

Содержание

Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса (Обзор)	1079
Федоров В.Ф. Электромагнитный импульс в микроволновом диапазоне, возбуждаемый асимметричным нестационарным источником гамма-излучения	1116
Абранин Э.П., Базелян Л.П., Белей В.С., Колосков А.В., Цишко Я.Г., Ямпольский Ю.М. Связь квазипериодических вариаций положений солнечных источников всплесков III типа с ионосферными возмущениями	1120
Апресян Л.А. О классификации механизмов усиления обратного рассеяния	1125
Загородний А.Г., Усенко А.С., Якименко И.П. Кинетическая теория полуграниченной плазмы со случайно рассеивающей границей	1135
Игнатенко С.В., Мальцев А.А., Силаев А.М. Анализ статистических характеристик адаптивной антенной решетки с независимым формированием опорного сигнала	1159
Смышляев В.П. Высокочастотная асимптотика волнового поля, дифрагированного плоским угловым сектором. I	1170
Васильев А.Б., Жук Н.П., Рапопорт Д.А., Яровой А.Г. Двумерная задача дифракции на диэлектрическом цилиндре произвольного сечения в плоскостой среде. Случай E-поляризации	1180
Кузелев М.В., Панин В.А. Нелинейная теория рассеяния линейно поляризованных электромагнитных волн на немагнитном пучке электронов	1191
Голуб В.Л., Кондратенко А.Н. Влияние металлических границ на спектр поверхностных волн в плазменно-вакуумных структурах	1209
Полевой В.Г. Теплообмен флуктуационным электромагнитным полем между хорошо проводящими тангенциально неоднородными металлами	1215
Арутюнян В.М., Адамян З.Н., Гаспарян Ф.В., Мелконян С.В. Исследование шумов p^+np^+ -структур из полупроводника, компенсированного двухзарядными акцепторами	1226

Информация

Содержание т. 34 журнала "Известия высших учебных заведений" по разделу "Радиофизика" за 1991 г.	1237
Именной указатель т. 34 журнала "Известия высших учебных заведений" по разделу "Радиофизика" за 1991 г.	1248

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),
В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНTOВИЧ,
А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ,
А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН,
В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, С. А. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. МУРАШКИНА

Формат 70×108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 15,40. Усл. кр.-отт. 15,50. Уч.-изд. л. 15,1
Тираж 977 экз. Заказ 2677. Цена 5 р. 40 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25,
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

Отпечатано с готового набора
Нижегородская областная типография управления издательств,
полиграфии и книжной торговли,
603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 534.015; 537.86:519

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РЕШЕТОК СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ У ПОРОГА ХАОСА

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов

(Обзор)

Содержание

1. Концепции универсальности и скейлинга в теории динамических систем
 2. Индивидуальная система, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода
 3. Двухпараметрический скейлинг в системах с удвоениями периода
 4. Система двух связанных отображений с однонаправленной связью
 5. Система двух связанных отображений со взаимной связью
 6. Критические явления в одномерной решетке
 7. Критические явления в континуальном пределе
 8. Развитие турбулентности в потоковых системах
 9. Динамика структур в двумерной решетке
 10. Сеть глобально связанных отображений
- Заключение
- Приложение

Задача описания турбулентности как динамического процесса в распределенных системах давно привлекает внимание исследователей. Достигнутые к настоящему времени успехи в понимании природы хаоса в системах с малым числом степеней свободы создали надежную основу для конструктивных размышлений в этом направлении. После первых обнадеживающих результатов стало ясно, что речь идет не просто о выборе того или иного сценария возникновения турбулентности (Ландау, Рuelle - Такенса или какого-либо другого) или разработке адекватной модели для конкретных ситуаций (например, описанке течения Куэтта, образования ячеек Тейлора - Бенара и т. д.), а о формировании обширной и разветвленной области знания, охватывающей вопросы сложной пространственно-временной динамики в системах различной физической природы и включающей свою систему моделей, свой "зоопарк" феноменов, свою интуицию и систему представлений, свои теоретические построения и определенные связи с конкретными областями физики - гидродинамикой, физикой твердого тела, теорией фазовых переходов и т. д.

В качестве моделей сложной пространственно-временной динамики могут привлекаться дифференциальные уравнения в частных про-

изводных, решеточные структуры из систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, решетки связанных отображений, клеточные автоматы. Как с концептуальной, так и с вычислительной точки зрения предпочтительнее иметь дело не с распределенными (континуальными), а с решеточными моделями пространственно-развитых систем, если они допускают реализацию интересных феноменов. В некоторых случаях переход к решетке может рассматриваться как приближенный способ описания непрерывной системы, тогда решеточная модель должна иметь несингулярный континуальный предел при уменьшении пространственного шага (или при увеличении характерного размера рассматриваемых структур). В других случаях решеточная модель более подходит для описания реальных систем по самому существу задачи. Например, в гидродинамических течениях либо за счет собственной динамики, либо за счет конфигурации течения (скажем, в гофрированной трубе) могут образовываться структуры в виде локализованных подсистем (вихрей), допускающих маломерное описание и относительно слабо взаимодействующих друг с другом. В физике твердого тела естественная дискретизация обеспечивается кристаллической решеткой и т. д. Наконец, решеточные системы из элементов со сложной динамикой могут конструироваться искусственно, например в радиотехнике и оптике, с целью реализации устройств с новыми функциональными возможностями.

Существенную часть создаваемой картины составляют критические явления у порога хаоса. Критические явления хорошо известны в физике фазовых переходов, квантовой теории поля, теории перколяции (протекания), физике полимеров и т. д. [1 - 4]. Под критическими явлениями понимают совокупность феноменов, характеризующихся иерархией пространственных масштабов, когда весьма эффективными оказываются представления о масштабном подобии - скейлинге. Наглядные геометрические образы критического состояния - это иерархия капелек в точке перехода жидкость - газ, образование бесконечного кластера в задачах протекания и т. д. Единый взгляд на задачи со столь разнообразным физическим содержанием удается развить благодаря общему математическому аппарату - методу ренормализационной группы, адекватно описывающему иерархически организованные состояния. В теории динамического хаоса критические явления характеризуются наличием иерархии временных масштабов, формирующейся в окрестности точки возникновения хаоса. Наиболее изучен в таком контексте переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума через последовательность удвоений временного периода движения.

В настоящей работе мы дадим аналитический обзор исследований, относящихся к решеточным моделям, локальная динамика которых (т. е. поведение индивидуальных элементов, из которых строится решетка) описывается сценарием Фейгенбаума. В настоящее время именно для этого класса систем с определенной полнотой можно проследить развернутую картину критических явлений начиная с индивидуального элемента и простейших решеток из двух ячеек и кончая пространственно протяженными системами.

1. Концепции универсальности и скейлинга в теории динамических систем

Пусть имеется нелинейная диссипативная динамическая система, демонстрирующая при переходе некоторого параметра λ через критическое значение λ_c мягкое возникновение хаоса. В силу непрерывности динамических уравнений по параметру λ обнаружить различие между регулярным и хаотическим режимами, реализующимися в ϵ -окрестности точки перехода, можно только при их наблюдении за

достаточно большое время $T(\varepsilon)$ (заметим, что $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Итак, в данной ситуации динамика характеризуется наличием большого временного масштаба $T(\varepsilon)$. Сужая рассматриваемую окрестность критической точки, можно добиться того, чтобы этот временной масштаб намного превышал все величины с размерностью времени, фигурирующие в уравнениях системы. Но тогда можно ожидать, что локальные во времени детали динамики системы не существенны с точки зрения закономерностей перехода к хаосу, которые должны носить *универсальный* характер. (Могут, впрочем, существовать различные классы универсальности, так что одни и те же закономерности справедливы лишь в пределах каждого класса.)

Аналогичная ситуация имеет место в теории фазовых переходов второго рода. При приближении температуры вещества к критической точке фазового перехода T_c корреляционная длина флуктуаций возрастает и становится большой по сравнению с межатомным расстоянием. В связи с этим поведение вещества вблизи критической точки оказывается универсальным, т.е. не зависит от конкретного вида межатомного взаимодействия. Свойство универсальности лежит в основе чрезвычайно плодотворного методологического приема в теории фазовых переходов, состоящего в их изучении с помощью *модельных систем*, огрубляющих детали локальных взаимодействий из соображений удобства анализа и сохраняющих интересующий тип критического поведения (модели Изинга, Гейзенберга, Гинзбурга - Ландау и др.). Из сказанного ясно, что такой же подход применим к динамическим системам, демонстрирующим переход к хаосу: для феноменологического описания их динамики можно использовать наиболее простые модели, обладающие нужным типом критического поведения. Ясно, что конструирование таких моделей само по себе представляет большой интерес и является одной из основных задач теории.

Вторым важным свойством критического поведения является *скейлинг*. При наличии скейлинга в окрестности критической точки пространство параметров обладает структурой типа вложенных друг в друга матрешек. Сходственным точкам пространства параметров отвечают подобные режимы динамики. Это означает, во-первых, совпадение характера реализующегося режима (периодический, квазипериодический, хаотический), а во-вторых, возможность определения характеристик одного режима по характеристикам другого с помощью надлежащего пересчета. Этот пересчет сопровождается изменением масштаба времени, так что характерный период движений возрастает при приближении к критической точке, а в ней самой обращается в бесконечность.

Математический аппарат теории критических явлений, позволяющий обосновать универсальность и скейлинг, - это так называемый *метод ренормализационной группы* (РГ). Он состоит в построении и исследовании специального преобразования динамических уравнений, соответствующего преобразованию подобия в пространстве параметров. Поскольку критическая точка при преобразовании подобия остается на месте, то уравнения, описывающие динамику системы в этой точке, должны быть инвариантны по отношению к преобразованию РГ. Иными словами, оператор эволюции системы на больших временах в критической ситуации представляет собой *неподвижную точку уравнения РГ*. В зависимости от структуры РГ-уравнения и от того, какая из неподвижных точек отвечает за рассматриваемый тип поведения, возникают различные классы универсальности, каждый из которых обладает своим набором количественных характеристик. К ним относятся, в частности, масштабные константы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, показывающие, во сколько раз меняется каждая из N_x существенных

динамических переменных, и константы скейлинга $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N_p}$, определяющие, как изменяется при преобразовании подобия каждый из N_p существенных параметров, необходимых для полного описания поведения системы в окрестности рассматриваемой критической точки. Величина N_p определяет *коразмерность* критической точки, т.е. наименьшее число параметров семейства динамических систем, в котором она может встретиться *типичным образом*. Поэтому простейшая универсальная модель, демонстрирующая соответствующий тип критического поведения, должна содержать N_p управляющих параметров.

2. Индивидуальная система, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода

Начало количественной теории критических явлений в нелинейных динамических системах было положено работами Фейгенбаума, исследовавшего переход к хаосу через последовательность удвоений периода движения [5 - 9]. Наиболее простой и удобный для изучения класс систем, демонстрирующих такой переход, - это одномерные рекуррентные уравнения вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

где $f(x)$ - гладкая функция, зависящая от параметра λ , отображающая некоторый отрезок оси x в себя и имеющая на этом отрезке единственный квадратичный экстремум. Примером может служить отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (2)$$

в интервале значений λ от 0 до 2. Одномерное пространство параметров этой модели устроено следующим образом. При значении параметра $\lambda_c = 1,40115518909$ располагается критическая точка. В докритической области реализуются периодические режимы (циклы), претерпевающие бифуркации удвоения периода при приближении параметра λ к критической точке (периоды 1, 2, 4, ..., 2^n , ...). В закритической области на оси λ имеет место сложная картина областей, которая содержит множество ненулевой меры, отвечающее хаотическим режимам [10], и бесконечное число "окон" периодических режимов, порядок появления которых устанавливается теоремой Шарковского [11, 12].

Обнаруженный Фейгенбаумом однопараметрический ($N_p = 1$) скейлинг состоит в том, что в окрестности критической точки λ_c вся картина областей на оси λ как в докритической, так и в закритической области переходит в себя при растяжении (сжатии) в $\delta_F = 4,6692016091$ раз, при этом временной масштаб изменяется в два раза, а масштаб динамической переменной x вблизи точки экстремума отображения (2) пересчитывается посредством множителя $\alpha_F = -2,502907876$. Свойство скейлинга работает с тем большей точностью, чем меньшая окрестность критической точки рассматривается, и является в этом смысле асимптотическим.

Идея ренормгруппового анализа Фейгенбаума состоит в следую-

щем. Обозначая правую часть (1) через $f_0(x)$, выполним отображение дважды и изменим масштаб x в некоторое число раз a . В результате получим

$$x_{n+2} = af_0(f_0(x_n/a)). \quad (3)$$

Функцию, стоящую в правой части, обозначим теперь через $f_1(x)$. Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному РГ уравнению

$$f_{n+1}(x) = af_n(f_n(x/a)), \quad (4)$$

которое связывает ренормализованные отображения f_n и f_{n+1} , определяющие эволюцию системы, соответственно, за 2^n и 2^{n+1} временных шагов.

Критическое поведение соответствует неподвижной точке уравнения (4):

$$g(x) = ag(g(x/a)). \quad (5)$$

Численное решение этого функционального уравнения [6, 13] позволяет получить функцию $g(x)$ в виде полиномиальной аппроксимации (см. Приложение), а также найти масштабную константу $a = a_F$.

Рассмотрим решение уравнения РГ в линейном приближении около неподвижной точки $g(x)$. Полагая $f_n(x) = g(x) + \epsilon h_n(x)$, имеем

$$h_{n+1}(x) = \hat{m} h_n(x), \quad (6)$$

где линейный оператор \hat{m} определен соотношением

$$\hat{m} h(x) = a[g'(g(x/a))h(x/a) + h(g(x/a))].$$

Оператор \hat{m} имеет дискретный спектр, причем (для возмущений неустраиваемых, инфинитезимальной, заменой переменных) только одно собственное число $\delta = \delta_F$ превышает по модулю единицу. Это означает, что коразмерность данного типа критического поведения равна единице и при больших n отображение $f_n(x)$ имеет вид $f_n(x) = g(x) + C \delta^n h(x)$, где $h(x)$ - собственная функция оператора \hat{m} , отвечающая собственному числу δ_F , а коэффициент C пропорционален отклонению параметра λ от критической точки. Ясно, что при уменьшении этого отклонения в δ_F раз и увеличении n на единицу (что отвечает удвоению временного масштаба) вид f_n не изменится. Это и есть *фейгенбаумовский скейлинг*.

После работ Фейгенбаума описанный тип критического поведения со всеми присущими ему количественными закономерностями скейлинга в окрестности критической точки был обнаружен в огромном количестве реальных нелинейных физических систем и математических моделей [14 - 22]. Обоснование типичности фейгенбаумовского перехода

к хаосу для многомерных отображений, реально возникающих при описании динамики конкретных систем, содержится в [23].

Благодаря универсальности систему Фейгенбаума следует рассматривать как новый фундаментальный объект, который можно использовать для конструирования более сложных моделей различных систем подобно тому, как поступают в теории колебаний и волн с гармоническим осциллятором. Можно обратиться, например, к задачам о поведении связанных систем Фейгенбаума, о динамике решеток и распределенных сред, построенных из систем Фейгенбаума и т. д. Этот принцип и положен в основу дальнейшего изложения.

3. Двухпараметрический скейлинг в системах с удвоениями периода

Наиболее очевидное усложнение модели (2) состоит в том, чтобы добавить в правую часть рекуррентного уравнения член четвертой степени и рассмотреть отображение

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 - b x_n^4, \quad (7)$$

исследованное в работе [24].

На рис. 1 показана карта динамических режимов для этого отображения на плоскости параметров a , b . Светлые зоны отвечают периодическим режимам (период обозначен цифрами). Штриховкой показаны области хаоса. Отметим наличие точек сборки C . К каждой из них подходят две линии складок, при переходе которых имеет место жесткий скачок с гистерезисом. Мы можем представлять себе двумерное пространство параметров a , b в виде совокупности листов, склеенных в точках сборки, краями которых служат складки. Чтобы не загромождать рисунок, на нем показана только "лицевая" часть картины листов.

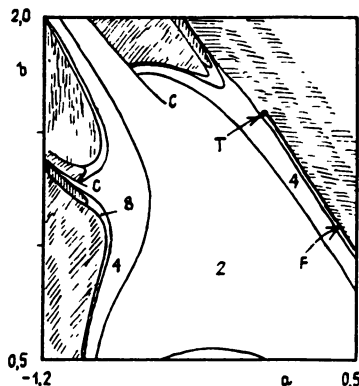


Рис 1

Линии бифуркаций удвоения периода в некоторых областях плоскости a , b накапливаются к критическим линиям F , причем характер сходимости соответствует фейгенбаумовскому однопараметрическому скейлингу с универсальной константой δ_F . Вне этих областей линии удвоений расходятся по берегам различных линий складок, так что

Фейгенбаумовские критические линии оканчиваются в некоторых точках, получивших в [24] название *трикритических*. Одна из этих точек T , наиболее удобная для исследования, имеет координаты $a = 0$, $b = 1,594901356$. Окрестность каждой трикритической точки устроена универсальным образом и характеризуется двухпараметрическим скейлингом с масштабными константами $\delta_1 = 2,857124135$ и $\delta_2 = 7,284686217$. Вдоль первого собственного направления к трикритической точке подходит Фейгенбаумовская критическая линия F , а с противоположной стороны накапливаются точки сборки циклов возрастающих периодов. Именно наличие в окрестности рассматриваемой точки как мягких, так и жестких переходов дало основание авторам [24] именовать ее трикритической по аналогии с известным термином теории фазовых переходов. Так называют точку, в которой сходятся линии фазовых переходов второго и первого рода [4], ассоциирующихся, соответственно, с мягким возникновением хаоса и с жесткими скачками.

Ренормгрупповое уравнение для анализа трикритической ситуации совпадает с уравнением Фейгенбаума (5), однако полиномиальная аппроксимация функции $g_T(x)$ содержит только степени x , кратные четырем (см. Приложение). Масштабная константа, отвечающая за пересчет динамической переменной x , $a_T = (g_T(1))^{-1} = -1,6903029714$.

Анализ линеаризованного уравнения РГ (6) вблизи неподвижной точки g_T выявляет два существенных собственных числа, превышающих по модулю единицу - это приведенные выше универсальные скейлинговые константы δ_1 и δ_2 . Следовательно, трикритическая точка имеет коразмерность $N_p = 2$, так что трикритическое поведение становится типичным при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу в системах, демонстрирующих удвоения периода.

Благодаря универсальности и скейлингу обнаружение трикритического поведения при изучении конкретных систем было бы существенно для понимания устройства пространства параметров. Тем не менее среди большого количества теоретических и экспериментальных работ по Фейгенбаумовскому переходу к хаосу в реальных системах мы не нашли сообщений о наблюдении трикритичности. Это объясняется, по-видимому, тем, что работа [24] не привлекла широкого внимания из-за достаточно абстрактной постановки задачи. Отметим еще, что поиск трикритических точек требует специально направленного к этой цели тщательного исследования, особенно в эксперименте.

4. Система двух связанных отображений с однонаправленной связью

Обратимся теперь к анализу критических закономерностей, реализующихся при однонаправленной связи двух Фейгенбаумовских систем, когда первая воздействует на вторую, а обратного воздействия нет [25 - 29]. Для этого рассмотрим следующую модельную систему:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - \mu y_n^2 - B x_n^2, \quad (8)$$

где x , y - динамические переменные, характеризующие состояния первой и второй подсистем, λ и μ - управляющие параметры, B -

константа связи. *

В пространстве λ, A, B модели (8) имеются две фэйгенбаумовские критические поверхности $F1$ и $F2$, являющиеся предельными для накапливающихся поверхностей удвоения периода (рис. 2а). Первая - это плоскость $\lambda = \lambda_c = 1,401155$, отвечающая переходу к хаосу в первой подсистеме. Вторая - поверхность сложной формы, при переходе через которую возникает хаос во второй системе. Поверхности $F1$ и $F2$ пересекаются по бикритической линии B , к которой накапливаются области гиперхаоса - сложного динамического режима с двумя положительными ляпуновскими показателями.

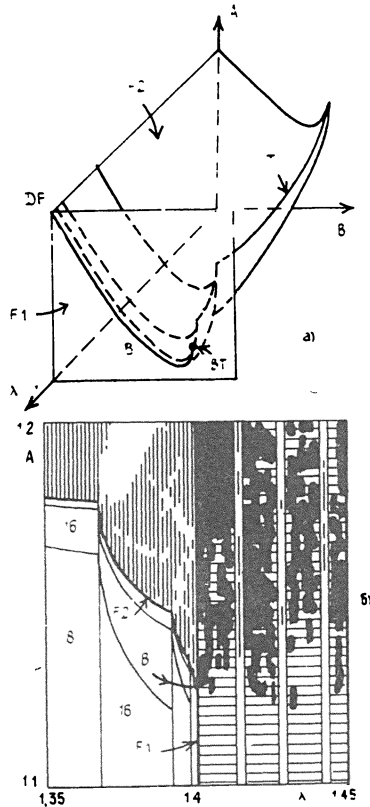


Рис 2

Вблизи бикритической линии в пространстве λ, A, B реализуется двухпараметрический скейлинг с константами $\delta_1 = \delta_F$, $\delta_2 = 2,39272443$. На рис. 2б показано сечение пространства параметров плоскостью

*Предположение о том, что влияние первой подсистемы на вторую определяется линейным членом, приводит к тем же самым результатам. Действительно, если модельное отображение выбрано в виде $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, $y_{n+1} = 1 - \alpha y_n^2 + \epsilon x_n$, то, положив $X_n = x_{n-1}$, $Y_n = y_n / (1 + \epsilon)$, $A = \alpha(1 + \epsilon)$, $B = \epsilon\lambda / (1 + \epsilon)$, в переменных X_n , Y_n получаем уравнения (8).

$B = 0,375$. Бикритическая точка расположена при $\lambda = \lambda_c$, $A = 1,124981403$. Собственные направления скейлинга совпадают с осями координат λ и A . Вертикальной и горизонтальной штриховкой показаны области хаоса с одним положительным ляпуновским показателем, а сплошным черным - области гиперхаоса.

Анализ РГ бикритической ситуации развит в работах [26, 28]. Обозначая правые части (8) через $f_0(x)$ и $g_0(x, y)$, выполним отображение дважды и изменим масштабы x и y в a и b раз. В результате получим

$$x_{n+2} = ag_0(g_0(x_n/a)), \quad y_{n+2} = bf_0(g_0(x_0/a), f_0(x_n/a, y_n/b)). \quad (9)$$

Функции, стоящие в правых частях, обозначим теперь через $g_1(x)$ и $f_1(x, y)$. Повторяя эту процедуру, приходим к рекуррентным РГ уравнениям

$$g_{n+1}(x) = ag_n(g_n(x/a)), \quad f_{n+1}(x) = bf_n(g_n(x/a), f_n(x/a, y/b)). \quad (10)$$

Бикритическое поведение соответствует неподвижной точке этих уравнений:

$$g(x) = ag(g(x/a)), \quad f(x, y) = bf(g(x/a), f(x/a, y/b)), \quad (11)$$

где функция g и константа a совпадают с фейгенбаумовскими. Численное решение второго уравнения позволяет найти функцию $f(x, y)$ в виде разложения по степеням x^2 и y^2 (см. Приложение), а также масштабную константу $b = (f(1, 1))^{-1} = -1,505318159$.

Продолжим обсуждение устройства пространства параметров модели (8). Поверхность F_2 имеет границу - линию трикритических точек T . Трикритическая и бикритическая линии сходятся и оканчиваются в *мультикритической* точке BT , имеющей коразмерность 3. Точка BT имеет координаты $\lambda = 1,4011552$, $A = 1,066$, $B = 0,83505$. Ее окрестность характеризуется трехпараметрическим скейлингом с константами $\delta_1 = 4,669201$, $\delta_2 = 2,654654$ и $\delta_3 = 1,541721$. Собственное направление, связанное с константой δ_1 , - это ось λ , для δ_2 - линия, вдоль которой сходятся к BT трикритические точки, для δ_3 - направление вдоль бикритической линии.

Уравнение РГ для анализа этого типа критической динамики совпадает с уравнением (9), однако ему отвечает другое решение - разложение функции $f_{BT}(x, y)$ содержит целые степени x^2 и y^4 (см. Приложение). Соответствующие масштабные факторы $a = a_F$ и $b_{BT} = -1,2416604$.

Вторым концом бикритической линии является *двойная* фейгенбаумовская точка $\lambda = A = 1,4011552$, $B = 0$. Вдоль оси A к ней накапливаются точки сборки с отходящими от них линиями складок, соответствующие жестким переходам. Скейлинговые константы $\delta_1 = \delta_2 = \delta_F$ и $\delta_3 = 2$ [27].

Таким образом, уже в простейшей потоковой системе, представляющей собой решетку всего из двух однонаправленно связанных систем, обнаруживается некоторая *иерархия типов критической динамики*. Как хорошо известно, одна из ключевых идей в теории бифуркаций, теории катастроф и отчасти в теории фазовых переходов - это идея "движения по коразмерности", восходящая к Пуанкаре [30]. В соответствии с ней в рассмотрение последовательно вводятся и анализируются ситуации, типичные сначала в однопараметрических семействах, затем в семействах с числом параметров 2, 3 и т.д. Изложенные здесь результаты наглядно показывают, что аналогичный подход плодотворен и в теории критических явлений у порога возникновения хаоса.

Заметим, что бикритическая динамика обнаружена в эксперименте с системой из двух связанных нелинейных колебательных контуров, образованных катушками индуктивности и нелинейными емкостями $p - n$ -переходов, возбуждаемых периодическим внешним воздействием [25, 29]. В эксперименте наблюдались описанная выше картина областей на плоскости управляющих параметров, а также характерные спектры в бикритической точке.

5. Система двух связанных отображений со взаимной связью

Динамику двух одинаковых симметрично связанных систем Фейгенбаума в общем случае можно описать отображением

$$x_{n+1} = f_0(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f_0(y_n, x_n), \quad (12)$$

где f_0 - гладкая функция своих аргументов. Проводя традиционную схему ренормализации, приходим к рекуррентному РГ уравнению [31]

$$f_{n+1}(x, y) = af_n(f_n(x/a, y/a), f_n(y/a, x/a)). \quad (13)$$

Будем искать решение уравнения (13) в линейном приближении вблизи неподвижной точки $f(x, y) = g(x)$, полагая $a = a_F$, $f_n(x, y) = g(x) + \varepsilon \varphi_n(x, y)$. Тогда получим

$$\varphi_{n+1}(x, y) = \hat{m} \varphi_n(x, y), \quad (14)$$

где линейный оператор \hat{m} определен соотношением

$$\hat{m} \varphi(x, y) = a[g'(g(x/a))\varphi(x/a, y/a) + \varphi(g(x/a), g(y/a))]. \quad (15)$$

Оператор \hat{m} имеет три существенные собственные функции. Одна из них зависит только от первого аргумента $\varphi_0(x, y) = h(x)$ и имеет собственное число $\nu_0 = \delta_F$ (см. разд. 2). Две другие зависят от обоих аргументов, это $\varphi_1(x, y)$ с собственным числом $\nu_1 = a_F = -2,5029\dots$ и $\varphi_2(x, y)$ с собственным числом $\nu_2 = 2$. Полиномиальные аппроксимации $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ приведены в Приложении.

Теперь можно написать явное выражение для оператора эволюции

системы f_n при больших n :

$$f_n(x, y) = g(x) + \varepsilon[(\lambda - \lambda_c) \delta^n h(x) + C_1 \alpha_F^n \varphi_1(x, y) + C_2 2^n \varphi_2(x, y)]. \quad (16)$$

Таким образом, динамика системы на больших временах будет полностью определяться в общем случае тремя параметрами $(\lambda - \lambda_c)$, C_1 и C_2 . Ясно, что величина $(\lambda - \lambda_c)$ задает отклонение фэйгенбаумовского управляющего параметра подсистем от критической точки накопления удвоений периода, а C_1 и C_2 характеризуют связь. Наличие двух типов связи с разными трансформационными свойствами по отношению к РГ преобразованию заставляет ввести терминологию: будем называть первый тип *инерционной связью*, а второй - *диссипативной*.

Система с произвольным соотношением инерционной и диссипативной связи может быть выбрана в следующей форме:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon_1(x_n - y_n) + \varepsilon_2(f(y_n) - f(x_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon_1(y_n - x_n) + \varepsilon_2(f(x_n) - f(y_n)). \end{aligned} \quad (17)$$

Это универсальная модель связанных систем, демонстрирующих удвоения периода. Уравнение (17) содержит весь "зоопарк" феноменов идентичных произвольно связанных систем у порога хаоса.

Из (17) легко получить уравнения динамики системы с чисто диссипативной связью:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(y_n^2 - x_n^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Специальным выбором соотношения между коэффициентами можно также реализовать случай чистой инерционной связи [31 - 33]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(1 - 0,176x_n)(x_n - y_n), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(1 - 0,176y_n)(y_n - x_n). \end{aligned} \quad (19)$$

Карта динамических режимов системы с диссипативной связью показана на рис. 3 [31 - 34]. В докритической области $\lambda < \lambda_c$ при любых значениях параметра связи $\varepsilon < 1$ наблюдается каскад удвоений периода синфазных движений ($x = y$) (см. рис. 3а). В закритической области при достаточно больших значениях параметра связи реализуются синфазные режимы с хаотическим во времени поведением (область S). Если начать уменьшать диссипативную связь, то с некоторого момента ее сглаживающие свойства оказываются не в состоянии противостоять свойственному хаосу эффекту разбегания траекторий и происходит переход к несинфазному хаосу (область N). Процессы вблизи точки перехода характеризуются *перемежаемостью*

Ямада - Ёуджисака [35, 36]: длительным нерегулярным возрастанием уровня несинфазной компоненты решения, затем сбросом до малой величины, вновь нарастанием и т.д. Характерная продолжительность стадий нарастания и среднего уровня несинфазной компоненты зависит от надкритичности, т.е. от того, насколько параметр связи меньше порога возникновения несинфазного движения. При дальнейшем уменьшении параметра связи уровень несинфазной компоненты хаотического движения, флуктуируя, может стать настолько большим, что приведет к перебору системы на другие регулярные аттракторы, отвечающие несинфазным движениям. Им будут отвечать другие листы карты динамических режимов. Два из них показаны отдельно на рис. 3 б, в. Нижним краем этих листов служит линия жесткого перехода на синфазный лист. На несинфазных листах также можно наблюдать каскады удвоений периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. Новый момент состоит в том, что на некоторых из этих листов имеются области квазипериодических движений Q [37]. Механизм возникновения квазипериодичности разъясняется в [38].

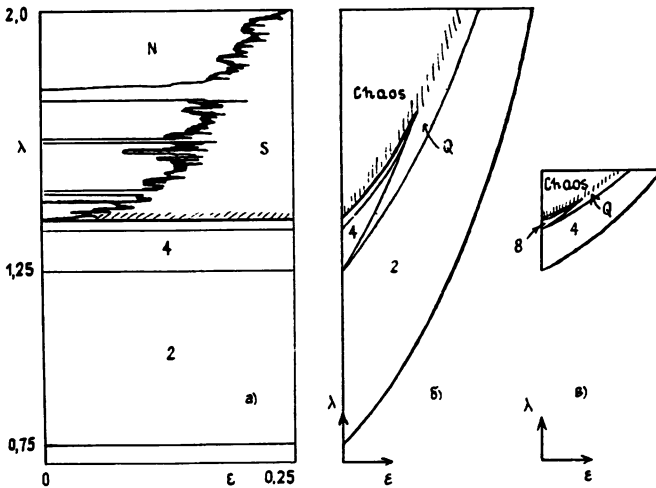


Рис 3

В отличие от случая диссипативной связи, в системе с инерционной связью несинфазные периодические режимы возникают мягким образом из синфазных в результате бифуркации потери симметрии уже при $\lambda < \lambda_c$. С ростом λ возникший режим в свою очередь претерпевает бифуркацию и рождается квазипериодическое движение. Для более подробного ознакомления с динамикой систем с инерционной связью мы отсылаем читателя к работам [31 - 33].

Скейлинг для систем с чистой диссипативной связью состоит в том, что при уменьшении величины связи в 2 раза и при приближении по уровню надкритичности к точке λ_c в δ_F раз реализуются подобные режимы динамики. (В частности, подобны в этом смысле картинки, показанные на рис. 3 б, в.) Для системы с инерционной связью (19) скейлинг выражается в том, что карта динамических режимов на плоскости (λ, ϵ) повторяется при растяжении (сжатии) в δ_F раз по оси λ и в α_F раз по оси ϵ относительно точки $(\lambda_c, 0)$.

В общем случае, когда имеет место комбинация инерционной и диссипативной связи, можно утверждать, что структура окрестности

критической точки $(\lambda_c, 0)$ в достаточно малых масштабах устроена так же, как в случае инерционной связи, и характеризуется тем же фактором скейлинга α_f . Действительно, при больших n вклад инерционной компоненты связи в оператор эволюции (16), пропорциональный α_f^n , начинает доминировать над вкладом диссипативной компоненты, пропорциональным 2^n . Это относится, в частности, к широко обсуждавшемуся в литературе случаю *линейной связи* (см. [39 - 41]).

Экспериментальному исследованию связанных нелинейных неавтономных диссипативных осцилляторов, способных демонстрировать бифуркации удвоения периода и допускающих, следовательно, описание с помощью квадратичных отображений, посвящены работы [34, 37, 42, 43].

Как оказалось, практически чистая диссипативная связь легко реализуется в эксперименте. Например, в системе двух нелинейных колебательных контуров, находящихся под внешним периодическим воздействием, она достигается просто включением резистивного элемента. Для получения существенной инерционной связи в той же системе следует ввести в цепь связи LC-цепочку с постоянной времени порядка периода внешнего воздействия.

