по теореме о вычетах, мы получаем волновое поле

$$\varphi_{p_n}(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{a}_{\nu}(p_n) J_{p_n+\nu}(kp) \cos(p_n + \nu)\theta \quad (10)$$

с коэффициентами

$$\hat{a}_{\nu}(p_n) = \text{Res}_{p=p_n} a_{\nu}(p),$$

удовлетворяющими рекуррентным соотношениям

$$\hat{a}_0(p_n) = 1,$$

$$\hat{a}_{\nu+1}(p_n) = -\mu \hat{a}_{\nu}(p_n) \cos \nu \alpha - \hat{a}_{\nu-1}(p_n) \sin(\nu-1)\alpha.$$

Если же при некоторых  $\nu$  найдутся такие номера  $m \geq 0$ , что имеет место совпадение  $p_m = p_n + \nu$ , то применение к интегралу (9) теоремы о вычетах приводит к полям с более сложной, чем (10), структурой:

$$\varphi_{p_n}(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^M}{dp^M} \left[ a_{\nu}(p) \frac{(p-p_n)^M}{(M-1)!} J_{p+\nu}(kp) \cos(p+\nu)\theta \right] \Big|_{p=p_n} \quad (11)$$

где  $M = M(n, \nu)$  - число значений  $m$ , для которых при заданных  $n$  и  $\nu$  выполняется соотношение  $p_m = p_n + \nu$ .

Таким образом, мы получили представления волновых полей, удовлетворяющих условиям (1)-(3), в виде так называемых рядов Неймана (10) или их обобщений (11). Причем ряды (11) возникают в

случаях, когда  $\alpha = \pi k/l$  при некоторых  $k$  и  $l$ , а ряды (10) - в случаях, когда  $\alpha \neq \pi k$  ни при каких значениях  $k$  и  $l$ . Что же касается представлений волновых полей в виде рядов Мейкснера, то для их получения достаточно подставить в (10) или (11) известные разложения

$$J_p(k\rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! \Gamma(p+\nu+1)} (k\rho/2)^{p+2\nu}$$

для функции Бесселя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Meixner J. // Ann. Phys. 1949. V.6. P.2.
2. Meixner J. // IEEE Trans.AP. 1972. V.20. N 4. P. 442.
3. Karp S.N., Karal F.C. // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V.15. N 4. P.413.
4. Andersen J.B., Solodukhov V.V. // IEEE Trans.AP. 1978. V.26. N 3. P.598.
5. Brooke G.H., Kharadly M.M.Z. // IEEE Trans.AP. 1977. V.25. N 4. P.571.
6. Веселов Г.И., Платонов Н.И. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т.28. N 2. С. 92.
7. Макаров Г.И., Осипов А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. N 6. С. 714.
8. Будаев Б.В., Петрашень Г.И. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. - Л., 1983. С. 78.
9. Budaev B.V. LOMI preprint E-6-89, 1988.
10. Будаев Б.В. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. -Л., 1989. С. 36.

Ленинградское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова  
АН СССР

Поступила в редакцию  
27 марта 1990 г.

УДК 621.372.4

#### ИЗМЕРЕНИЕ ФЛУКТУАЦИИ КОМПОНЕНТ ИММИТАНСА ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Г. Н. Бочков, А. У. Чукин, В. А. Шемагин

1. Известные методы [1] оценки флуктуаций параметров двухполюсников базировались на воздействии на систему, содержащую исследуемый двухполюсник, высокостабильного, последовательно переключаемого на ряд частот гармонического сигнала, детектировании флуктуационных составляющих сигнала после воздействия и решении системы уравнений для вычисления флуктуаций активной и реактивной компонент эквивалентной феноменологической шумовой схемы двухполюсника [2], а также на использовании в качестве "опорного сигнала" высокостабильного источника постоянного тока [3].

Относительные флуктуации  $\delta a(t)$  активной компоненты (ФАК) и относительные флуктуации  $\delta b(t)$  реактивной компоненты (ФРК) иммитанса  $\vec{W}(t)$  двухполюсника (ИД)  $\vec{W}(t) = a[1 + \delta a(t)] + j\omega_0 b[1 + \delta b(t)]$  ( $a, b$  - значения активной и реактивной компонент ИД соответственно;  $|\delta a(t)|, |\delta b(t)| \ll 1$ ) характеризуют, например, диссипативные процессы и реактивные связи в "зернистой" структуре

[4] композиционных материалов, керамики, керметов, высокотемпературных сверхпроводящих керамик, ферромагнитных пленок и т. п.

2. В излагаемом ниже методе моночастотный сигнал воздействует на измеряемый двухполюсник с последующим одновременным выделением квадратурно-разделенных шумовых сигналов, уровень спектральной плотности (СП) которых пропорционален уровню СП флуктуаций проводимости (сопротивления) и емкости (индуктивности) эквивалентной емкостной (индуктивной) схемы измеряемого двухполюсника. Одновременная регистрация уровня ФАК и ФРК выполняется устройством для измерения флуктуаций компонент иммитанса двухполюсника [5]. В устройстве генератор формирует квазигармонический сигнал  $\overline{E}(\tau)$  частоты  $\omega_0$ , поступающий на балансный мост, в плечи которого включены измеряемый двухполюсник и эталонный двухполюсник с иммитансами  $\overline{W}_1(\tau)$  и  $\overline{W}_2(\tau)$  соответственно. Мост балансируется по активной компоненте и имеет разбаланс по реактивной, при этом пропорционально коэффициенту разбаланса ослабляется влияние собственных флуктуаций амплитуды и фазы сигнала генератора на те же параметры сигнала  $\overline{u}(\tau)$  на выходе моста. Одновременно усиливается модулирующее влияние флуктуаций компонент иммитанса измеряемого двухполюсника. Из уравнения связи входного и выходного сигналов балансного моста через иммитансы сравниваемых двухполюсников  $\overline{u}(\tau)/\overline{E}(\tau) = [\overline{W}_2(\tau) - \overline{W}_1(\tau)]/[\overline{W}_1(\tau) + \overline{W}_2(\tau)]$  получим соотношение между ФАК и ФРК иммитанса исследуемого двухполюсника с амплитудными  $\delta v_0(t)$  и фазовыми  $\delta v_1(t)$  флуктуациями усиленного в  $K$  раз квазигармонического сигнала разбаланса  $\overline{v}(\tau) = K\overline{u}(\tau)$ :

$$2Qk_1[\delta v_0(t) + j\delta v_1(t)] = Q\delta b_1(t) + j\delta a_1(t),$$

где  $Q = \frac{\omega_0 b_1}{a_1}$  - добротность измеряемого двухполюсника;  $k_1 = \frac{b_1 - b_2}{2b_2}$  - коэффициент разбаланса моста по реактивной компоненте. Флуктуационные изменения амплитуды и фазы сигнала  $\overline{v}(\tau)$  выделяются в демодуляторе флуктуаций, где после режекторного фильтра с частотой настройки  $\omega_0$  сигнал, пропорциональный  $\delta v_0(t) + j\delta v_1(t)$ , усиливается и при помощи взаимноквадратурных опорных сигналов, формируемых из сигнала  $\overline{v}(\tau)$ , разделяется на синфазную и ортогональную компоненты [6]. Спектральные плотности ФАК и ФРК иммитанса исследуемого двухполюсника, измеренные анализаторами спектра, связаны с СП выходных сигналов  $V_0(F)$  и  $V_1(F)$  демодулятора флуктуаций:

$$S_{\delta a_1}(F) = \frac{2Q}{EKK_1} V_1(F), \quad S_{\delta b_1}(F) = \frac{2}{EKK_0} V_0(F),$$

где  $K_0$  и  $K_1$  - коэффициенты передачи демодулятора для амплитудных и фазовых флуктуаций сигнала  $\overline{v}(\tau)$ ,  $E$  - амплитуда сигнала  $\overline{E}(\tau)$ . Предельная чувствительность устройства по СП ФАК  $S_{\delta a}^{min}(F)$  и СП ФРК  $S_{\delta b}^{min}(F)$  ИД ограничивается ослабленными при балансировке моста уровнями СП флуктуаций амплитуды  $S_{\delta a}(F)$  и фазы  $S_{\delta \phi}(F)$  сигнала



генератора и СП теплового шума -  $\sigma$  - входных усилительных каскадов демодулятора флуктуаций:

$$S_{\delta a}^{in}(F) = Q[2k_1 S_{\delta \varphi}(F) + \sqrt{2} \sigma E^{-1}], \quad S_{\delta b}^{in}(F) = 2k_1 S_{\delta \alpha}(F) + \sqrt{2} \sigma E^{-1}.$$

3. Устройство для измерения флуктуаций компонент иммитанса двухполюсника было использовано для измерения ФАК и ФРК адмитанса конденсаторов типа КПК-3, КТ-1, КСО-1 (рис. 1, кривые 1, 2, 3 соответственно) варикапа 2В119А (кривая 4), резистора МЛТ-0,25 (кривая 5) и тонкопленочных хромового, графитового микрорезисторов (кривые 6, 7 соответственно). Предельная чувствительность устройства по СП ФАК и ФРК (рис. 1, 2; кривая 8). Эталонный двухполюсник устройства состоял из параллельно включенных высокостабильного конденсатора и маломощного управляемого резистора. При этом в измерениях  $S_{\delta a_1}(F) = S_{\delta g_1}(F)$  - СП относительных флуктуаций проводимости,  $S_{\delta b_1}(F) = S_{\delta c_1}(F)$  - СП относительных флуктуаций емкости измеряемого двухполюсника.

Из результатов измерений (рис. 1, см. на вклейке) видно, что в количественном отношении для исследованных конденсаторов больший уровень имеет СП относительных флуктуаций проводимости. Отметим, что увеличение нестабильности конденсаторов оказалось связанным с увеличением потерь в диэлектрике. К неожиданным эффектам следует отнести также то, что при измерении конденсаторов КПК-3 и КТ-1 взаимное расположение уровней их СП ФАК обратно СП ФРК. При измерениях СП флуктуаций компонент адмитанса варикапа 2В119А в балансный мост был дополнительно включен источник напряжения смещения - гальванический элемент. Из рис. 1 следует, что для варикапа уровень СП ФАК выше уровня СП ФРК примерно на 20 дБ. У резисторов МЛТ-0,25 (рис. 2) уровни СП ФАК и ФРК одного порядка.

Сравним уровни СП относительных ФРК макроэлементов РЭА (рис. 1) с соответствующими уровнями СП относительных ФРК тонкопленочных микрорезисторов субмикронных размеров (рис. 2, кривые 6, 7), технология изготовления которых приведена в [7]. Последние оказались выше на 40 дБ и более, чем ФРК макроэлементов, что можно объяснить на основе теории избыточного естественного фликкерного шума в мезоструктурах либо на основе перколяционных моделей переноса заряда между отдельными проводящими областями структуры микрорезисторов, а также влиянием электромиграционных процессов.