В эксперименте наблюдались все основные отмеченные выше феномены, характерные для динамики связанных систем - синфазные и несинфазные периодические и хаотические режимы, квазипериодические колебания, жесткие переходы с гистерезисом, перемежаемость Ямада - Фуджисака. Дальнейшие сведения относительно динамики связанных систем, демонстрирующих удвоения периода, можно найти в цитированных работах, а также в [44 - 50].

6. Критические явления в одномерной решетке

Перейдем теперь к рассмотрению одномерных решеток связанных отображений. Заметим, что для их обозначения в зарубежной литературе стала общепринятой аббревиатура SML (coupled map lattice).

Ренормгрупповой анализ SML можно развить по аналогии с двумя связанными системами [51 - 53]. Неподвижная точка РГ будет определяться набором несвязанных отображений вида

$$\{\dots g(x_{n-1}), g(x_n), g(x_{n+1}) \dots\}, \quad (20)$$

где m - пространственный индекс. Рассмотрим малое возмущение неподвижной точки (20), отвечающее введению связи, причем допустим асимметричное взаимодействие элемента решетки с левым и правым соседом:

$$x_{n+1, m} = g(x_{n, m}) + \varepsilon[\phi(x_{n+m}, x_{n, m-1}) + \psi(x_{n, m+1}, x_{n+m})]. \quad (21)$$

Преобразование РГ для функций связи ϕ и ψ , отвечающее удвоению временного шага, получается снова в форме (13). В асимптотике больших n каждая из них превратится в линейную комбинацию собственных функций $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$, а коэффициенты при них определяют существенные параметры задачи. В итоге можно прийти к следующему представлению оператора эволюции решетки за 2^P -шагов в ренормализованных переменных:

$$\begin{aligned}
 x_{n,n+2}^p &= g(x_{n,n}) + A\alpha^p [\varphi_1(x_{n,n}, x_{n,n+1}) - \varphi_1(x_{n,n}, x_{n,n-1})] + \\
 &+ B2^p [\varphi_2(x_{n,n}, x_{n,n+1}) - \varphi_2(x_{n,n}, x_{n,n-1})] + \\
 &+ C\alpha^p [\varphi_1(x_{n,n}, x_{n,n+1}) + \varphi_1(x_{n,n}, x_{n,n-1})] + \\
 &+ D2^p [\varphi_2(x_{n,n}, x_{n,n+1}) + \varphi_2(x_{n,n}, x_{n,n-1})] + (\lambda - \lambda_c) \delta_F^p h(x_{n,n}).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь A, B, C, D - параметры, определяющие, соответственно, *анти-симметричную инерционную связь, направленный перенос возмущений вдоль решетки, симметричную инерционную связь и диффузию.*

Используя рассмотренные в разделе 5 модели двух связанных систем, нетрудно сконструировать из них универсальную решеточную модель со всеми четырьмя типами связи:

$$\begin{aligned}
 x_{n,n+1} &= \lambda - x_{n,n}^2 + A(1 - 0,176x_{n,n}) (x_{n,n+1} - x_{n,n-1}) + B(x_{n,n+1}^2 - x_{n,n-1}^2) + \\
 &+ C(1 - 0,176x_{n,n}) (x_{n,n+1} - 2x_{n,n} + x_{n,n-1}) - D(x_{n,n+1}^2 - 2x_{n,n}^2 + x_{n,n-1}^2). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Сформулируем теперь скейлинговое свойство решетки связанных отображений: в точке пространства параметров $(\lambda - \lambda_c)/\delta, A/\alpha_F, B/2, C/a, D/2$ могут быть реализованы динамические режимы, подобные тем, которые имеют место в точке $(\lambda - \lambda_c), A, B, C, D$ с удвоенным временным масштабом и пересчитанным в α_F раз масштабом динамических переменных $x_{n,n}$. Это свойство будем называть *решеточным скейлингом.*

Рассмотрим динамику структур и проиллюстрируем решеточный скейлинг в *системе с чистой диффузией.* Возьмем динамическое уравнение в фазе Канеко [54]:

$$x_{n+1,n} = 1 - \lambda x_{n,n}^2 - (\varepsilon\lambda/2) (x_{n,n+1}^2 - 2x_{n,n}^2 + x_{n+1,n}^2) \tag{24}$$

с граничными условиями периодичности $x_{n,0} = x_{n,N}$.

Многие авторы отмечают существование в системе (24) *доменов*, различающихся друг от друга фазой колебаний элементов решетки, причем при увеличении λ разнообразие и сложность возможных доменных структур возрастает. В основу их классификации положим типы структур, существующие при выключенной связи между ячейками решетки [55]. Выберем сначала λ так, чтобы реализовался цикл периода 2. Тогда каждая ячейка может совершать движение в одной из двух фаз: x_1, x_2, x_1, \dots или x_2, x_1, x_2, \dots . Области решетки, в пределах которых ячейки колеблются в одной фазе, будем называть *доменами первого порядка.*

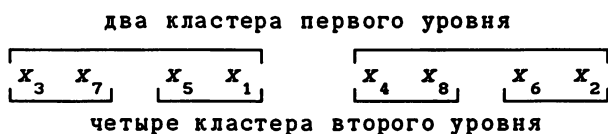
Пусть теперь параметр λ таков, что при выключенной связи реализуется цикл периода 4. Элементы цикла x_1, x_2, x_3, x_4 образуют два кластера, о которых будем говорить как о кластерах пер-

вого уровня:



Для областей решетки, в которых мгновенные состояния ячеек относятся к одному и тому же кластеру, сохраним термин домены первого порядка, а области, внутри которых состояния совпадают, назовем доменами второго порядка.

Структура цикла периода 8 представляется следующим образом:



Домены первого и второго порядка определим теперь как области решетки, где состояния ячеек попадают в один кластер, соответственно, первого или второго уровня, а домены третьего порядка - как области, где состояния совпадают.

При дальнейших удвоениях периода принцип классификации сохраняется, так что для цикла периода 2^p возможно одновременное существование доменов i -го порядка, где $i = 1, \dots, p - 1$. В критической точке $\lambda_c = 1,401155$ аттрактор индивидуального отображения принимает вид канторова множества, а в протяженной решетке могут быть реализованы домены произвольного порядка.

При включении диссипативной связи возможность существования доменных структур сохраняется, но накладываются ограничения на минимальный пространственный размер доменов, тем более сильные, чем выше порядок доменов (см. следующий раздел).

Свойство решеточного скейлинга позволяет утверждать, что если при некотором значении параметра λ и коэффициента связи ϵ возникла определенная доменная структура, то при пересчете параметров и динамической переменной $\lambda \rightarrow \lambda_c + (\lambda - \lambda_c)/\delta$, $\epsilon \rightarrow \epsilon/2$, $x \rightarrow x/a$ можно реализовать подобную же пространственную структуру с увеличенным на единицу порядком доменов и удвоенным характерным временным периодом.

На рис. 4 приведены примеры. Первая картинка получена для $\lambda = 1,444$, $\epsilon = 0,1$ со случайными начальными условиями. Показаны пространственные конфигурации для нескольких последовательных временных шагов после окончания переходного процесса. Далее производился пересчет λ , ϵ и x и вновь изображались устанавливающиеся через большое время пространственные конфигурации. Три уровня скейлинга представлены в левой колонке рис. 4. Чтобы сделать подобие структур наглядным, их части, попадающие внутрь выделенных прямоугольников, воспроизведены в правой колонке. Увеличение по вертикальной оси пропорционально a^n (n - номер уровня). Можно видеть

хорошее соответствие картинок.

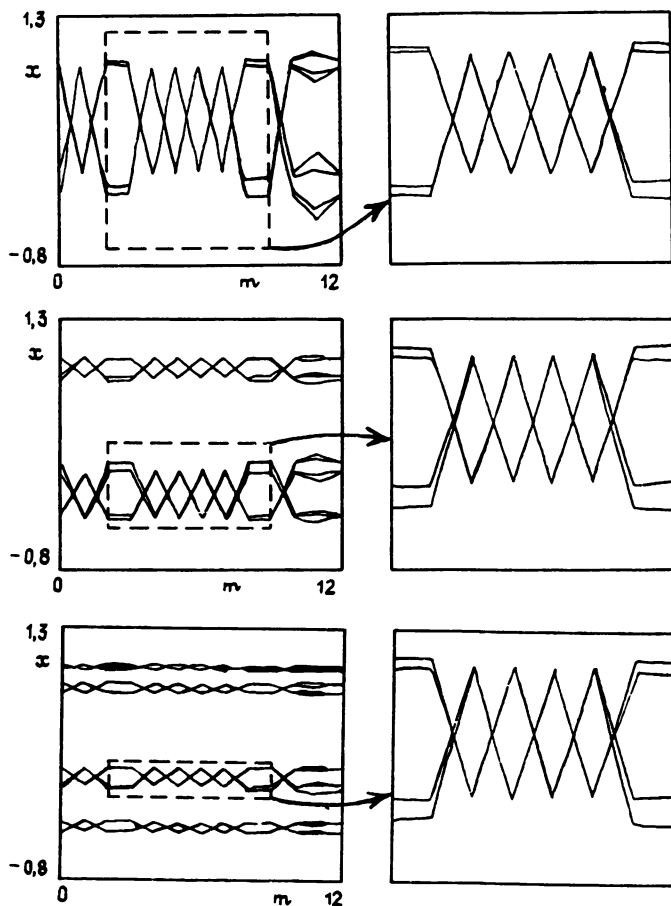


Рис 4

В закритической области параметра λ СМЛ с диффузионной связью демонстрирует богатое разнообразие типов поведения. На рис. 5 приведена фазовая диаграмма динамических состояний решеточной модели (24) [54]. Опишем основные феномены, которые отвечают различным областям диаграммы. Зафиксируем сначала некоторое небольшое значение параметра связи ϵ и будем постепенно увеличивать управляющий параметр λ . Оказывается, что каждый домен ведет себя как практически независимая от других доменов динамическая система, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. При этом бифуркационные значения параметра λ для каждого домена зависят от его длины: чем меньше длина домена, тем больше бифуркационные значения λ . Поэтому при наличии в среде большого числа доменов разного размера переход к хаосу будет происходить во всех доменах неодновременно, так что среда окажется разбитой на участки с периодической и хаотической динамикой во времени. При этом отдельные домены остаются по-прежнему практически неподвижными. Такая фаза названа в [54] фазой замороженных случайных структур (на фазовой диаграмме FRP - frozen random pattern).

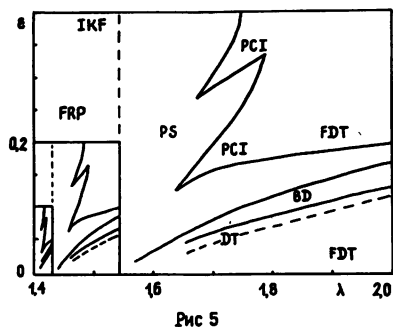


Рис 5

Если увеличить параметр связи в FRP-фазе, то при наличии развитого хаоса внутри некоторых доменов доменные стенки перестают быть неподвижными и начинают блуждать случайным образом, а размеры доменов медленно флуктуируют. По этой причине характер динамики внутри определенного домена может меняться и становится то регулярным, то хаотическим в зависимости от того, меньше или больше λ критического значения для этого домена в фиксированный момент времени. Таким образом, даже если первоначально была сформирована регулярная в пространстве доменная структура, то она постепенно становится нерегулярной. Это *пространственная перемежаемость Киллера - Фармера* [56] (IKF на фазовой диаграмме). Заметим, что отслеживая динамику в фиксированном узле решетки, можно наблюдать и перемежаемость во времени.

При дальнейшем увеличении параметра λ мы попадаем в фазу *селекции структур* (на фазовой диаграмме PS - pattern selection). В этой фазе хаос внутри больших доменов развивается настолько, что происходит их разрушение. Возникают коротковолновые *зигзаговые структуры*. При селекции структур временной хаос оказывается подавленным, так как для коротких структур значения параметра λ являются докритическими. Состояние решетки все же не полностью упорядочено в пространстве за счет *дефектов*, представляющих собой фазы зигзаговой структуры.

Возникшие в результате селекции зигзаговые структуры и дефекты неподвижны в пространстве. При дальнейшем увеличении λ начинается случайное блуждание дефектов. Когда дефекты встречаются друг с другом, они аннигилируют. (Стадия *броуновского движения дефектов*, на фазовой диаграмме BD - brownian motion of defects.) При еще большем λ начинается также спонтанная генерация пар дефектов. Это стадия *дефектной турбулентности* (на фазовой диаграмме DT - defect turbulence). Решетка при этом еще содержит достаточно выраженные участки зигзаговых структур.

При несколько больших значениях параметра связи и при тех же значениях λ реализуется фаза *перемежаемости конкурирующих структур* (PCI - pattern competition intermittency). При этом в среде перемежаются участки как с регулярной, так и с хаотической динамикой во времени, причем пространственный период в областях регулярности - более двух шагов решетки. Данный режим похож на дефектную турбулентность, но размер "дефектов" теперь не мал и сравним с характерными размерами участков регулярности.

Наконец, при еще больших λ , движение дефектов становится интенсивным, зигзаговые структуры разрушаются и возникает состояние *развитой турбулентности*, когда на пространственно-временной диаграмме невозможно выделить упорядоченные пространственные структуры (на фазовой диаграмме FDT - fully developed turbulence).

се). В режиме развитой турбулентности реализуется локальный в пространстве хаос с быстрым спаданием пространственных корреляций. В этой фазе свойственная хаосу неустойчивость побеждает все тенденции к упорядочиванию.

Имея в виду результаты РГ-анализа, можно предположить, что вся описанная картина многократно повторяется (как показано на рис. 5) вблизи критической точки $\lambda = \lambda_c$, $\varepsilon = 0$, ответственной за решеточный скейлинг. Действительно, компьютерное моделирование динамики системы в областях, лежащих внутри показанных на рис. 5 уменьшающихся прямоугольников, демонстрирует те же фазы Канеко. (При переходе от нулевого уровня к первому точного воспроизведения формы областей, конечно, нет, так как речь идет об области пространства параметров, не очень близкой к критической точке. Однако для последующих уровней степень количественного соответствия между конфигурациями областей улучшается в силу асимптотического характера скейлинга.)

В качестве иллюстрации скейлинга рассмотрим показанные на рис. 6 пространственные спектры для фаз Канеко FRP (а), PS (б), PCI (в), FDT (г), которые получены нами численно для модели (24) из 512 ячеек с периодическими граничными условиями. На каждом из рис. (а)-(г) приведены спектры для пяти подобных в смысле решеточного скейлинга режимов динамики решетки или, как мы будем говорить, для пяти уровней скейлинга $n = 0, 1, \dots, 4$. Для большей наглядности спектры, отвечающие четным n , показаны жирными линиями, а для нечетных n - тонкими. На нулевом уровне значения параметров соответствуют выбранным в работе Канеко [57]: $\varepsilon = 0,3$; $\lambda = 1,53$ (а), 1,69 (б), 1,78 (в), 1,93 (г). В качестве начальных условий, задавались случайные числа, равномерно распределенные в интервале (0, 1). При переходе к следующим уровням коэффициент связи пересчитывался по правилу $\varepsilon \rightarrow \varepsilon \cdot 2^{-n}$, управляющий параметр по правилу $\lambda \rightarrow \lambda_c + (\lambda - \lambda_c) \delta_F^{-n}$, а амплитуда случайных начальных условий уменьшается пропорционально α_F^{-n} . После достаточно большого числа предварительных итераций, исключающих переходные эффекты, пространственный спектр определяется усреднением квадратов амплитуд фурье-компонент по нескольким десяткам временных шагов. Скейлинг должен проявляться в том, что изображенные в логарифмическом масштабе спектры, относящиеся к разным уровням n , должны совпадать по форме, различаясь только сдвигом по вертикальной оси на не зависящую от n величину. Из рисунка видно, что это действительно так.

Коснемся теперь кратко результатов анализа модели с *линейной связью*

$$x_{n+1, m} = 1 - \lambda x_{n, m}^2 + \gamma (x_{n, m-1} - 2x_{n, m} + x_{n, m+1}),$$

которая исследовалась в работах [58 - 60].

В этой модели еще в докритической области возникает *зигзаговая неустойчивость*, в результате которой формируется волнообразная структура с длиной волны в два шага решетки. Ее сравнивают с состоянием, характерным для антиферромагнетиков, в которых соседние спины имеют тенденцию ориентироваться в противоположных направлениях [59]. При увеличении управляющего параметра зигзаговая структура претерпевает бифуркацию типа Хопфа, и возникает квазипериодическое движение. При движении по параметру наблюдаются эффекты захвата ("языки Арнольда") и переход к хаосу,

который с ростом параметра λ становится все более развитым и сложным.

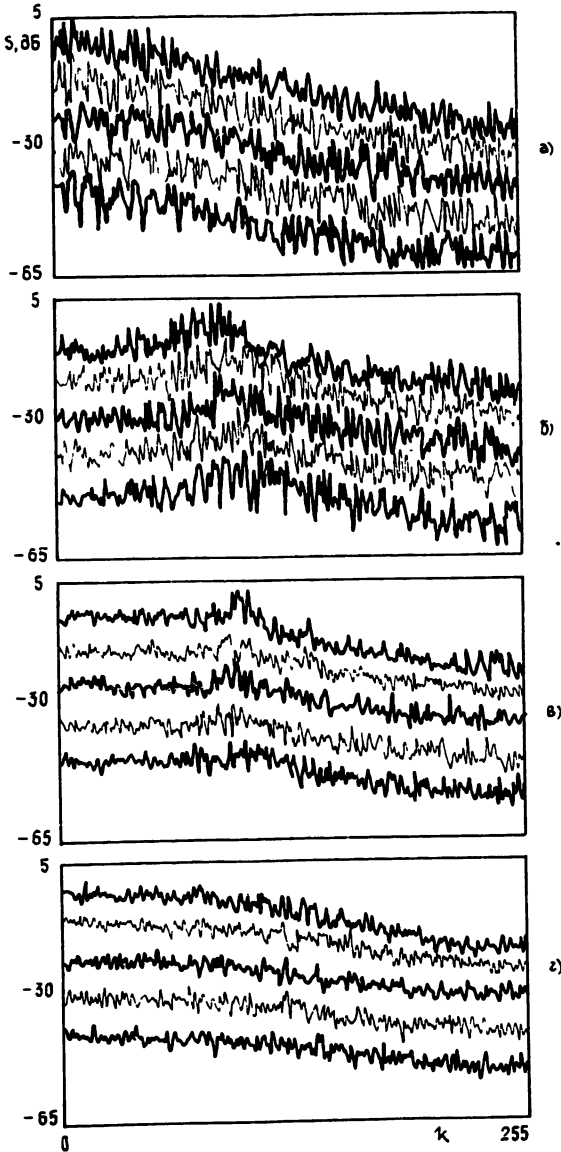


Рис 6

Как и в решетке с диссипативной связью, на базе зигзагообразных состояний возможно возникновение дефектов, отвечающих переходу в пространстве от одной фазы зигзага к противоположной, броуновского движения этих дефектов, дефектной турбулентности.

При определенном выборе параметров в решетке с линейной связью можно наблюдать также возникновение зигзагообразных структур с временными периодами 2, 4, 8, ... В работе [58] эмпирически обнаружен скейлинг соответствующих областей на плоскости λ, γ , характеризующийся масштабными константами Фейгенбаума, соответственно, δ_F и α_F . Это естественно, поскольку, как объясня-

лось в предыдущем разделе, линейная связь содержит доминирующую инерционную компоненту.

7. Критические явления в континуальном пределе

Обратимся теперь к ситуации, когда динамика структур в решетке связанных отображений может быть рассмотрена в континуальном пределе, т.е. можно перейти к непрерывной пространственной координате z . Оказывается, что это допустимо в окрестности критической точки, даже если сглаживающая возмущения диффузионная компонента связи не велика. Важно лишь, чтобы она доминировала над остальными типами связи. При этом возникает представление о новом типе скейлинга, который будем называть континуальным скейлингом.

Рассмотрим сначала решетку с чистой диффузионной связью между ячейками и предположим, что управляющий параметр равен фэйгенбаумовскому критическому значению, а коэффициент диффузии D достаточно мал. Будем выполнять описанную в предыдущем разделе "решеточную" процедуру РГ преобразования многократно. На каждом новом шаге имеем дело с состояниями решетки, сосредоточенными на все более узком интервале динамической переменной ($x \approx 1/a^n$), а коэффициент диффузии увеличивается по закону $D \cdot 2^n$. Ясно, что для этих состояний из-за сильного влияния диссипации при больших n значения динамической переменной соседних элементов должны быть близки. Вернемся к описанию с помощью исходного уравнения. Тогда в нем можно перейти к непрерывному пределу, заменив разностный член второй производной по пространственной координате $z \approx mv\bar{D}$:

$$x_{n+1}(z) = f(x_n(z)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x_n(z)). \quad (25)$$

Теперь пересчет параметра связи при ренормализации в 2 раза эквивалентен пересчету пространственной координаты z в $\sqrt{2}$ раз.

Для обсуждаемой ситуации можно переформулировать РГ анализ так, чтобы неподвижная точка уравнения РГ отвечала распределенной среде с диффузией, а не решетке несвязанных отображений, как раньше [61 - 64]. Обозначим исходный оператор эволюции через $G_0[x]$.

Применив его дважды и выполнив преобразование масштаба $\hat{S}x(z) = \alpha x(z\sqrt{2})$, получим оператор $G_1[x] = \hat{S}G_0\hat{S}^{-1}[x]$, описывающий эволюцию за два временных шага. Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному операторному уравнению

$$G_{n+1}[x] = \hat{S}G_n\hat{S}^{-1}[x], \quad (26)$$

где G_n - ренормализованный оператор эволюции за 2^n шагов.

Как показано в [62, 63], существует предельный оператор G , являющийся неподвижной точкой РГ уравнения

$$G[x] = \hat{S}G\hat{S}^{-1}[x]. \quad (27)$$

Оператор G универсален, т.е. совпадает для всех систем с диффузионной связью с точностью до пересчета масштаба пространственной координаты и динамической переменной. Подставляя в (27) $G_n[x] = G[x] + \epsilon h_n[x]$ и считая возмущение малым, получаем следующее операторное уравнение [64]:

$$h_{n+1}[x] = \hat{M}h_n[x] = \hat{S}G'(GS^{-1}[x])h_n\hat{S}^{-1}[x] + \hat{S}h_nGS^{-1}[x], \quad (28)$$

где $G'(GS^{-1}[x])$ - производная Фреше от оператора G . Линейный оператор \hat{M} имеет три существенных собственных вектора с собственными числами $\nu_1 = \alpha/\sqrt{2} = -1,7698$, $\nu_2 = \sqrt{2} = 1,4142$, $\nu_3 = \alpha/2 = -1,2512$. К ним нужно добавить, конечно, собственный вектор с $\nu_0 = \delta = 4,6692$, описывающий возмущение параметра индивидуальных элементов пространственной системы.

Можно построить и соответствующее универсальное модельное уравнение:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \alpha(1 - 0,176x_n)\frac{\partial x_n}{\partial z} + \beta\frac{\partial(x_n^2)}{\partial z} + \gamma(1 - 0,176x_n)\frac{\partial^2 x_n}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(x_n^2)}{\partial z^2}. \quad (29)$$

Дадим теперь формулировку свойства *континуального скейлинга*. В непрерывном пределе распределенная система характеризуется четырьмя параметрами $(\lambda - \lambda_c)$, α , β , γ . Пространство этих параметров обладает масштабной инвариантностью относительно замены $(\lambda - \lambda_c)/\delta$, α/ν_1 , β/ν_2 , γ/ν_3 , сопровождающейся пересчетом динамической переменной x с фактором $1/\alpha$, удвоением временного масштаба и пересчетом пространственной координаты в $\sqrt{2}$ раз.

Проиллюстрируем свойство континуального скейлинга, рассматривая динамику той же решетки с чистой диффузионной связью (24), что и в предыдущем разделе. На рис. 7 показан вид пространственных спектров хаотических режимов в двойном логарифмическом масштабе при значениях параметра $\lambda_1 = 1,543689$, $\lambda_2 = 1,430357$, $\lambda_3 = 1,407405$, $\lambda_4 = 1,402492$, $\lambda_5 = 1,401442$, отвечающих точкам слияния полос аттрактора локального отображения. Решетка содержала $M = 512$ ячеек, в качестве граничных условий было задано условие периодичности. Начальные условия имели вид почти пространственно-однородного состояния с малыми случайными возмущениями. После некоторого большого числа предварительных итераций во всех случаях наблюдался развитый пространственно-временной хаос сохранявший, однако, 2^n -полосную структуру, характерную для аттрактора локального отображения при значениях $\lambda = \lambda_n$. Отличие от предыдущего раздела состоит в том, что при переходе от уровня k уровню n параметр связи не пересчитывался. Как видно из рисунка,

форма спектра, полученная для разных n , с хорошей точностью повторяется, что подтверждает ожидаемый скейлинг. Кроме сдвига вниз по вертикали, с ростом n происходит и сдвиг по горизонтали, вдоль оси логарифмов волновых чисел, что соответствует увеличению характерного пространственного масштаба хаотических структур пропорционально $2^{n/2}$.

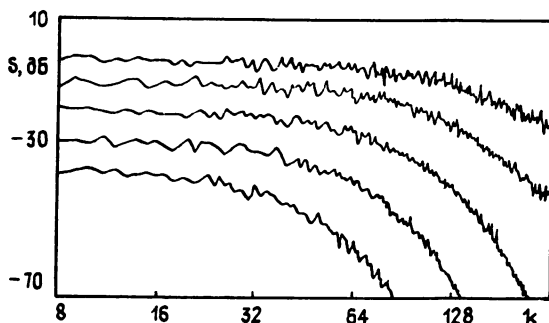


Рис 7

Другие проявления непрерывного скейлинга обсуждаются в работах [61 - 63] (скейлинг пространственных структур, возникающих на пороге хаоса при наличии в среде локальной неоднородности, свойства подобия карты динамических режимов одномерного состояния на плоскости параметр λ - длина системы для модели с чистой диффузией), [65] (скейлинг пространственной корреляционной функции и визуальная иллюстрация подобия пространственных структур в хаотических режимах), [64, 33] (подобие карт динамических режимов и пространственно-временных диаграмм при наличии помимо диффузии небольших по величине дополнительных типов связи α, β, γ).

Вопрос о том, в какой мере феномены, наблюдаемые в СМЛ, имеют отношение к реальным примерам сложной пространственно-временной динамики, во многом остается открытым, хотя в качественном плане он дискутируется в ряде работ [60, 62, 63, 66]. Несомненно, однако, что такие искусственно сконструированные системы, как цепочка нелинейных колебательных контуров под периодическим внешним воздействием в области параметров, где индивидуальный элемент демонстрирует удвоения периода, попадают в те же классы универсальности, что и рассмотренные в двух последних разделах модели СМЛ. Насколько нам известно, пока еще не опубликовано экспериментальных работ, где в данном ключе исследовались бы подобные системы.

В то же время, существует класс систем, реально наблюдаемое поведение которых при надлежащей трактовке соответствует динамике СМЛ (в непрерывном пределе). Это системы с запаздывающей обратной связью [67 - 73]. Типичным примером может служить дифференциально-разностное уравнение

$$dx/dt + x = f(x(t - T)), \quad (30)$$

описывающее некоторые радиотехнические, оптические и другие системы [68, 71, 72]. В таких системах конфигурацию зависимости сигнала от времени на интервале запаздывания можно интерпретировать как "мгновенный фотоснимок" пространственной структуры в эквивалентной системе - отрезке распределенной среды с некоторыми специальными граничными условиями. В системах с запаздыва-

нием экспериментально наблюдаются домены и доменные стенки различного уровня, характерные особенности эволюции структур на пути к хаосу и т. д. [67 - 73].

8. Развитие турбулентности в потоковых системах

В работах [74 - 76] была предложена и исследована решетчатая потоковая модель, составленная из точечных систем Фейгенбаума и описываемая уравнением

$$x_{n+1, m} = 1 - \lambda x_{n, m}^2 + \varepsilon (x_{n, m}^2 - x_{n, m-1}^2), \quad (31)$$

где m - пространственный, n - временной индекс. Рассмотрим наиболее интересные особенности поведения этой модели, наблюдаемые в численном эксперименте. Прежде всего обнаруживаются так называемые *пространственные удвоения периода*. Существо дела состоит в том, что по мере увеличения пространственного индекса временной период динамики ячеек решетки последовательно увеличивается и составляет 2, 4, 8... В зависимости от параметров задачи λ и ε могут реализоваться две возможности: а) происходит конечное число удвоений, система выходит на некоторый режим с временным периодом 2^n и далее вниз по потоку период больше не меняется; б) после конечного числа удвоений периода в очередной пространственной ячейке имеет место хаос, при этом последующие ячейки также демонстрируют хаос во времени. Интересно поведение ляпуновских показателей в последнем случае. Предварительно заметим, что при однонаправленной связи ляпуновские показатели легко вычисляются, так как матрица эволюции малых возмущений является треугольной [76, 78]. По этой же причине каждый из ляпуновских показателей ассоциируется с определенным элементом цепочки и нумеруется соответствующим пространственным индексом. Как правило, хаос, распространяющийся сколь угодно далеко вниз по потоку, характеризуется всего одним положительным показателем, тогда как показатели с большими номерами все отрицательны. Это говорит о том, что хаос генерируется на начальном участке потока, распространяется вниз и не может быть, вообще говоря, диагностирован локальным анализом динамических свойств потока в достаточно далеком сечении. Это свидетельствует также о возникновении в потоке специфического установившегося в пространстве состояния, характеризующегося неизменной вдоль по потоку размерностью аттрактора. В работах [77, 78] это явление получило название *стохастической синхронизации*.

Далее в работе [74] обращено внимание на существенное влияние даже малого шума на начальном участке цепочки. Он приводит к тому, что в потоке генерируются *кинки* - перепады, по разные стороны которых элементарные системы совершают движения со сдвинутыми фазами. Кинки распространяются вниз по потоку со скоростью, зависящей от величины сдвига фазы на кинке. Пространственная плотность кинков тем больше, чем выше уровень шума.

Наиболее полный анализ закономерностей универсальности и скейлинга в системах рассматриваемого класса содержится в работах [75, 76]. Здесь построена последовательная процедура РГ анализа, основанная на операторном уравнении, описывающем преобразование оператора эволюции при переходе к удвоенной протяженности рассматриваемого временного интервала. Проанализирована задача на собственные векторы и собственные значения этого оператора вблизи неподвижной точки, отвечающей цепочке несвя-

занных систем. Показано, что однонаправленная связь представляется в виде комбинации инерционной и диссипативной связи и характеризуется двумя независимыми параметрами. От конкретного выбора вида функций, описывающих связь, зависят лишь величины этих параметров. Показано также, что учет слабой диффузионной связи в потоковых системах не приводит к появлению новых существенных параметров (соответствующие собственные числа оператора ренормпреобразования меньше единицы) и, следовательно, диффузией можно пренебречь при изучении явлений, наблюдаемых после нескольких удвоений периода. Тем самым результаты, полученные в [75, 76] для систем с однонаправленной связью конкретного вида, оказываются на самом деле гораздо более общими и применимы, по существу, к любым потоковым системам, построенным из фейгенбаумовских элементов. Найденные соотношения позволяют количественно оценить номер элемента цепочки, в котором возникает хаос и число пространственных удвоений периода.

В работе [78] приводятся результаты физических экспериментов с цепочкой однонаправленно-связанных радиотехнических генераторов с инерционной нелинейностью, а также рассмотрена модельная потоковая система в виде цепочки одномерных отображений. Поскольку в отдельном генераторе при изменении управляющего параметра наблюдается переход к хаосу через фейгенбаумовскую последовательность бифуркаций удвоения периода, то в модельной системе в качестве точечных элементов используются отображения параболического типа. Соответствующая система уравнений имеет вид, аналогичный (31).

В эксперименте была получена картина областей различных динамических режимов на плоскости номер ячейки - параметр неравновесности. При малых значениях параметра неравновесности наблюдается конечное число удвоений периода "вниз по потоку" и возникновение в итоге периодического во времени режима колебаний. При увеличении параметра неравновесности наступала ситуация, когда после конечного числа удвоений периода вдоль цепочки появлялся хаос. При этом ширина спектра и размерность, начиная с некоторого элемента, устанавливаются на постоянном уровне и не меняются вниз по потоку.

9. Динамика структур в двумерной решетке

Переход к решеткам с двумя и более пространственными изменениями представляет собой следующий естественный шаг в формировании излагаемой системы представлений, а также в построении более реалистичных моделей турбулентного состояния физических систем. Однако исследование таких моделей является более сложным делом и требует использования достаточно мощных компьютеров.

Решеточный РГ анализ для двумерной решетки строится по той же схеме, как и в одномерном случае (см. начало раздела 6). При этом роль неподвижной точки РГ играет набор несвязанных отображений

$$\{ \dots g(x(i, m)), \dots \},$$

где i и m - пространственные индексы. Как и раньше, можно включить теперь инерционную и/или диссипативную связь между соседними ячейками, поскольку уравнение, описывающее РГ преобразование членов связи, по-прежнему имеет вид (13). Если связь между любыми двумя соседними элементами симметричная, то протяженная решетка характеризуется всего тремя существенными параметрами: управляющим параметром λ и коэффициентами инерционной и диссипативной связи.

Структура пространства этих трех параметров обладает свойством *решеточного скейлинга*, подобным сформулированному в разд. 6.

Продолжая рассуждения по аналогии с одномерным случаем, можно прийти к представлению о *континуальном скейлинге* в *двумерных системах*, обоснованием которого может служить обобщение развитого в [62 - 64] РГ анализа на двумерный случай. При этом для структур, пространственный масштаб которых намного превышает шаг решетки и которые допускают рассмотрение в непрерывном пределе, двумерная система (с симметричной связью) будет характеризоваться двумя существенными параметрами $(\lambda - \lambda_c)$ и γ . Пространство этих параметров обладает масштабной инвариантностью относительно замены $(\lambda - \lambda_c) / \delta_F$, γ / ν_3 , сопровождающейся пересчетом динамической переменной x с фактором $1/a_c$, удвоением временного масштаба и пересчетом пространственных координат y, z в $\sqrt{2}$ раз. Соответствующая универсальная модель имеет вид

$$x_{n+1} = \lambda x_n^2 + \gamma (1 - 0,176x_n) \left[\frac{\partial^2 x_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x_n}{\partial y^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 (x_n^2)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (x_n^2)}{\partial y^2} \right]. \quad (32)$$

Обсудим теперь накопленные к настоящему времени результаты компьютерного моделирования динамики двумерных решеток связанных логистических отображений [57, 60, 66, 80 - 82].

Рассмотрим двумерную решетку связанных отображений с *диссипативной* связью между элементами:

$$x_{n+1}(i, m) = (1 - \varepsilon) f(x_n(i, m)) + \frac{\varepsilon}{4} [f(x_n(i+1, m)) + f(x_n(i-1, m)) + f(x_n(i, m+1)) + f(x_n(i, m-1))]. \quad (33)$$

Здесь $f(x) = 1 - \lambda x^2$, n - дискретное время, i и m - пространственные индексы, ε - параметр связи.

При небольших уровнях связи ($\varepsilon \approx 0, 1$) и небольших превышениях параметра λ над критическим значением в решетке наблюдается фаза *замороженных случайных структур*. При увеличении λ наступает фаза *селекции*, приводящая к возникновению *шахматных структур*. В такой структуре соседние элементы решетки колеблются в противофазе, а хаос во времени подавлен за счет селекции. При случайных начальных условиях в результате переходного процесса обычно возникают островки шахматных структур, разделенные хаотическими струнами, имеющими сложную, извилистую форму. Струны демонстрируют хаос во времени, что тестируется по появлению дополнительного положительного ляпуновского показателя, ассоциирующегося с каждой струной. Струны медленно блуждают, меняют форму, иногда замкнутые в кольцо струны стягиваются в точку и гибнут при этом. По истечении достаточно большого времени происходит гибель всех струн и формируется единая тотальная шахматная структура.

Если еще увеличить параметр λ , наступает стадия *дефектной турбулентности*. В этой фазе струны не только гибнут, но и происходит рождение кольцевых струн из точечных дефектов.

Наконец, при еще больших λ наступает *полностью развитая турбулентность*, когда достаточно долгоживущие пространственные структуры отсутствуют.

Если теперь несколько увеличить связь ($\epsilon \approx 0,2$), то в результате селекции выживают не шахматные структуры, а структуры, составленные из ячеек "типа 2×1 ", когда синхронно колеблется пара ближайших элементов. При промежуточных значениях коэффициента связи имеет место пространственная перемежаемость этих двух типов структур. Благодаря двум возможным пространственным ориентациям относительно решетки ячеек "типа 2×1 " (вертикальной и горизонтальной) характерное время установления стационарной пространственной картины в этом случае значительно больше, чем для симметричной шахматной структуры.

Если же связь увеличить еще больше ($\epsilon \approx 0,4$), то динамика структур оказывается существенно иной. По мере временной эволюции маленькие домены постепенно сжимаются, так что в конце концов выживает один большой домен, покрывающий все пространство. В докритической области параметра λ возникают пространственно однородные состояния, а в закритической - турбулентные состояния, характеризующиеся отсутствием долгоживущих структур. В [66] предлагается объяснение феномена разрушения доменов на основе представлений о поверхностном натяжении доменных стенок.

Рис. 8 и 9 иллюстрируют, соответственно, решеточный и континуальный скейлинг двумерной пространственно-временной турбулентности в закритической области параметра λ .

На рис. 8 приведены двумерные пространственные спектры подобных в смысле решеточного скейлинга режимов (уровни $n = 0, 1, 2$), полученные численно для модели (32) из 64×64 ячеек с периодическими граничными условиями. На уровне $n = 0$ значения параметров $\lambda = 1,54$, $\epsilon = 0,3$, а в качестве начальных условий задавались случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 0,4)$. Для следующих уровней коэффициент связи пересчитывался по правилу $\epsilon \rightarrow \epsilon \cdot 2^{-n}$, управляющий параметр по правилу $\lambda \rightarrow \lambda_c + (\lambda - \lambda_c) \delta_F^{-n}$, а амплитуда случайных начальных условий - пропорционально α_F^{-n} . После достаточно большого числа предварительных итераций проводилось усреднение квадратов амплитуд фурье-компонент по нескольким десяткам временных шагов. Скейлинг подтверждается: в логарифмическом масштабе спектры, относящиеся к разным n , в среднем повторяют друг друга по форме, отличаясь сдвигом по вертикальной оси.

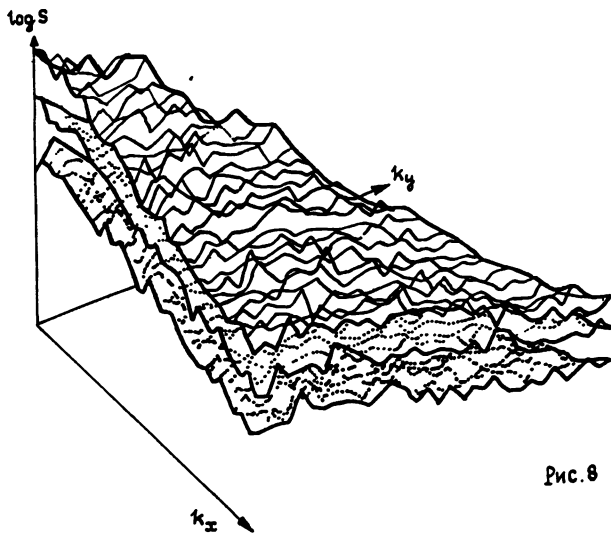


Рис. 8

На рис. 9 а - г показаны "мгновенные снимки" турбулентных структур в решетке (32) из 64×64 ячеек в режимах, подобных в смысле континуального скейлинга (уровни $n = 0, 1, 2, 3$). Значения параметров: $\epsilon = 0,3$, $\lambda = \lambda_c + (1,54 - \lambda_c)\delta^{-n}$. Ячейки, в которых $x > 0$, показаны черным, а остальные - белым цветом. Согласно континуальному скейлингу, характерный размер образований должен увеличиваться пропорционально $2^{n/2}$, что можно увидеть из сопоставления картинок. Отметим, что картинки б) и г) имеют негативный вид по сравнению с а) и в), поскольку масштабная константа для динамической переменной x отрицательна.

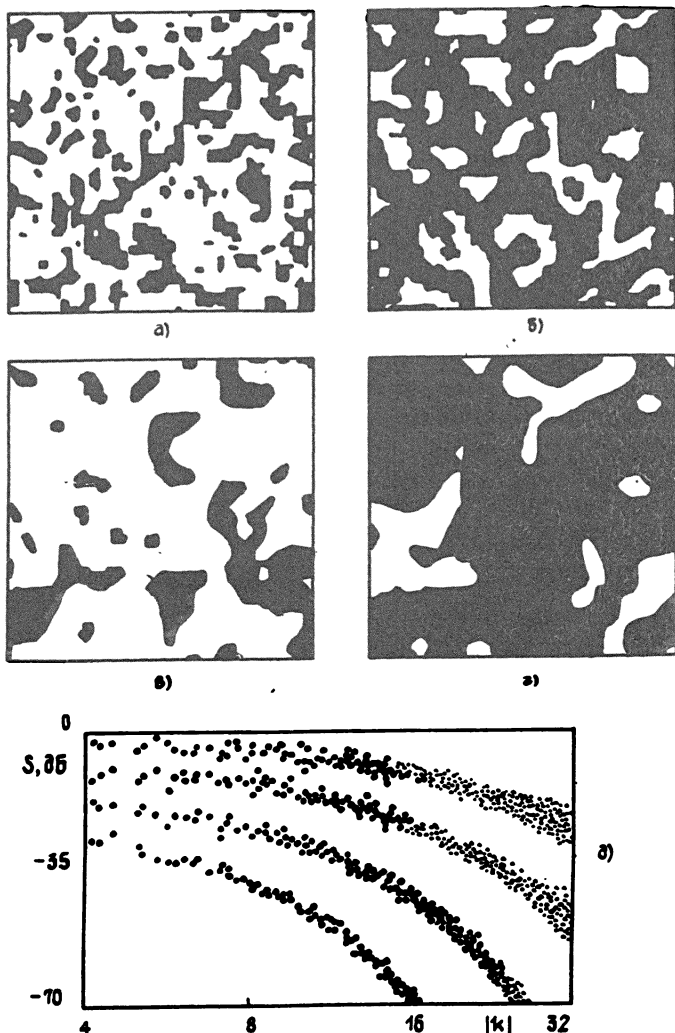


Рис. 9.

Для количественной проверки скейлинга обратимся вновь к пространственным спектрам. Поскольку в континуальном пределе решетка (32) изотропна, пространственный спектр турбулентных состояний должен зависеть только от модуля волнового вектора $|k|$. На рис. 9д в двойном логарифмическом масштабе показаны эти зависимости, полученные для режимов динамики решетки, отвечающих рис. 9 а - г.

Можно видеть повторение формы зависимостей от уровня к уровню с постоянным сдвигом по вертикали вниз и по горизонтали влево. Уменьшение разброса точек с увеличением n объясняется возрастанием точности, с которой выполняется предположение об изотропии спектра, с увеличением характерного размера структур.

Еще одной иллюстрацией континуального скейлинга в двумерной системе с диссипативной связью могут служить результаты недавней работы [82]. Там продемонстрирован соответствующий этому скейлингу закон поведения порогового геометрического размера, начиная с которого ляпуновский показатель хаотической пространственно-временной динамики почти не отличается от случая большой системы. При уменьшении отклонения управляющего параметра λ от критической точки в δ_F раз этот размер увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

Случай *линейной* связи между элементами двумерной решетки изучался в работах [80, 81]. Одна из рассмотренных моделей имела вид

$$x_{n+1}(i, m) = f(x_n(i, m)) + C[x_n(i+1, m) + x_n(i-1, m) + x_n(i, m+1) + x_n(i, m-1) - 4x_n(i, m)], \quad (34)$$

где $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Как указывалось в разд. 5, такая связь представляет собой комбинацию инерционной и диссипативной связи с доминирующим вкладом первого типа связи. По этой причине решеточный скейлинг проявляется в свойстве самоподобия карты динамических режимов на плоскости параметр λ - коэффициент связи с масштабными константами δ_F и α_F [80]. Очень типичными являются шахматные структуры, которые в определенных областях параметров решетки могут возникать при развитии неустойчивости однородных состояний уже для $\lambda < \lambda_c$. При соответствующих начальных условиях образуются домены, разделенные струнами - дефектами, по разные стороны которых шахматные структуры находятся в противофазе. На фоне шахматных структур с ростом λ может наблюдаться возникновение квазипериодической динамики с последующим переходом к хаосу. В работе [81] рассмотрены также ситуации, когда каждый узел связан линейно с большим числом соседей. Оказывается, что в этих случаях вместо шахматных структур доминирующую роль начинают играть другие структуры, например, параллельные полосы с длиной волны 2 в модели со связью девяти соседей или с длиной волны 4 в модели со связью 13 соседей.

Ряд описанных особенностей образования структур в двумерных системах наблюдался в экспериментах по конвекции в жидких кристаллах. Наблюдалась селекция структур, образование структур типа 2×1 , феномены пространственной перемежаемости. Соответствующие ссылки приводятся в [66].

10. Сеть глобально связанных отображений

С точки зрения приложения к сложным информационным системам, в частности биологическим, представляет интерес изучение

сетей, в которых каждый из большого числа составляющих элементов связан со всеми другими. В известной модели Хопфилда и ее обобщениях способность к реализации таких информационных процессов как запоминание и распознавание образов, ассоциативная память и др. заложена в структуре связей между элементами сети. Другая возможность состоит в том, чтобы рассмотреть в каком-то смысле противоположную ситуацию, когда структура связей проста, а индивидуальные элементы демонстрируют сложную динамику, включая переход к хаосу. В недавних работах Канеко [83, 84] была введена в рассмотрение сеть глобально связанных логистических отображений. Оказалось, что она демонстрирует целый ряд нетривиальных особенностей поведения, которые могут оказаться полезными для технических приложений, а также для понимания информационных процессов в биологических системах. Эта модель представляет собой предельный случай дальней связи в решетках диссипативно связанных отображений типа (2) и задается уравнением

$$x_{n+1, m} = (1 - \varepsilon)f(x_{n, m}) + \varepsilon F_n, \quad F_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_{n, i}). \quad (35)$$

Здесь $f(x) = 1 - \lambda x^2$, n - дискретное время, m - номер текущего элемента сети, N - число элементов в сети, которое предполагается большим. Из уравнения видно, что каждый элемент погружен в общее поле F , создаваемое всей сетью. Поэтому модель естественно называть моделью среднего поля.

Чтобы представить себе многообразие возможных состояний модели, предположим сначала, что параметр связи $\varepsilon \rightarrow 0$, так что мы имеем набор N несвязанных логистических отображений. Пусть параметр λ выбран так, что индивидуальные ячейки совершают устойчивое движение периода 2^n . Выбором начальных условий можно реализовать произвольное распределение ячеек сети по элементам 2^n -цикла: $\{N_i, i = 0, \dots, 2^n - 1\}$. При включении связи на динамику всех ячеек начнет воздействовать единое поле F_n , зависимость которого от n определяется распределением $\{N_i\}$. Тем не менее, по крайней мере при достаточно малых ε все эти состояния будут сохранять устойчивость.

Замечательное свойство сети с глобальной связью состоит в том, что распределение ячеек по группам $\{N_i\}$ сохраняется и при включении связи. Состояния всех ячеек, принадлежащих каждой группе, совпадают точно, поскольку не отличаются ни их начальные состояния, ни "вынуждающая сила" F_n . Канеко называет эти группы кластерами. Легко видеть, что при наличии n кластеров уравнение динамики сети сводится к системе n связанных отображений $f(x)$. Например, для двухкластерного состояния из (35) можно получить

$$\begin{aligned} x_{n+1}^+ &= f(x_n^+) + \frac{\varepsilon N}{N} (f(x_n^-) - f(x_n^+)), \\ x_{n+1}^- &= f(x_n^-) + \frac{\varepsilon N_1}{N} (f(x_n^+) - f(x_n^-)), \end{aligned} \quad (36)$$

где знаками "+" и "-" отмечены динамические переменные для ячеек,

относящихся к первому и второму кластерам, N_1 и N_2 - количество элементов в этих кластерах.

В основу классификации состояний сети можно положить типичную при данных параметрах кластеризацию сети [83, 84]. При этом полезно различать состояния с малым (n порядка единиц) и большим (n порядка N) числом кластеров. Это разделение, кажущееся несколько условным, становится принципиальным в контексте перехода к "термодинамическому пределу" $N \rightarrow \infty$.

В каждой точке плоскости параметров λ , ϵ , задавая ансамбль случайных начальных условий, можно определить посредством компьютерного моделирования динамики сети, какой из типов конечных состояний возникает с большей вероятностью. Соответственно вводится представление о фазах:

а) *когерентная фаза* - когда почти все начальные условия приводят к однокластерному состоянию (когерентному аттрактору);

б) *упорядоченная фаза* - когда доминируют аттракторы, содержащие небольшое число кластеров;

г) *частично упорядоченная фаза* - когда могут возникать состояния как с малым, так и с большим n ;

д) *турбулентная фаза* - почти весь фазовый объем занимают аттракторы с большим n .

Области, занимаемые этими фазами на плоскости параметров ϵ , λ , показаны на рис. 10 и обозначены соответственно С, О, РО, Т.

Что можно сказать о временной динамике системы при наличии кластеризации? Рассмотрим двухкластерное состояние, описываемое уравнениями (36) и предположим, что первоначально количество элементов в обоих кластерах одинаково. Пусть далее λ и ϵ выбраны так, что реализуется устойчивый цикл периода 2. Будем теперь постепенно увеличивать число элементов в первом кластере. Это можно делать с помощью импульсного воздействия на элементы второго кластера, которое перебрасывает их в первый. Оказывается, что с ростом N_1 с

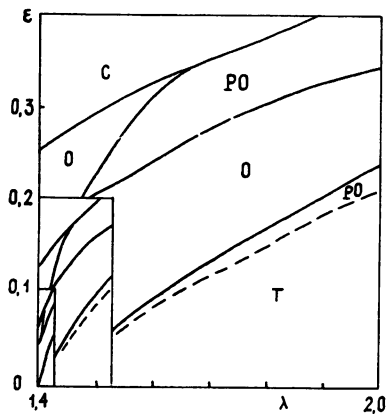


Рис 10

некоторого момента система начинает совершать колебания периода 4, затем 8 и т.д. Если общее число элементов очень велико, так что параметры в (36) можно считать квазинепрерывными, то можно проследить весь классический фейгенбаумовский каскад удвоений периода и известную картину закритического поведения с хаосом и окнами устойчивости. Наконец, наступает момент $N_1 = N_{\text{пор}}$, когда попытка добавить еще один элемент в первый

кластер приводит к новому эффекту: возникает сложный переходный процесс, в ходе которого система содержит три кластера (с числами заполнения $N_{\text{пор}}$, $N - N_{\text{пор}} - 1$, 1). Он завершается либо возвратом на

исходный аттрактор, либо возникновением состояния, в котором все x^+ заменились на x^- и наоборот. Этот феномен получил название

переключение плюс - минус (*posi - nega switch*).

С учетом иерархической структуры циклов индивидуального логистического отображения (см. разд. 6) можно ввести представление о кластерах разного уровня подобно тому, как это было сделано для доменов в СМЛ. Ясно, что в общем случае кластеризация тоже иерархическая: кластеры первого уровня имеют внутри себя кластеры второго уровня, те, в свою очередь, содержат кластеры третьего уровня и т. д. При управлении внешними толчками феномены типа переключения плюс - минус могут происходить на разных уровнях иерархии. В некоторых случаях переключение, осуществляемое на некотором глубоком уровне, дает начало разрастающемуся возмущению, которое распространяется и на менее глубокие уровни, приводя к разрушению старой иерархической структуры и формированию новой ("*переключение с хаотическим революционным переворотом*" - *switch with chaotic revolt*).

Сеть (35) представляет собой совокупность попарно диссипативно связанных элементов. Поэтому на нее переносится концепция *решеточного скейлинга*, обсуждавшаяся в предыдущих разделах. А именно, если уменьшить в α_f раз амплитуду случайных начальных условий, то в точке плоскости параметров $\lambda_c + (\lambda - \lambda_c)/\delta_f$, $\epsilon/2$ будет реализоваться та же фаза, какая имела место в точке λ, ϵ . (Это свойство выполняется с тем большей точностью, чем меньше рассматриваемая окрестность критической точки $\lambda = \lambda_c$, $\epsilon = 0$.) Приводимая на рис. 10 диаграмма фаз Канеко дополнена уменьшающимися фрагментами, которые иллюстрируют многократное повторение картины областей при приближении к критической точке.

Заметим, что динамика состояний сети с конечным числом кластеров описывается маломерной системой отображений, в которой могут возникать типы критического поведения, рассмотренные в разделах 1 - 5. Нетрудно предложить примеры кластерных структур и значения параметров, при которых реализуются фейгенбаумовское и трикритическое поведение. Случай двух кластеров одинакового размера описывается в точности уравнением (18), карта динамических режимов которого с присущими ей свойствами скейлинга рассматривалась выше (рис. 3).

Заключение

В основу нашего изложения были положены концепции ренорм-группы, универсальности и скейлинга, и в заключение обзора мы хотим обсудить в свете этих концепций несколько руководящих идей, которые, по нашему мнению, будут определять дальнейшее развитие рассматриваемой области.

Первая из них - это идея "*движения по коразмерности*", лежащая в основе ряда областей математики и выдвинутая еще Пуанкаре. Она имеет важное значение при многопараметрическом анализе перехода к хаосу.

Пусть мы имеем нелинейную систему, способную демонстрировать в зависимости от нескольких параметров как регулярное, так и хаотическое поведение. В пространстве этих параметров будут присутствовать некоторые критические поверхности коразмерности 1, вблизи которых разыгрываются известные однопараметрические сценарии возникновения хаоса, например, через удвоения периода. Двигаясь вдоль такой поверхности, можно, вообще говоря, обнаружить некоторую границу, критическую поверхность коразмерности 2, появление которой физически может быть связано, например, с выходом на порог устойчивости новой моды. В свою очередь, эта

поверхность может быть ограничена поверхностью коразмерности 3 и т. д. Критическое поведение, реализующееся на каждой из этих поверхностей разной коразмерности, должно быть проанализировано с помощью метода РГ.

Сами по себе результаты РГ анализа еще не дают полного представления о явлениях, которые могут наблюдаться в исследуемой системе. Они, во-первых, помогают построить модели, заслуживающие изучения, и, во-вторых, создают основу для классификации и понимания иерархической организации динамических процессов. Конкретное же наполнение содержанием этой схемы, выявление реализующихся феноменов - это дело компьютерного моделирования. Если использовать расхожее сравнение многообразия феноменов с зоопарком, то результаты РГ определяют принцип расстановки клеток, тогда как компьютерные расчеты выявляют, какой зверь живет в какой клетке. Но не следует и приуменьшать значение принципа: очень полезно уметь определить, какой зверь находится в клетке А, если известно, кто живет в клетке В. Тем более, что "зоопарк" содержит бесконечное число клеток!

В прилегающей к критической точке (линии, поверхности) части пространства параметров реализуется универсальная, определяемая только типом критического поведения структура областей типа вложенных друг в друга матрешек. *Эту структуру следует рассматривать как объект, служащий обобщением понятия "сценарий перехода к хаосу" в многопараметрической ситуации.* Универсальными в том же смысле будут форма спектра критического движения, вид зависимости ляпуновских показателей от параметров задачи, фрактальная структура и хаусдорфова размерность критического аттрактора. Лишь после того как наши представления о том или ином типе критической динамики насытятся подобной физической и математической инфраструктурой, можно говорить о достаточно полном понимании соответствующего "сценария".

Из сказанного ясна общая стратегия поиска и исследования новых типов критического поведения, которая, несомненно, будет постепенно реализовываться. На сегодняшний день достаточно убедительной ее иллюстрацией могут служить результаты анализа задачи о поведении двух систем Фейгенбаума с однонаправленной связью, в которой обнаружена иерархия типов критического поведения.

Следующая важная идея - это идея конструирования составных комплексов, в том числе решеток и сетей, из элементов с известным типом поведения. Она была популярна еще в классической теории колебаний, где роль индивидуального элемента играл гармонический осциллятор. Она же лежит в основе синергетики, рассматривающей процессы самоорганизации и хаотизации в системах, построенных на базе нелинейных элементов.

Любая система, демонстрирующая определенный тип критического поведения, может рассматриваться как новый фундаментальный объект, пригодный для использования в качестве составного элемента при построении составных систем-комплексов. В свою очередь комплекс в целом может и должен быть исследован на наличие новых типов критического поведения.

В обзоре была подробно рассмотрена динамика связанных систем, решеток, сетей, в которых в качестве индивидуального элемента фигурировало логистическое отображение с одним параметром, демонстрирующее фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу. Исследование этих моделей вскрыло необычайное богатство структур, обладающих иерархической организацией вблизи точки перехода к хаосу. Здесь надо отметить, что обычно о "модельных системах" говорят тогда, когда ценой существенного упрощения описания стремятся достигнуть хотя бы грубого, качественного понимания пове-

дения реально существующего объекта. Однако в контексте представлений о критических явлениях от моделей следует ожидать большего. Будучи полноправными представителями своих классов универсальности, они должны обеспечивать адекватное количественное описание реальных систем, относящихся к тем же классам, по крайней мере вблизи соответствующих критических точек. Вопрос состоит только в установлении соответствия между динамическими переменными и параметрами системы и модели. Мы хотим особо подчеркнуть этот момент, поскольку обсуждавшиеся модели могли показаться чересчур абстрактными.

Приложение

1. Функция Фейгенбаума:

$$g(x) = 1 - 1,527632997x^2 + 0,1048151943x^4 + 0,0267056735x^6 - \\ - 0,0035274139x^8 + 0,0000815819x^{10} + 0,0000253684x^{12} - 0,0000026878x^{14}.$$

2. Универсальная функция, описывающая трикритическую динамику:

$$g_T(x) = 1 - 1,83410790700x^4 + 0,01296222601x^8 + 0,31190173945x^{12} - \\ - 0,06201465160x^{16} - 0,03753928670x^{20} + 0,01764731251x^{24} + \\ + 0,00193826520x^{28} - 0,00282047096x^{32} + 0,00011545666x^{36} + \\ + 0,00039947082x^{40} - 0,00002479251x^{44} - 0,00012164143x^{48} + \\ + 0,00007043385x^{52} - 0,00001797963x^{56} + 0,00000190870x^{60}.$$

3. Универсальная функция, описывающая бикритическую динамику:

$$f_B(x, y) = 1 - 0,596905x^2 - 0,032157x^4 + 0,018457x^6 - 0,000201x^8 - \\ - 0,855639y^2 - 0,302943x^2y^2 + 0,054630x^4y^2 + 0,021499x^6y^2 - \\ - 0,004860x^8y^2 - 0,431738y^4 + 0,087452x^2y^4 + 0,091136x^4y^4 - \\ - 0,011023x^6y^4 - 0,003242x^8y^4 + 0,087486y^6 + 0,180356x^2y^6 + \\ + 0,009298x^4y^6 - 0,031914x^6y^6 + 0,005042x^8y^6 + 0,152662y^8 + \\ + 0,060337x^2y^8 - 0,096310x^4y^8 + 0,017439x^6y^8 + 0,060864y^{10} - \\ - 0,153737x^2y^{10} + 0,037690x^4y^{10} - 0,101867y^{12} + 0,047570x^2y^{12} + \\ + 0,026310y^{14}.$$

4. Универсальная функция, описывающая динамику в мультикритической точке BT:

$$f_{BT}(x, y) = 1 - 0,401489y^4 - 0,647008y^8 - 0,764338y^{12} + 0,948317y^{16} - \\ - 6,512318y^{20} + 23,444001y^{24} - 51,462786y^{28} + 76,526244y^{32} - \\ - 69,236797y^{36} + 33,523789y^{40} - 6,654459y^{44} + x^2(-0,380946 - 0,578270y^4 - \\ - 0,924782y^8 + 3,207539y^{12} - 27,026345y^{16} + 127,361506y^{20} -$$

$$\begin{aligned}
& - 364, 218724y^{24} + 676, 471413y^{28} - 793, 030007y^{32} + 560, 113033y^{36} - \\
& - 217, 468288y^{40} + 35, 712535y^{44}) + x^4(-0, 150141 - 0, 266129y^4 + \\
& + 0, 922201y^8 - 13, 913457y^{12} + 99, 471585y^{16} - 387, 166982y^{20} + \\
& + 937, 925631y^{24} - 1420, 505654y^{28} + 1331, 993505y^{32} - \\
& - 749, 454686y^{36} + 231, 199927y^{40} - 29, 871488y^{44}) + x^6(-0, 024968 - \\
& - 0, 021137y^4 - 1, 107687y^8 + 23, 366570y^{12} - 149, 729985y^{16} + \\
& + 512, 519022y^{20} - 998, 517972y^{24} + 1136, 063481y^{28} - 749, 225002y^{32} + \\
& + 266, 722853y^{36} - 40, 001237y^{40}) + x^8(-0, 002388 + 0, 228128y^4 - \\
& - 0, 111086y^8 - 13, 210179y^{12} + 106, 642684y^{16} - 339, 857148y^{20} + \\
& + 542, 154904y^{24} - 460, 181747y^{28} + 197, 645364y^{32} - 33, 358334y^{36}) + \\
& + x^{10}(0, 016764 - 0, 176914y^4 + 1, 694251y^8 - 1, 908288y^{12} - \\
& - 24, 025646y^{16} + 86, 009698y^{20} - 118, 632825y^{24} + 76, 052577y^{28} - \\
& - 19, 013144y^{32}) + x^{12}(-0, 003513 + 0, 069849y^4 - 0, 891185y^8 + \\
& + 3, 015233y^{12} - 3, 654160y^{16} + 1, 461664y^{20}).
\end{aligned}$$

5. Универсальные функции, описывающие связь между двумя системами Фейгенбаума:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) = & 0, 6103456y - 0, 0578582y^2 + 0, 0000007y^3 - 0, 004556y^4 - \\
& - 0, 6103407x - 0, 0000002xy - 0, 000014xy^2 + 0, 0000105xy^4 + \\
& + 0, 0578586x^2 - 0, 0837668x^2y - 0, 0208688x^2y^2 + 0, 0000097x^2y^3 + \\
& + 0, 0005982x^2y^4 + 0, 0000109x^2y^6 + 0, 0837517x^3 + 0, 000011x^3y^2 - \\
& - 0, 0000101x^3y^4 + 0, 0254254x^4 - 0, 0320244x^4y + 0, 0019749x^4y^2 - \\
& - 0, 0000097x^4y^3 - 0, 000095x^4y^4 + 0, 032048x^5 - 0, 0028781x^6 + \\
& + 0, 0057259x^6y - 0, 0000446x^6y - 0, 0057469x^7 + 0, 0001322x^8 - \\
& - 0, 0002811x^8y + 0, 0002906x^9 + 0, 0003007y^6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x, y) = & -1, 0586844y^2 + 0, 0547721y^4 + 0, 004464y^6 - 0, 0005518y^8 + \\
& + 1, 0586824x^2 + 0, 0357628x^2y^2 + 0, 003456x^2y^4 - 0, 0001064x^2y^6 - \\
& - 0, 0905175x^4 + 0, 0351256x^4y^2 - 0, 0010823x^4y^4 - 0, 0430980x^6 - \\
& - 0, 0050244x^6y^2 + 0, 0001013x^6y^4 + 0, 0068283x^8 + 0, 0001738x^8y^2 - \\
& - 0, 0003016x^{10}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильсон К. Дж. // УФН. 1983. Т. 141. N 2. С. 193.
2. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - М.: Мир, 1978. Т. 1. - С. 322.
3. Совещание "Ренормгруппа-86". - Дубна: изд. ОИЯИ, 1987. - 414с.
4. Стенли Х., Конильо А. и др. Критические явления: прошлое, настоящее и будущее. В сб.: Синергетика. - М.: Мир, 1984. - С. 41.
5. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. N 1. P. 25.
6. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. N 6. P. 669.
7. Feigenbaum M. J. // Comm. Math. Phys. 1980. V. 77. N 1. P. 65.
8. Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. N 2. С. 343.
9. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. // УМН. 1984. Т. 39. N 3. С. 3.
10. Jakobson M. V. // Commun. Math. Phys. 1981. V. 81. N1. P. 39.
11. Шарковский А. Н. // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26. N 1. С. 61.
12. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Романенко Ю. Е. Разностные уравнения и их приложения. - Киев: Наукова Думка. 1986. - 280 с.
13. Lanford O. E. III. // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. N 3. P. 427.
14. Franceschini V. J. // J. Stat. Phys. 1980. V. 22. P. 397.
15. Kai T. // Phys. Lett. 1981. V. A86. N 5. P. 263.
16. Testa J., Pere J., Jeffries C. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. N 11. P. 714.
17. Yen W. J., Kao Y. H. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. N 26. P. 1888.
18. Анищенко В. С., Астахов В. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. N 2. С. 169.
19. Libhaber A., Fauve S., Laroche C. // Physica. 1983. V. ZD. P. 73.
20. Xiao-lan Chen, You-gin Wang, Shi-gang Chen. // Solid State Commun. 1984. V. 25. N 1. P. 1.
21. Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П. Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. N 12. С. 2558.
22. ТИИЭР (тематический выпуск "Хаотические системы"). 1987. Т. 75. N 8. С. 4.
23. Collet P., Eckmann J. P., Koch H. // J. Stat. Phys. 1980. V. 25. N 1. P. 1.
24. Chang S. J., Wortis M., Wright J. A. // Phys. Rev. 1981. V. A24. N 5. P. 2669.
25. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. N 3. С. 619.
26. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 7. С. 788.
27. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 4. С. 357.
28. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. V. 1. N 4. P. 839.
29. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В. и др. // ДАН СССР. 1990. Т. 314. N 2. С. 3326.
30. Постон Т., Стварт И. Теория катастроф и ее приложения. - М.: Мир. 1980. - 600 с.
31. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 8. С. 991.
32. Кузнецов С. П. // ЖТФ. 1985. Т. 55. N 9. С. 1830.
33. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. Взаимодействие систем со стохастическим поведением. В кн.: Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. - М.: Наука. 1987. - с. 237.
34. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // ЖТФ. 1990. Т. 60. N 10. С. 19.
35. Fujisaka H., Yamada T. // Progr. Theor. Phys. 1985. V. 74. N 4. P. 917.

36. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 1. С. 49.
37. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 1. С. 37.
38. Кузнецов С. П., Ерастова Е. Н. // ЖТФ. 1991. Т. 61. N 2. С. 13.
39. Kaneko K. // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69. N 5. P. 1427.
40. Froyland J. // Physica. 1983. V. 8D. P. 423.
41. Yuan Jian-Min, Tung Mingwei et al. Phys. Rev. 1983. V.28A. N 3. P. 1662.
42. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. N 5. С. 627.
43. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 3. С. 60.
44. King R., Barchas J.D., Huberman B. Theoretical psychopathology: An application of dynamical system theory to human behaviour. In book: Sinergetics of the Brain. - Springer-Verlag. 1983. P. 352.
45. Hogg T., Huberman B.A. // Phys. Rev. 1984. V.29A. N1. P.275.
46. Buskirk R.V., Jeffrits C. // Phys. Rev. 1985. V. A31. N 5. P. 3332.
47. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. N 5. С. 565.
48. Pikovsky A.S. // Z. Phys. B. 1984. V. 55. P. 149.
49. Metzler W., Beau W. et al. // Z. Naturforsch. 1987. V. 42A. P. 310.
50. Schult R.L., Creamer D.B. et al. // Phys. Rev. 1987. V. A35. N 7. P. 3115.
51. Кузнецов С. П. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 2. С. 94.
52. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Физика. 1984. Т. 27. N 6. С. 87.
53. Kook H., Ling F.N., Schmidt G. Universal behavior of coupled nonlinear systems. Preprint. Stivens Inst. of Technology. 1990. 32 p.
54. Kaneko K. // Physica. 1989. V. D34. N 1-2. P. 1.
55. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 2. С. 142.
56. Keeler J.D., Farmer J.D. // Physica. 1986. V. D23. P. 413.
57. Kaneko K. // Physica. 1989. V. D37. P. 60.
58. Waller I., Kapral R. // Phys. Rev. 1984. V. A30. N4. P.2047.
59. Kaneko K. // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. N 3. P. 480.
60. Crutchfield J.P., Kaneko K. Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos. In book: Directions in Chaos, ed. by Hao Bai-lin, World Scientific Publ. - Co. Singarure, 1987. - P. 272.
61. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 11. С. 1364.
62. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 3. С. 308.
63. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. // Physica. 1986. V.1 9D. N 3. P. 384.
64. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 8. С. 888.
65. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. In "Nonlinear World. Proc. IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics." - Kiev: Naukova Dumka, 1989. V. 2.- P. 383.
66. Kaneko K. Simulating physics with coupled map lattices. In "Formation, Dynamics and Statistics of Patterns", eds. Kaneko K. et al. World Sci., 1990.
67. Анисимова Ю. В., Дмитриев А. С. и др. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 37. N 8. С. 387.
68. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. - М.: Наука, 1989. - 280 с.
69. Анищенко В. С., Постнов Д. Э. // ЖТФ. 1985. Т. 55. N 1. С. 162.

70. Кац В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. №2. С. 161.
71. Vallee R., Delisle C. // Phys.Rev. 1985. V.31A. N 4. P.2390.
72. Ikeda K., Matsumoto K. // Physica.1987. V.29D. N 1-2. P.223.
73. Безручко Б. П., Каменский В. Ю. и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 11. С. 1014.
74. Kaneko K. // Phys. Lett. 1985. V. A111. N 8. P. 321.
75. Арансон И. С., Рабинович М. И. Ренормгрупповое описание пространственного развития турбулентности. В кн. Совещание "Ренормгруппа-86". - Дубна: Изд. ОИЯИ, 1987. - С. 169.
76. Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. // Physica. 1988. V. D33. P. 1.
77. Афраимович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 9. С. 1050.
78. Анищенко В. С., Арансон И. С., и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. N 5. С. 1120.
79. Kaneko K. // Physica. 1986. V. 23D. P. 436.
80. Kapral R. // Phys.Rev. 1985. V. A31. N 6. P. 3868.
81. Oppo G.-L., Kapral R. // Phys.Rev. 1986. V. 33. N 6. P.4219.
82. Bohr T., Christensen O.B. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. N 20. P. 2161.
83. Kaneko K. // Phys.Rev.Lett. 1989. V. 63. N 3. P. 219.
84. Kaneko K. // Physica. 1990. V. 41D.

Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
1 июля 1991 г.

CRITICAL DYNAMICS OF COUPLED MAP LATTICES
AT THE ONSET OF CHAOS

Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P.

The review of recent works is presented, covering the field of coupled map lattice approach to the extended systems complex dynamics, the lattice being constructed of the elements demonstrating period doubling scenario of transition to chaos. The systems are considered in increasing complexity order beginning with the individual Feigenbaum's system, then the system of two elements with uni- and bidirectional coupling, one- and two-dimensional lattice models with nearest-neighbour coupling and, finally, the nets in which each element is coupled with all other. All above mentioned classes are discussed in the framework of critical phenomena theory, renormalization group approach, universality and scaling concepts.

УДК 538.561

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ИМПУЛЬС В МИКРОВОЛНОВОМ ДИАПАЗОНЕ, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ АСИММЕТРИЧНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ИСТОЧНИКОМ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ

В. Э. Федоров

Рассмотрено когерентное микроволновое излучение, генерируемое в воздухе при действии нестационарного асимметричного источника гамма-излучения малой интенсивности. Получена зависимость спектральной мощности микроволнового излучения от частоты и характеристик γ -источника.

В ряде работ, например в [1 - 4], рассматривался радиоимпульс, генерируемый в воздушной среде при действии источника длиннопребоежного излучения в результате возникновения асимметричной токовой системы. Было выявлено, что максимум спектральной интенсивности приходится на диапазон частот $\Delta\nu \sim 10 + 100$ кГц. Однако микроволновая область генерируемого радиоизлучения также представляет интерес.

Генерация электромагнитного излучения обусловлена появлением в окружающей источник гамма-квантов среде тока комптоновских электронов отдачи, причем за когерентную часть возникающего излучения (электромагнитный импульс) ответствен усредненный ток, в то время как шумовое излучение создается, кроме того, флуктуациями тока электронов и не зависит от наличия асимметрии.

В данной работе обсуждается комптоновский механизм генерации высокочастотной составляющей электромагнитного импульса, обусловленного током быстрых электронов, вызываемым гамма-излучением точечного нестационарного источника.

Как и в [1, 2], предположим, что источник γ -квантов имеет малую асимметрию вылета. Под действием выбитых быстрых комптоновских электронов отдачи происходит ионизация среды, причем процесс ионизации среды в данной точке отстает по времени от момента прохождения фронта γ -импульса примерно на время торможения быстрого электрона (~ 10 нс) [5]. Число вторичных электронов, возникающих при торможении даже мгновенного импульса быстрых электронов, согласно данным [6], возрастает со временем по линейному закону в течение примерно 10 нс для электронов с энергией ~ 1 МэВ. Вторичные электроны термализуются и прилипают к молекулам кислорода, образуя отрицательные ионы, примерно со скоростью $\gamma_e = 1,1 \cdot 10^8$ с⁻¹.

Так как комптоновские электроны в среднем смещаются в радиальном направлении, в образующемся радиальном электрическом поле разделения зарядов создается ток проводимости $\sigma \vec{E}$, направленный встречно основному току комптоновских электронов \vec{j}_k . Характерное время нарастания тока проводимости, ограничивающий результирующий излучающий ток, таким образом, также превышает 10 нс.

При наличии асимметрии нестационарная результирующая токовая система генерирует радиоимпульс. Решение задачи расчета параметров сигнала в общем случае сводится к численному решению полной системы уравнений Максвелла [1 - 4].

В данной работе ограничимся рассмотрением неинтенсивных источников, когда для микроволнового диапазона выполняется условие $4\pi\sigma/\omega \ll 1$. В этом случае можно пренебречь ослаблением электромагнитного импульса в высокочастотной области при распространении в проводящей области. Анализ характерных времен процессов показывает, что при оценке величины сигнала следует принимать во внимание лишь комптоновский ток. Таким образом, задача сводится к определению запаздывающего векторного потенциала, а по нему и электромагнитного поля.

Направим ось x декартовой системы координат вдоль направления асимметрии вылета γ -квантов. В этом случае для точки наблюдения, выбранной на большом расстоянии от источника в направлении, перпендикулярном оси x , с учетом запаздывания поле E_x определяется формулой

$$E_x = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_t} \frac{j_x(\vec{r}', t-r/c-r'/c)}{r'} dV', \quad (1)$$

где r' - расстояние от элемента объема dV' до точки наблюдения, V_t - область, в которой задан ток j_x ; размер этой области увеличивается со скоростью света c . В случае малой асимметрии вылета асимметричный ток j_x выражается через радиальный ток комптоновских электронов j_k соотношением [1, 2]

$$j_x = \xi j_k \frac{x^2}{r^2}, \quad (2)$$

где ξ - параметр асимметрии ($\xi \ll 1$).

Радиальный ток комптоновских электронов j_k зависит от активности источника γ -квантов. Полагая, что комптоновские электроны в среднем движутся радиально от центра, имея среднюю скорость v и проходя расстояние l , исчезают, получаем следующее выражение для j_k :

$$j_k = \frac{evN}{4\pi r^2 \lambda} \int_{t-1/v}^t dt' f\left(t' - \frac{(r-(t-t')v)}{c}\right) \exp\left(-\frac{r-v(t-t')}{\lambda}\right), \quad (3)$$

где N - полное число испущенных γ -квантов, $f(t)$ - временная зависимость их интенсивности, нормированная на единицу ($\int_0^\infty f(t) dt = 1$),

λ - длина пробега γ -излучения ($\lambda \approx 3 \cdot 10^2$ м), r - расстояние до точечного источника, $r \leq ct$. Выражение (3) учитывает запаздывание и ослабление потока γ -квантов при распространении. Вкладом рассеянных γ -квантов пренебрегается.

С целью упрощения расчетов временную зависимость интенсивности

γ -источника аппроксимируем экспонентой

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad (4)$$

где $\alpha \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$.

Имея в виду, что в точку наблюдения в момент времени t достигает излучение из областей, удовлетворяющих условию $ct \geq r + r'$, вычисление интеграла (1) проведем с использованием координат вытянутого эллипсоида вращения, фокусами которого являются источник и точка наблюдения:

$$\begin{aligned} x &= (R/2) \operatorname{sh} u \sin v \cos \varphi, & 0 \leq u \leq \infty, \\ y &= (R/2) \operatorname{sh} u \sin v \sin \varphi, & 0 \leq v \leq 2\pi, \\ z &= (R/2) \operatorname{ch} u \cos v, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (5)$$

где R - расстояние между источником и точкой наблюдения.

С учетом (2) - (4) интеграл (1) при подстановке (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\pi A \xi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^{ct/R} dq e^{-\alpha t} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{\exp\left(\frac{\alpha R q}{c} - \frac{R}{2\lambda}(p+q)\right) (q^2-1)(1-p^2) dp}{(q+p)^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $A = \xi_1 e v N / 4\pi\lambda$, $p = \cos v$, $q = \operatorname{ch} u$, ξ_1 - коэффициент, появляющийся при интегрировании (3) с учетом (4).

Переходя к безразмерным переменным и вводя обозначения $c/2\alpha\lambda = \beta$, $t_0 = t - R/c$, $\alpha t_0 = \tau$, $R/2\lambda = \rho$, интегрируем (6) и с учетом $\rho \gg 1$ получаем

$$\begin{aligned} E_x(\tau, \rho) &= - \frac{2\pi A \xi \alpha}{\rho c^2} [e^{-\tau}(\beta + 2(1-\beta^2)\beta^2 \ln[1/\beta - 1] - 2\beta^2) + \\ &+ 2\beta^2 e^{-\beta\tau} + E_1(-\beta\tau) 2\beta(\beta\tau + 1 - \beta) - e^{-\tau} E_1((1-\beta)\tau) 2\beta^2(1-\beta)]. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (7) мощность источника электромагнитного излучения определяется формулой $P = \frac{c}{4\pi} \int E_x^2 \sin^2\theta R^2 d\Omega$, спектральная мощность P_ν находится с помощью Фурье-преобразования.

При выбранных значениях α параметр $\beta \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \ll 1$. При $\beta \ll 1$ для максимальной спектральной мощности P_ν получена в результате

оценка

$$P_{\nu} = \frac{1}{3} \frac{e^2}{\lambda} \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \frac{(1 - 2\beta \ln\beta)^2}{1 + \omega^2} \beta \xi_1^2 \xi^2 N^2,$$

где $\omega = 2\pi\nu/\alpha$. Если принять $\nu \approx 10$ ГГц, $\xi = 0,1$, то $P_{\nu} = 1,1 \cdot 10^{-40} N^2$, Вт/Гц.

Таким образом, при наличии асимметрии в возникающей токовой системе возможна генерация электромагнитного импульса и в микроволновом диапазоне. Длительность импульса порядка 10^{-8} с, излучение поляризовано. Интенсивность пропорциональна квадрату числа испущенных γ -квантов и существенно зависит от степени асимметрии γ -источника. Отметим, однако, что полученные результаты справедливы для малоинтенсивных источников γ -квантов.

В микроволновой области уменьшение интенсивности электромагнитного импульса с ростом частоты происходит по степенному закону, в то время как в более высокочастотной области интенсивность уменьшается по экспоненте [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Компанец А. С. //ЖЭТФ. 1958. Т.35. N 6. С. 1538.
2. Gilinsky V. //Phys. Rev. 1965. V. 137. N 1A. P. 50.
3. Виленская Г. Г., Ищенко В. С., Медведев Ю. А. и др. //ПМТФ. 1975. N 3. С. 18.
4. Арсенин Б. Я., Думова А. А. и др. //ЖВММФ. 1981. Т.21. N 2.С.423.
5. Жемерев А. В., Степанов Б. М. Поле гамма-излучения от источника нейтронов в воздухе. - М.: Энергоиздат, 1987. - 224 с.
6. Вагин Ю. П., Сталь Н. П., Хохлов В. Д., Черноярский А. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. N 6. С. 720.
7. Аббасов И. И., Болотовский Б. М., Давыдов В. А. //УФН. 1986. Т. 149. Вып. 4. С. 709.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
31 июля 1990 г.

THE MICROWAVE ELECTROMAGNETIC PULSE FROM ASYMMETRICAL NONSTATIONARY GAMMA SOURCE

V. F. Fedorov

The coherent microwave radiation emitted in air from nonstationary asymmetrical nonintensive gamma source is discussed. The dependence of spectral microwave radiated power on the frequency and characteristics of the gamma source is obtained.

УДК 523.164.32:621.396.24

СВЯЗЬ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ВАРИАЦИЙ ПОЛОЖЕНИИ СОЛНЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ВСПЛЕСКОВ III ТИПА С ИОНОСФЕРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Э. П. Абранин, Л. Л. Базелян, В. С. Белей, А. В. Колосков, Я. Г. Цибко, Ю. М. Ямпольский

Рассмотрены часто наблюдаемые на декаметровых волнах квазипериодические вариации видимых положений всплесков III типа солнечного радиоизлучения. Показано, что они могут быть связаны с распространением на ионосферных высотах волновых возмущений. Оценены значения параметров возмущений исходя из соответствия расчетных и наблюдаемых вариаций положений источников всплесков. Даны методические рекомендации по измерению их координат.

В РИАН УССР ведутся многолетние систематические измерения, наряду с другими параметрами, координат источников декаметрового спорадического излучения Солнца. Для этой цели используется двухмерный радиогелиограф [1], который был создан на базе антенной системы радиотелескопа УТР-2 [2]. Он измеряет угловые координаты источников с погрешностью 9' на частоте $f_1 = 16,7$ МГц и 6' - на $f_2 = 25$ МГц.

Анализ результатов позиционных измерений шумовых бурь показывает, что в течение одного сеанса наблюдений (± 3 часа относительно полудня) обычно наблюдаются быстрые случайные флуктуации видимых координат источников в пределах ошибок измерений. Кроме этого, сравнительно часто в утренние часы им предшествуют медленные квазипериодические (с периодом в несколько десятков минут) изменения видимых координат, достигающие несколько десятков угловых минут. Вскоре после полудня они, как правило, почти полностью затухают. На рис. 1 а, б приведены типовые зависимости вариаций азимута $\Delta\varphi(t)$ и угла места $\Delta\varepsilon(t)$ источника бури всплесков типа III, измеренные 8 августа 1987 г., на частотах 16,7 МГц (сплошная кривая) и 25 МГц (пунктирная кривая). Величины $\Delta\varphi$ и $\Delta\varepsilon$ отсчитываются относительно центра диска Солнца. В это время, как следует из оптических данных, на солнечном диске находилось несколько групп пятен [3]. Из

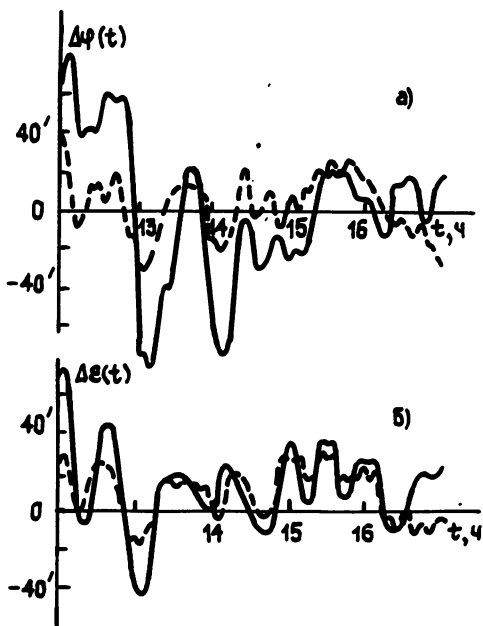


Рис. 1.

выполненного нами отождествления источника излучения с активными областями на диске следует, что за бурь всплесков III типа, которая наблюдалась с 6 по 11 августа 1981 г., ответственны наиболее обширные группы пятен 775, 776 и 777. 8 августа они находились вблизи центрального меридиана. Анализ приведенных в [3] их данных как в оптике, так и в различных радиодиапазонах не выявил каких-либо аномальных событий, происходивших в солнечной короне. Это обстоятельство в совокупности с тем, что квазипериодические вариации фиксируются преимущественно в утренние часы местного времени, позволяет отвергнуть предположение о их солнечном происхождении и обратиться к околоземной плазме. В пользу этого также свидетельствуют выводы, которые следуют из спектрального и статистического анализа позиционных измерений:

во-первых, обращает на себя внимание высокая статистическая связь флуктуаций угла места и азимута (максимальные значения коэффициентов взаимной корреляции для первой частоты f_1 составляют

$$k_{\varepsilon\varphi} \sim 0,7, \text{ для второй } - k_{\varepsilon\varphi} \sim 0,75);$$

во-вторых, отношение стандартов флуктуаций азимутов и углов места обратно пропорционально квадрату отношения частот;

в-третьих, энергетические спектры вариаций $\Delta\varepsilon(t)$ и $\Delta\varphi(t)$ носят узкополосный характер.

Отметим, что подобные флуктуации видимого положения источника наблюдались и ранее в длинноволновой части метрового диапазона [4]. Хотя авторы [4] также связывали этот эффект с земной ионосферой, до сих пор ему не было найдено адекватного объяснения.

На наш взгляд, причиной такого явления могут являться волновые возмущения (ВВ) околоземной плазмы, распространяющиеся на ионосферных высотах [5] и просвечиваемые солнечным радиоизлучением. Сформулируем задачу о радиопросвечивании плавно неоднородной ионосферы в следующей постановке. Волна от точечного источника, расположенного в солнечной короне, падает на плоскостойкий параболический ионосферный слой $N_0^0(z)$, в котором параллельно поверхности Земли распространяется возмущение электронной концентрации $\nu(\vec{\rho})$ в виде волны плотности. При этом распределение электронной плотности слоя задавалось в виде

$$N(z, \vec{\rho}) = N_0^0(z) [1 - \nu(\vec{\rho})]; \quad (1)$$

$$\nu(\vec{\rho}) = \delta \sin\{\kappa[(x \cos \theta + y \sin \theta)] - Vt\} + \Psi_0, \quad (2)$$

где $\vec{\rho} = \{x, y\}$, δ - амплитуда возмущения, $\kappa = 2\pi/\Lambda$, Λ - характерная длина волны ВВ, V - скорость движения, Ψ_0 - начальная фаза, t - время, θ - угол, отсчитываемый по часовой стрелке, между направлением на юг и направлением движения неоднородностей.

Будем рассматривать крупномасштабные волновые процессы, тип которых определен в околоземной плазме как перемещающиеся ионосферные возмущения (ПИБ) [5]. При малой интенсивности неоднородностей $\delta^2 \ll 1$ (реально на высотах F-области наблюдаются характерные ПИБ с амплитудой несколько процентов) они обладают большой протяженностью (Λ - от десятков до тысяч километров) и распространяются на значительные расстояния, практически не меняя форму и ориентацию. Такое ограничение класса рассматриваемых неоднородностей позволяет решать задачу

радиопросвечивания в геометрической постановке. Действительно, размер зоны Френеля в декаметровом диапазоне волн на ионосферных высотах не превышает единиц километров, т.е. значительно меньше характерных масштабов ПИБ.

Для нахождения поля на поверхности Земли в точке наблюдения M (приемник расположен в начале декартовой системы координат) был использован принцип Гюйгенса - Френеля, в соответствии с которым, зная амплитудно-фазовое распределение на некоторой поверхности, можно рассчитать характеристики излучения в точке наблюдения. В качестве такой поверхности удобно задать плоскость $z = z_H$, расположенную на высоте начала ионосферного слоя. Тем самым задача сводится к вычислению интеграла Кирхгофа, оценка которого была проведена нами известным методом стационарной фазы. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные выражения искомого вариаций углов прихода (УП) $\Delta \varepsilon$ и $\Delta \varphi$ в первом приближении метода возмущения для эйконала:

$$\Delta \varepsilon = - \frac{C(\partial v / \partial \xi)}{1 - CR_0(\partial^2 v / \partial \xi^2)} \sin \varepsilon_0 \cos(\theta - \varphi_0); \quad (3)$$

$$\Delta \varphi = \frac{C(\partial v / \partial \xi)}{1 - CR_0(\partial^2 v / \partial \xi^2)} \frac{\sin(\theta - \varphi_0)}{\cos \varepsilon_0}, \quad (4)$$

$C = (3/4)(y_m \alpha^2 / \sin \varepsilon_0)$, $R_0 = z_H / \sin \varepsilon_0$ - расстояние от наблюдателя (точка M) до точки стационарной фазы с координатами $\{x_0, y_0, z_H\}$, y_m - полутолщина ионосферного слоя, ξ - координата вдоль направления движения ПИБ, $\alpha = f_c / f$, f_c - критическая частота в максимуме слоя, f - рабочая частота, ε_0 , φ_0 - угловые координаты центра солнечного диска.

Выражения (3), (4) были использованы для численного моделирования задачи просвечивания неоднородной ионосферы. Параметры регулярного ионосферного слоя задавались следующими: высота максимума ионосферного слоя $z_m = 300$ км, $y_m = 100$ км, $f_c = 4; 8$ МГц.

Характеристики ПИБ выбирались в соответствии с данными [5, 6]: масштаб вариаций Λ от 150 до 300 км, амплитуда возмущений $\delta = 1 - 8\%$, скорость движения ПИБ $v = 50 - 100$ м/с, угол θ , определяющий направление перемещения ПИБ,

задавался дискретно от нуля до 360° через каждые 45° . Наилучшее соответствие наблюдаемым вариациям $\Delta \varepsilon(t)$ и $\Delta \varphi(t)$ было получено для следующих параметров ПИБ: $\Lambda = 195$ км, $\delta = 1,7\%$, $\theta = 45^\circ$, $v = 100$ м/с, $f_c = 8$ МГц. На рис. 2 а, б

приведены рассчитанные зависимости $\Delta \varepsilon(t)$ и $\Delta \varphi(t)$. Видно, что флуктуации УП носят квазиперио-

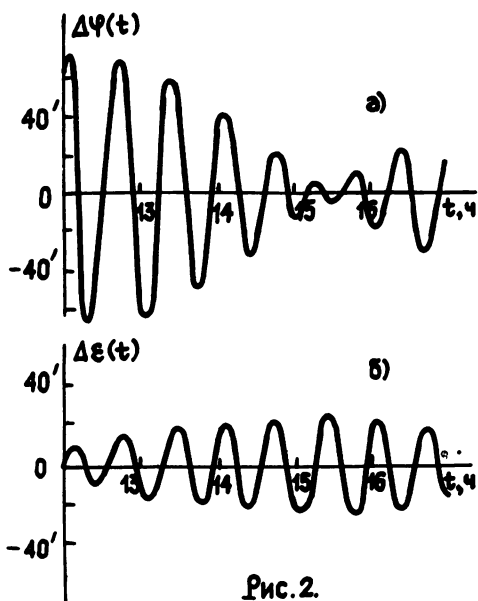


Рис. 2.

дический характер с медленным изменением огибающих, которые, как следует из (3), (4), определяются регулярной временной зависимостью положения центра солнечного диска $\varepsilon_0(t)$, $\varphi_0(t)$ и величиной угла θ . Анализ поведения огибающих и характера изменения периода вариаций (убывание, возрастание) позволяют определить угол θ (т.е. направление движения ПИБ). Для рассмотренного сеанса наблюдений 8 августа 1981 г. оценки θ дают величину $35^\circ \pm 10^\circ$.

В заключение отметим, что качественное соответствие наблюдаемых в эксперименте и расчетных вариаций УП (изменения огибающих и периодов, зависимость амплитуд флуктуаций от рабочей частоты и т.д.) свидетельствует в пользу адекватности выбранной модели. Кроме того, путем перебора параметров задачи удается получить численные оценки ряда характеристик волновых возмущений. Найденные таким способом значения соответствуют известным из литературы [5 - 7]. Что касается измерения на длинных волнах координат источников солнечных всплесков любых типов, то настоящая работа позволяет высказать некоторые методические соображения. Квазипериодический характер зависимости видимых координат источников всплесков от времени, вероятно, имеет ионосферное, а не солнечное происхождение. При такой зависимости для определения истинных координат относительно стабильных источников длительных бурь всплесков необходимо усреднение многократных измерений в течение времени порядка периода их изменения. Измерения положений источников, прежде всего одиночных всплесков и их групп, желательно производить после полудня, когда влияние ПИБ сказывается меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abranin E.P., Zaslavyan L.L., Goncharov N.Yu. et al. // Solar Physics. 1980. V. 66. P. 393.
2. Брауде С. Я., Мень А. В., Содин Л. Г. Радиотелескоп декаметрового диапазона УТР-2/Антенны/Под ред. А. А. Пистолькорса. - М:Связь, 1980. Вып. 26. С. 3.
3. Solar-Geophysical Data, N 446 - Part 1, October 1981.
4. Wild J.P., Sheridan K.V., Neylan A.A. // Austr. J. Phys. 1959. V.12. N 3. P.369.
5. Волновые возмущения в ионосфере /Под ред. Дробжева В. И. - Алма-Ата: Наука, 1975.
6. Сомсиков В. М. Солнечный терминатор и динамика атмосферы. - Алма-Ата: Наука, 1983.
7. Васильев К. Н., Дробжев В. И., Гордиенко Г. И. и др. Измерение объемных характеристик среднemasштабных волновых возмущений в ионосфере/Ионосфера и солнечно-земные связи. - Алма-Ата: Наука, 1977. С.3.

THE QUASIPERIODICAL VARIATIONS OF VISIBLE POSITIONS OF TYPE
III BURSTS OF SOLAR RADIATION SOURCES AND THEIR CONNECTION WITH
IONOSPHERIC DISTURBANCES

*E. P. Abraniñ, L. L. Baselyan, V. S. Beley, A. V. Koloskov,
Ya. G. Tsibko, Yu. M. Jampolskij*

Frequent quasiperiodical variations of solar radiation type III bursts positions in decametric wave band are considered. It is shown that variations can be connected with ionospheric wave disturbances. The disturbance parameters are evaluated by comparing theoretical and practical burst source positions. Methodical recommendations for coordinate measurements are given.

УДК 535.42

О КЛАССИФИКАЦИИ МЕХАНИЗМОВ УСИЛЕНИЯ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Л. А. Апресян

Дается классификация основных известных механизмов усиления обратного рассеяния, которые разделяются на одночастичные и коллективные, состоящие, в свою очередь, из геометрических механизмов и механизмов, связанных с фазовой когерентностью. Вводится различие динамических механизмов, проявляющихся почти в каждой реализации, и статистических, наблюдаемых лишь после усреднения.

1. Как известно, при рассеянии излучения в случайно-неоднородных средах в направлении на источник возникают специфические эффекты, приводящие к росту интенсивности обратного рассеяния (ОР) относительно других углов наблюдения [1]*. Эти эффекты присущи настолько широкому классу задач, что могут считаться в известном смысле универсальными, и если наблюдаются они далеко не во всех ситуациях, то это связано, как правило, с недостаточной тонкостью экспериментов. В настоящее время такие эффекты привлекают большое внимание в астрономии [2], в оптике турбулентных [3] и мутных [4] сред, при лазерном зондировании верхнего слоя океана [5], в физике твердого тела [6] и при описании зондирования ионами поверхностных слоев вещества [7]. Разнообразие указанных приложений связано с тем, что эффекты усиления ОР наблюдаются как для волн различной природы, так и для квантовых частиц, и могут вызываться разными механизмами. В конечном итоге большинство этих механизмов обусловлено двукратным прохождением волн через одни и те же неоднородности среды, однако детали их проявлений могут настолько различаться, что часто бывает разумней говорить о нескольких механизмах, чем о форме одного единственного эффекта.

В литературе механизмы усиления ОР обычно рассматривали независимо и без указания различий между ними. Это привело, с одной стороны, к неоднократному "переоткрыванию" эффектов усиления ОР в разных областях физики, а с другой - к неоправданному отождествлению сходных, но неодинаковых механизмов. В данной работе мы дадим простую качественную классификацию основных физических механизмов усиления ОР, позволяющую более четко представить общую картину (ранее попытки менее полной классификации делались в [8, 9]). При этом мы не ставим целью подробное описание каких-либо конкретных проявлений усиления ОР и обзор литературы, поскольку для каждого из механизмов это потребует отдельного обзора гораздо большего объема. Кроме того, для определенности мы будем иметь в виду рассеяние электромагнитного излучения, хотя общие соображения сохраняются и для других случаев.

* Во избежание недоразумений подчеркнем, что термин "усиление ОР" ниже понимается именно в этом смысле, т. е. как наличие пика для направления ОР при произвольном направлении падающей волны. Возможны и другие определения понятия "усиление".

2. Прежде всего, эффекты усиления ОР можно разделить по числу рассеивающих частиц (или - для непрерывных сред - неоднородностей среды) на одночастичные и коллективные. Первые из них наблюдаются уже для уединенного рассеивателя и связаны с наличием максимума для направления рассеяния "назад" у соответствующей индикатрисы рассеяния, тогда как вторые характерны для ансамблей рассеивателей. Такое деление, конечно, довольно условно, но оно является физически оправданным в той же мере, в которой вообще оправдано выделение в неоднородной среде отдельных рассеивателей, допускающих относительно простое (в исключительных случаях - точное) математическое описание. Рассеиватели сложной структуры часто удобнее сами рассматривать как подсистемы, которые состоят из простых рассеивателей и могут реализовывать коллективные механизмы усиления.

С точки зрения общей теории многократного рассеяния, в которой характеристики составляющих среду отдельных рассеивателей считаются известными, одночастичные эффекты усиления тривиальны и, видимо, довольно распространены, поскольку индикатрисой с выраженным максимумом для направления рассеяния "назад" могут обладать рассеиватели разной физической природы; в качестве примеров достаточно указать угольковые отражатели и однородные рассеивающие шары (нетривиальным здесь остается вопрос о физической причине возникновения указанного максимума: этой причиной может быть, в частности, двукратное прохождение излучения через неоднородную внутренность рассеивателя).

При одночастичном механизме усиление ОР обусловлено однократным рассеянием, причем с ростом вклада от многократного рассеяния оно будет уменьшаться, так как для актов рассеяния высокой кратности форма индикатрисы одиночного рассеивателя уже не так существенна. С другой стороны, увеличение поглощения в среде одновременно с уменьшением интенсивности рассеянного сигнала уменьшает и роль многократного рассеяния, что приводит к росту усиления.

Для одночастичного механизма величина максимума в направлении "назад" (фактор усиления γ) не имеет какого-либо характерного значения и определяется видом индикатрисы, а угол усиления вблизи направления обратного рассеяния ϑ_{yc} зависит от формы индикатрисы и по порядку величины связан с размером рассеивающей частицы a соотношением $\vartheta_{yc} \sim \lambda/a$. При этом ϑ_{yc} не зависит от межчастичного расстояния.

Наличие у индикатрисы рассеяния максимума для направления "назад" при произвольном направлении падающей волны подразумевает в некотором смысле изотропность рассеивателей. Однако в случае рассеяния на свободно ориентируемых частицах достаточно наличия такого максимума у диаграммы, усредненной по ориентациям рассеивателей. При этом максимум для направления рассеяния назад может наблюдаться как для больших, так и для малых по сравнению с длиной волны рассеивателей (в качестве примера последних можно указать малые шары с большой диэлектрической проницаемостью и нерэлеевской диаграммой).

Еще одной характерной чертой одночастичного усиления может служить зависимость от поляризации, которая полностью определяется свойствами элементарного акта рассеяния. Так, например, в случае рассеивающих шаров, когда деполяризация при ОР целиком обусловлена многократным рассеянием, эффект усиления в деполяризованной компоненте отсутствует. Наконец, одночастичное усиление мало чувствительно к фазе падающей волны и, как следствие, к нестационарности, связанной с относительным движением рассеивателей при неизменности их внутренних параметров, а также к явлениям,

нарушающим теорему взаимности (например, к гиротропии среды).

3. При изучении эффектов усиления ОР в случайно-неоднородных средах полезно различать динамическое и статистическое усиление. Динамическим мы назовем такое усиление, при котором максимум для ОР наблюдается почти в каждой реализации рассеянного сигнала, в отличие от статистического усиления, проявляющегося после статистического усреднения. Статистическое усиление является более слабым понятием, чем динамическое, поскольку динамическое усиление с необходимостью является статистическим, но не наоборот.