Измеряя спектральную плотность флуктуаций активной и реактивной компонент иммитанса двухполюсника, выполненного на базе композиционных материалов, керметов, высокотемпературных сверхпроводников, можно исследовать оптимальность применяемых технологий изготовления в направлении повышения стабильности параметров, а также для контроля и разбраковки готовой продукции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бочков Г. Н. // Ученые записки. Вып. 105. Сер. радиотехническая. - Горький: Гос. ун-т, 1970. С. 10.
2. Кудшов В. Н., Янушевский Г. Д. // Тезисы докл. IV Всесоюзной конференции флуктуационные явления в физических системах. - Пушкино, 1985. С. 96.
3. Широков А. М., Радовский В. И. // Сб. Радиотехника, автоматика, надежность. - Минск: Наука и техника, 1966. С. 101.
4. Лигальский Г. П. // Сб. Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах (в печати).
5. Устройство для измерения флуктуаций компонент иммитанса

- двухполюсника /Бочков Г.Н., Чикин А.И., Шемагин В.А. Заявка  
 N 4635421/21 с положительным решением от 24.07.89. СССР.  
 6. А.с. 1054874 СССР. Демодулятор /А.И. Чикин, В.А. Шемагин. - Оpubл.  
 в Б.И. 1983. N 42.с. 200.  
 7. Александров А.А., Бочков Г.Н. и др. //Изв. вузов. Радиофизика.  
 1988.Т. 31. N 8. с.1018.

Научно-исследовательский  
 радиофизический институт

Поступила в редакцию  
 28 февраля 1990 г.

УДК 621.371

## ОБ ОДНОМ РАДИОЛОКАЦИОННОМ МЕТОДЕ ОБНАРУЖЕНИЯ КРУПНЫХ КАПЕЛЬ В ОБЛАКАХ

*В. Е. Дудин*

В настоящее время вопрос о наличии и количестве крупных капель в облаках является дискуссионным [1-3]. Сведения о крупных каплях в облаках получают как с помощью различного типа счетчиков частиц [1], так и радиолокационными методами по измерениям отражаемости [2,3]. В данной работе изложен метод индикации крупных капель в облаках, основанный на изучении статистических свойств отраженного сигнала импульсно-доплеровского радиолокатора. При этом полагается, что отраженный сигнал, являющийся случайным, представляет собой сумму сигналов с мощностью, зависящей как от ЭПР отдельного рассеивателя, так и от числа облачных рассеивателей в импульсном объеме радиолокатора. Метод иллюстрируется примером зондирования облака на волне  $\lambda = 35$  см на полигоне ВГИ (г.Нальчик). Отраженный сигнал с выхода фазового детектора импульсно-доплеровского радиолокатора поступает на вход спектрального анализатора, представляющего собой набор фильтров. Амплитуда сигнала на выходе фильтра с центральной частотой  $\omega_k$  есть

$$x = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\omega_{iq} t + \psi_i) \cos \omega_k t dt \approx \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\alpha_k \cos \psi_k}{2}, \quad (1)$$

где  $\alpha_{i,k}$  - амплитуда поля, рассеянного  $i$ - и  $k$ -й частицами,  $N$  - общее число рассеивателей в импульсном объеме,  $N_k$  - число рассеивателей в импульсном объеме, имеющих доплеровскую частоту  $\omega_k$  в интервале  $\Delta\omega = \omega_k + 2\pi/T$ ,  $\psi_{i,k}$  - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале  $0 + 2\pi$ . (В (1) пренебрегается влиянием конечности времени интегрирования.)

Рассмотрим плотность вероятности  $\varphi(x)$  как функцию  $N_k$ . По

определению

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N_k} J_0(a_k q) e^{-1q^2} dq. \quad (2)$$

Здесь  $J_0(a_k q)$  - известная характеристическая функция  $a_k \cos \psi_k$ . На рис. 1 (см. на вклейке) представлены результаты численного расчета  $\varphi(x)$  для различных  $N_k$  с аддитивным шумом, имеющим нормальное распределение с дисперсией  $\sigma = 0,14 N_k a_k$  и единичными амплитудами  $a_k$ . Отсюда можно сделать вывод о возможности различения  $\varphi(x)$  для небольших  $N_k$ . Например, для  $N_k < 10$  необходим объем выборки  $\sim 100$ . Такой объем экспериментальных данных можно обеспечить при усреднении выборочных распределений как по времени в пределах интервала стационарности, так и по дальности без существенного ухудшения разрешения по пространству, так как для коротких зондирующих импульсов поперечные размеры импульсного объема много больше продольного.

Количество мелких капель в реальных импульсных объемах велико ( $N > 10$ ). Распределение крупных капель в облаке аппроксимируется [1] зависимостью  $(\alpha - 1) (N_1/r_1) (r_1/r)^\alpha$ , где  $r_1 = 85$  мкм,  $\alpha = 3 + 6$ ,  $N_1 = 0 + 200 \text{ м}^{-3}$  - средняя концентрация капель, радиус которых превышает  $r_1$ . Хотя  $N_1$  может быть достаточно большим, число капель с  $r_1 > 300$  мкм благодаря зависимости от  $\alpha$  существенно меньше. Минимальная величина интервала доплеровских частот, которая соответствует минимуму  $N_k$ , определяется отношением  $T_{\text{стац}}/L$ , где  $L$  - число независимых временных реализаций выборочного распределения. Величина  $T_{\text{стац}}$  в облаках достигает  $10 + 30$  с [4,5]. При  $L = 10$  и для выборки по длительности  $\sim 10$  достигается необходимый для анализа объем выборки. Оценка  $N_k$  для импульсного объема  $5 \cdot 10^4 \text{ см}^3$  трехсантиметрового локатора при реально измеренной концентрации крупных капель [1] в облаке типа Sc и при  $T = 1$  с дает величины  $3 + 10$  для фильтров с доплеровскими частотами, соответствующими гравитационным скоростям капель, размеры которых превышают 500 мкм. При этом радиолокационная отражаемость  $Z = \sum N a_1^6$  равна  $5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^3$ . Эти величины  $N_k$  соответствуют области распознавания  $\varphi(x)$ .

На рис. 2 приведены экспериментально полученные распределения  $\varphi(x)$  для дождя и облака без осадков. Видно, что облачное распределение существенно отличается от нормального, что вполне объясняется вышеизложенными соображениями. Для дождей, где количество рассеивателей заведомо велико,  $\varphi(x)$  близко к нормальному распределению. Расчеты были выполнены для  $a_k = \text{const}$ , что соответствует случаю движения рассеивателей под действием гравитационных сил и воздушного потока, одинаково увлекающего все рассеиватели. Появление турбулентности приводит к неравенству  $a_k$  в (2) и увеличению числа частотных каналов из-за турбулентного уширения спектра скоростей. При этом отличия распределения  $\varphi(x)$  от нормального усиливаются.

Таким образом, рассмотренный метод позволяет определить наличие крупных капель в облаках при зондировании их доплеровскими радиолокаторами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков А. М., Мазин И. П., Невзоров А. Н. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1965. Т.1. N 3. С. 291.
2. Gossard E.E. The use of radar for studies of clouds. NOAA/ERL/Wave Propagation Laboratory, Boulder, Colorado, 80302 (1978).
3. Pruppacher H.R. In:Clouds their formation optical properties and effect./Ed. by P.V.Hobbs and A.Deepak. Academic Press., 1981.
4. Белявский А. В., Дудин В. Е., Тхамоков Б. Х. //Труды ВГИ. 1985. Вып. 59. С. 40.
5. Спепаненко В. Д. Радиолокация в метеорологии. - Л. :Гидрометео-издат, 1973.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
13 февраля 1990 г.

---

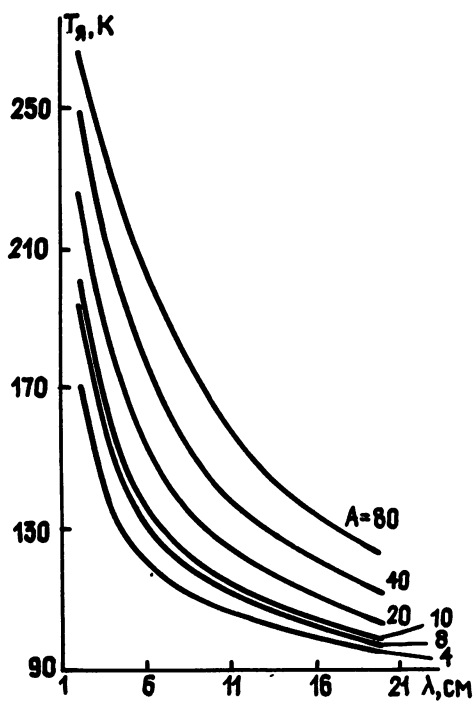


Рис. 1.

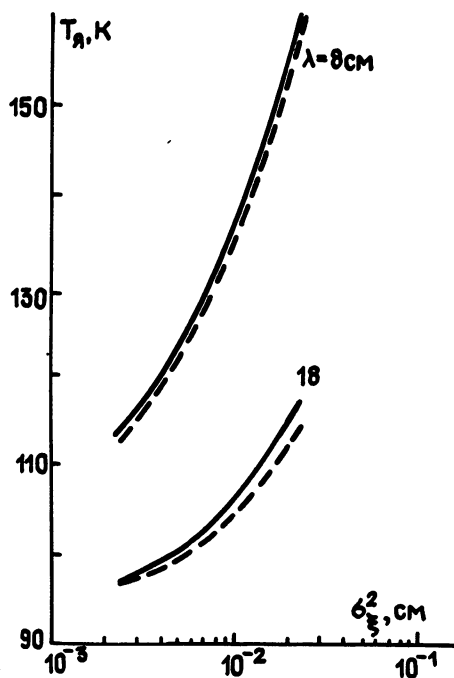


Рис. 2.

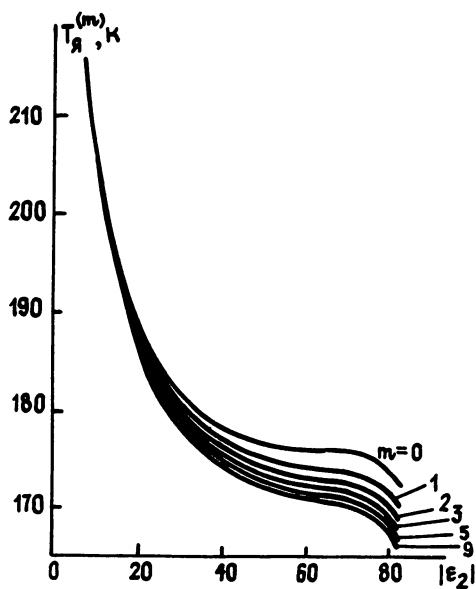


Рис. 3.