На первый взгляд понятие динамического усиления может показаться несколько искусственным, однако четкое различие статистического и динамического механизмов может стимулировать постановку новых экспериментов, связанных с регистрацией информативных параметров отдельных реализаций. Так, например, статистическое усиление может проявляться на фоне пятенных структур типа спеклов в отсутствие заметного динамического усиления. В этом случае индикатриса отраженного излучения вблизи направления обратного рассеяния имеет ряд чередующихся максимумов и минимумов, причем максимум в направлении обратного рассеяния имеется почти в каждой реализации, что и приводит к возникновению аналогичного максимума у средней индикатрисы. Примеры механизмов статистического усиления будут рассмотрены ниже.

4. Коллективные механизмы усиления ОР менее очевидны, чем одночастичные. Их можно разделить на две основные группы, а именно: на геометрические механизмы (называемые иногда "некогерентными") и на фазовые механизмы (или "когерентные", впрочем, терминология здесь пока еще не установилась - иногда термин "когерентные" относят ко всем механизмам усиления ОР; в физике твердого тела фазовые механизмы известны также под названием слабой локализации). К геометрическим мы отнесем механизмы усиления, мало чувствительные к фазе волны и обусловленные главным образом изменениями интенсивностей из-за искажений конфигурации лучей при распространении в неоднородных средах, тогда как под фазовыми будем понимать известные эффекты усиления, вызванные вкладом от так называемых циклических или веерных диаграмм [10], и связанные с одинаковостью фаз для волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях. В случае геометрических эффектов влияние среды естественно описывается дополнительными множителями, поэтому их можно назвать также мультипликативными.

Несмотря на сходную природу - все эти эффекты обусловлены двукратным прохождением излучения через одни и те же неоднородности - геометрические и фазовые механизмы качественно различны. Действительно, в первом случае, как это станет более ясно из дальнейшего, речь идет о двукратном прохождении через одиночные неоднородности, тогда как во втором - через несколько ($N \geq 2$) разных неоднородностей рассеивающей среды. Остановимся подробнее на деталях указанных механизмов.

Характерная для наблюдения геометрических эффектов усиления схема эксперимента показана на рис. 1. Падающая волна распространяется в рассеивающей среде от излучателя i и регистрируется приемником p после отражения от препятствия, в качестве которого мы для определенности выберем слой Σ мелкомасштабных рассеивателей, характеризуемых распределением сечения рассеяния $\sigma(\vec{r}, \vec{n}, \vec{n}_0)$ - эта схема охватывает также случай однократного рассеяния в среде с произвольными рассеивателями и случай одиночного рассеивателя, когда $\sigma(\vec{r}, \vec{n}, \vec{n}_0) \sim \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Принимаемая мощность с точностью до множителя имеет вид

$$P \sim \iiint_{\Sigma} I^-(\vec{r}, \vec{n}) \sigma(\vec{r}, \vec{n}, \vec{n}_0) I^+(\vec{r}, \vec{n}_0) d\vec{r} d\vec{n} d\vec{n}_0. \quad (1)$$

Здесь в качестве I^+ и I^- фигурируют, соответственно, распределения яркостей вблизи плоскости рассеивателей Σ для падающего пучка и "пучка наблюдения", описывающего диаграмму направленности приемного устройства. Таким образом, (1) описывает пересечение диаграмм направленности излучателя (I^+) и приемника (I^-) на плоскости рассеивателей Σ .

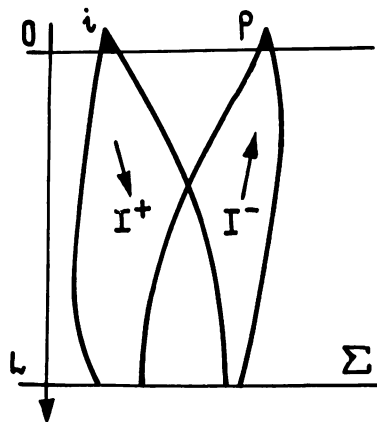


Рис. 1.

Для однородного слоя Σ мелкомасштабных рассеивателей с изотропной диаграммой $\sigma(\vec{r}, \vec{n}, \vec{n}_0) = \sigma$ и (1) упрощается:

$$P \sim \sigma \int_{\Sigma} I^+(\vec{r}) I^-(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2)$$

где

$$I^{\pm}(\vec{r}) = \int I^{\pm}(\vec{r}, \vec{n}) d\vec{n} \quad (3)$$

- распределения полных интенсивностей по плоскости отражения Σ .

Соотношения (1)-(3) позволяют получить количественное описание и дать простое качественное объяснение эффектов усиления [1, 3]: формально причиной усиления является то, что для совмещенного приема $I^+ = I^- = I$, так что принимаемая мощность P пропорциональна интегралу от квадрата интенсивности I^2 , т.е. от четвертой степени амплитуды поля падающей на плоскость Σ волны. В результате в среднем по ансамблю в (2) входит $\langle I^+ I^- \rangle = \langle I^2 \rangle$, тогда как для разнесенного приема $\langle I^+ I^- \rangle \approx \langle I^+ \rangle \langle I^- \rangle = \langle I \rangle^2$; так как в силу известного неравенства $\langle I^2 \rangle \geq \langle I \rangle^2$ имеет место усиление (в среднем) обратного

рассеяния по сравнению с рассеянием "вбок". Величина такого усиления тем больше, чем сильнее флуктуации интенсивности I вблизи рассеивателей Σ .

Данное объяснение пригодно для всех статистических механизмов усиления с однократным отражением назад, однако оно ничего не говорит о физике и не позволяет выделить динамические механизмы усиления. Рассмотрим подробнее детали механизмов усиления.

Геометрические механизмы усиления ОР можно, в свою очередь, разделить на три группы: "фокусирующие" (т.е. связанные с фокусировками), теневые и эффекты типа автоадаптивности. Первые из них обусловлены изменениями сечения лучевой трубки при прохождении излучения через крупномасштабные "фазовые" неоднородности, действующие как линзы, тогда как последние не зависят от этих изменений, причем в общем случае все механизмы работают совместно.

Остановимся сначала на "фокусирующем" усилении. Если рассмотреть прохождение узкого пучка через одиночную фазовую неоднородность, действующую как слабая фокусирующая или дефокусирующая линза, то для фактора усиления γ , оценивающего влияние такой неоднородности, можно получить простую оценку:

$$\gamma \sim \frac{\Sigma_0}{\Sigma_0 + \delta\Sigma} \sim 1 - \frac{\delta\Sigma}{\Sigma} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\Sigma}\right)^2, \quad (4)$$

где Σ_0 и $\Sigma_0 + \delta\Sigma$ - поперечные сечения пучка в области отражения в отсутствие и при наличии неоднородности соответственно. В зависимости от знака случайной величины $\delta\Sigma$ ($\langle \delta\Sigma \rangle = 0$) фактор усиления γ может быть как больше, так и меньше единицы, однако в среднем по ансамблю действие фокусирующих неоднородностей преобладает:

$$\langle \gamma \rangle \sim 1 + \langle (\delta\Sigma/\Sigma_0)^2 \rangle > 1. \quad (5)$$

Отсюда видно, что фокусирующий механизм в указанном выше смысле является, вообще говоря, статистическим. В области сильных фокусировок величина $\Sigma_0 + \delta\Sigma$ мала, $\Sigma_0 + \delta\Sigma \ll \Sigma_0$, и ограничивается дифракционными эффектами, так что фактор усиления $\langle \gamma \rangle$ может сильно превосходить единицу. Такие сильные эффекты усиления могут наблюдаться, например, в области фокусировок за фазовыми экранами, где $\gamma \sim \ln \sigma_\psi$, σ_ψ - дисперсия случайной фазы за экраном (в частности, за случайной преломляющей границей раздела двух сред, как это имеет место при лазерном зондировании верхнего слоя океана [5]).

Действие механизма автоадаптивности поясняется на рис. 2. В этом случае усиление обратного рассеяния вызвано тем, что при совмещенном приеме "пучок источника" (I^+) и "пучок наблюдения" (I^-) распространяются через одни и те же неоднородности и полностью совпадают, так что среда как бы автоматически подстраивается под преломленный луч (именно в этом смысле использован термин "автоадаптивность" [12]), тогда как для разнесенного приема они могут перекрываться лишь частично, в результате чего интеграл перекрытия (2) оказывается меньше. Другими словами, при совмещенном приеме наблюдатель видит лишь освещенные рассеиватели, тогда как при разнесенном в поле зрения попадают и неосвещенные участки.

Очевидно, что механизм автоадаптивности проявляется в каждой отдельной реализации и в этом смысле является динамическим. Вместе с

тем, поскольку автоадаптивность наблюдается для преломляющих ("фазовых") неоднородностей, она всегда сопровождается фокусирующим усилением, так что суммарный наблюдаемый эффект может проявляться и как чисто статистический.

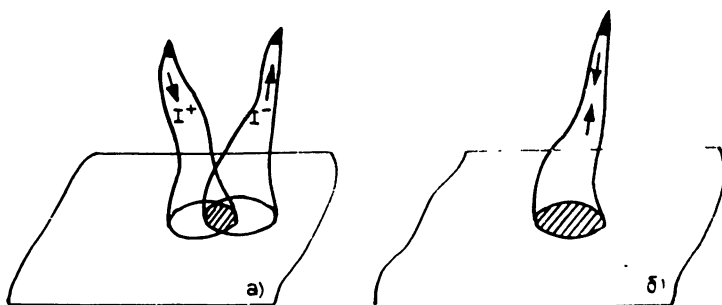


Рис 2

Действие теневого механизма аналогично механизму автоадаптивности, но отличается тем, что вместо искривления лучей из-за преломления на "фазовых" неоднородностях здесь выступает возникновение теней за поглощающими или непрозрачными частицами (рис. 3). Этот чисто амплитудный механизм уже более ста лет хорошо известен в астрономии под названием эффекта противостояния "opposition", где он используется для объяснения наблюдаемого усиления ОР на кольцах Сатурна, а также при отражении от реголита Луны и поверхностей многих других космических объектов [2]. Общепринятая в астрономической и менее известная в радиофизической литературе оценка величины и формы пика ОР рассматривалась Хапке [13, 14]. Для фактора усиления γ эта оценка, грубо говоря, сводится к тому, что для рассеяния назад в (2) следует заменить вытекающее из теории переноса излучения соотношение $I^+I^- \sim \exp(-2\tau)$, где τ - оптическая глубина отражающей плоскости, на $I^+I^- \sim \exp(-\tau)$, что оправдывается простыми эвристическими соображениями о вероятности достижения рассеивателя лучом (в теории переноса попадания на рассеиватель лучей, выходящих из точки источника и из точки наблюдения, считаются независимыми событиями, тогда как для обратного рассеяния эти события просто совпадают). В результате для отражения от полупространства после интегрирования I^+I^- по τ фактор усиления γ оказывается равным двум, что соответствует результатам многих (но не всех) астрономических наблюдений.

Более детальная оценка, учитывающая поглощение [2], дает $\gamma \approx 2/(2 - \kappa)$, где κ - поперечник ослабления для однократного рассеяния, $0 \leq \kappa \leq 1$. Отсюда видно, что для поглощающих сред эффективность теневого механизма не может превышать значение $\gamma = 2$. Это не позволяет использовать такой механизм для объяснения эффектов усиления ОР при отражении от сильно поглощающих неоднородных сред, где наблюдаемый фактор усиления может заметно превышать характерное значение $\gamma = 2$ [15].

Для геометрических механизмов усиления ОР длина волны λ не является характерным параметром, так что эти механизмы не исчезают и в геометрическом пределе $\lambda \rightarrow 0$. При этом характерный угол усиления вблизи направления обратного рассеяния $\vartheta_{ус} \sim l_{cp}/L$, где l_{cp} - среднее межчастичное расстояние, а L - характерная длина

трассы (для рассеивающего полупространства в качестве L выступает длина экстинкции L_{ext}). Эта оценка справедлива для крупномасштабных сред, тогда как рассеивающие частицы, так и расстояния между ними превышают длину волны.

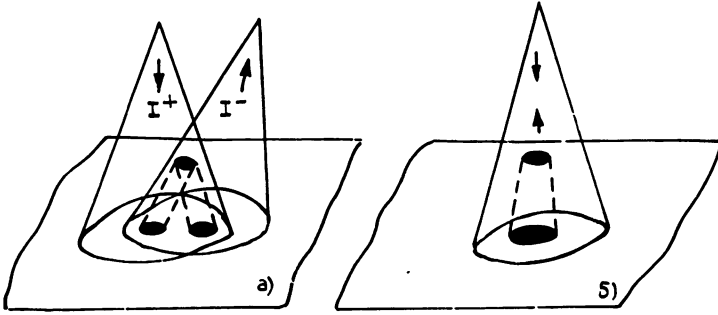


Рис 3

5. В заключение остановимся на фазовых механизмах усиления ОР. Эти механизмы связаны с тем, что волны, проходящие последовательность рассеивателей в прямом ($1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$, амплитуда волны A_+) и обратном ($N \rightarrow (N-1) \rightarrow \dots \rightarrow 1$, амплитуда A_-) направлениях приобретают одинаковые (случайные) фазовые набег и складываются когерентно, т.е. по амплитудам A_{\pm} , а не по интенсивностям $|A_{\pm}|^2$ (см. рис. 4, где показаны примеры диаграмм и соответствующих последовательностей рассеивателей при $N = 3$, см. также [10]). В результате средняя интенсивность $\langle I \rangle$ с учетом фазовой когерентности $\langle I \rangle = \langle |A_+ + A_-|^2 \rangle = 4I_0$, $I_0 = \langle |A_+|^2 \rangle = \langle |A_-|^2 \rangle$, оказывается примерно вдвое выше, чем в теории переноса некогерентного излучения: $\langle I \rangle = \langle |A_+|^2 + |A_-|^2 \rangle = 2I_0$.

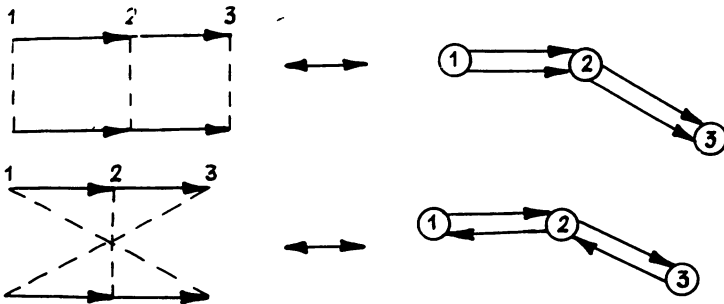


Рис. 4.

Фазовые механизмы, очевидно, являются статистическими. В отдельных реализациях здесь имеется сложный набор максимумов и минимумов, так что максимум в направлении ОР проявляется лишь после усреднения по ансамблю.

Как известно, угловое распределение излучения дается фурье-образом от функции когерентности Γ [10], так что если ρ_k -

радиус когерентности отраженной волны на выходе из отражающего слоя, то угловая ширина соответствующей яркости будет порядка λ/ρ_k . Величина зависит от деталей задачи. Рассмотрим два наиболее характерных случая.

а) Отражение плоской падающей волны от полупространства с мелкомасштабными рассеивателями (именно этот случай обычно называют слабой локализацией, которая рассматривается как предшественник сильной андерсоновской локализации [6]; теоретическому и экспериментальному исследованию этого случая в последние годы уделяется особенно большое внимание [4, 6]). Функцию когерентности отраженной волны в этом случае можно представить в виде суммы некогерентной (или широкоугольной) части Γ_1 , равной сумме лестничных диаграмм, и когерентной (или малоугловой) части Γ_2 - суммы циклических диаграмм [10]. Первая из них имеет малый радиус когерентности ρ_{k_1} порядка длины волны, $\rho_{k_1} \sim \lambda$, и описывается обычной теорией переноса некогерентного излучения, тогда как вторая, ответственная за эффект усиления ОР, учитывает сохранение фазовой когерентности и имеет радиус когерентности ρ_{k_2} порядка длины экстинкции L_{ext} , $\rho_{k_2} \sim L_{ext}$. Соответствующий Γ_2 угол усиления ОР имеет порядок $\varphi_{yc} \sim \lambda/\rho_{k_2} \sim \lambda/L_{ext}$ и обращается в нуль при $\lambda \rightarrow 0$. Последнее означает, что для мелкомасштабных неоднородностей фазовый механизм усиления ОР имеет чисто волновой характер и исчезает в геометрикооптическом пределе $\lambda \rightarrow 0$.

В данном случае усиление ОР связано с многократным рассеянием и уменьшается с ростом поглощения, поскольку поглощение уменьшает роль многократного рассеяния. При этом величина усиления не превышает предельного значения $\gamma = 2$, что приводит к сходству с рассмотренным выше теньвым механизмом, где, по оценкам, также $\gamma \approx 2$. Различить эти два механизма можно, во-первых, учтя поляризацию - для фазового механизма слабое усиление с $1 \leq \gamma < 2$ наблюдается не только в поляризованной, но и деполаризованной компоненте - и, во-вторых, исследуя зависимость усиления от различных контролируемых параметров задачи, например, поглощения, интенсивности флуктуаций среды или плотности числа рассеивателей и т. д.

б) Отражение плоской падающей волны от отражателей или рассеивателей, помещенных в крупномасштабную (например, турбулентную) среду со случайными неоднородностями [1]. На малых трассах L (рис. 1) имеется однолучевая область, где в каждую точку приходит только один луч. В этой области работают рассмотренные выше геометрические механизмы усиления ОР (линзовые и типа автоадаптивности). Большим трассам L соответствует многолучевая область или область насыщения флуктуаций интенсивности. В этой области падающее на отражатель поле можно считать асимптотически гауссовым [1]. В результате, несмотря на мультипликативный характер влияния среды, функция когерентности отраженной волны, как и в случае а), распадается на две части, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где Γ_1 отвечает широкоугольному излучению с угловой шириной порядка λ/ρ_{k_1} и радиусом когерентности ρ_{k_1} , соответствующим прохождению прямой трассы L , а Γ_2 описывает дальние корреляции и собственно эффект усиления. Отвечающий Γ_2 радиус когерентности имеет порядок бокового смещения луча $\sigma_d \sim \lambda L/\rho_{k_1}$. Отсюда для угла усиления имеем оценку $\varphi_{yc} \sim \lambda/\rho_{k_2} \sim \rho_{k_1}/L$, где $\rho_{k_1} = \rho_{k_1}(L)$ зависит от характера флуктуаций среды. В

частности, для трассы длиной $L \sim L_{ext}$ величина $\rho_k(L_{ext}) \sim 1$, где l - характерный масштаб неоднородностей среды, что дает $\varphi_{yc} \sim 1/L_{ext}$. Эта оценка соответствует случаю отражения от полупространства, когда L_{ext} естественно принять в качестве характерной длины трассы. В отличие от рассмотренного в п. а) случая мелкомасштабной среды здесь угол усиления φ_{yc} не зависит от длины волны, что делает достаточно пригодными для описания этого случая рассмотренные выше геометрические механизмы. Более подробное описание этого случая и ссылки на литературу можно найти в [1].

6. В заключение сформулируем некоторые итоги. В настоящее время известен широкий набор различных физических механизмов усиления ОР. Их можно разделить на одночастичные и коллективные, которые в свою очередь состоят из геометрических (связанных главным образом с флуктуациями интенсивностей) и фазовых (или эффектов типа слабой локализации). К геометрическим относятся теневой и фокусирующий механизмы, а также механизм типа автоадаптивности. Фазовые механизмы могут наблюдаться как для мелкомасштабных рассеивателей (где они имеют характер волновых поправок к теории переноса излучения), так и для крупномасштабных сред, где их проявления сходны с геометрическими механизмами. Количественные оценки для большинства механизмов усиления ОР можно найти в цитированной литературе, однако единого описания всех указанных механизмов пока не проводилось. Геометрические механизмы хорошо описываются в приближении однократного рассеяния "назад", тогда как фазовые могут быть связаны как с однократным, так и с многократным обратным рассеянием. При этом все механизмы усиления ОР приводят к неприменимости классической теории переноса излучения для направления рассеяния "назад".

Наличие такого многообразия механизмов усиления ОР необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных данных, причем выбор среди них может представлять определенные трудности, поскольку разные механизмы могут приводить к одинаковым факторам усиления (как, например, в случае теневого эффекта и слабой локализации). В каждом случае при выборе предпочтительной теоретической модели нужно учитывать по возможности всю имеющуюся информацию о свойствах рассеивающей среды.

Рассмотренную выше классификацию эффектов усиления с соответствующими оговорками можно частично перенести и на случай отражения от шероховатых поверхностей, однако постановка этой задачи имеет свои специфические особенности, и ее исследование не входит в наши цели. Отметим только, что в приложениях шероховатые поверхности часто трактуют как поверхности сред, плотно заполненных частицами (в качестве примеров можно указать различные модели поверхностей планет [2]). Для таких моделей данная выше классификация сохраняется, хотя строгое статистическое описание плотноупакованных сред представляет не решенную до конца задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А., Саичев А. И. //УФН. 1982. Т. 137. N 3. С. 502.
2. Александров Ю. В. Введение в физику планет. - Киев: Высшая школа, 1982.
3. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. N 7. С. 1064.
4. Kuga Y., Ishimaru A. //JOSA. 1984. V. A1. P. 831.

5. Апресян Л. А., Власов Д. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. N 7. С. 823.
6. Anderson localization /Eds. Y. Nagaoka, H. Fukuyama. - Berlin: Springer, 1982.
7. Pronko P. P., Appleton B. R. et al. //Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 779.
8. Troubridge T. S. //JOSA. 1978. V. 68. P. 1225.
9. Egan W. G., Hilgeman T. W. Optical properties of inhomogeneous materials. - N.Y.:Acad., 1979.
10. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. - М.: Наука, 1983.
11. Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С. и др. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1969. Т. 5. N 7. С. 672.
12. Rye B. J. //JOSA. 1981. V. 71. P. 687.
13. Нарке В. В. //J. Geoph. Res. 1963. V. 68. P. 4571.
14. Нарке В. В. //J. Geoph. Res. 1981. V. 86. P. 3039.
15. Egan W. G., Hilgeman T. //Appl. Opt. 1976. V. 15. P. 1845.

Радиотехнический институт
РАН

Поступила в редакцию
19 июля 1990 г.

ON THE CLASSIFICATION OF BACKSCATTERING ENHANCEMENT MECHANISMS

L. A. Apresyan

The classification of backscattering enhancement mechanisms is given. It contains one-particle and collective mechanisms, which in turn involve geometrical ones, determined mainly by intensity fluctuations, and phase mechanisms, associated with coincidence of the phases of waves, travelling in opposite directions. Geometrical mechanisms contain shadowing, autoadaptation and focusing effects. The difference is considered between dynamical mechanisms which act in almost all realization and statistical ones, which demand statistical averaging.

УДК 533. 932

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ СО СЛУЧАЙНО
РАССЕИВАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Г. Загородний, А. С. Усенко, И. П. Якименко

Рассчитаны электромагнитные поля, создаваемые произвольным распределением источников в полуограниченной плазме при случайном рассеянии заряженных частиц граничной поверхностью. Используется граничное модельное условие, обеспечивающее одновременно сохранение числа частиц и отсутствие потока частиц через границу. Найдены тензоры электрической восприимчивости, поверхностные импедансы, коэффициенты отражения плоских электромагнитных волн от плазменного полупространства. Установлена инвариантность распределений s -поляризованных электромагнитных полей относительно выбора модели случайно рассеивающей границы.

1. При построении кинетической теории флуктуаций ограниченных плазменных систем важным моментом является задача выбора и обоснования граничных условий для одночастичных функций распределения заряженных частиц, образующих плазму. Наиболее распространенным в теории ограниченной плазмы является граничное условие [1], введенное Фуксом, представляющее собой линейное соотношение между отклонениями функций распределения частиц, падающих и рассеянных поверхностью, от своих невозмущенных значений.

Начиная с классической работы [2], посвященной исследованию проникновения электромагнитного поля в полуограниченный металл, в многочисленных работах изучались электродинамические и статистические свойства ограниченных плазменных систем (проникновение электромагнитных волн в плазму [3 - 9], спектры поверхностных возбуждений [10 - 15], коэффициенты отражения электромагнитных волн от плазменного полупространства [16 - 20], спектры спонтанного [21 - 25] и тормозного [26] излучения и т. д.) при зеркальном и диффузном отражении частиц от границы раздела (в последнем случае распределение рассеянных поверхностью частиц описывается невозмущенной функцией распределения, т. е. не зависит от распределения падающих на границу частиц). Если на границе не происходит генерации или поглощения частиц, то для диффузной модели границы следует учитывать наличие в системе поверхностного заряда. Для устранения возникающих при этом трудностей в работах [27 - 33] использовались различные модели случайно рассеивающей границы, в основу которых положены требования сохранения одного закона сохранения (плотности, нормальной компоненты потока (импульса) или кинетической энергии частиц) при рассеянии заряженных частиц границей. Это позволило более подробно изучить влияние механизма взаимодействия частиц с поверхностью на свойства системы, а также, что особо важно, установить области удовлетворительного описания поведения системы на основе простой диффузной модели Фукса.

Тем не менее предложенные в [27 - 33] различные модели случайно рассеивающей границы не устраняют полностью всех трудностей, присущих диффузной модели, поскольку для них выполняется лишь один закон сохранения. Представляет интерес обобщить результаты корреляционной теории полуограниченной плазмы со случайно рассеивающей границей [31 - 33] на системы, моделируемые границей, для которой одновременно выполнялись бы два или более закона сохранения.

Настоящая работа посвящена исследованию свойств полуограниченной плазменной системы со случайно рассеивающей границей, для которой имеет место сохранение как нормальной компоненты потока, так и числа частиц [34]. Найдены тензоры диэлектрической проницаемости полуограниченной плазмы, поверхностные импедансы и распределения электромагнитных полей при возбуждении плазменного полупространства заданным распределением источников. Корреляционные функции ланжевенских источников представлены через антиэрмитовские части тензоров электрических восприимчивостей полуограниченной плазмы, рассчитанные с учетом характера взаимодействия заряженных частиц с граничной поверхностью. Получены коэффициенты отражения плоских электромагнитных волн от плазменного полупространства. Установлено, что в случае s -поляризованных волн распределение электромагнитного поля не зависит от выбора модели случайно рассеивающей границы.

2. Рассмотрим однородную полуограниченную плазму, занимающую область $(-\infty < x, y < \infty, z > 0)$, которая граничит с диэлектриком, имеющим диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}(\omega) = \tilde{\epsilon}$.

Найдем распределение электромагнитного поля, создаваемого в рассматриваемой системе пространственно-временным распределением источников (детерминированных или случайных) $\vec{J}^{\circ}(\vec{r}, t)$. Создаваемое источниками в области плазмы поле должно быть найдено на основе уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left[\sum_{\sigma} \vec{J}^{\sigma \text{ind}}(\vec{r}, t) + \vec{J}^{\circ}(\vec{r}, t) \right], \quad (2)$$

где $\vec{J}^{\sigma \text{ind}}(\vec{r}, t)$ - индуцированный ток для частиц сорта σ может быть представлен в терминах вероятности перехода $W_{\sigma}(X, X'; \tau)$ [23, 35]:

$$\vec{J}^{\sigma \text{ind}}(\vec{r}, t) = -\frac{\omega_{p\sigma}^2}{4\pi} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'_1 \int_0^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v}' \vec{v}' W_{\sigma}(X, X'; \tau) \times \\ \times \left(\vec{E}(\vec{r}', t') \frac{\partial f_{0\sigma}(\vec{v}')}{\partial \vec{v}'} \right). \quad (3)$$

Здесь $X = (\vec{r}, \vec{v})$, $X' = (\vec{r}', \vec{v}')$, $\tau = t - t'$, $\omega_{p\sigma} = (4\pi e_{\sigma}^2 n_{0\sigma} / m_{\sigma})^{1/2}$,

ϵ_σ , m_σ , $n_{0\sigma}$ - плазменная частота, заряд, масса и средняя плотность для частиц сорта σ .

Вероятность перехода $W_\sigma(X, X'; \tau)$ должна быть найдена в результате решения уравнения [23, 35]

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) W_\sigma(X, X'; \tau) = L_\sigma^{st} W_\sigma(X, X'; \tau) \quad (4)$$

с начальным

$$W_\sigma(X, X'; 0) = \delta(X - X') \quad (5)$$

и соответствующим граничным

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = \left\{ W_\sigma^{(n)}(\vec{v}) \int_{(v_z'' < 0)} d\vec{v}'' W_\sigma(X'', X'; \tau) + W_\sigma^{(v_n)}(\vec{v}) \int_{(v_z'' < 0)} d\vec{v}'' v_z'' W_\sigma(X'', X'; \tau) \right\} \Big|_{z=0} \quad (6)$$

условиями. Здесь L_σ^{st} - линеаризованный оператор столкновений для частиц сорта σ , который для простоты положим равным $L_\sigma^{st} = -\nu_\sigma$, что соответствует простейшей релаксационной модели (ν_σ - частота столкновений заряженных частиц сорта σ с нейтралами), $X'' = (r, \vec{v}'')$. Условие (6) отвечает [34] модели случайно рассеивающей границы, сохраняющей число и нормальную компоненту потока частиц при рассеянии.

Явный вид функций $W_\sigma^{(n)}(\vec{v})$, $W_\sigma^{(v_n)}(\vec{v})$ (ядер рассеяния) определяется заданием невозмущенных функций распределения $f_{0\sigma}(\vec{v})$. Будем рассматривать системы, описываемые полимаксвелловскими распределениями с температурами T_σ для частиц сорта σ :

$$f_{0\sigma}(\vec{v}) = \left(\frac{m_\sigma}{2\pi T_\sigma} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\sigma v^2}{2T_\sigma} \right). \quad (7)$$

В этом случае

$$W_\sigma^{(n)}(\vec{v}) = \frac{1}{1-a} \left[\alpha_{0\sigma}^n W_{0\sigma}^{(n)}(\vec{v}) - a \alpha_{1\sigma}^n W_{1\sigma}^{(n)}(\vec{v}) \right]; \quad (8)$$

$$W_\sigma^{(v_n)}(\vec{v}) = \frac{1}{1-a} \left[-a \alpha_{0\sigma}^n W_{0\sigma}^{(v_n)}(\vec{v}) + \alpha_{1\sigma}^n W_{1\sigma}^{(v_n)}(\vec{v}) \right], \quad (9)$$

где $W_{0\sigma}^{(n)}(\vec{v}) = 2f_{0\sigma}(\vec{v})$, $W_{1\sigma}^{(n)}(\vec{v}) = (2\pi)^{1/2}(v_z/s_\sigma)f_{0\sigma}(\vec{v})$, $W_{0\sigma}^{(v_n)}(\vec{v}) =$
 $= -((2\pi)^{1/2}/s_\sigma)f_{0\sigma}(\vec{v})$, $W_{1\sigma}^{(v_n)}(\vec{v}) = -(2v_z/s_\sigma^2)f_{0\sigma}(\vec{v})$, $s_\sigma = (T_\sigma/m_\sigma)^{1/2}$,
 $\alpha = 2/\pi$. Коэффициенты $\alpha_{0\sigma}^n$, $\alpha_{1\sigma}^n$, $\alpha_{0\sigma}^{v_n}$, $\alpha_{1\sigma}^{v_n}$ в выражениях (8), (9) введе-

ны с целью обеспечения единой формы записи для диффузной и для различных (пяти) случайно рассеивающих моделей границы, что позволяет избежать необходимости повторения всей процедуры решения задачи для каждой из моделей в отдельности. Индексы коэффициентов повторяют индексы соответствующих ядер рассеяния $W_\sigma(v)$, перед которыми эти коэффициенты стоят, что позволяет определить, к какой модели относится выражение, содержащее данный коэффициент. Приравнивая в (8), (9) все коэффициенты α нулю или единице, получаем, соответственно, граничные условия, отвечающие известной диффузной модели [1, 2],

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = 0 \Big|_{z=0}, \quad (10)$$

($v_z > 0$)

или модели случайно-рассеивающей границы [34], сохраняющей одновременно число и нормальную компоненту потока частиц при рассеянии.

Граничное условие (6) позволяет выполнить переход к четырем различным моделям случайно-рассеивающей границы, удовлетворяющих только одному закону сохранения, а именно закону сохранения числа частиц (отмечено верхним индексом "n" в выражениях для ядра рассеяния)

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = W_{m\sigma}^{(n)}(\vec{v}) \int_{(v_z'' < 0)} d\vec{v}'' W_\sigma(X'', X'; \tau) \Big|_{z=0}, \quad m = 0, 1, \quad (11)$$

($v_z > 0$)

или условию отсутствия потока частиц через граничную поверхность $z = 0$ (отмечено верхним индексом " v_n ")

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = W_{m\sigma}^{(v_n)}(\vec{v}) \int_{(v_z'' < 0)} d\vec{v}'' v_z'' W_\sigma(X'', X'; \tau) \Big|_{z=0}, \quad m = 0, 1. \quad (12)$$

($v_z > 0$)

Граничные условия (11) и (12) условно обозначим через n_0 , n_1 (сохранение числа частиц) и v_{n0} , v_{n1} (отсутствие потока частиц через границу). Граничные условия n_0 и v_{n0} отвечают моделям случайно-рассеивающей границы, используемым ранее в работах [27 - 33] при анализе электродинамических и статистических свойств полуограниченной плазмы, в то время как две другие модели случайно рассеивающей границы (n_1 и v_{n1}), насколько нам известно, ранее не рассматривались.

Переход от общего соотношения (7) к одной из рассмотренной выше четырех моделей (11), (12) выполняется путем приравнивания нулю трех коэффициентов α , тогда как четвертый, отвечающий данной модели,

следует положить равным $(1 - \alpha)$, если это коэффициент $\alpha_{0\sigma}^n$ или $\alpha_{1\sigma}^{v_n}$ (модели $n0$ или $v_n 1$); или $(1 - \alpha^{-1})$, если это коэффициент $\alpha_{1\sigma}^n$ или $\alpha_{0\sigma}^{v_n}$ (модели $n1$ или $v_n 0$).

Если источники $\vec{J}^\circ(\vec{r}, t)$ являются случайными, то, согласно общей теории электромагнитных флуктуаций [36 - 40], для расчета билинейных по полю величин необходимо задать корреляционную функцию $\langle \vec{J}_i^\circ(\vec{r}, t) \vec{J}_j^\circ(\vec{r}', t') \rangle$. В первом порядке по плазменному параметру эта корреляционная функция полностью задается вероятностью перехода [23]

$$\langle \vec{J}_i^\circ(\vec{r}, t) \vec{J}_j^\circ(\vec{r}', t') \rangle = \sum_{\sigma} \langle \vec{J}_i^\circ(\vec{r}, t) \vec{J}_j^\circ(\vec{r}', t') \rangle^{\sigma} = \quad (13)$$

$$= \sum_{\sigma} e_{\sigma} n_{0\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v}' v_1 v_1' (f_{0\sigma}(\vec{v}) W_{\sigma}(X, X'; \tau) + f_{0\sigma}(\vec{v}') W_{\sigma}(X', X; -\tau)).$$

В (\vec{k}, ω) -представлении получаем следующие выражения:

$$\langle J_i^\circ(\vec{k}, \omega) J_j^\circ(\vec{k}', \omega') \rangle^{\sigma} = (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \langle J_i^\circ(k_z) J_j^\circ(k'_z) \rangle_{k_1 \omega}^{\sigma} \quad (14)$$

для корреляционной функции ланжевеновских источников и

$$J_i^{\sigma \text{ind}}(\vec{k}, \omega) = - \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \alpha_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega) E_j(\vec{k}', \omega) \quad (15)$$

для индуцированных токов. Здесь $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ - фурье-компонента электрического поля, продолженного нулем на область $z < 0$,

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'_1 \int_0^{\infty} dz \exp(i(\omega t - \vec{k}\vec{r}')) \vec{E}(\vec{r}', t), \quad (16)$$

$\alpha_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega)$ имеет смысл тензора электрической восприимчивости для частиц сорта σ в случае полуограниченной плазмы со случайно рассеивающей границей (6),

$$\alpha_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega) = 2\pi \delta(k_z - k'_z) \alpha_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \omega) - i \frac{2}{1 - \alpha} \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \frac{1}{k_{\sigma}} \times \quad (17)$$

$$\times \left[\alpha^{1/2} K_1^{(v_n)\sigma}(\vec{k}, \omega) \alpha_{jz}^{\sigma}(\vec{k}', \omega) + \frac{\omega_{p\sigma}}{\omega + i\nu_{\sigma}} \frac{k'_j}{k_{\sigma}} K_i^{(n)\sigma}(\vec{k}, \omega) \alpha_L^{\sigma}(\vec{k}', \omega) \right],$$

где $\vec{k}' = (k'_x, k'_y, k'_z)$, $k_\sigma = (4\pi e^2 n_{0\sigma} / T_\sigma)^{1/2}$,

$$K_{i1}^{(n, \nu)\sigma}(\vec{k}, \omega) = \alpha_{0\sigma}^{n, \nu} 4\pi \alpha_{1z}^\sigma(\vec{k}, \omega) + \alpha_{1\sigma}^{n, \nu} \alpha^{\pm 1/2} \frac{\omega_{p\sigma}}{\omega} K_{i1}^\sigma(\vec{k}, \omega), \quad i = x, y, z; \quad (18)$$

$$K_{i1}^\sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_{p\sigma}^2}{s_\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \frac{v_{1z} v_z^2 f_{0\sigma}(\vec{v})}{\omega - \vec{k}\vec{v} + i\nu_\sigma} = -4\pi \frac{\omega}{\omega + i\nu_\sigma} \frac{k_1}{k_\sigma} \left[\frac{\partial (k_z \alpha_L^\sigma(k, \omega))}{\partial k_z} + 2\delta_{1z} \alpha_L^\sigma(k, \omega) \right], \quad i = x, y, z, \quad (19)$$

а $\alpha_{ij}^\sigma(\vec{k}, \omega)$ - известный [39] тензор электрической восприимчивости частиц сорта σ в случае неограниченной плазмы:

$$\alpha_{ij}^\sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \alpha_L^\sigma(k, \omega) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \alpha_T^\sigma(k, \omega), \quad (20)$$

$$\alpha_L^\sigma(k, \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{k_\sigma^2}{k^2} \frac{\omega + i\nu_\sigma}{\omega} W(z_\sigma), \quad \alpha_T^\sigma(k, \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega(\omega + i\nu_\sigma)} [W(z_\sigma) - 1],$$

$$W(z_\sigma) = 1 - z_\sigma \exp\left(-\frac{z_\sigma^2}{2}\right) \left[\int_0^{z_\sigma} dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) - i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \right], \quad z_\sigma = \frac{\omega + i\nu_\sigma}{k s_\sigma}.$$

Корреляционные функции токов $\langle J_i^\sigma(k_z) J_j^{\sigma*}(k'_z) \rangle_{k_1\omega}^{\sigma}$ выражаются через антиэрмитову часть тензора электрической восприимчивости $\alpha_{ij}^\sigma(\vec{k}, \vec{k}', \omega)$,

$$\langle J_i^\sigma(k_z) J_j^{\sigma*}(k'_z) \rangle_{k_1\omega}^{\sigma} = i\omega T_\sigma \left\{ \alpha_{j1}^\sigma(\vec{k}', \vec{k}, \omega) - \alpha_{1j}^\sigma(\vec{k}, \vec{k}', \omega) \right\}. \quad (21)$$

Отметим, что при получении выражений (15), (21) использовалось условие аналитического продолжения вероятности перехода на область $z, z' < 0$. Эта вероятность задается своим интегральным представлением

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \exp[i(\vec{k}\vec{z} - k'_z z' - \omega t)] \times \quad (22)$$

$$\times W_{\sigma}(\vec{k}, \vec{v}; \vec{k}', \vec{v}'; \omega), \quad z, z' \geq 0,$$

где

$$W_{\sigma}(\vec{k}, \vec{v}; \vec{k}', \vec{v}'; \omega) = \frac{1}{\omega - \vec{k}\vec{v} + i\nu_{\sigma}} \left\{ i2\pi\delta(k_z - k'_z)\delta(\vec{v} - \vec{v}') - \right. \quad (23)$$

$$\left. - v_z \frac{W_{\sigma}^{(n)}(\vec{v}) + v'_z W_{\sigma}^{(v_n)}(\vec{v})}{\omega - \vec{k}'\vec{v}' + i\nu_{\sigma}} \right\}.$$

При этом выражение (15) отвечает аналитическому продолжению тока $\vec{j}^{\sigma 1nd}(\vec{r}, t)$, заданному выражением (3) в области $z > 0$ на область $z < 0$.

Воспользовавшись предложенной в работе процедурой перехода от общих соотношений, отвечающих модели случайно рассеивающей границы (6), к частным, отвечающим случайно рассеивающим моделям, для которых имеет место только один закон сохранения, получаем следующие выражения для тензора электрической восприимчивости полуограниченной плазмы в случае моделей n_0, v_n, n_1, v_{n1} :

$$\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega) = 2\pi\delta(k_z - k'_z)\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \omega) - i8\pi \frac{\omega}{\omega + i\nu_{\sigma}} \frac{k'_j}{k_{\sigma}^2} \times \quad (24)$$

$$\times \epsilon_{1z}^{\sigma}(\vec{k}, \omega)\epsilon_L^{\sigma}(k', \omega);$$

$$\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega) = 2\pi\delta(k_z - k'_z)\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \omega) + i2(2\pi)^{3/2} \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \frac{1}{k_{\sigma}} \times \quad (25)$$

$$\times \epsilon_{1z}^{\sigma}(\vec{k}, \omega)\epsilon_{jz}^{\sigma}(\vec{k}', \omega);$$

$$\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega) = 2\pi\delta(k_z - k'_z)\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \omega) + i(2\pi)^{1/2} \frac{\omega_{p\sigma}(\omega + i\gamma_{\sigma})}{\omega^2} \times$$

$$\times \frac{k'_j}{k_{\sigma}^2} K_1^{\sigma}(\vec{k}, \omega)\epsilon_L^{\sigma}(\vec{k}', \omega); \quad (26)$$

$$\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}', \omega) = 2\pi\delta(k_z - k'_z)\epsilon_{1j}^{\sigma}(\vec{k}, \omega) - i \frac{2}{k_{\sigma}} K_1^{\sigma}(\vec{k}, \omega)\epsilon_{jz}^{\sigma}(\vec{k}', \omega). \quad (27)$$

При этом выражения (24), (25) переходят в результаты, полученные ранее [32] для полуограниченной плазмы при случайном рассеянии частиц, сохраняющем либо число (модель n_0), либо нормальную компоненту потока (модель v_n) частиц.

Для расчета электромагнитных полей в плазме используем тот же

метод, что и для систем с диффузной [28, 41] или случайно рассеивающей [31, 32] границами. Опуская промежуточные вычисления, искомые выражения для электрического поля $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ можно представить в виде предельных значений при $\text{Im } k_z \rightarrow -0$ некоторой функции $\vec{\Phi}(\vec{k}, \omega)$, аналитичной во всей плоскости комплексного переменного k_z с разрезом вдоль действительной оси:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{k}, \omega) = & \frac{1}{k^2} \left\{ E_1^{\circ}(\vec{k}, \omega) + \frac{k_1}{k_{\perp}} X_L(\vec{k}, \omega) \xi(k_{\perp}, \omega) P_z(\vec{k}, \omega) \right\} \Big|_{k_z=ik_{\perp}} + (28) \\ & + s(\vec{k}, \omega) X_T(\vec{k}, \omega) P_1(\vec{k}, \omega) + k_1 \sum_{\sigma} \sum_{m=0,1} (-1)^m \left\{ X_L(\vec{k}, \omega) \left[K_L^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) - \right. \right. \\ & \left. \left. - K_L^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \right] \Big|_{k_z=ik_{\perp}} - \xi(k_{\perp}, \omega) K_T^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}} \right\} + \\ & + \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \delta_{1z} \right) \frac{k_z}{k_{\perp}} s(\vec{k}, \omega) X_T(\vec{k}, \omega) K_T^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big\} G_{\sigma}^{(m)}(\vec{k}_{\perp}, \omega), \quad i=x, y, z. \end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{E}^{\circ}(\vec{k}, \omega) = \vec{k} X_L(\vec{k}, \omega) [F_L(\vec{k}, \omega) + \bar{F}(\vec{k}_{\perp}, \omega)] + s(\vec{k}, \omega) X_T(\vec{k}, \omega) [\vec{k} \vec{F}_T(\vec{k}, \omega)],$$

$$\bar{F}(\vec{k}_{\perp}, \omega) = \frac{\omega}{2k_{\perp}c} \xi(k_{\perp}, \omega) V_T(\vec{k}_{\perp}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}} - F_L(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}},$$

$$F_L(\vec{k}, \omega) = \frac{2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{\vec{k}' \vec{J}^{\circ}(\vec{k}', \omega)}{X_L^*(\vec{k}', \omega)},$$

$$\vec{F}_T(\vec{k}', \omega) = \frac{2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{[\vec{k}' \vec{J}^{\circ}(\vec{k}', \omega)]}{(k'_z + ik_{\perp}) X_T^*(\vec{k}', \omega)},$$

$$V_T(\vec{k}, \omega) = \frac{4}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{k'_z (\vec{k}' \vec{J}^{\circ}(\vec{k}', \omega)) - k'^2 J_z^{\circ}(\vec{k}', \omega)}{(k'_z + ik_{\perp}) X_T^*(\vec{k}', \omega)},$$

$$X_L(\vec{k}, \omega) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \ln \varepsilon_L(k', \omega) \right),$$

$$X_T(\vec{k}, \omega) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \ln \tau(k', \omega)\right),$$

$$X_L(k_{\perp}, \omega) \equiv X_L(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}} = \exp\left(\frac{k_{\perp}}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \frac{\ln \epsilon_L(k, \omega)}{k^2}\right),$$

$$X_T(k_{\perp}, \omega) \equiv X_T(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}} = \exp\left(\frac{k_{\perp}}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \frac{\ln \tau(k, \omega)}{k^2}\right),$$

$$s(\vec{k}, \omega) = \begin{cases} -\frac{c}{\omega}(k_z + ik_{\perp}), & \text{Im } k_z > 0 \\ \frac{\omega}{c}(k_z - ik_{\perp})^{-1}, & \text{Im } k_z < 0 \end{cases},$$

$$K_L^{(0)\sigma}(\vec{k}, \omega) = \frac{2}{k_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{k'_z \epsilon_L^{\sigma}(k', \omega)}{X_L^+(k', \omega)}, \quad (29)$$

$$K_T^{(0)\sigma}(\vec{k}, \omega) = \frac{2\omega k_{\perp}}{ck_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{\epsilon_T^{\sigma}(k', \omega)}{(k'_z + ik_{\perp}) X_T^+(\vec{k}', \omega)},$$

$${}^{(1)\sigma}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi(2\pi)^{1/2}} \frac{\omega_{p\sigma}}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{k_{\perp}^2 W(z'_{\sigma}) + k_z'^2 [1 + z_{\sigma}'^2 W(z'_{\sigma})]}{k'^2 X_L^+(\vec{k}', \omega)},$$

$${}^{(1)\sigma}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k_{\perp} \omega_{p\sigma}}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \frac{k'_z W(z'_{\sigma})}{k'^2 (k'_z + ik_{\perp}) X_T^+(\vec{k}', \omega)},$$

$$P_i(\vec{k}, \omega) = \begin{cases} -\frac{c}{\omega} [k_{\perp} k_z \gamma_s(k_{\perp}, \omega) + ik^2] E_i(\vec{k}, \omega) + i \frac{c}{\omega} k_{\perp} (\vec{k}_{\perp} \vec{E}_1(\vec{k}_{\perp}, \omega)) - \\ \quad - ik_z e_{z1j} B_j(\vec{k}_{\perp}, \omega), \quad i=x, y \\ \frac{c}{\omega} [k_{\perp} \gamma_s(k_{\perp}, \omega) + ik_z] (\vec{k}_{\perp} \vec{E}(\vec{k}_{\perp}, \omega)) + ie_{z1j} k_{\perp} B_j(\vec{k}_{\perp}, \omega), \quad i=z \end{cases}$$

$$\tau(k, \omega) = 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \varepsilon_T(k, \omega), \quad \varepsilon_{L,T}(k, \omega) = 1 + 4\pi \sum_{\sigma} \alpha_{L,T}^{\sigma}(k, \omega),$$

$$\gamma_{\pm}(k_1, \omega) = 1 + 2\lambda_T(k_1, \omega), \quad \lambda_T(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi k_1} \int_0^{\infty} dk_z \ln \tau(k, \omega),$$

$$\xi(k_1, \omega) = \frac{2k_1 c}{\omega} \frac{X_T(k_1, \omega)}{X_L(k_1, \omega)}, \quad z'_{\sigma} = \frac{\omega + i\nu_{\sigma}}{k' s_{\sigma}},$$

$$G_{\sigma}^{(0)}(\vec{k}_1, \omega) = \frac{1}{1-a} \left[\alpha_{0\sigma}^n G_{\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) - a \alpha_{0\sigma}^{v_n} G_{\sigma}^{(v_n)}(\vec{k}_1, \omega) \right],$$

$$G_{\sigma}^{(1)}(\vec{k}_1, \omega) = \frac{1}{1-a} \left[\alpha_{1\sigma}^n G_{\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) - \alpha_{1\sigma}^{v_n} G_{\sigma}^{(v_n)}(\vec{k}_1, \omega) \right],$$

$$\vec{E}(\vec{k}_1, \omega) = \lim_{z \rightarrow +0} \vec{E}(\vec{k}_1, \omega, z), \quad \vec{B}(\vec{k}_1, \omega) = \lim_{z \rightarrow +0} \vec{B}(\vec{k}_1, \omega, z),$$

ε_{ijk} - единичный абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга, а величины, снабженные индексами "±", представляют собой взятые по формулам Сохоцкого - Племяля [42] предельные значения функций при $\text{Im } k_z \rightarrow \pm 0$.

Отметим, что входящие в выражение (28) величины $G_{\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega)$,

$G_{\sigma}^{(v_n)}(\vec{k}_1, \omega)$, в свою очередь, определяются электрическим полем $\vec{E}(\vec{k}_1, \omega)$:

$$G_{\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) = - \frac{4}{k_{\sigma}} \frac{\omega}{\omega + i\nu_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \alpha_{L}^{\sigma}(k, \omega) (\vec{k} \vec{E}(\vec{k}, \omega)), \quad (30)$$

$$G_{\sigma}^{(v_n)}(\vec{k}_1, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \alpha_{1z}^{\sigma}(\vec{k}, \omega) E_1(\vec{k}, \omega).$$

Для нахождения неизвестных величин $E_i(\vec{k}_1, \omega)$, $B_i(\vec{k}_1, \omega)$ ($i = x, y$) необходимо найти выражения для электромагнитного поля во внешней области ($z < 0$) и использовать условие непрерывности тангенциальных составляющих полей на границе $z = 0$.

Поскольку во внешней области источники отсутствуют, то электромагнитные поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ при $z < 0$ могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся от

границы раздела:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}(\vec{r}, t) \\ \tilde{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k}_1 \exp[i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_z z - \omega t)] \left\{ \begin{aligned} \tilde{E}(\vec{k}_1, \omega) \\ \tilde{B}(\vec{k}_1, \omega) \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

где $\vec{k}_z = (\omega^2 \tilde{\epsilon}/c^2 - k_1^2)^{1/2}$, $\text{Im } \vec{k}_z \geq 0$.

Тангенциальные компоненты полей удобно выразить через нормальные,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_i(\vec{k}_1, \omega) &= \frac{1}{k_1^2} \{k_1 \tilde{k}_z \tilde{E}_z(\vec{k}_1, \omega) - \frac{\omega}{c} e_{z1j} k_j \tilde{B}_z(\vec{k}_1, \omega)\}, \\ \tilde{B}_i(\vec{k}_1, \omega) &= \frac{1}{k_1^2} \{k_1 \tilde{k}_z \tilde{B}_z(\vec{k}_1, \omega) + \frac{\omega \xi}{c} e_{z1j} k_j \tilde{E}_z(\vec{k}_1, \omega)\}, \end{aligned} \right\}, \quad i = x, y, \quad (32)$$

которые после ряда вычислений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z(\vec{k}_1, \omega) &= \frac{\omega^2}{2c^2 k_1 \tilde{k}_z} \frac{1}{\gamma_p^{(0)}(k_1, \omega) L_p^{(0)}(k_1, \omega)} \left[V(\vec{k}_1, \omega) - \frac{2ck_1}{\omega} \times \right. \\ &\times \xi(k_1, \omega) \sum_{\sigma} \sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)\sigma}(\vec{k}_1, \omega) G_{\sigma}^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) \left. \right]; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{B}_z(\vec{k}_1, \omega) = i \frac{\omega}{c \tilde{k}_z} \frac{r_s(k_1, \omega)}{L_s(k_1, \omega)} U(\vec{k}_1, \omega), \quad (34)$$

где

$$K^{(m)\sigma}(k_1, \omega) = K_L^{(m)\sigma}(k_1, \omega) + K_T^{(m)\sigma}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$K_L^{(m)\sigma}(k_1, \omega) = K_L^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_1} - K_L^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=-ik_1}, \quad m = 0, 1,$$

$$\begin{aligned} K_T^{(m)\sigma}(k_1, \omega) &= \xi(k_1, \omega) K_T^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_1} - \xi^{-1}(k_1, \omega) K_T^{(m)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=-ik_1}, \\ & m = 0, 1, \end{aligned}$$

$$V(\vec{k}_1, \omega) = V_T(\vec{k}_1, \omega) - i \frac{2ck_1}{\omega} \xi(k_1, \omega) V_L(\vec{k}_1, \omega), \quad (35)$$

$$V_T(\vec{k}_1, \omega) = \xi^2(k_1, \omega) V_T(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_1} - V_T(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=-ik_1},$$

$$v_L(\vec{k}_1, \omega) = \frac{4k_1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\vec{k} \vec{j}^0(\vec{k}, \omega)}{k^2 X_L^+(\vec{k}, \omega)}, \quad U(\vec{k}_1, \omega) = \frac{2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{e_{z1j} k_1 J_j^0(\vec{k}, \omega)}{(k_z + ik_1) X_T^+(\vec{k}, \omega)},$$

$$\gamma_p^{(0)}(k_1, \omega) = 2 \{1 + \lambda_T(k_1, \omega)[1 - \xi^2(k_1, \omega)]\},$$

$$L_s(k_1, \omega) = 1 - r_s(k_1, \omega), \quad L_p^{(0)}(k_1, \omega) = 1 - r_p^{(0)}(k_1, \omega),$$

$r_s(k_1, \omega)$ и $r_p^{(0)}(k_1, \omega)$ имеют смысл отношений поверхностных импедансов плазмы к поверхностным импедансам внешней силы для s - и p -поляризаций при диффузном отражении частиц от границы [7, 12, 16, 28, 41] и равны

$$r_s(k_1, \omega) = i \frac{\bar{k}_z}{k_1 \gamma_s(k_1, \omega)}; \quad (36)$$

$$r_p^{(0)}(k_1, \omega) = i \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2 k_1 \bar{k}_z} \frac{1 - \xi^2(k_1, \omega)}{\gamma_p^{(0)}(k_1, \omega)}. \quad (37)$$

Отметим, что решение (34) для нормальной компоненты магнитного поля не зависит от выбора модели случайно рассеивающей границы, задаваемой граничными условиями (6), (11), (12), и совпадает с результатом [12], полученным для диффузной модели Фукса (эквивалентность результатов (34) для моделей случайно рассеивающих границ n_0 , $\nu_n 0$ и модели диффузного отражения была доказана ранее в работах [31, 32]). Напротив, выражение (33) для нормальной компоненты электрического поля определяется выбором модели, поскольку входящие в него величины $G_\sigma^{(0)}(\vec{k}_1, \omega)$, $G_\sigma^{(1)}(\vec{k}_1, \omega)$, в свою очередь, зависят от $\vec{E}_z(\vec{k}_1, \omega)$ и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{\sigma'} \{ [\delta_{\sigma\sigma'} - \beta_{\sigma\sigma'}^{(0)}(k_1, \omega)] G_\sigma^{(0)}(\vec{k}_1, \omega) - \beta_{1\sigma\sigma'}^{(0)}(k_1, \omega) G_\sigma^{(1)}(\vec{k}_1, \omega) \} = \\ = \frac{\bar{k}_z}{k_1} \bar{\eta}_\sigma^{(0)}(k_1, \omega) \vec{E}_z(\vec{k}_1, \omega) + h_\sigma^{(0)}(\vec{k}_1, \omega) \\ \sum_{\sigma'} \{ -\beta_{\sigma\sigma'}^{(1)}(k_1, \omega) G_\sigma^{(0)}(\vec{k}_1, \omega) + [\delta_{\sigma\sigma'} + \beta_{1\sigma\sigma'}^{(1)}(k_1, \omega)] G_\sigma^{(1)}(\vec{k}_1, \omega) \} = \\ = \frac{\bar{k}_z}{k_1} \bar{\eta}_\sigma^{(1)}(k_1, \omega) \vec{E}_z(\vec{k}_1, \omega) + h_\sigma^{(1)}(\vec{k}_1, \omega) \end{aligned} \right. , \quad (38)$$

где

$$h_{\sigma}^{(0)}(\vec{k}_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{0\sigma}^n h_{\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) - \alpha \alpha_{0\sigma}^v h_{\sigma}^{(v)}(\vec{k}_1, \omega)],$$

$$h_{\sigma}^{(1)}(\vec{k}_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{1\sigma}^n h_{\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) - \alpha_{1\sigma}^v h_{\sigma}^{(v)}(\vec{k}_1, \omega)],$$

$$\tilde{\eta}_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega) = \beta_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega) - i \frac{\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_{1z} \tilde{k}_z} \tilde{\beta}_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$\beta_{\sigma}^{(0)}(k_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{0\sigma}^n \beta_{\sigma}^{(n)}(k_1, \omega) - \alpha \alpha_{0\sigma}^v \beta_{\sigma}^{(v)}(k_1, \omega)],$$

$$\beta_{\sigma}^{(1)}(k_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{1\sigma}^n \beta_{\sigma}^{(n)}(k_1, \omega) - \alpha_{1\sigma}^v \beta_{\sigma}^{(v)}(k_1, \omega)],$$

$$\tilde{\beta}_{\sigma}^{(0)}(k_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{0\sigma}^n \tilde{\beta}_{\sigma}^{(n)}(k_1, \omega) - \alpha \alpha_{0\sigma}^v \tilde{\beta}_{\sigma}^{(v)}(k_1, \omega)],$$

$$\tilde{\beta}_{\sigma}^{(1)}(k_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{1\sigma}^n \tilde{\beta}_{\sigma}^{(n)}(k_1, \omega) - \alpha_{1\sigma}^v \tilde{\beta}_{\sigma}^{(v)}(k_1, \omega)], \quad (39)$$

$$\beta_{m\sigma\sigma'}^{(0)}(k_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{0\sigma}^n \beta_{m\sigma\sigma'}^{(n)}(k_1, \omega) - \alpha \alpha_{0\sigma}^v \beta_{m\sigma\sigma'}^{(v)}(k_1, \omega)], \quad m = 0, 1,$$

$$\beta_{m\sigma\sigma'}^{(1)}(k_1, \omega) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha_{1\sigma}^n \beta_{m\sigma\sigma'}^{(n)}(k_1, \omega) - \alpha_{1\sigma}^v \beta_{m\sigma\sigma'}^{(v)}(k_1, \omega)], \quad m = 0, 1,$$

$$h_{\sigma}^{(n,v)}(\vec{k}_1, \omega) = h_{L\sigma}^{(n,v)}(\vec{k}_1, \omega) + h_{1\sigma}^{(n,v)}(\vec{k}_1, \omega) + \beta_{L\sigma}^{(n,v)}(k_1, \omega) \bar{F}(\vec{k}_1, \omega),$$

$$h_{L\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) = -\frac{4}{k_{\sigma}} \frac{\omega}{\omega + i\gamma_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z X_L^-(\vec{k}_1, \omega) \mathfrak{z}_L^{\sigma}(k, \omega) F_L^-(\vec{k}, \omega), \quad h_{1\sigma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega) = 0,$$

$$h_{L\sigma}^{(v)}(\vec{k}_1, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{k_z}{k^2} X_L^-(\vec{k}, \omega) \mathfrak{z}_L^{\sigma}(k, \omega) F_L^-(\vec{k}, \omega),$$

$$h_{1\sigma}^{(v)}(\vec{k}_1, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega^3}{c^2 \omega_{p\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{X_T^-(\vec{k}, \omega)}{k^2 (k_z - ik_1)} \mathfrak{z}_T^{\sigma}(k, \omega) V_L^-(\vec{k}, \omega),$$

$$\beta_{\sigma}^{(n)}(k_{\perp}, \omega) = 2\lambda_{\tau}(k_{\perp}, \omega)\tilde{\beta}_{\sigma}^{(n)}(k_{\perp}, \omega),$$

$$\tilde{\beta}_{\sigma}^{(n)}(k_{\perp}, \omega) = \frac{ck_{\perp}}{\omega} \xi(k_{\perp}, \omega)\beta_{L\sigma}^{(n)}(k_{\perp}, \omega),$$

$$\beta_{\sigma}^{(v)}(k_{\perp}, \omega) = 2\lambda_{\tau}(k_{\perp}, \omega)\tilde{\beta}_{\sigma}^{(v)}(k_{\perp}, \omega) + i\delta_{T\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, \omega),$$

$$\tilde{\beta}_{\sigma}^{(v)}(k_{\perp}, \omega) = \frac{ck_{\perp}}{\omega} \xi(k_{\perp}, \omega)\beta_{L\sigma}^{(v)}(k_{\perp}, \omega) + \delta_{T\sigma}^{(1)}(k_{\perp}, \omega),$$

$$\delta_{T\sigma}^{(m)}(k_{\perp}, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega k_{\perp}}{\omega_{p\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left(\frac{k_{\perp}}{k_z - ik_{\perp}} \right)^m \frac{X_{\tau}^{-}(\vec{k}, \omega)}{k^2} \alpha_{\tau}^{\sigma}(\vec{k}, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$\beta_{L\sigma}^{(n)}(k_{\perp}, \omega) = -\frac{4}{k_{\sigma}} \frac{\omega}{\omega + i\nu_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z X_{L}^{-}(\vec{k}, \omega) \alpha_{L}^{\sigma}(k, \omega),$$

$$\beta_{L\sigma}^{(v)}(k_{\perp}, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{k_z}{k^2} X_{L}^{-}(\vec{k}, \omega) \alpha_{L}^{\sigma}(k, \omega),$$

$$\beta_{m\sigma\sigma'}^{(n, v)}(k_{\perp}, \omega) = \beta_{mL\sigma\sigma'}^{(n, v)}(k_{\perp}, \omega) - \beta_{mT\sigma\sigma'}^{(n, v)}(k_{\perp}, \omega) - \beta_{L\sigma}^{(n, v)}(k_{\perp}, \omega) \times$$

$$\times \left[K_{L}^{(m)\sigma'}(\vec{k}_{\perp}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}} + \xi(k_{\perp}, \omega) K_{\tau}^{(m)\sigma'}(\vec{k}_{\perp}, \omega) \Big|_{k_z=ik_{\perp}} \right], \quad m = 0, 1,$$

$$\beta_{mL\sigma\sigma'}^{(n)}(k_{\perp}, \omega) = -\frac{4}{k_{\sigma}} \frac{\omega}{\omega + i\nu_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z X_{L}^{-}(\vec{k}, \omega) \alpha_{L}^{\sigma}(k, \omega) K_{L}^{(m)\sigma'}(\vec{k}, \omega), \quad m=0, 1,$$

$$\beta_{mT\sigma\sigma'}^{(n)}(k_{\perp}, \omega) = 0, \quad m = 0, 1,$$

$$\beta_{mL\sigma\sigma'}^{(v)}(k_{\perp}, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{k_z}{k^2} X_{L}^{-}(\vec{k}, \omega) \alpha_{L}^{\sigma}(k, \omega) K_{L}^{(m)\sigma'}(\vec{k}, \omega), \quad m=0, 1,$$

$$\beta_{m\Gamma\sigma\sigma'}^{(v\ n)}(k_1, \omega) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\omega^2 k_\perp}{\omega_p \sigma c} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{X_\Gamma^-(\vec{k}, \omega)}{k^2(k_z - ik_\perp)} \alpha_\Gamma^\sigma(k, \omega) K_\Gamma^{(m)\sigma'}(\vec{k}, \omega),$$

$$m = 0, 1.$$

Решая систему уравнений (33), (38), получаем

$$\vec{E}_z(\vec{k}_1, \omega) = \frac{\omega}{c\vec{k}_z} \frac{1}{\gamma_p(k_1, \omega)L_p(k_1, \omega)} \times \quad (40)$$

$$\times \left[\frac{\omega}{2ck_1} V(\vec{k}_1, \omega) - \Delta(k_1, \omega) \xi(k_1, \omega) \sum_{\sigma} \sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)\sigma}(\vec{k}_1, \omega) g_\sigma^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) \right];$$

$$G_\sigma^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) = \frac{1}{\gamma_p(k_1, \omega)L_p(k_1, \omega)} \left\{ \gamma_p^{(0)}(k_1, \omega)L_p^{(0)}(k_1, \omega)g_\sigma^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{2c^2k_1^2} V(\vec{k}_1, \omega) \eta_\sigma^{(m)}(k_1, \omega) + \right. \quad (41)$$

$$+ \frac{\omega}{ck_1} \frac{\xi(k_1, \omega)}{\Delta(k_1, \omega)} \sum_{\sigma'} \sum_{m'=0,1} (-1)^{m'} K^{(m')\sigma'}(\vec{k}_1, \omega) \times$$

$$\times [g_\sigma^{(m)}(\vec{k}_1, \omega)\eta_{\sigma'}^{(m')}(k_1, \omega) - g_{\sigma'}^{(m')}(k_1, \omega)\eta_\sigma^{(m)}(k_1, \omega)], \quad m = 0, 1.$$

Здесь

$$\eta_\sigma^{(m)}(k_1, \omega) = \alpha_\sigma^{(m)}(k_1, \omega) - i \frac{\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \vec{k}_z} \tilde{\alpha}_\sigma^{(m)}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1; \quad (42)$$

$$L_p(k_1, \omega) = 1 - r_p(k_1, \omega); \quad (43)$$

$$r_p(k_1, \omega) = \frac{i\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \vec{k}_z \gamma_p(k_1, \omega)} \left\{ [1 - \xi^2(k_1, \omega)] \times \right.$$

$$\times \Delta(k_1, \omega) + \frac{\omega}{ck_1} \xi(k_1, \omega) \sum_{\sigma} \sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)\sigma}(k_1, \omega) \tilde{\alpha}_\sigma^{(m)}(k_1, \omega) \left. \right\}; \quad (44)$$

$$\gamma_p(k_{\perp}, \omega) = \gamma_p^{(0)}(k_{\perp}, \omega) \Delta(k_{\perp}, \omega) + \quad (45)$$

$$+ \frac{\omega}{ck_{\perp}} \xi(k_{\perp}, \omega) \sum_{\sigma} \sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)\sigma}(k_{\perp}, \omega) \alpha_{\sigma}^{(m)}(k_{\perp}, \omega),$$

$\Delta(k_{\perp}, \omega)$ - детерминант системы уравнений (38), который удобно представить в виде

$$\Delta(k_{\perp}, \omega) = \det \|B(k_{\perp}, \omega)\| \quad (46)$$

- детерминанта блочной матрицы $\|B(k_{\perp}, \omega)\|$, состоящей из четырех квадратных матриц:

$$\|B(k_{\perp}, \omega)\| = \begin{vmatrix} B_0^{(0)}(k_{\perp}, \omega) & B_1^{(0)}(k_{\perp}, \omega) \\ B_0^{(1)}(k_{\perp}, \omega) & B_1^{(1)}(k_{\perp}, \omega) \end{vmatrix}, \quad (47)$$

имеющих одинаковый порядок, равный числу различных сортов l заряженных частиц в системе, и определяемых следующим образом:

$$B_0^{(0)}(k_{\perp}, \omega) = \|\delta_{\sigma\sigma'} - \beta_{\sigma\sigma'}^{(0)}(k_{\perp}, \omega)\|, \quad B_1^{(0)}(k_{\perp}, \omega) = \|\beta_{1\sigma\sigma'}^{(0)}(k_{\perp}, \omega)\|, \quad (48)$$

$$B_0^{(1)}(k_{\perp}, \omega) = \|\beta_{\sigma\sigma'}^{(1)}(k_{\perp}, \omega)\|, \quad B_1^{(1)}(k_{\perp}, \omega) = \|\delta_{\sigma\sigma'} + \beta_{1\sigma\sigma'}^{(1)}(k_{\perp}, \omega)\|.$$

Величины $g_{\sigma}^{(m)}(\vec{k}_{\perp}, \omega)$, $\alpha_{\sigma}^{(m)}(k_{\perp}, \omega)$, $\tilde{\alpha}_{\sigma}^{(m)}(k_{\perp}, \omega)$ получаются из выражения (46) путем замены в нем столбцов с номерами σ для $m = 0$ или $1 + \sigma$ при $m = 1$ на столбцы

$$\|h(\vec{k}_{\perp}, \omega)\| = (h_1^{(0)}(\vec{k}_{\perp}, \omega), h_2^{(0)}(\vec{k}_{\perp}, \omega), \dots,$$

$$h_1^{(0)}(\vec{k}_{\perp}, \omega), h_1^{(1)}(\vec{k}_{\perp}, \omega), h_2^{(1)}(\vec{k}_{\perp}, \omega), \dots, h_1^{(1)}(\vec{k}_{\perp}, \omega)),$$

$$\|\beta(k_{\perp}, \omega)\| = (\beta_1^{(0)}(k_{\perp}, \omega), \beta_2^{(0)}(k_{\perp}, \omega), \dots,$$

$$\beta_1^{(0)}(k_{\perp}, \omega), \beta_1^{(1)}(k_{\perp}, \omega), \beta_2^{(1)}(k_{\perp}, \omega), \dots, \beta_1^{(1)}(k_{\perp}, \omega)),$$

$$\|\tilde{\beta}(k_{\perp}, \omega)\| = (\tilde{\beta}_1^{(0)}(k_{\perp}, \omega), \tilde{\beta}_2^{(0)}(k_{\perp}, \omega), \dots,$$

$$\tilde{\beta}_1^{(0)}(k_1, \omega), \tilde{\beta}_1^{(1)}(k_1, \omega), \tilde{\beta}_2^{(1)}(k_1, \omega), \dots, \tilde{\beta}_1^{(1)}(k_1, \omega)$$

соответственно.