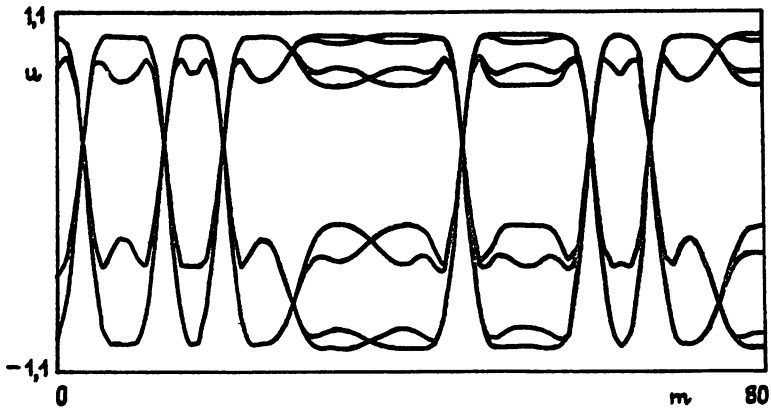


Рис. 1.

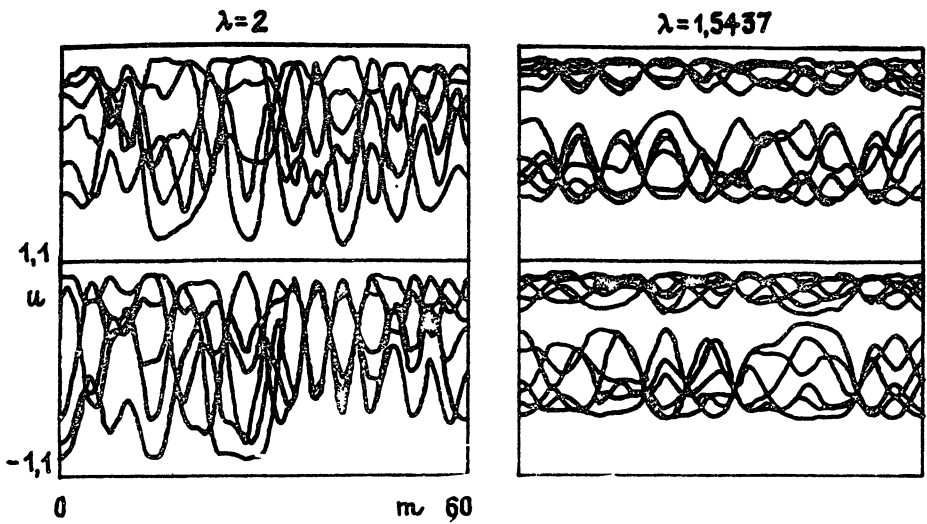


Рис. 2.

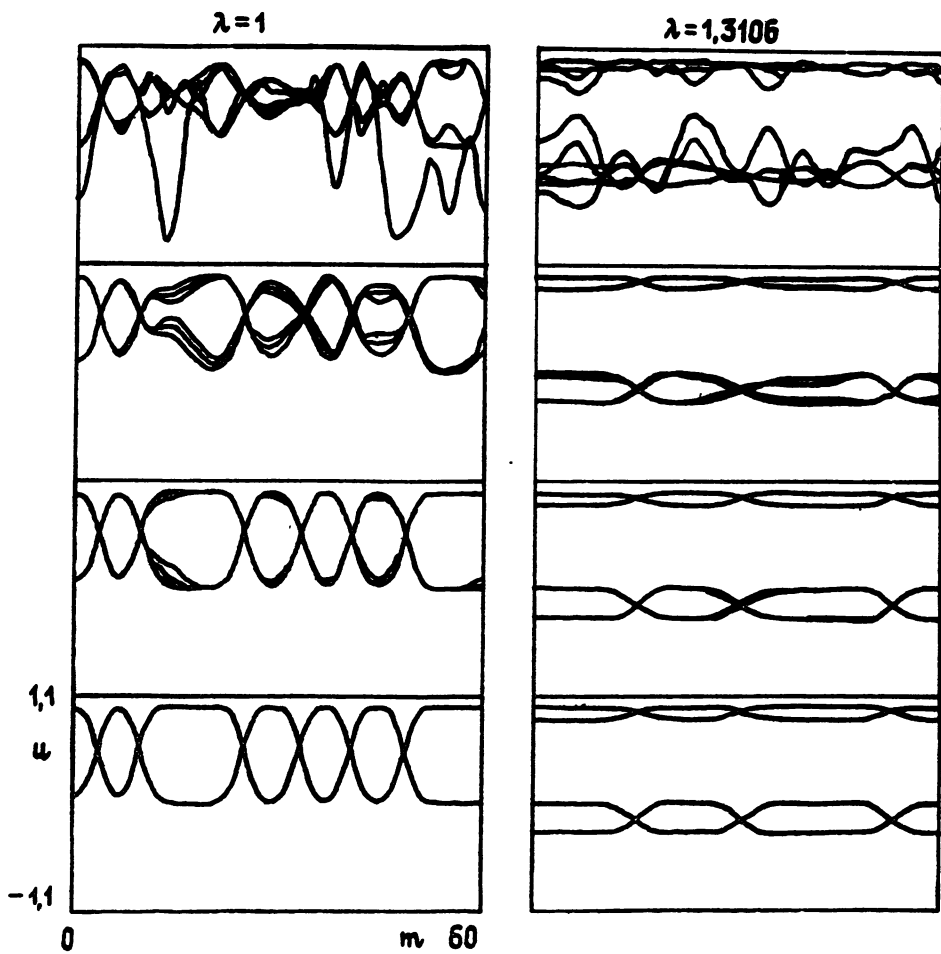


Рис. 2.

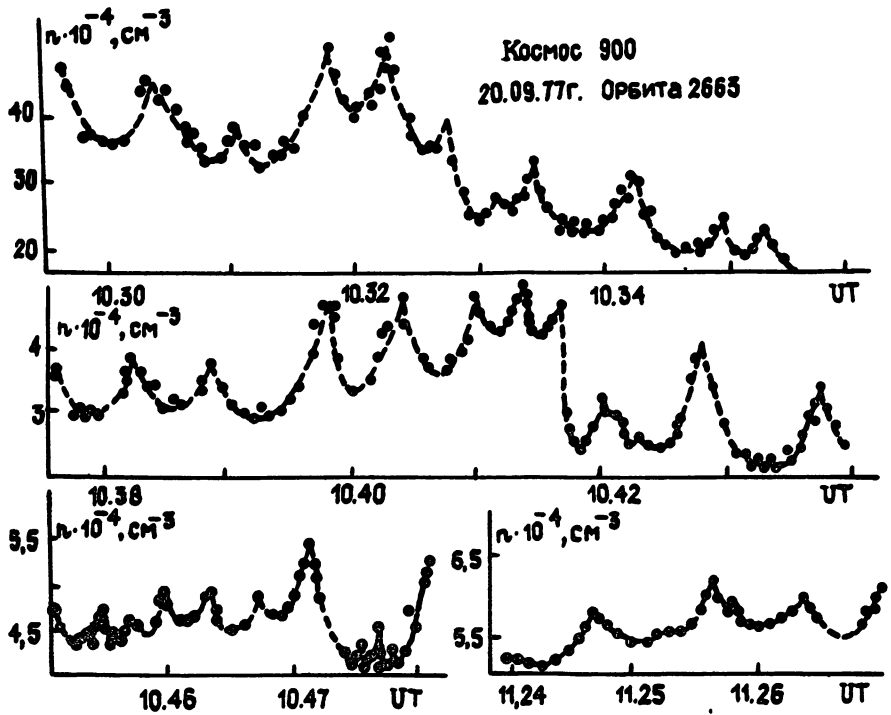


Рис. 1.

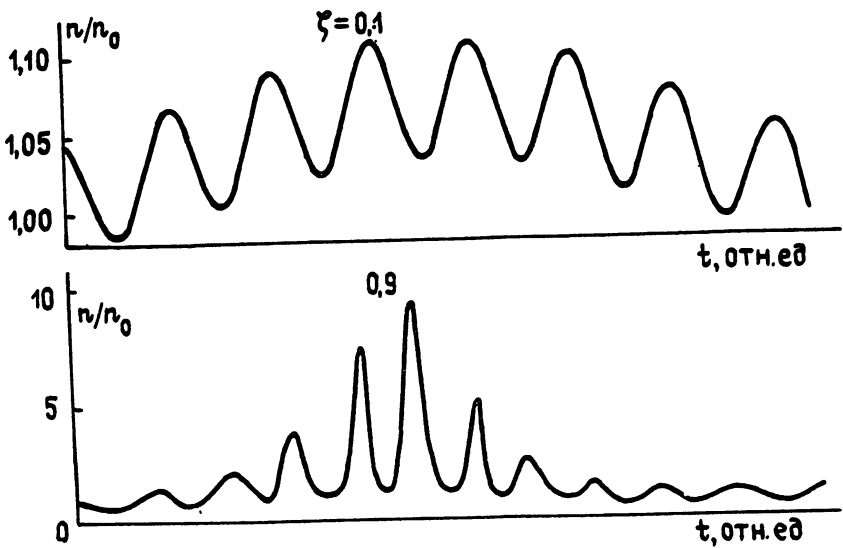
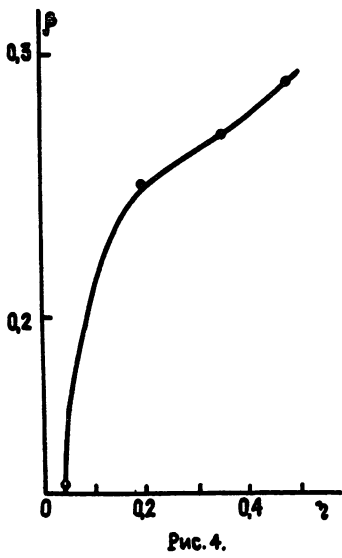
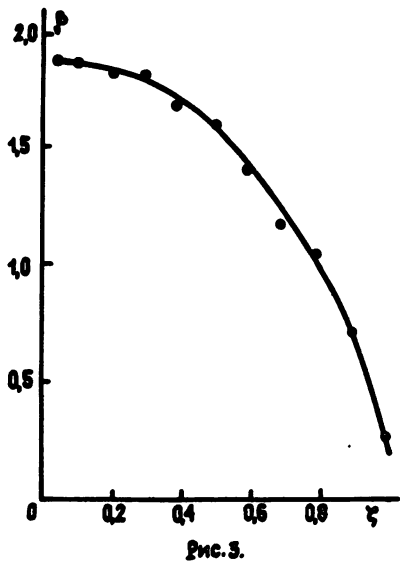


Рис. 2.