Полученные выражения (28), (29), (33) - (37), (39) - (48) полностью определяют распределение электромагнитного поля, создаваемого произвольным распределением источников, во всем пространстве в случае полуограниченной многокомпонентной плазмы со случайно рассеивающей границей (6), сохраняющей число и нормальную компоненту потока частиц.

На основе общих выражений нетрудно получить соответствующие результаты для более простых моделей случайно рассеивающей границы (11), (12), если воспользоваться предложенным в работе правилом перехода. Явный вид этих выражений приведен в работах [32 - 34] для моделей p_0, v_n и [34] для моделей p_1, v_n .

В случае однокомпонентной (электронной) плазмы выражения (40), (41) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z(\vec{k}_1, \omega) &= \frac{\omega}{c\tilde{k}_z} \frac{1}{\gamma_p(k_1, \omega)L_p(k_1, \omega)} \times \\ &\times \left[\frac{\omega}{2ck_1} v(\vec{k}_1, \omega)\Delta(k_1, \omega) - \xi(k_1, \omega) \sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)e}(k_1, \omega) g_e^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) \right], \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} g_e^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) &= \frac{1}{\gamma_p(k_1, \omega)L_p(k_1, \omega)} \left\{ \gamma_p^{(0)}(k_1, \omega)L_p^{(0)}(k_1, \omega)g_e^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) + \right. \\ &+ \frac{\omega^2}{2c^2k_1^2} v(\vec{k}_1, \omega)\eta_e^{(m)}(k_1, \omega) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\xi(k_1, \omega)}{\Delta(k_1, \omega)} K^{(m')e}(k_1, \omega)v(k_1, \omega) \times \\ &\times \left. [h_e^{(n)}(\vec{k}_1, \omega)\tilde{\eta}_e^{(v)n}(k_1, \omega) - h_e^{(v)n}(\vec{k}_1, \omega)\tilde{\eta}_e^{(n)}(k_1, \omega)] \right\}, \quad m, m' = 0, 1, \quad m' \neq m, \end{aligned}$$

где

$$g_e^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) = h_e^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) + \frac{\alpha}{1-\alpha} b^{(m')}(\vec{k}_1, \omega), \quad m, m' = 0, 1, \quad m' \neq m,$$

$$b^{(m)}(\vec{k}_1, \omega) = \beta_{\text{нео}}^{(n)}(k_1, \omega)h_e^{(v)n}(\vec{k}_1, \omega) - \beta_{\text{нео}}^{(v)n}(k_1, \omega)h_e^{(n)}(\vec{k}_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$\eta_e^{(m)}(k_1, \omega) = \tilde{\eta}_e^{(m)}(k_1, \omega) + \frac{\alpha}{1-\alpha} s^{(m')}(\omega), \quad m, m' = 0, 1, \quad m' \neq m,$$

$$s^{(m)}(k_1, \omega) = c^{(m)}(k_1, \omega) - i \frac{\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \tilde{k}_z} \tilde{c}^{(m)}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$c^{(m)}(k_1, \omega) = \beta_{000}^{(n)}(k_1, \omega) \beta_0^{(v_n)}(k_1, \omega) - \beta_{000}^{(v_n)}(k_1, \omega) \beta_0^{(n)}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$\tilde{c}^{(m)}(k_1, \omega) = \beta_{000}^{(n)}(k_1, \omega) \tilde{\beta}_0^{(v_n)}(k_1, \omega) - \beta_{000}^{(v_n)}(k_1, \omega) \tilde{\beta}_0^{(n)}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

$$\tilde{\eta}^{(n, v_n)}(k_1, \omega) = \beta^{(n, v_n)}(k_1, \omega) - i \frac{\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \tilde{k}_z} \beta_0^{(n, v_n)}(k_1, \omega), \quad (50)$$

$$v(k_1, \omega) = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \beta_{100}^{(n)}(k_1, \omega) \left[1 + \beta_{000}^{(v_n)}(k_1, \omega) \right] - \beta_{000}^{(n)}(k_1, \omega) \left[1 + \beta_{100}^{(v_n)}(k_1, \omega) \right] + \alpha \beta_{000}^{(v_n)}(k_1, \omega) - \beta_{100}^{(v_n)}(k_1, \omega) \right\},$$

$$r_p(k_1, \omega) = \frac{i\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \tilde{k}_z \gamma_p(k_1, \omega)} \left\{ \left[1 - \xi^2(k_1, \omega) \right] \Delta(k_1, \omega) + \frac{\omega}{ck_1} \xi(k_1, \omega) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)0}(k_1, \omega) \tilde{\beta}_0^{(m)}(k_1, \omega) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \tilde{d}(k_1, \omega) \right] \right\},$$

$$\gamma_p(k_1, \omega) = \gamma_p^{(0)}(k_1, \omega) \Delta(k_1, \omega) + \frac{\omega}{ck_1} \xi(k_1, \omega) \times$$

$$\times \left[\sum_{m=0,1} (-1)^m K^{(m)0}(k_1, \omega) \beta_0^{(m)}(k_1, \omega) + \frac{\alpha}{1-\alpha} d(k_1, \omega) \right],$$

$$\Delta(k_1, \omega) = 1 + \beta_{100}^{(1)}(k_1, \omega) - \beta_{000}^{(0)}(k_1, \omega) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \times$$

$$\times \left[\beta_{000}^{(n)}(k_1, \omega) \beta_{100}^{(v_n)}(k_1, \omega) - \beta_{100}^{(n)}(k_1, \omega) \beta_{000}^{(v_n)}(k_1, \omega) \right],$$

$$d(k_1, \omega) = K^{(0)0}(k_1, \omega) c^{(1)}(k_1, \omega) - K^{(1)0}(k_1, \omega) c^{(0)}(k_1, \omega),$$

$$\tilde{d}(k_1, \omega) = K^{(0)0}(k_1, \omega) \tilde{c}^{(1)}(k_1, \omega) - K^{(1)0}(k_1, \omega) \tilde{c}^{(0)}(k_1, \omega).$$

Коэффициент α введен таким образом, что равен единице для рассматриваемой модели (6) случайно рассеивающей границы, сохраняющей нормальную компоненту потока и число частиц при рассеянии, и обращается в нуль при переходе к любой из моделей

случайно рассеивающей границы (n_0, n_1, v_{n0}, v_{n1}), задаваемых условиями (11), (12).

Помимо этого можно существенно упростить некоторые величины, входящие в выражения (28), (49), если воспользоваться аналитичностью функций $X_{L,T}(\vec{k}, \omega)$. Явный вид этих величин приведен в работе [34].

3. На основе полученных выше соотношений не представляет труда получить решение задачи о наклонном падении плоской электромагнитной волны на плазменное полупространство, если заряженные частицы взаимодействуют с границей согласно условию (6). Представим падающее $\vec{E}^{inc}(\vec{r}, t)$ и рассеянное $\vec{E}^{sc}(\vec{r}, t)$ поля в виде

$$\vec{E}^{inc}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{inc} \exp[i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \tilde{k}_z z - \omega t)], \quad (51)$$

$$\vec{E}^{sc}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{sc}(\vec{k}_1, \omega) \exp[i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \tilde{k}_z z - \omega t)],$$

где

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{\omega}{c} \tilde{\epsilon}^{1/2} \sin\theta \cos\varphi, \frac{\omega}{c} \tilde{\epsilon}^{1/2} \sin\theta \sin\varphi, 0 \right), \quad \tilde{k}_z = \frac{\omega}{c} \tilde{\epsilon}^{1/2} \cos\theta,$$

θ и φ - полярный (относительно внешней нормали к поверхности плазмы) и азимутальный (между плоскостью падения и осью X) углы, задающие направление распространения падающей волны.

Амплитуды тангенциальных составляющих компонент электромагнитных полей падающей и рассеянной волн выражаются через нормальные компоненты E_z^{inc} , B_z^{inc} и $E_z^{sc}(\vec{k}_1, \omega)$, $B_z^{sc}(\vec{k}_1, \omega)$ согласно соотношениям (32), в которых необходимо выполнить замену $\tilde{k}_z \rightarrow -\tilde{k}_z$ для падающего поля.

Полагая в выражении (28) $\vec{J}^o(\vec{k}, \omega)$ и используя условия

$$E_i(\vec{k}_1, \omega) = E_i^{inc} + E_i^{sc}(\vec{k}_1, \omega), \quad i = x, y, \quad (52)$$

$$B_i(\vec{k}_1, \omega) = B_i^{inc} + B_i^{sc}(\vec{k}_1, \omega),$$

связывающие амплитуды тангенциальных составляющих компонент падающего, рассеянного и проникшего полей, получаем следующие выражения для нормальных составляющих компонент рассеянного поля:

$$E_z^{sc}(\vec{k}_1, \omega) = R_p(k_1, \omega) E_z^{inc}, \quad B_z^{sc}(\vec{k}_1, \omega) = R_s(k_1, \omega) B_z^{inc} \quad (53)$$

и тангенциальных компонент проникшего в плазму поля

$$E_i(\vec{k}_1, \omega) = \frac{2}{k_1^2} \left[\frac{r_p(k_1, \omega)}{L_p(k_1, \omega)} \tilde{k}_z k_i E_z^{inc} + \frac{r_s(k_1, \omega)}{L_s(k_1, \omega)} \frac{\omega}{c} e_{zij} k_j B_z^{inc} \right], \quad i = x, y, \quad (54)$$

$$B_1(\vec{k}_1, \omega) = \frac{2}{k_1^2} \left[\frac{1}{L_p(k_1, \omega)} \frac{\omega \tilde{\epsilon}}{c} e_{z1j} k_j E_z^{\text{inc}} - \frac{\tilde{k}_z}{L_s(k_1, \omega)} k_1 B_z^{\text{inc}} \right].$$

Здесь $R_{p,s}(k_1, \omega)$ - коэффициенты отражения плоских p - и s -поляризованных электромагнитных волн от плазменного полупространства

$$R_{p,s}(k_1, \omega) = - \frac{1+r_{p,s}(k_1, \omega)}{1-r_{p,s}(k_1, \omega)}, \quad (55)$$

где величины $r_{p,s}(k_1, \omega)$ определяются согласно выражениям (36), (44).

Энергетические коэффициенты отражения p - и s -поляризованных плоских волн равны $|R_{p,s}(k_1, \omega)|^2$. Поскольку величины $r_s(k_1, \omega)$ определяются одним и тем же выражением (36) для диффузной и случайно рассеивающих (6) границ, то и распределения рассеянного и проникшего в плазму полей являются одними и теми же для диффузной (10) и случайно рассеивающих границ (6), (11), (12). (Совпадение результатов для s -поляризованных волн для диффузной и случайно рассеивающих границ $n_0, v_n \neq 0$ было отмечено ранее в работах [31, 32].) Индуцированные токи $\vec{j}^{\sigma \text{ind}}(\vec{k}_1, z, \omega)$ и заряды $\rho^{\sigma \text{ind}}(\vec{k}_1, z, \omega)$ в плазме равны

$$\vec{j}^{\sigma \text{ind}}(\vec{k}_1, z, \omega) = e_{\sigma} n_{0\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \vec{v} \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega), \quad (56)$$

$$\rho^{\sigma \text{ind}}(\vec{k}_1, z, \omega) = e_{\sigma} n_{0\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega),$$

где отклонение функции распределения $\delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega)$ от своего невозмущенного распределения $f_{0\sigma}(\vec{v})$, с учетом нулевого продолжения электрического поля на область $z < 0$, следующим образом выражается через вероятность перехода:

$$\delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega) = \quad (57)$$

$$= \frac{e_{\sigma}}{(2\pi)^2 T_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v}' f_{0\sigma}(\vec{v}') W_{\sigma}(\vec{k}, \vec{v}; \vec{k}', \vec{v}'; \omega) (\vec{v}' \cdot \vec{E}(\vec{k}', \omega)) \exp(i k_z z).$$

Подставляя (54) в (28), представим электрическое поле в плазме через нормальные амплитуды E_z^{inc} и B_z^{inc} падающего поля:

$$\begin{aligned}
E_1(\vec{k}, \omega) = & \frac{1}{k^2} \left\{ k_1 \frac{2\tilde{k}_z}{k_1} L_p^{-1}(k_1, \omega) \left\{ \frac{ck_1}{\omega} \xi(k_1, \omega) \left[2\lambda_T(k_1, \omega) - i \frac{\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \tilde{k}_z} \right] \times \right. \right. \\
& \times X_L^-(\vec{k}, \omega) + \sum_{\sigma} \sum_{n=0,1} (-1)^n \left[X_L^-(\vec{k}, \omega) \left(K_L^{(n)\sigma^-}(\vec{k}, \omega) - K_L^{(n)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \xi(k_1, \omega) K_T^{(n)\sigma}(\vec{k}, \omega) \Big|_{k_z=ik_1} \right) + \left(1 - \frac{k^2}{k_z^2} \delta_{1z} \right) \frac{k_z}{k_1} \frac{\omega}{c} \frac{X_T^-(\vec{k}, \omega)}{k_z - ik_1} K_T^{(n)\sigma^-}(\vec{k}, \omega) \right] \times \\
& \left. \times \frac{\mu_{\sigma}^{(n)}(k_1, \omega)}{\Delta(k_1, \omega)} \right\} E_z^{inc} + \frac{\omega}{c} \frac{X_T^-(\vec{k}, \omega)}{k_z - ik_1} P_1(\vec{k}, \omega) \Big\}, \quad i = x, y, z, \quad (58)
\end{aligned}$$

где

$$P_1(\vec{k}, \omega) = \begin{cases} - \frac{k_1 \tilde{k}_z}{k_1^2} \frac{2}{L_p(k_1, \omega)} \left[\left[k_1 \gamma_s(k_1, \omega) + ik_z \right] \frac{c\tilde{k}_z}{\omega} r_p(k_1, \omega) - i \frac{\omega \tilde{\epsilon}}{c} \right] \times \\ \times E_z^{inc} - i \frac{2r_s(k_1, \omega)}{L_s(k_1, \omega)} \frac{k^2}{k_1^2} e_{z1j} k_j B_z^{inc}, \quad i=x, y, \\ \frac{2}{L_p(k_1, \omega)} \left[\left[k_1 \gamma_s(k_1, \omega) + ik_z \right] \frac{c\tilde{k}_z}{\omega} r_p(k_1, \omega) - i \frac{\omega \tilde{\epsilon}}{c} \right] E_z^{inc}, \\ i = z, \end{cases} \quad (59)$$

$$\tilde{\mu}_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega) = r_p(k_1, \omega) \beta_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega) - i \frac{\omega^2 \tilde{\epsilon}}{c^2 k_1 \tilde{k}_z} \tilde{\beta}_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega), \quad m = 0, 1,$$

а величины $\mu_{\sigma}^{(m)}(k_1, \omega)$ получатся из выражения (46) путем замены в нем столбца с номером σ для $m = 0$ и $1 + \sigma$ для $m = 1$ на столбец

$$|| \tilde{\mu}_{\sigma}(k_1, \omega) || = (\tilde{\mu}_1^{(0)}(k_1, \omega), \tilde{\mu}_2^{(0)}(k_1, \omega), \dots,$$

$$\tilde{\mu}_1^{(0)}(k_1, \omega), \tilde{\mu}_1^{(1)}(k_1, \omega), \tilde{\mu}_2^{(1)}(k_1, \omega), \dots, \tilde{\mu}_1^{(1)}(k_1, \omega)).$$

Остальные величины определяются теми же формулами, что и в рассмотренной выше задаче возбуждения плазмы заданными источниками.

Нетрудно показать, что при падении s -поляризованной волны в системе не возникает флуктуаций плотности заряда и нормальной компоненты индуцированного тока ($\rho^{\sigma 1nd}(\vec{k}_1, z, \omega) = 0$, $J_z^{\sigma 1nd}(\vec{k}_1, z, \omega) = 0$). Это представляется вполне естественным, поскольку вектор

напряженности электрического поля параллелен граничной плоскости $z = 0$. Более того, можно доказать, что при любых значениях координаты $z \geq 0$ равны нулю следующие величины:

$$\int_{(v_z < 0)} d\vec{v} \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega) = 0, \quad \int_{(v_z > 0)} d\vec{v} \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega) = 0, \quad (60)$$

$$\int_{(v_z < 0)} d\vec{v} v_z \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega) = 0, \quad \int_{(v_z > 0)} d\vec{v} v_z \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega) = 0.$$

Поскольку величины $\int_{(v_z < 0)} d\vec{v} \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z=+0, \vec{v}, \omega)$, $\int_{(v_z < 0)} d\vec{v} v_z \delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z=+0, \vec{v}, \omega)$

определяют правые части граничных условий [34] для функций распределения $\delta f_{\sigma}(\vec{k}_1, z, \vec{v}, \omega)$, которые аналогичны граничным условиям (7), (11), (12) для вероятности перехода, то для s -поляризованных волн правые части во всех граничных условиях для различных моделей случайно рассеивающей границы обращаются в нуль, что соответствует диффузной модели. Этим и объясняется независимость распределений электромагнитного поля s -поляризации от выбора модели случайно рассеивающей границы. Как следует из (56) - (58), в случае падения p -поляризованной волны ни плотность частиц, ни нормальная компонента индуцированного тока, равно как и величины (60), в нуль не обращаются. Поэтому каждой модели случайно рассеивающей границы отвечает свое распределение электромагнитного поля в системе.

4. В заключение отметим, что полученное в настоящей работе общее решение задачи возбуждения плазменного полупространства заданным распределением источников может быть использовано в дальнейшем как при исследовании полей излучения конкретных детерминированных источников, так и для построения корреляционной теории полуграниченной плазмы с различными моделями случайно рассеивающей границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fuchs K. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1938. V.34. N 1. P.100.
2. Reuter G.E.H., Sondheimer E.H. // Proc. Roy. Soc. 1948. V.A195. N 1042. P.336.
3. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. - М.: Госатомиздат, 1961. - 244 с.
4. Кондратенко А. Н. Проникновение поля в плазму. - М.: Атомиздат, 1979. - 231 с.
5. Ландау Л. Д. // ЖЭТФ. 1946. Т.16. Вып. 7. С.574.
6. Силин В. П. // ЖЭТФ. 1961. Т.40. Вып. 2. С.616.
7. Силин В. П., Фетисов Е. П. // ЖЭТФ. Т.41. Вып. 1(7). С.159.
8. Khandpur G.K., Varma N.L. // Z.Physik. 1972. V.252. N 1. P.39.
9. Калмыкова С. С. // ЖТФ. 1973. Т.43. Вып. 5. С.952.
10. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. - М.: Энергоиздат, 1985. - 208 с.
11. Романов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. N 2. С. 242.
12. Мирошниченко В. И. // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 6. С. 1008.
13. Резвов А. В. // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 5. С. 916.
14. Резвов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т.13. N 5. С.688.

15. Guernsey R.L. //Phys.Fluids. 1969. V.12. N 9. P.1852.
16. Clemmow P.C., Karunarathne V.B. //J.Plasma Phys. 1970. V.4. N 1. P.67.
17. Kliewer K.L., Fuchs R. //Phys. Rev. 1970. V.2. N 8. P.2923.
18. Bolduc P.E., Klevans E.H. //Phys.Fluids. 1971. V.14. N 2. P.378.
19. Karunarathne V.B. //J.Plasma Phys. 1972. V.7. N 3. P.513.
20. Shukla K.L. //Z.Physik. 1974. V.270. N 3. P.285.
21. Klimontovich Yu.L., Wilhelmsson H., Yakimenko I.P., Zagorodny A.G. //Phys.Rep. 1989. V.175. N 5/6. P.263.
22. Ситенко А. Г., Якименко И. П. //Проблемы теории плазмы. - Киев: Наукова думка, 1972. - С. 22.
23. Якименко И. П. //Проблемы теории плазмы. - Киев: Наукова думка, 1976. - С. 80.
24. Yakimenko I.P., Zagorodniy A.G. //Physica Scripta. 1976. V.14. N 5. P.242.
25. Загородний А. Г., Якименко И. П. //Физика плазмы. 1978. Т. 4. Вып. 2. С. 220.
26. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. N 5. С. 539.
27. Gorman D. //Phys.Fluids. 1967. V.10. N 11. P.2502.
28. Романов Ю. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т.11. N 10. С.1533.
29. Дряхлушин В. Ф., Романов Ю. А. //ЖТФ. 1968. Т.38. Вып. 9. С.1442.
30. Романова В. И. //ЖТФ. 1973. Т.43. Вып. 11. С. 2281.
31. Usenko A.S., Yakimenko I.P. //Physica Scripta. 1981. V.24. N 4. P.785.
32. Usenko A.S., Yakimenko I.P., Zagorodny A.G. //Physica Scripta. 1985. V.32. N 3. P.225.
33. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. //Физика многочастичных систем. 1987. Вып. 11. С. 36.
34. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. Препринт ИТФ-90-41Р. Киев, 1990.
35. Ichimaru S., Yakimenko I.P. //Physica Scripta. 1973. V.7. N 5. P.198.
36. Шафранов В. Д. //Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. - М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 3.
37. Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме. - Харьков: Гос. ун-т, 1965. - 184 с.
38. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. - М.: Наука, 1967. - 308 с.
39. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. - М.: Наука, 1975. - 288 с.

40. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. - М.: Наука, 1975. - 372 с.
41. Резвов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 3. С. 343.
42. Мухелишвили М. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 511 с.

Институт теоретической физики
АН Украины

Поступила в редакцию
19 июля 1990 г.

KINETIC THEORY OF SEMI-BOUNDED PLASMA WITH RANDOM
SCATTERING BOUNDARY

A. G. Zagorodnij, A. S. Usenko, I. P. Yakimenko

The electromagnetic fields generated by an arbitrary distribution of sources in the semi-bounded plasma at the random scattering of charged particles by the boundary surface are calculated. The model of boundary condition conserving the number of particles as well as the absence of the particle flow through the boundary is used. The electric susceptibility tensors, surface impedances, coefficients of reflection of plane electromagnetic waves by a plasma half-space have been obtained. It is shown that *s*-polarized electromagnetic fields are the same for all models of random scattering boundary under the consideration.

УДК 621.396.6

АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ
РЕШЕТКИ С НЕЗАВИСИМЫМ ФОРМИРОВАНИЕМ ОПОРНОГО СИГНАЛА

С. В. Игнатенко, А. А. Мальцев, А. М. Силаев

В стационарном режиме работы исследованы статистические характеристики адаптивной антенной решетки, вектор весовых коэффициентов которой настраивается с помощью градиентного алгоритма минимизации среднеквадратичной ошибки, а в качестве опорного сигнала используется нелинейное безынерционное преобразование выхода решетки. Рассмотрен случай фазоманипулированного полезного сигнала, гауссовых помех и шумов. Найдено оптимальное нелинейное преобразование для формирования опорного сигнала, при котором одновременно достигаются минимум среднеквадратичной ошибки оценивания сигнала и максимум выходного отношения сигнал/шум. Теоретические результаты проверены с помощью моделирования на ЭВМ.

1. Введение. Для реализации наиболее распространенных алгоритмов настройки адаптивных антенных решеток (ААР) требуется или задание направления прихода полезного сигнала (вектор его волнового фронта) или наличие на приемном конце некоторого опорного ("желаемого") сигнала [1 - 6]. В приемных ААР радиосвязных систем направление прихода полезного сигнала, как правило, априори неизвестно. Поэтому для настройки весовых коэффициентов в таких системах используются алгоритмы минимизации среднеквадратичной ошибки (МСКО) между выходным сигналом системы обработки и опорным сигналом [3 - 6]. При отсутствии специальных настроечных сигналов в передаваемом сообщении возникает задача независимого формирования опорного сигнала в самом приемнике. Для решения этой задачи принципиально необходимо, чтобы существовало некоторое априорно заданное различие в статистических характеристиках полезного сигнала и помех.

В настоящей работе рассматривается случай приема сигналов с двоичной фазовой манипуляцией (ФМ) на фоне гауссовых помех в системе связи с ААР, использующей алгоритм МСКО. Сигналы с такой модуляцией широко применяются в современных системах связи. Статистические характеристики адаптивных решеток при приеме фазомодулированных сигналов исследовались и ранее, например, в работах [6 - 10]. В этих работах в качестве формирователя опорного сигнала рассматривался идеальный ограничитель, который устраняет зависимость уровня опорного колебания от величины весовых коэффициентов ААР. Вопросы оптимальности и анализа статистических характеристик ААР при других способах формирования опорного сигнала при этом не исследовались.

2. Постановка задачи. Функциональная схема узкополосной ААР с формированием опорного сигнала приведена на рис. 1. Уравнение адаптивного градиентного алгоритма МСКО, описывающее установление

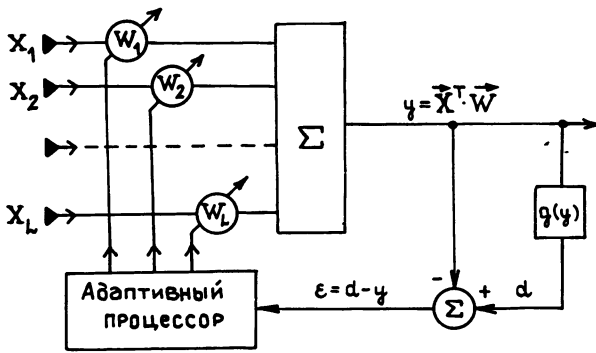


Рис 1

комплексного вектора регулируемых весовых коэффициентов $\vec{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_L\}^T$ имеет вид

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) + \mu \vec{X}^*(k) [d(k) - \vec{X}^T(k) \vec{W}(k)], \quad (1)$$

где $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_L\}^T$ - вектор комплексных амплитуд сигналов в ААР после входных фильтров, μ - коэффициент усиления обратной связи, $*$ - знак комплексного сопряжения, T - транспонирование. Считая расстояние между элементами решетки порядка длины волны и пренебрегая запаздыванием в медленных огибающих и фазах сигналов и помех, представим вектор комплексных амплитуд сигналов на выходах приемных элементов ААР в виде суммы

$$\vec{X}(k) = s_0(k) \vec{S} + \sum_{j=1}^J f_j(k) \vec{\Psi}_j + \vec{\eta}(k), \quad (2)$$

где $s_0(k)$, $f_j(k)$ описывают временные изменения комплексных амплитуд сигнала и j -й помехи; J - число помех; $\vec{\eta}(k)$ - аддитивный собственный шум антенны; \vec{S} , $\vec{\Psi}_j$ - вектор-фазоры (векторы волновых фронтов) полезного сигнала и j -й помехи [1, 2]. Предположим, что отсчеты помеховых сигналов и шумов в разные моменты времени статистически взаимонезависимы, распределены по комплексному нормальному закону [3] с нулевыми средними значениями и их взаимные корреляционные функции равны

$$\langle f_i^*(k) f_j(k) \rangle = D_j \delta_{ij}, \quad \langle \eta_m^*(k) \eta_n(k) \rangle = D_\eta \delta_{mn} \\ (i, j = \overline{1, J}), \quad (m, n = \overline{1, L}), \quad (3)$$

где δ_{ij} , δ_{mn} - символы Кронекера. Полезный сигнал будем описывать последовательностью $s_0(k) = a_s s(k)$, где a_s - постоянная комплексная величина, характеризующая мощность сигнала $\langle |s_0(k)|^2 \rangle = |a_s|^2 = D_s$; процесс $s(k)$ принимает значения 1 или -1 с вероятностью 0,5 на

каждом шаге и описывает двоичный ФМ-сигнал.

Если предположить, что на приемной стороне заранее известны значения $s(k)$, то в алгоритме адаптации (1) в качестве опорного сигнала можно использовать $d(k) = s(k)$, тогда вектор весовых коэффициентов $\vec{w}(k)$ с течением времени в среднем установится равным оптимальному значению [3]

$$\vec{w}_{\text{опт}} = \alpha_s^* R_{xx}^{-1} \vec{S}^* \quad (4)$$

где

$$R_{xx} = \langle \vec{X}^* \vec{X}^T \rangle = D_{\eta} I + D_s \vec{S}^* \vec{S}^{*T} + \sum_{j=1}^J D_j \vec{\Psi}_j^* \vec{\Psi}_j^T \quad (5)$$

- матрица корреляции входных сигналов, I - единичная матрица. При этом помехи будут подавлены и будет обеспечена минимальная величина среднеквадратичной ошибки между выходом антенны $y(k) = \vec{X}^T(k) \vec{w}(k)$ и опорным сигналом $d(k) = s(k)$.

Заметим, что при выполнении равенства (4) одновременно максимизируется и выходное отношение ρ мощности полезного сигнала к суммарной мощности помех и шумов

$$\rho_0 = \frac{D_s |\vec{S}^{*T} \vec{w}_{\text{опт}}|^2}{\sum_{j=1}^J D_j |\vec{\Psi}_j^T \vec{w}_{\text{опт}}|^2 + D_{\eta} \vec{w}_{\text{опт}}^T \vec{w}_{\text{опт}}} = \frac{D_s \vec{S}^{*T} R_{xx}^{-1} \vec{S}^*}{1 - D_s \vec{S}^{*T} R_{xx}^{-1} \vec{S}^*} \quad (6)$$

Это максимальное значение сигнал/шум может быть записано также в другом виде [3]: $\rho_0 = D_s \vec{S}^{*T} R_{nn}^{-1} \vec{S}^*$, где $R_{nn} = D_{\eta} I + \sum_{j=1}^J D_j \vec{\Psi}_j^* \vec{\Psi}_j^T$ - корреляционная матрица только помех и шумов. Таким образом, решение (4) является оптимальным и по критерию МСКО и по критерию максимума отношения сигнал/шум (МОСШ).

На практике закон модуляции полезного сигнала заранее не известен. Поэтому при реализации алгоритма настройки (1) возникает задача формирования опорного сигнала $d(k)$, оптимального по критерию МОСШ или МСКО, в самой адаптивной системе.