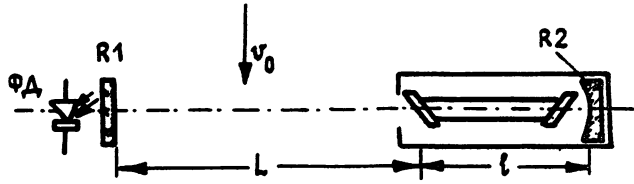


Рис. 1.

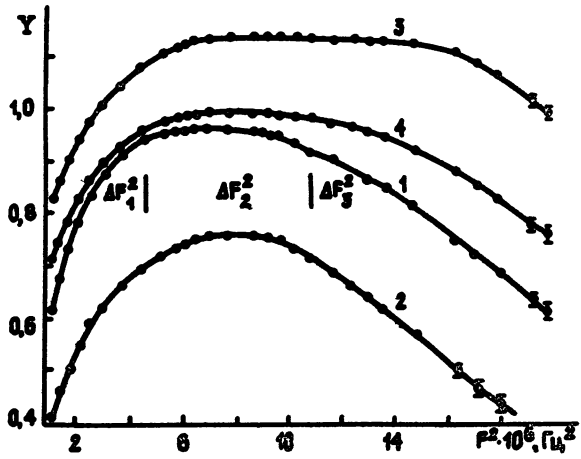


Рис. 2.

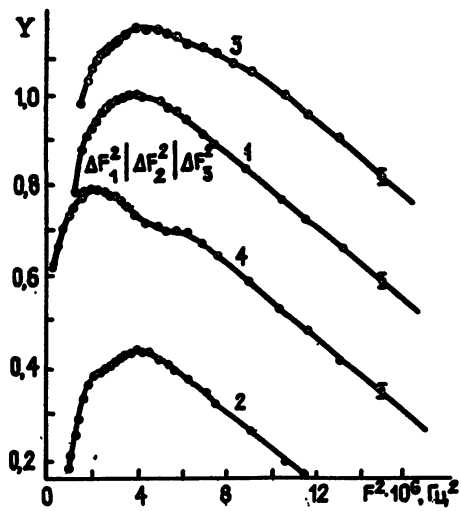


Рис. 3.

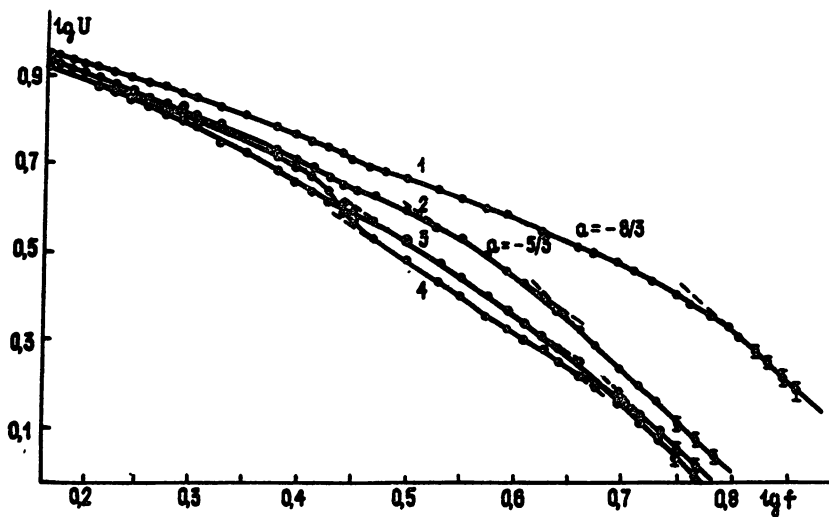


Рис. 4.

К сг. В. А. Алешкевича и др.

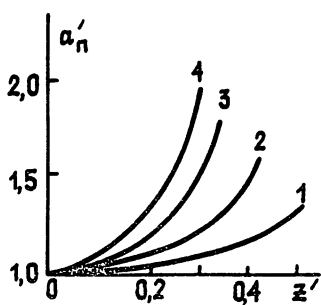


Рис. 1

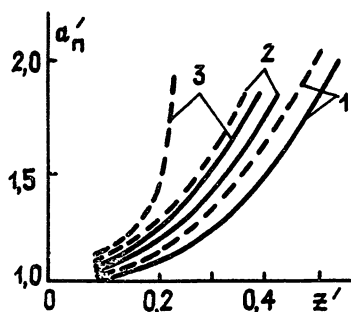


Рис. 2.

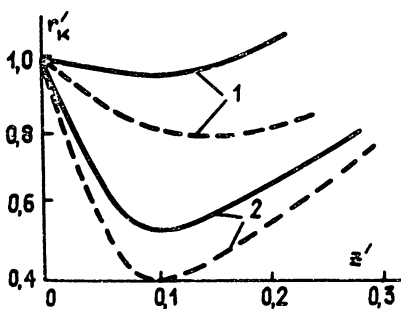


Рис. 3.

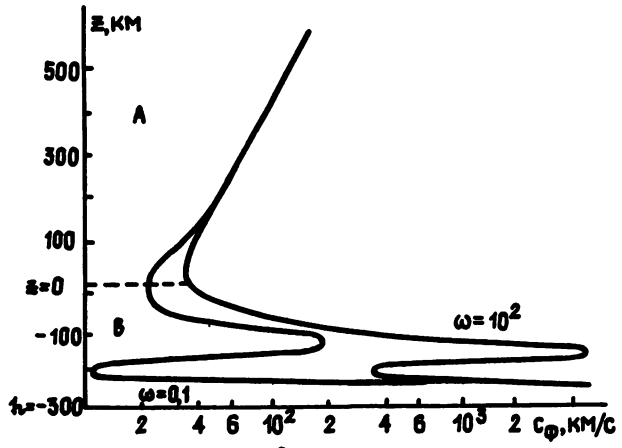


Рис. 1.

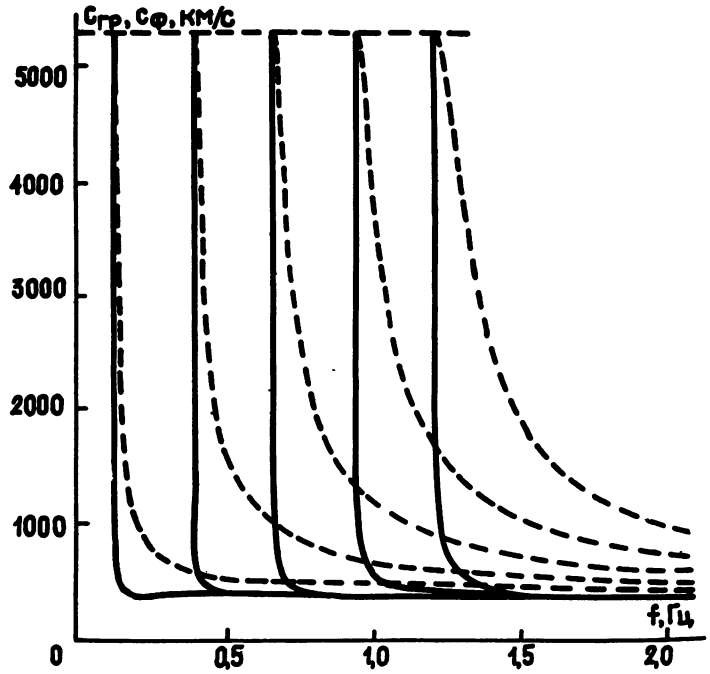


Рис. 2.

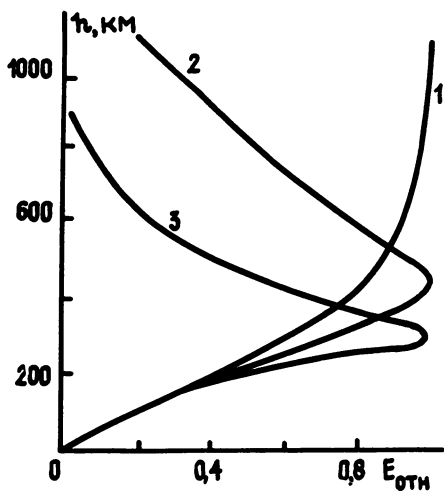


Рис. 3.

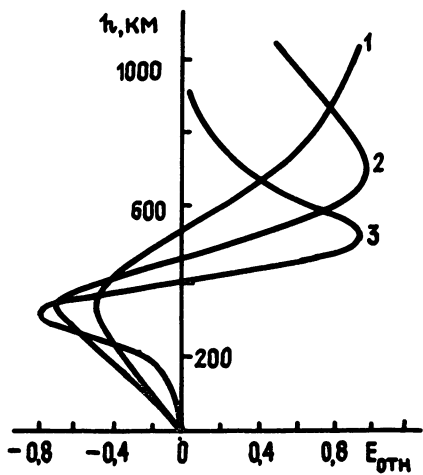


Рис. 4.

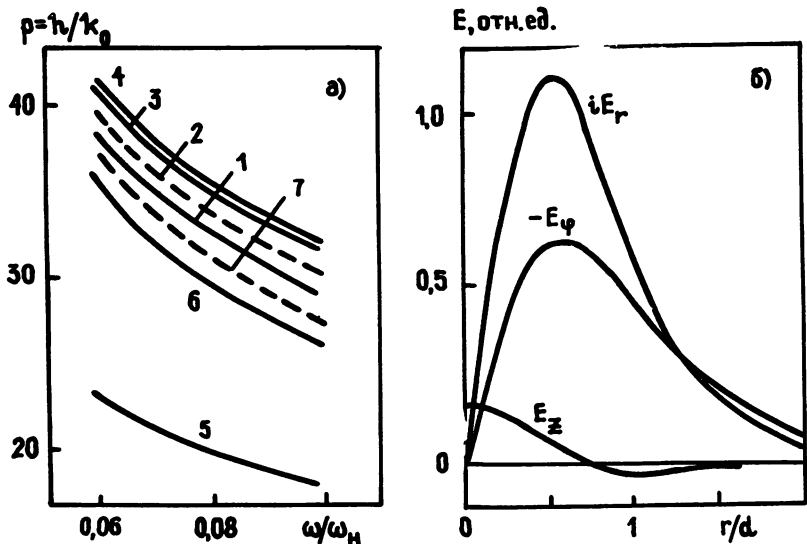


Рис. 1.

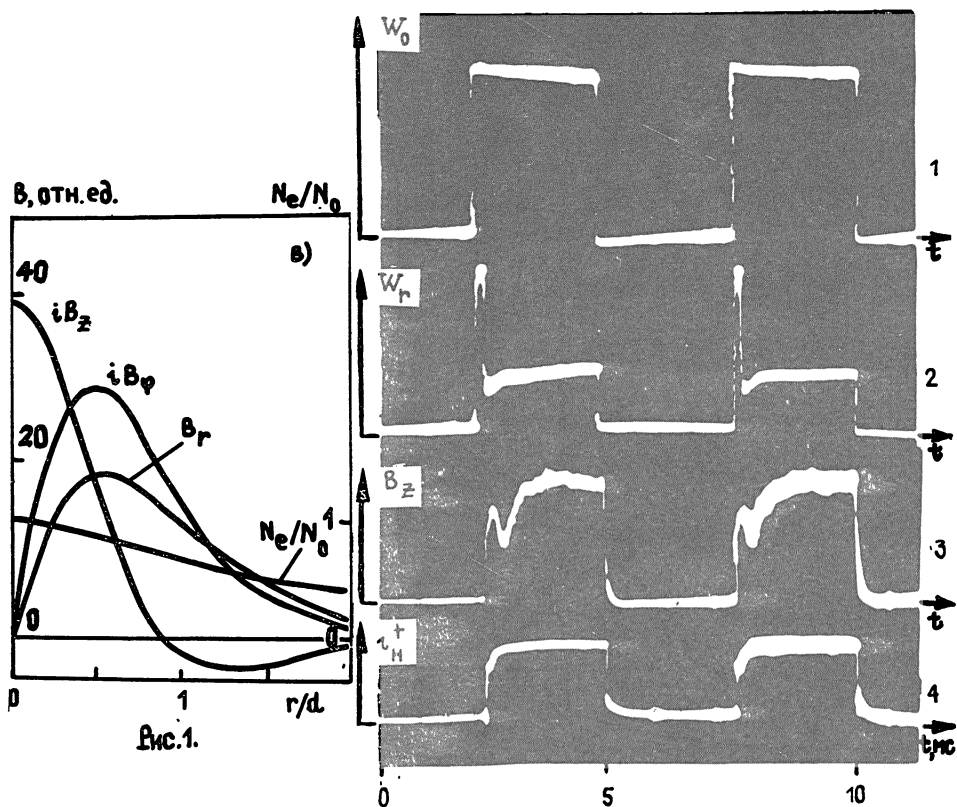


Рис 2

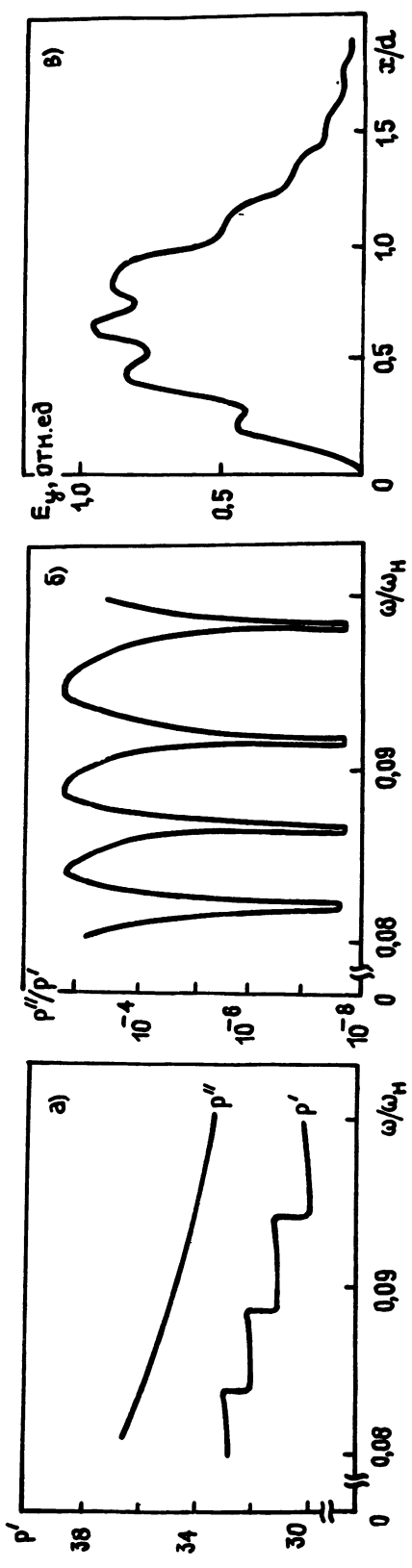
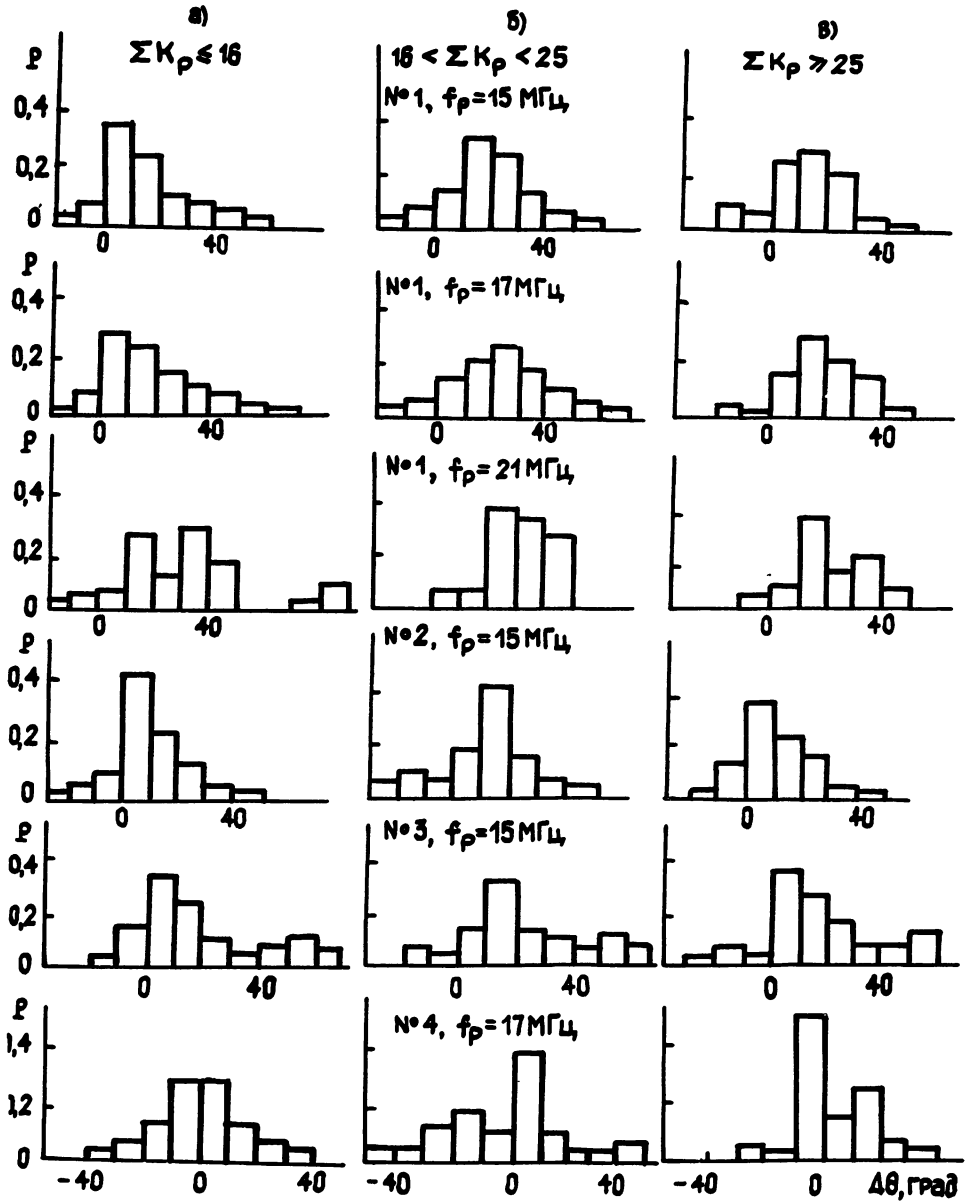


Рис. 3.





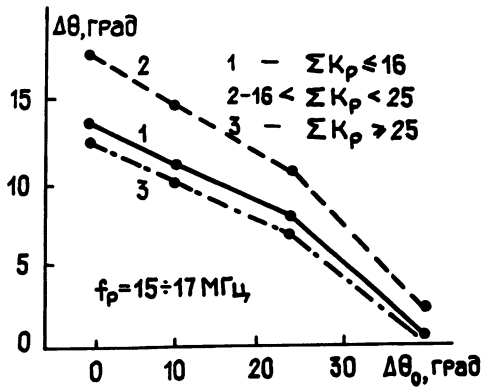


Рис. 2.

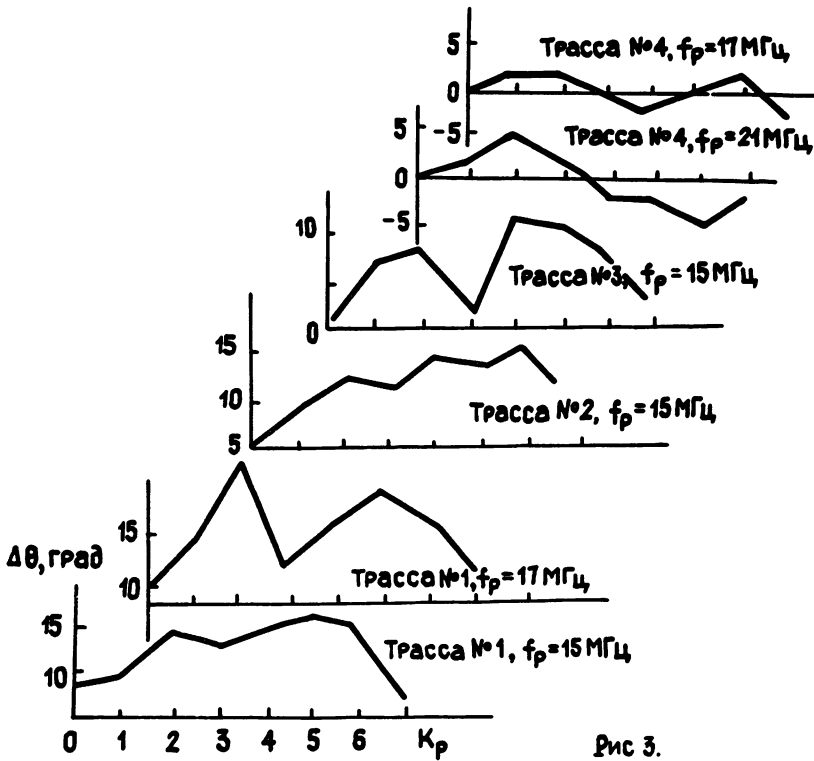


Рис. 3.

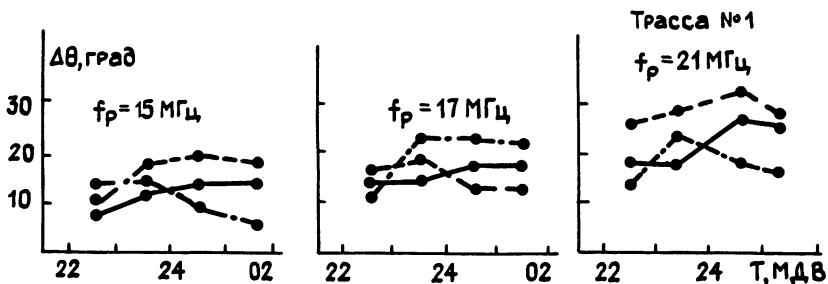


Рис. 4.

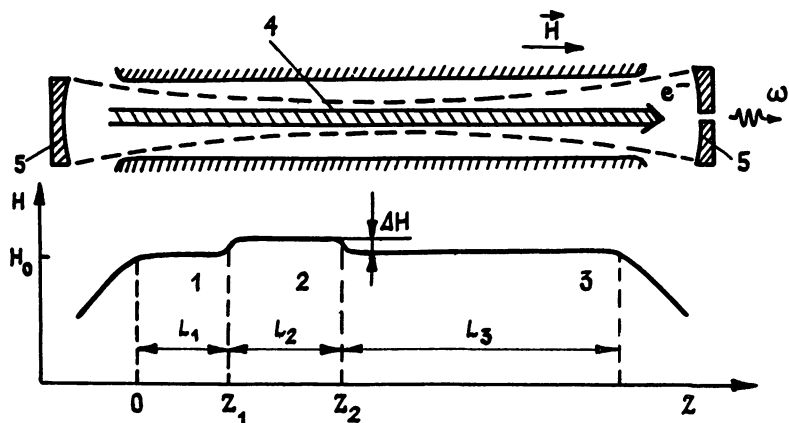


Рис. 1.

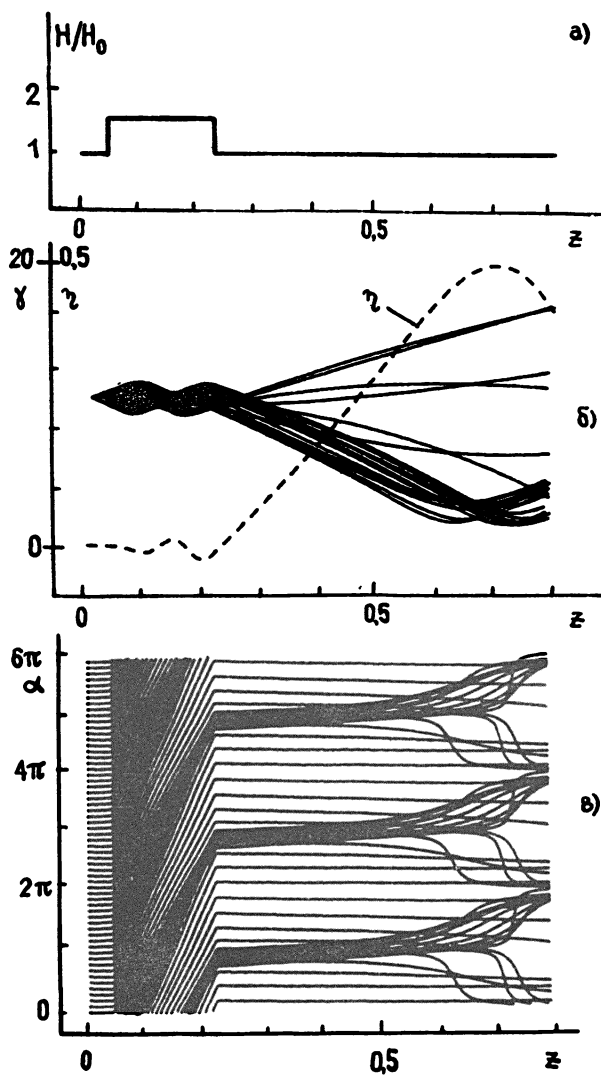


Рис. 2.

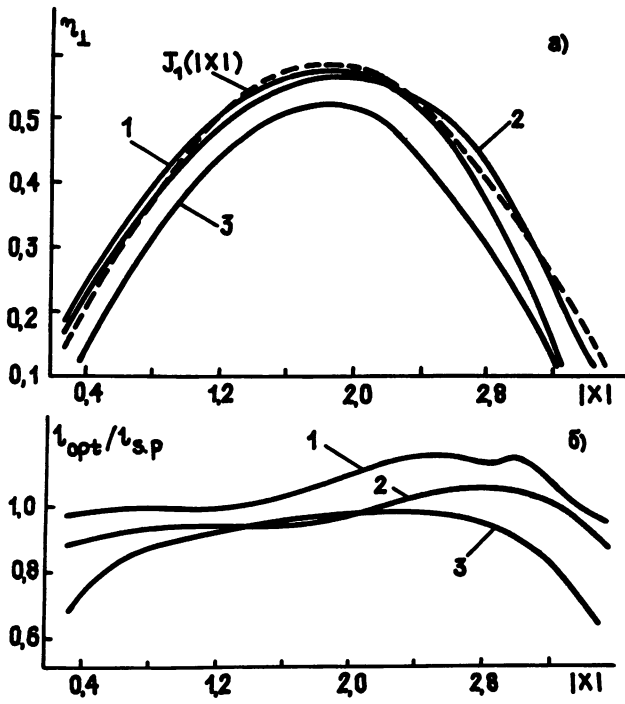


Рис. 3.

К ст. В. Е. Дудина

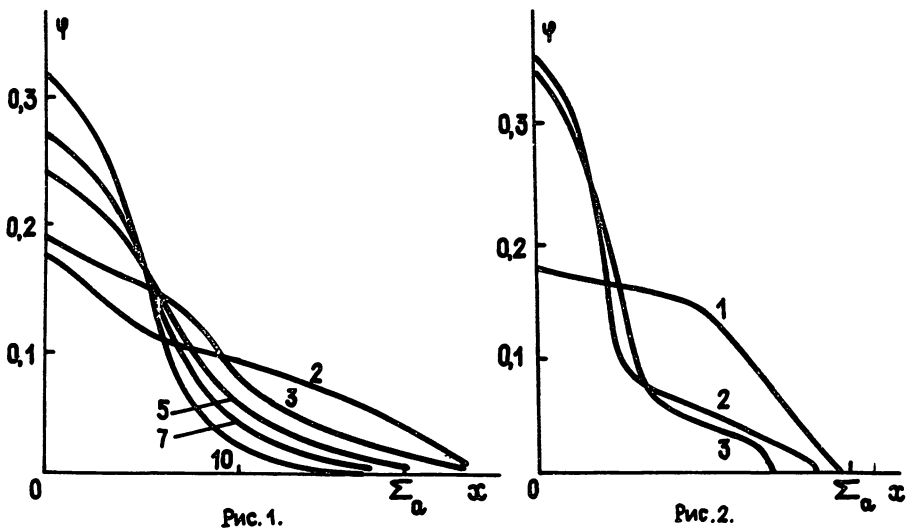


Рис. 1.

Рис. 2.

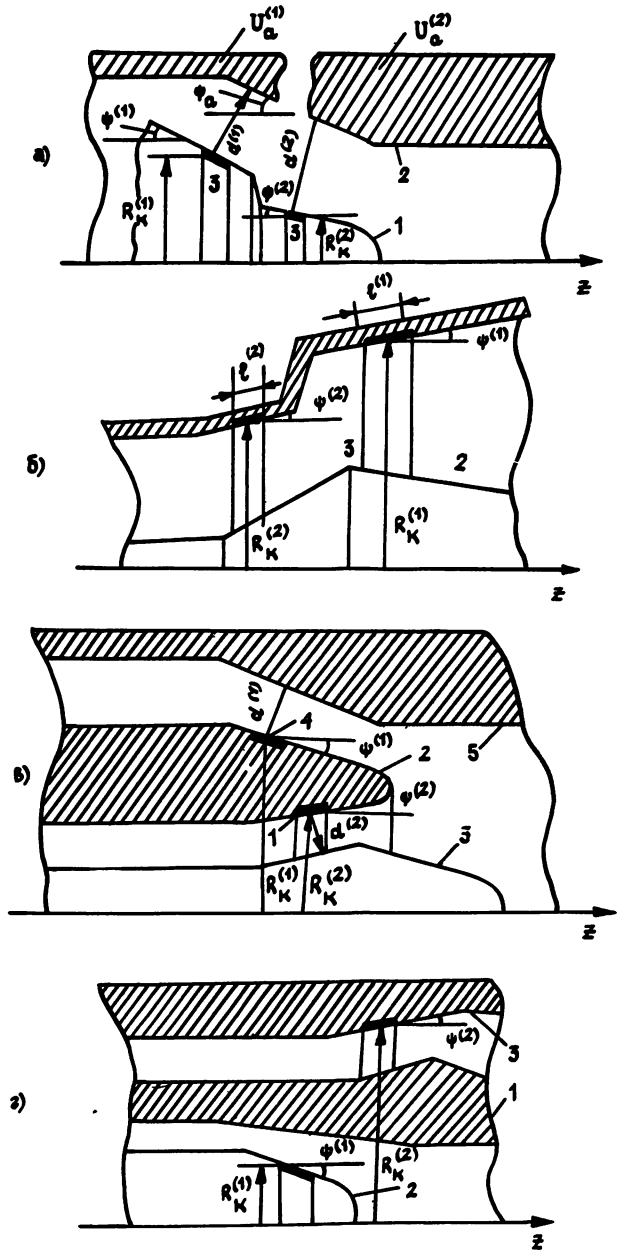


РИС. 1.

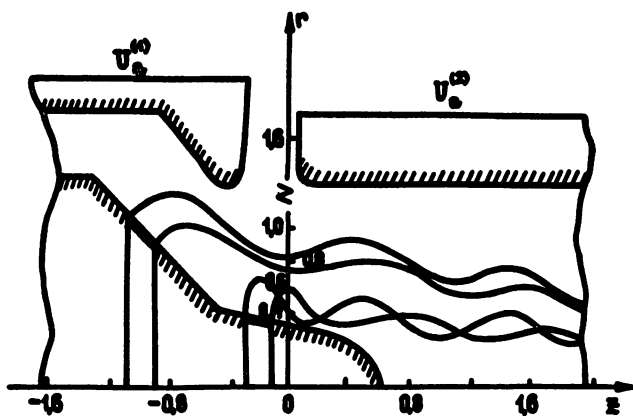


Рис. 2.

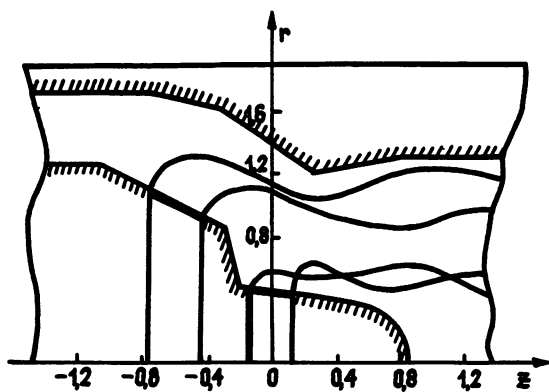


Рис. 3.

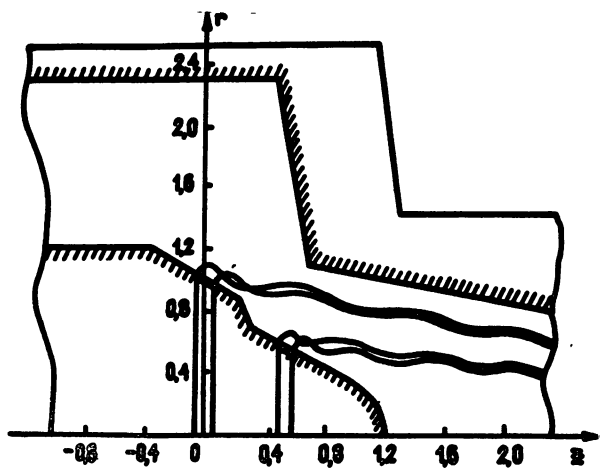


Рис. 4.

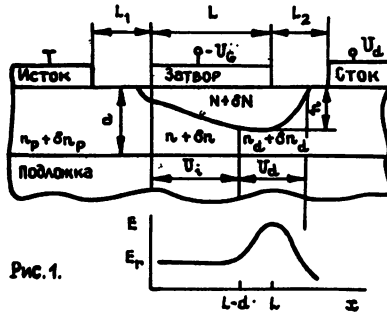


Рис. 1.

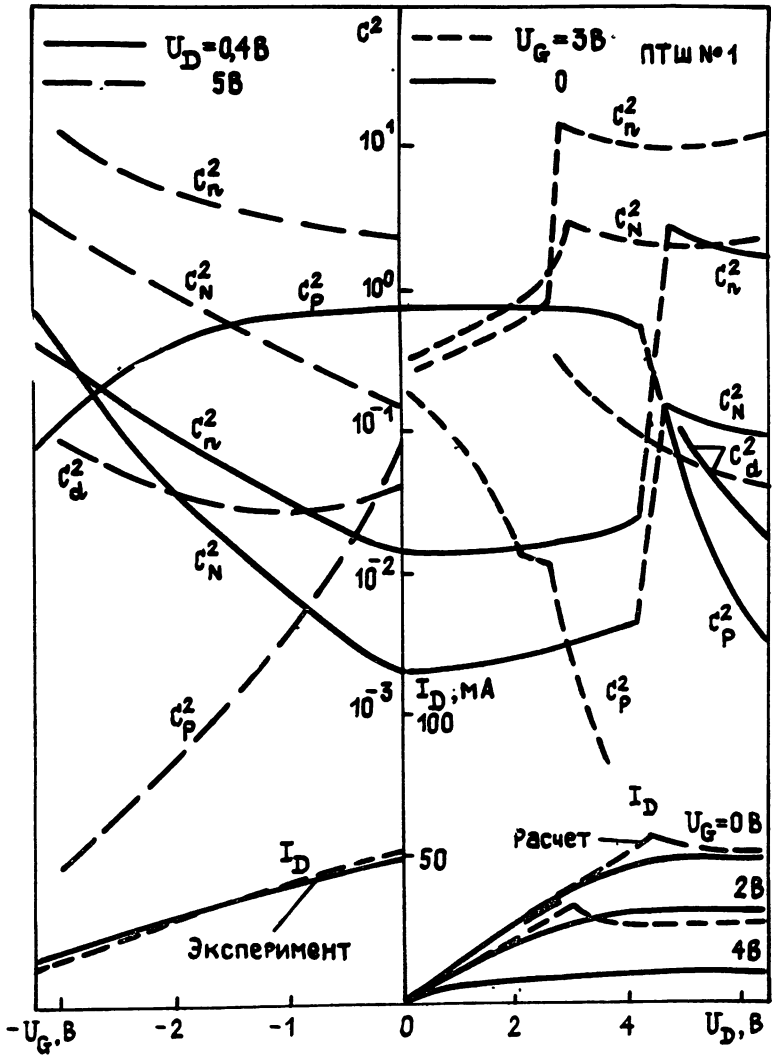


Рис. 2.

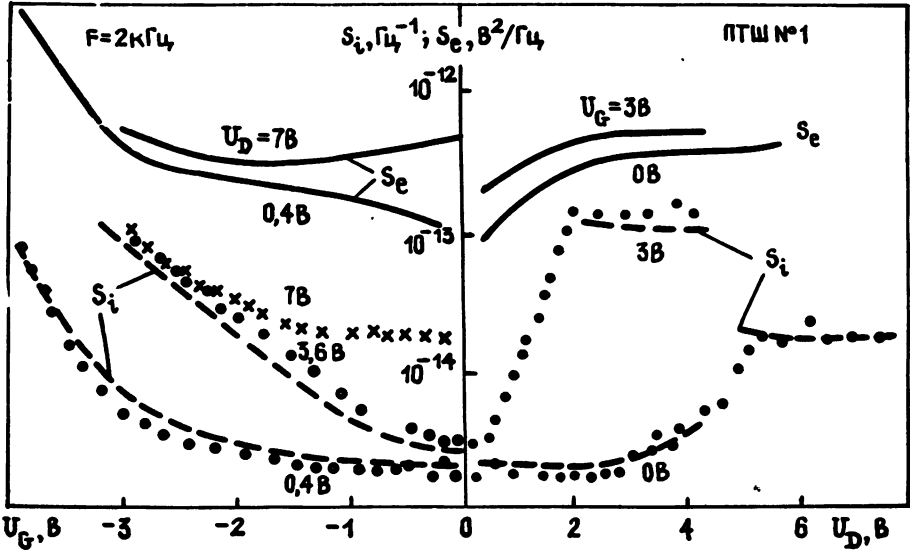


Рис. 3.

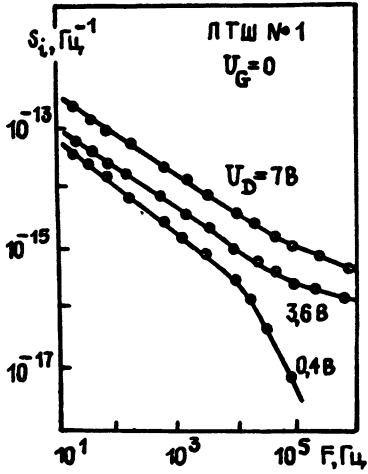


Рис. 4.

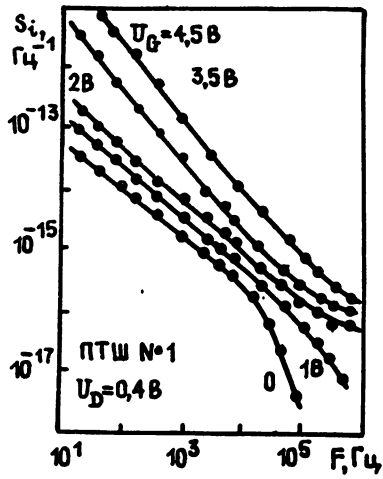


Рис. 5.

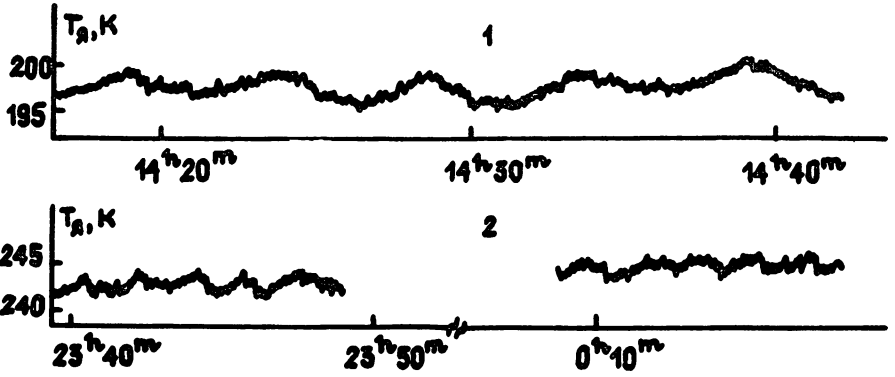


Рис. 1.

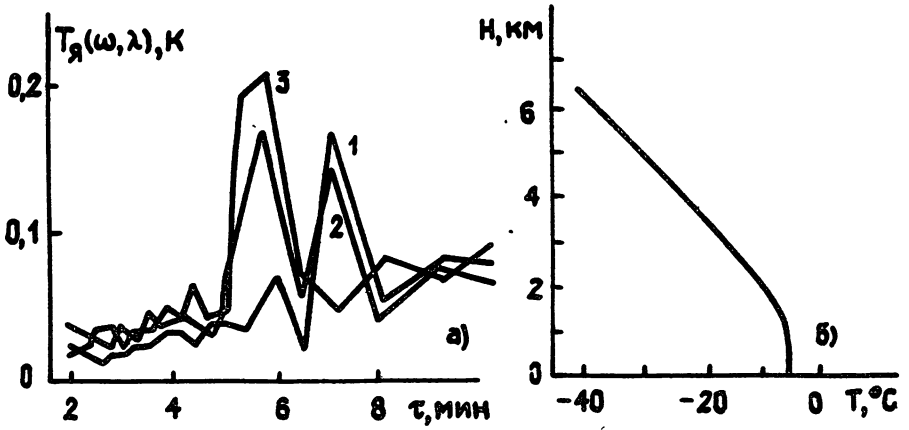


Рис. 2.

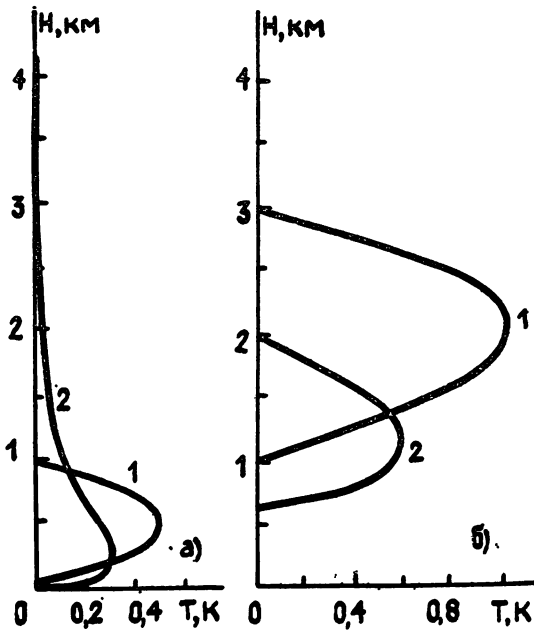


Рис. 3.



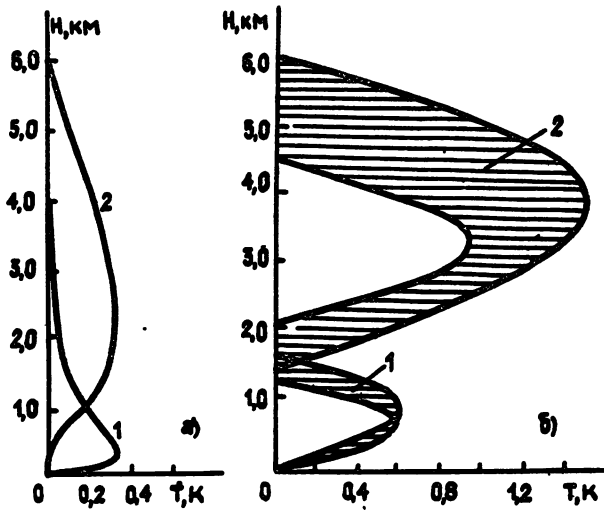


Рис. 4.

К ст. В. Т. Сарычева

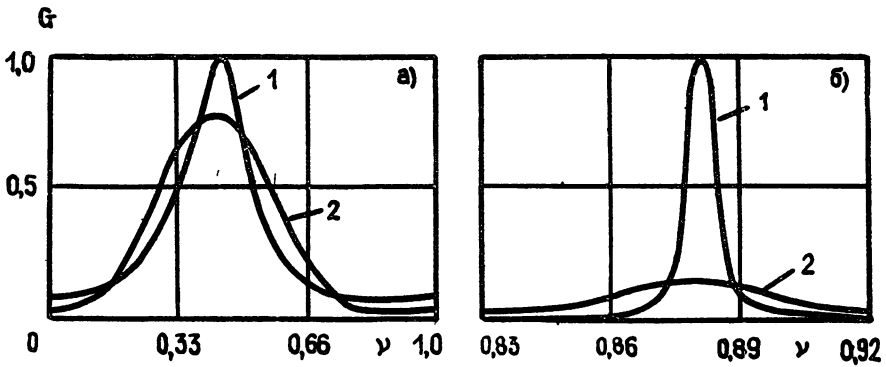


Рис. 1.

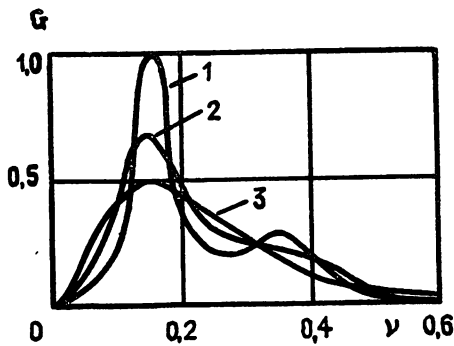


Рис. 2.

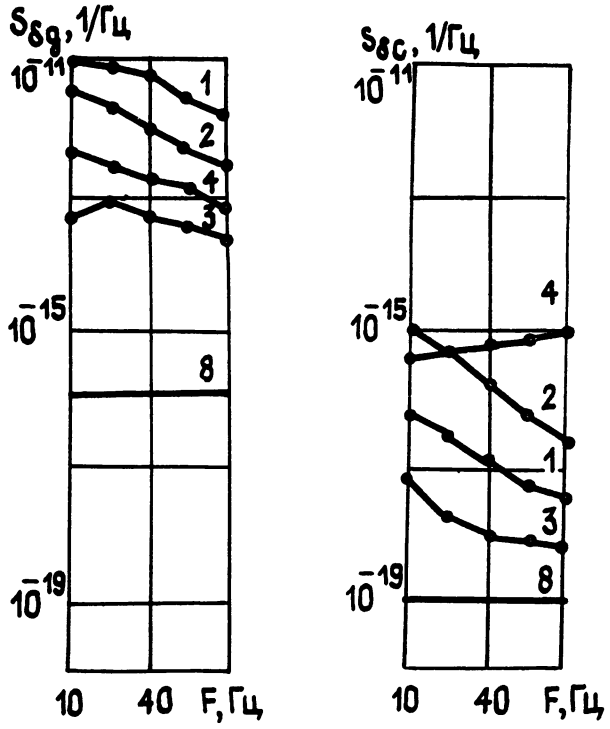


Рис. 1.

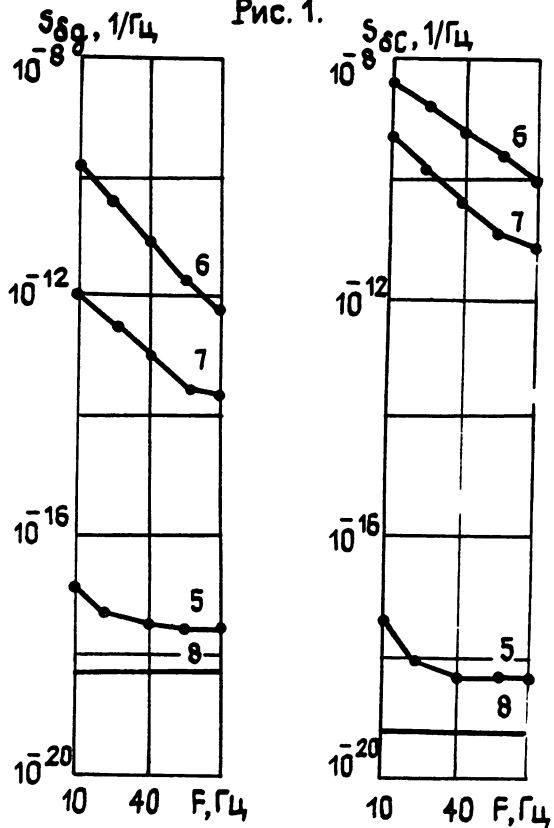


Рис. 2.

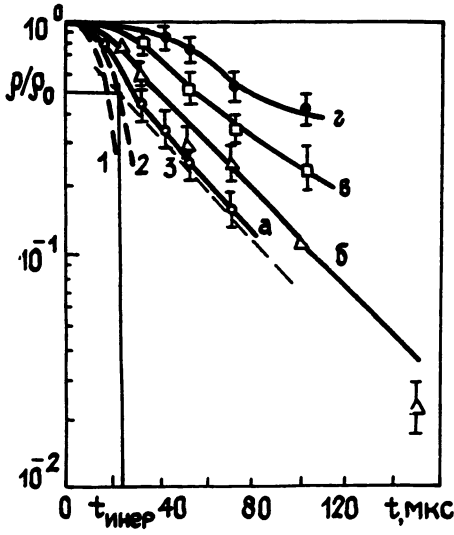


Рис. 1.

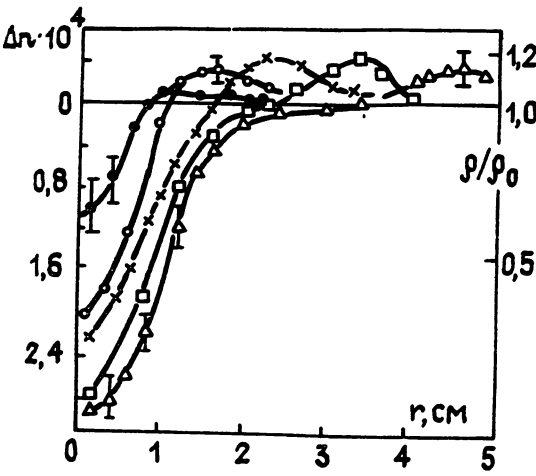


Рис. 2.

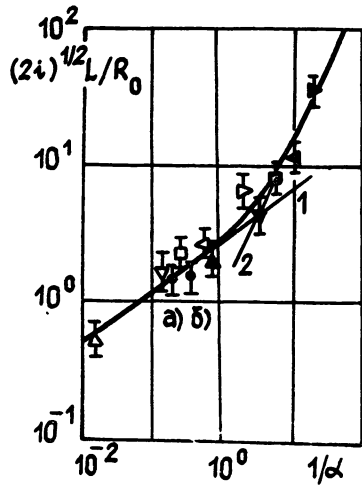


Рис. 3.

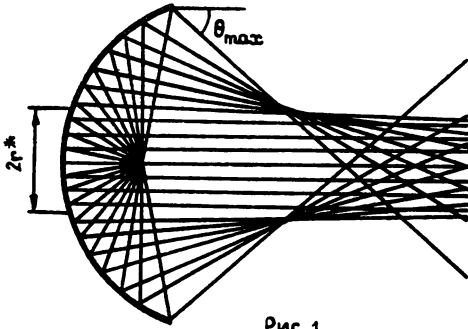


Рис 1.

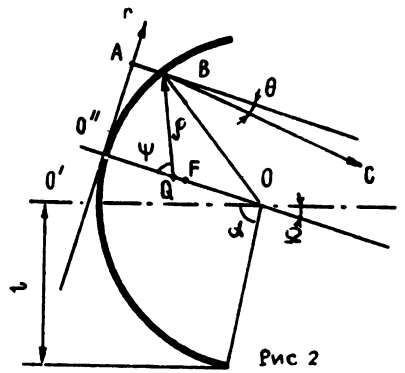


Рис 2

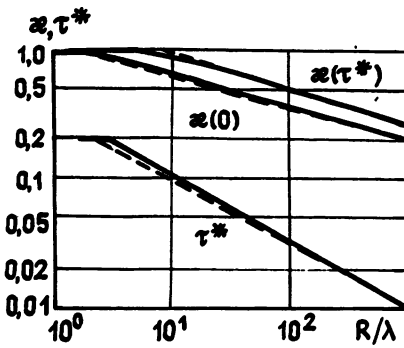


Рис. 3.

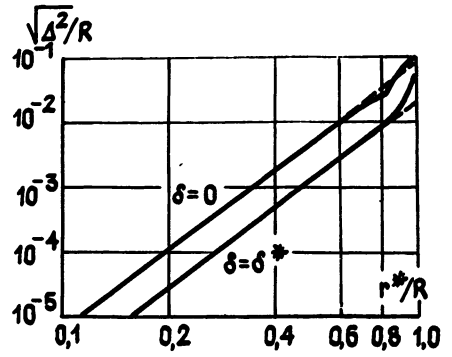


Рис. 4.

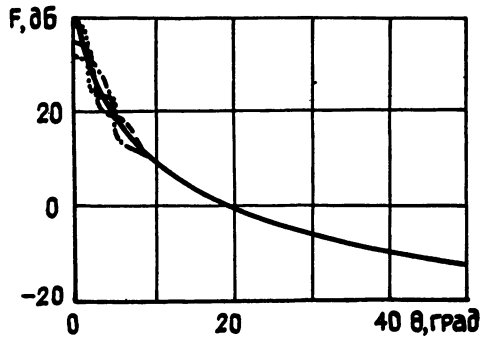


Рис. 5.