3. Формирование опорного сигнала, оптимального по критерию МОСШ. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда опорный сигнал $d(k)$ формируется в результате некоторого нелинейного безынерционного преобразования выходного сигнала решетки:

$$d(k) = g[y(k)] = g[\vec{X}^T(k) \vec{w}(k)]. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1), получим нелинейное разностное уравнение, описывающее процесс настройки весовых коэффициентов решетки. Усредним уравнение (1) с учетом (7) по статистическим характеристикам принимаемых сигналов и шумов. В результате для среднего значения вектора весовых коэффициентов $\hat{\vec{w}}(k) = \langle \vec{w}(k) \rangle$ получим уравнение

$$\hat{\vec{w}}(k+1) = \hat{\vec{w}}(k) + \mu [\vec{P}_{xd}(k) - R_{xx} \hat{\vec{w}}(k)], \quad (8)$$

где $\vec{P}_{xd}(k) = \langle \vec{X}^*(k) g[\vec{X}^T(k) \vec{w}(k)] \rangle$ - вектор взаимной корреляции

входного сигнала $\vec{X}(k)$ с опорным колебанием $d(k)$. Отметим, что при выводе (8) использовалась формула прямого размыкания $\langle \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k) \rangle = \langle \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \rangle \langle \vec{W}(k) \rangle = R_{xx} \hat{W}(k)$, которая следует из предположения о независимости отсчетов $\vec{X}(k)$ в разные моменты времени.

При нахождении вектора $\vec{P}_{xd}(k)$ применим известное соотношение для размыкания моментных скобок [11]

$$\langle zf(z) \rangle = \langle z^2 \rangle \langle \partial f(z) / \partial z \rangle, \quad (9)$$

где z - гауссова случайная величина с нулевым средним значением. Учитывая, что в модели (2) входного сигнала $\vec{X}(k)$ величина $s(k)$ принимает с равной вероятностью значения ± 1 , а помехи $f_j(k)$, $j = \overline{1, J}$, и шумы $\vec{\eta}(k)$ - комплексные гауссовы случайные величины с нулевым средним, для вектора взаимной корреляции в силу (9) получим выражение

$$\vec{P}_{xd}(k) = \alpha_s^* \mathcal{P}(k) \vec{S}^* + Q(k) R_{nn} \hat{W}(k). \quad (10)$$

Здесь функции $\mathcal{P}(k)$ и $Q(k)$ определяются следующим образом:

$$\mathcal{P}(k) = \{ \langle g[\xi_1(k)] \rangle - \langle g[\xi_2(k)] \rangle \} / 2, \quad (11)$$

$$Q(k) = \{ \langle h[\xi_1(k)] \rangle + \langle h[\xi_2(k)] \rangle \} / 2,$$

где

$$\xi_1(k) = [\alpha_s \vec{S} + \sum_{j=1}^J f_j(k) \vec{\psi}_j + \vec{\eta}(k)]^T \vec{W}(k),$$

$$\xi_2(k) = [-\alpha_s \vec{S} + \sum_{j=1}^J f_j(k) \vec{\psi}_j + \vec{\eta}(k)]^T \vec{W}(k),$$

$h(z) = dg(z)/dz$, а усреднение проводится по статистическим характеристикам процессов $\vec{\eta}(k)$, $\vec{W}(k)$, $f_j(k)$, $j = \overline{1, J}$. Подставляя (10) в (8) и учитывая представление (5), получим

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1) = & \hat{W}(k) + \mu \{ \alpha_s^* [\mathcal{P}(k) - \alpha_s \vec{S}^T \hat{W}(k) Q(k)] \vec{S}^* - \\ & - [1 - Q(k)] R_{xx} \hat{W}(k) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем среднее значение вектора весовых коэффициентов в установившемся режиме.

Если уравнение (12) имеет стационарное решение $\hat{W}(k) = \hat{W}_{ст}$, то очевидно, что это решение должно удовлетворять или системе уравнений

$$Q = 1, \quad \mathcal{P} = \alpha \hat{\mathcal{S}}^T \hat{\mathcal{W}}, \quad (13)$$

или нелинейному уравнению

$$R_{xx} \hat{\mathcal{W}} = [(\mathcal{P} - \alpha \hat{\mathcal{S}}^T \hat{\mathcal{W}} Q) / (1 - Q)] \alpha^* \hat{\mathcal{S}}^*, \quad Q \neq 1. \quad (14)$$

Какое из решений - (13) или (14) - реализуется на практике определяется его устойчивостью и зависит от вида нелинейности в цепи обратной связи ААР.

Предположим, что реализуется стационарное решение, соответствующее уравнению (14). Тогда из (14) следует, что

$$\hat{\mathcal{W}}_{ст} = [(\mathcal{P} - \alpha Q \hat{\mathcal{S}}^T \hat{\mathcal{W}}_{ст}) / (1 - Q)] \alpha^* R_{xx}^{-1} \hat{\mathcal{S}}^*. \quad (15)$$

Умножим левую и правую части уравнения (15) на вектор-строку $\hat{\mathcal{S}}^T$ слева. Решая полученное уравнение относительно $\hat{\mathcal{S}}^T \hat{\mathcal{W}}_{ст}$, найдем

$$\hat{\mathcal{S}}^T \hat{\mathcal{W}}_{ст} = \alpha^* \mathcal{P} \hat{\mathcal{S}}^T R_{xx}^{-1} \hat{\mathcal{S}}^* / [1 - Q(1 - D \hat{\mathcal{S}}^T R_{xx}^{-1} \hat{\mathcal{S}}^*)].$$

Подставляя данное выражение в (15), запишем стационарное значение в явном виде:

$$\hat{\mathcal{W}}_{ст} = \mathcal{P} \alpha^* R_{xx}^{-1} \hat{\mathcal{S}}^* / [1 - Q(1 - D \hat{\mathcal{S}}^T R_{xx}^{-1} \hat{\mathcal{S}}^*)]. \quad (16)$$

Сравнивая (16) с (4), нетрудно увидеть, что вектор $\hat{\mathcal{W}}_{ст}$ пропорционален вектору $\hat{\mathcal{W}}_{опт}$. А это значит, что полученное решение является оптимальным по критерию МОСШ, если только коэффициент μ в алгоритме адаптации (1) достаточно мал, так что флуктуации вектора $\hat{\mathcal{W}}(k)$ вблизи среднего значения $\hat{\mathcal{W}}_{ст}$ незначительно влияют на мощность выходных сигналов ААР [12].

Таким образом, в рассматриваемой задаче (приема ФМ-сигнала в смеси с гауссовыми помехами и шумом) для формирования опорного сигнала, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе системы в стационарном режиме, может быть использовано нелинейное безынерционное преобразование достаточно общего вида (7). При этом максимальное значение отношения сигнал/шум ρ_0 не зависит от конкретного вида нелинейности $d = g(y)$ в цепи обратной связи ААР. Необходимо лишь, чтобы стационарное решение (16), соответствующее уравнению (14), было устойчивым, а решение, удовлетворяющее системе уравнений (13), было неустойчивым.

4. Формирование опорного сигнала, оптимального по критерию МСКО. Выходной сигнал ААР $y(k) = \hat{\mathcal{X}}^T(k) \hat{\mathcal{W}}(k)$ можно представить в виде

$$y(k) = \mathbf{A}_s(k) s(k) + \xi(k), \quad (17)$$

где последовательность $\xi(k) = \sum_{j=1}^J f_j(k) \hat{\mathcal{V}}_j^T \hat{\mathcal{W}}(k) + \hat{\eta}^T(k) \hat{\mathcal{W}}(k)$ описывает

помехи и шум, $A_s(k) = \alpha_s \hat{S}^T \hat{W}(k)$ - амплитуду полезного сигнала на выходе решетки. В качестве опорного сигнала $d(k)$ в алгоритме адаптации весовых коэффициентов решетки естественно использовать оценку $\hat{s}(k)$ сигнала $s(k)$, оптимальную, например, по критерию минимума среднеквадратичной ошибки $\langle [s(k) - \hat{s}(k)]^2 \rangle = \min$. Рассмотрим задачу оптимального оценивания последовательности $s(k)$ по наблюдениям $y(k)$, модель которых задана уравнением (17). Поскольку сигнал $s(k)$ на каждом шаге может принимать только два значения 1 или -1, то и возможное число значений оценки $\hat{s}(k)$ ограничим всего двумя, равными ± 1 . При таком ограничении можно показать, что среднеквадратичная ошибка оценивания сигнала $\langle [s(k) - \hat{s}(k)]^2 \rangle$ будет минимальной, если оценка находится по правилу

$$\hat{s}(k) = \text{sgn} [\ln \Lambda(k)], \quad (18)$$

где $\Lambda(k) = P\{y(k)|s(k) = 1\}/P\{y(k)|s(k) = -1\}$ - отношение правдоподобия; $\text{sgn}(z)$ - знаковая функция

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}$$

Величина комплексной амплитуды сигнала $A_s(k)$ в (17) заранее не определена, кроме того, вектор весовых коэффициентов $\hat{W}(k)$ также не известен. Поэтому функции правдоподобия следует находить путем усреднения по $A_s(k)$ и $\hat{W}(k)$:

$$P\{y(k)|s(k) = \pm 1\} = \langle P\{y(k)|s(k) = \pm 1, A_s(k), \hat{W}(k)\} \rangle. \quad (19)$$

Вектор весовых коэффициентов в стационарном режиме испытывает медленные флуктуации вблизи среднего значения, интенсивность которых пропорциональна величине параметра μ в алгоритме адаптации (1) [3, 4, 11]. Считая μ достаточно малым, при вычислении (19) воспользуемся свойством малости флуктуаций $\hat{W}(k)$ и $A_s(k)$ вблизи их

средних значений $\langle \hat{W}(k) \rangle = \hat{W}(k)$ и $\langle A_s(k) \rangle = \hat{A}_s(k) = \alpha_s \hat{S}^T \hat{W}(k)$.

Суммарную мощность помех и шума на выходе ААР в пренебрежении флуктуациями весового вектора можно находить по формуле

$$D_\xi(k) = \langle |\xi(k)|^2 \rangle \approx \sum_{j=1}^J D_j |\hat{\Psi}_j^T \hat{W}(k)|^2 + D_\eta \hat{W}^T(k) \hat{W}^*(k). \quad (20)$$

Считая, что $D_\xi(k)$ значительно превышает мощность флуктуаций процессов $A_s(k)$ и $\hat{W}(k)$, при вычислении (19) приближенно получим

$$P\{y(k)|s(k) = \pm 1\} \approx P\{y(k)|s(k) = \pm 1, \hat{A}_s(k), \hat{W}(k)\}.$$

В силу гауссовости помех $f_j(k)$, $j = \overline{1, J}$, и шума $\hat{\eta}(k)$ процесс $\xi(k)$ в

уравнении (17) при фиксированном значении вектора $\vec{w}(k)$ является также гауссовым. Это позволяет представить отношение правдоподобия $\Lambda(k)$ в следующем приближенном виде:

$$\begin{aligned} \Lambda(k) &= P[y(k) | s(k) = 1, \hat{a}_s(k), \hat{w}(k)] / P[y(k) | s(k) = -1, \hat{a}_s(k), \hat{w}(k)] = \\ &= \exp\{[|y(k) + \hat{a}_s(k)|^2 - |y(k) - \hat{a}_s(k)|^2] / [2D_\xi(k)]\} = \\ &= \exp\{2 \operatorname{Re}[y(k) \hat{a}_s^*(k)] / D_\xi(k)\}. \end{aligned}$$

Подставляя данное выражение в (18) и учитывая положительность дисперсии $D_\xi(k)$, находим оптимальную оценку

$$\hat{s}(k) = \operatorname{sgn}\{\operatorname{Re}[y(k) \hat{a}_s^*(k)]\}. \quad (21)$$

Примем во внимание, что в стационарном режиме амплитуду полезного сигнала на выходе ААР $\hat{a}_s(k) = \alpha_s \vec{s}^T \hat{w}_{\text{ст}}$ в силу (16) можно считать приближенно постоянной действительной величиной. Учтем также, что при формировании опорного сигнала в ААР важно сохранить корреляцию между $d(k)$ и $s(k)$, а полярность $d(k)$ для настройки системы не имеет большого значения, поскольку не меняет корреляции. Поэтому знаком амплитуды $\hat{a}_s(k)$ в (21) можно пренебречь и правило формирования опорного сигнала (21) заменить более простым:

$$d(k) = \operatorname{sgn}\{\operatorname{Re}[y(k)]\} = \operatorname{sgn}\{\operatorname{Re}[\vec{x}^T(k) \vec{w}(k)]\}. \quad (22)$$

При этом в стационарном режиме работы опорный сигнал (22) является оптимальным (с точностью до полярности) по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценивания сигнала $s(k)$.

5. Анализ статистических характеристик ААР в стационарном режиме. Исследуем на устойчивость стационарные решения (13), (16)

для среднего значения $\hat{w}(k)$ вектора весовых коэффициентов ААР при использовании в алгоритме настройки (1) опорного сигнала (22).

Пренебрегая флуктуациями вектора $\vec{w}(k)$, по формулам (11) найдем функции $\mathcal{P}(k)$ и $Q(k)$ для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k) &= \operatorname{erf}\{\operatorname{Re}[\alpha_s \vec{s}^T \hat{w}(k)] / \sqrt{D_\xi(k)}\}, \\ Q(k) &= [1 / \sqrt{\pi D_\xi(k)}] \exp\{-[\operatorname{Re}(\alpha_s \vec{s}^T \hat{w}(k))]^2 / D_\xi(k)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\operatorname{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-u^2) du$ - функция ошибок, а величина $D_\xi(k)$ определяется по формуле (20).

Подставляя (20), (23) в (13), после упрощений получим для первого стационарного решения $\hat{\vec{W}}_{\text{CT}}$ систему уравнений

$$\hat{\vec{S}}^T \hat{\vec{W}}_{\text{CT}} = 0, \quad \sum_{j=1}^J D_j |\hat{\vec{\Psi}}_j^T \hat{\vec{W}}_{\text{CT}}|^2 + D_\eta \hat{\vec{W}}_{\text{CT}}^T \hat{\vec{W}}_{\text{CT}}^* = 1/\pi. \quad (24)$$

Данные уравнения описывают некоторое множество стационарных значений $\hat{\vec{W}}_{\text{CT}}$ в пространстве \vec{W} . Линеаризуя разностное уравнение (12) в малой окрестности вблизи произвольного вектора $\hat{\vec{W}}_{\text{CT}}$ из этого множества и анализируя затем полученную систему линейных уравнений на устойчивость, можно показать, что все точки данного множества стационарных решений являются неустойчивыми, если только $\alpha_s \neq 0$.

Второе стационарное значение $\hat{\vec{W}}_{\text{CT}}$ получим, решая нелинейное уравнение (16) после подстановки в него (20), (23). Поскольку при таком весовом векторе соотношение сигнал/шум ρ на выходе антенны достигает максимума, в силу (6) равного ρ_0 , то представляется удобным выразить все основные параметры ААР через величину ρ_0 . Заметим только, что вследствие нечетности нелинейного преобразования (22) уравнение (16) имеет два решения, различающиеся знаками. В результате получим

$$\hat{\vec{W}}_{\text{CT}} = \pm k \alpha_s^* R_{xx}^{-1} \hat{\vec{S}}^*,$$

$$k = \exp(-\rho_0)/\sqrt{\pi\rho_0} + \text{erf}(\sqrt{\rho_0}). \quad (25)$$

Функции \mathcal{P} , \mathcal{Q} , выходная мощность сигнала P_c , суммарная мощность помех и шума на выходе ААР $P_{\text{п.ш}}$, а также вероятность ошибки оценивания сигнала $s(k)$ на каждом шаге (вероятность неправильной передачи одного бита информации) $P_{\text{ош}}$ соответственно равны:

$$\mathcal{P} = \pm \text{erf}(\sqrt{\rho_0}), \quad \mathcal{Q} = (1 + \rho_0) \exp(-\rho_0) / (k\sqrt{\pi\rho_0}),$$

$$P_c = k^2 \rho_0^2 / (1 + \rho_0)^2, \quad P_{\text{п.ш}} = k^2 \rho_0 / (1 + \rho_0)^2, \quad (26)$$

$$P_{\text{ош}} = [1 - \text{erf}(\sqrt{\rho_0})] / 2.$$

Линеаризуем уравнение (12) в малой окрестности вблизи стационарных точек (25) и исследуем на устойчивость для малых возмущений весового вектора. В итоге с помощью известных методов матричного анализа (см. теорему 7.7.6 в [13]) можно доказать, что стационарные точки (25) являются устойчивыми. Поскольку других стационарных решений кроме перечисленных уравнение (12) при нелинейности (22) не имеет, то отсюда следует вывод, что вектор

весовых коэффициентов $\hat{W}(k)$ с течением времени в среднем сходится к одной из стационарных точек (25). При этом достигается максимум выходного отношения сигнал/шум и одновременно обеспечивается минимум среднеквадратичной ошибки оценивания сигнала. Таким образом, решение (25) является "дважды" оптимальным подобно идеальному решению (4).

Представляется интересным рассмотреть выражение (26) в частных случаях большого и малого соотношения сигнал/шум. Уже при $\rho_0 \geq 3$ из (25), (26) приближенно получим

$$k \approx 1, \hat{W}_{\text{СТ}} = \pm \alpha_s^* R_{\text{xx}}^{-1} \hat{S}^*, P_c = \rho_0^2 / (1 + \rho_0)^2, P_{\text{п.ш}} = \rho_0 / (1 + \rho_0)^2,$$

$$P_{\text{ош}} = \exp(-\rho_0) / (2\sqrt{\pi\rho_0}).$$

При этом вероятность ошибки оценивания сигнала быстро уменьшается с увеличением ρ_0 , а мощность сигнала и суммарная мощность помехи и шума равны значениям, соответствующим идеальному весовому вектору (4). В этом случае ошибки оценивания полезного сигнала столь редки, что фактически осуществляется переход к формированию опорного сигнала в виде $d(k) = s(k)$.

При $\rho_0 \ll 1$ из (25), (26) найдем $\hat{W} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha_s^*}{|\alpha_s|} \frac{R_{\text{xx}}^{-1} \hat{S}^*}{(\hat{S}^T R_{\text{xx}}^{-1} \hat{S}^*)^{1/2}}$

$k = 1/\sqrt{\pi\rho_0}$, $P_c = \rho_0/\pi$, $P_{\text{п.ш}} = 1/\pi$, $P_{\text{ош}} = 1/2 - \sqrt{\rho_0/\pi}$. В частности, при отсутствии полезного сигнала имеем $\alpha_s = 0$, $\rho_0 = 0$. В этом предельном случае осуществляется переход от (25) к стационарному решению (24), которое при $\alpha_s = 0$ становится устойчивым.

6. Результаты моделирования на ЭВМ. С целью проверки полученных выше соотношений было проведено моделирование на ЭВМ адаптивной антенной системы, состоящей из четырех всенаправленных приемных элементов, расположенных в вершинах квадрата с диагоналями, равными половине длины волны, с формированием опорного сигнала с помощью идеального ограничителя (22). Предполагалось, что полезный ФМ-сигнал единичной мощности $D_s = 1$ приходил с направления вдоль одной из диагоналей квадрата. Случайный помеховый сигнал мощностью D_1 , приходящий с направления под углом α по отношению к направлению прихода сигнала, предполагался распределенным по комплексному нормальному закону [3]. Кроме того, в каждом приемном элементе решетки задавался комплексный белый гауссов шум мощностью $D_\eta = 0,5$. Параметр μ в градиентном алгоритме адаптации (1) выбирался равным $\mu = 10^{-3}$.

Результаты моделирования, характеризующие эффективность подавления антенной решеткой в установленном режиме, представлены на рис. 2 - 5. На рис. 2 - 4 приведены зависимости выходного отношения сигнал/шум ρ , мощности сигнала P_c и мощности помехи $P_{\text{п}}$ при двух

различных углах прихода помехи $\alpha = 15^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$ в зависимости от величины отношения помеха/сигнал (P/C) на входе решетки D_1/D_s . На рис. 5 представлены графики вероятности ошибки оценивания сигнала $P_{\text{ош}}$. Точками и сплошными линиями на рисунках даны экспериментальные

зависимости, пунктиром - теоретические кривые, рассчитанные по формулам (6), (25), (26).

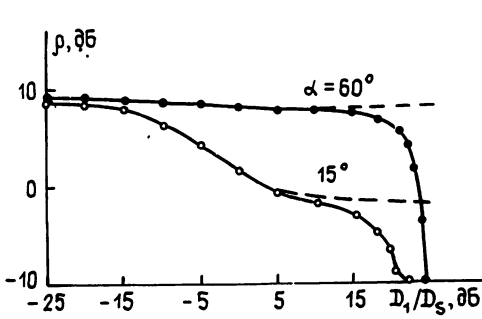


Рис 2

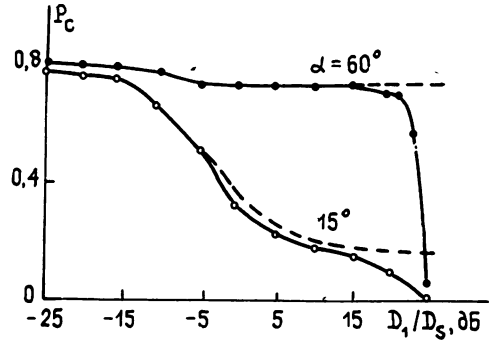


Рис 3

Из рисунков видно, что антенная решетка лучше подавляет помеху, угловое расстояние которой от полезного сигнала больше. В области, где соотношение П/С < 10 дБ, результаты моделирования близки к теоретическим. При этом достигается предельно возможное подавление помехи антенной решеткой. При слишком большой мощности входной помехи (П/С > 10 дБ) на результаты моделирования начинают влиять эффекты, связанные с флуктуациями весовых коэффициентов ААР, которые не учитывались в представленной выше теории. Как видно из графиков на рис. 2 - 4, флуктуации вектора $\vec{w}(k)$ приводят к уменьшению отношения сигнал/шум из-за проникновения мощной помехи на выход системы. Это ухудшает точность оценивания полезного сигнала в схеме формирования опорного колебания (вероятность ошибки оценивания сигнала на рис. 5 резко возрастает), что, в свою очередь, еще сильнее снижает эффективность работы системы.

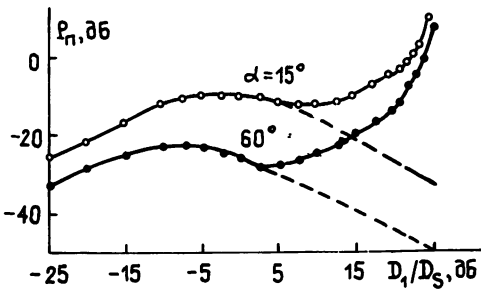


Рис 4

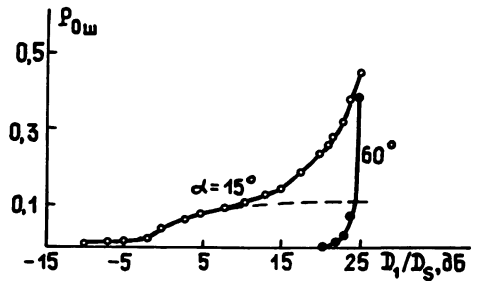


Рис.5.

Интересно сравнить полученные результаты с результатами работ [6 - 9]. В этих работах опорное колебание $d(k)$ формируется несколько другим способом, по сравнению с (22), как простое ограничение амплитуды выходного сигнала решетки, которое можно представить в виде

$$d(k) = y(k)/|y(k)| = y(k)/\sqrt{[\text{Re}(y(k))]^2 + [\text{Im}(y(k))]^2}. \quad (27)$$

Алгоритм адаптации с таким формированием опорного сигнала не

чувствителен к фазовым набегам вектора $\vec{w}(k)$, так как уравнения (1) и (27) инвариантны относительно замены $\vec{w}(k)$ на $\vec{w}(k)e^{i\varphi}$. Несложно увидеть, что фаза опорного сигнала при этом не является фиксированной величиной и может изменяться в широких пределах. Однако если не учитывать флуктуации весовых коэффициентов, эти фазовые набегии не влияют на энергетические характеристики выходных сигналов и на отношение сигнал/шум. При этом выходные мощности полезного сигнала и помехи в стационарном режиме работы ААР сказываются несколько большими по сравнению с приведенными на рис. 3, 4 в силу некоторого увеличения нормы вектора весовых коэффициентов решетки. Зависимости же выходного отношения сигнал/шум ρ от D_1/D_2 остаются близкими к приведенным на рис. 2. Таким образом, предложенный в настоящей работе способ формирования опорного сигнала (22) и способ (27) в этом смысле оказываются эквивалентными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. - М.: Радио и связь, 1981.
2. Пистолькорс А. А., Литвинов О. С. // Радиотехника. 1979. Т. 34. N 5. С. 7.
3. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию. - М.: Радио и связь, 1986.
4. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. - М.: Радио и связь, 1989.
5. Лосев Ю. И., Бердников А. Г., Гойхман Э. Ш., Сизов Б. Д. Адаптивная компенсация помех в каналах связи. - М.: Радио и связь, 1988.
6. Комптон Р. Т. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. N 3. С. 23.
7. DiCarlo D. M., Compton R. T., Jr. // IEEE Trans. 1978. V. AES-14. N 4. P. 599.
8. DiCarlo D. M. // IEEE Trans. 1979. V. AES-15. N 4. P. 576.
9. Bar-Ness Y. // IEEE Trans. 1982. V. AES-18. N 1. P. 115.
10. Ganz M. W., Compton R. T., Jr. // IEEE Trans. 1987. V. AES-23. N 4. P. 528.
11. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. - М.: Сов. радио, 1978.
12. Мальцев А. А., Позументов И. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. N 5. С. 577.
13. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.: Мир, 1989.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 июля 1990 г.

ANALYSIS OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF ADAPTIVE ARRAY WITH INDEPENDENT REFERENCE SIGNAL GENERATION

S.V. Ignatenko, A.A. Mal'tsev, A.M. Silaev

Statistical characteristics of the adaptive array based on the LMS algorithm in the steady state are investigated. The nonlinear transformation of the array output is used as a reference signal. The case of binary phase-shift-keyed modulation of desired signal with Gaussian interference and noise is considered. The optimal type of nonlinear transformation for the reference signal, providing both the minimum of the mean-square estimation error and the maximum of output signal-to-noise ratio is found out. Theoretical results are confirmed by numerical simulation.

УДК 519.958 + 534.2:532

**ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ,
ДИФРАГИРОВАННОГО ПЛОСКИМ УГЛОВЫМ СЕКТОРОМ. I***В. П. Смышляев*

Рассматривается задача о дифракции плоской волны на угловом секторе. Предполагается, что волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца и что на секторе удовлетворяются краевые условия Дирихле или Неймана. Строится точное решение задачи в виде интеграла Зоммерфельда, который удобен для исследования задачи в высокочастотном приближении.

Задачам дифракции скалярных и векторных волновых полей на плоском угловом секторе посвящена обширная литература [1-7]. Интерес к этим задачам в рамках высокочастотной (ВЧ) теории дифракции связан с тем, что, во-первых, сектор является модельным примером плоского экрана с негладким краем (апертурой) [8].

Во-вторых, с точки зрения геометрической теории дифракции (ГТД) [9, 10] дифракция на секторе интересна тем, что она порождает волны различной природы: падающую, отраженную плоскостью сектора, дифрагированные краями, сферическую волну (дифрагированную вершиной сектора); многократно дифрагированные краями волны. Их количественное описание и исследование взаимодействия друг с другом является весьма интересной задачей.

В-третьих, плоский угловой сектор является вырожденным случаем эллиптического конуса [2], представляя собой координатную поверхность в так называемой сфероконической системе координат - одной из одиннадцати координатных систем, в которых уравнение Гельмгольца допускает полное разделение переменных ([11], гл. 5). Последнее обстоятельство позволяет строить точные решения задачи дифракции в виде ряда по собственным функциям, которые выражаются через функции Бесселя и периодические функции Ламе [1, 2, 4-7]. Однако не ясно, как из точного решения извлечь напрямую его ВЧ асимптотику, которая должна описывать дифракционные процессы в согласии с ГТД.

Цель настоящей работы - показать, что все эффекты, предсказываемые ГТД, могут быть извлечены из точного решения, которое предварительно преобразуется в интеграл Зоммерфельда со стандартной фазой и амплитудой в виде функции на единичной сфере, разрезанной вдоль геодезического сегмента. Асимптотика интеграла Зоммерфельда может быть полностью исследована с помощью комбинации метода стационарной фазы и анализа особенностей амплитуды (этому будет посвящена II часть настоящей работы). На этом пути можно полностью исследовать дифракционные процессы в ВЧ приближении. При этом, с одной стороны, наши построения показывают, что асимптотика точного решения согласуется с постулатами ГТД, тем самым строго оправдывая последние (в случае сектора). С другой стороны, что не менее важно, мы извлекаем из точной формулы конкретные количественные характеристики, описывающие дифракционные процессы в ВЧ приближении. В частности, мы получаем явные формулы для сферической волны, дифрагированной вершиной сектора (часть III).

Построения данной работы базируются на общей схеме ВЧ дифракции на конусах произвольных сечений [12, 13]. Мы ограничились рассмотрением скалярной задачи дифракции с идеальными краевыми условиями (Дирихле и Неймана). Однако предложенная схема может быть приспособлена и к задачам дифракции электромагнитных волн на абсолютно проводящем секторе (ср. с [14]). Автор намерен посвятить этому случаю отдельную работу.

1. Построение точного решения в виде интеграла Зоммерфельда

1.1. *Постановка задачи.* Пусть волновой процесс в трехмерном евклидовом пространстве описывается уравнением Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u(\vec{r}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ есть оператор Лапласа, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Мы рассматриваем в качестве препятствия плоский угловой сектор S , расположенный в плоскости $y = 0$, имеющий вершину в начале координат и симметричный относительно отрицательной части оси z (рис. 1). Мы считаем, что сектор S имеет раствор 2α , где $0 < \alpha < \pi/2^*$.

Задача о дифракции поля точечного источника, расположенного в точке $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, на секторе S ставится следующим образом [2].

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus S$ есть внешность сектора S . Граница области Ω состоит из двух берегов секториального разреза S_+ и S_- . Мы ищем функцию $G(\vec{r}, \vec{r}_0) \in C(\Omega \setminus \{\vec{r}_0\})$,

непрерывную в замыкании $(\Omega \cup S_+ \cup S_-) \setminus \{\vec{r}_0\}$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца с δ -функцией в правой части:

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (2)$$

краевым условиям Дирихле или Неймана на секторе S :

$$G|_S = 0 \quad \text{или} \quad \partial G/\partial n|_S = 0 \quad (3)$$

(предполагается, что в случае условия Неймана $\text{grad } G$ существует и непрерывен в регулярных точках S_+ и S_-) и условиям излучения в бесконечности:

$$G = O(r^{-1}), \quad (\partial/\partial r - ik)G = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4)$$

* В случае $\alpha > \pi/2$ мы имеем дело с так называемым "дополнительным" сектором (см. [7]).

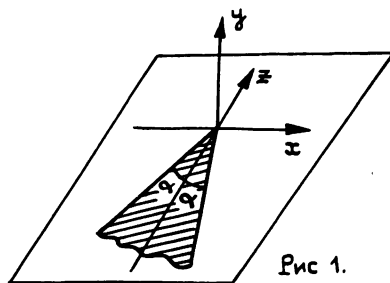


Рис. 1.

где $r = |\vec{r}|$. То, что перечисленные условия определяют функцию G однозначно, показано в [15].

Задача о падении плоской волны на препятствие S , как хорошо известно, может рассматриваться как предельный случай задачи о поле точечного источника. Именно, фиксируем направление $\omega_0 = \vec{r}_0/r_0$ и устремим $r_0 = |\vec{r}_0|$ к бесконечности. В случае уравнения (2) падающая сферическая волна задается формулой $G_{\text{пад}}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_0|) \times (4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|)^{-1}$, где $|\vec{r} - \vec{r}_0| = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta(\omega, \omega_0))^{1/2}$ и $\theta(\omega, \omega_0)$ есть геодезическое расстояние между точками ω и ω_0 на двумерной единичной сфере. При $r_0 \rightarrow \infty$ мы получим

$$G_{\text{пад}}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi r_0} e^{-ikr \cos \theta(\omega, \omega_0)} + o(r_0^{-2}).$$

С другой стороны, плоская волна, распространяющаяся вдоль направления $(-\omega_0)$, имеет вид

$$G_{\text{пл}}(\vec{r}, \omega_0) = e^{-ikr \cos \theta(\omega, \omega_0)} = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[G_{\text{пад}}(\vec{r}, \vec{r}_0) \left(\frac{e^{ikr_0}}{4\pi r_0} \right)^{-1} \right].$$

Отсюда получаем известную связь между полем $G(\vec{r}, \omega_0)$, порожденным плоской волной, и полем точечного источника $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$:

$$G(\vec{r}, \omega_0) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[G(\vec{r}, \vec{r}_0) \left(\frac{e^{ikr_0}}{4\pi r_0} \right)^{-1} \right]. \quad (5)$$

1.2. Ватсонов интеграл. Для исследования задачи (2)-(4) удобно ввести радиально-сферическую систему координат (r, ω) , где $r = |\vec{r}|$ - расстояние до вершины сектора S и $\omega = \vec{r}/r$ характеризует направление вектора \vec{r} . Область значений N переменного ω есть двумерная единичная сфера S^2 , разрезанная вдоль геодезического сегмента $(\omega_1, \omega_2) \equiv 1$ (рис. 2). С математической точки зрения N есть двумерное риманово многообразие с кусочно-гладкой границей $\partial N = 1_+ \cup 1_-$ (1_{\pm} - берега разреза 1) и естественной метрикой.

Во вновь введенных переменных оператор Лапласа Δ , фигурирующий в (2), записывается в виде

$$\Delta = \partial_r^2 + 2r^{-1}\partial_r + r^{-2}\Delta_{\omega}. \quad (6)$$

Здесь и ниже $\partial_r \equiv \partial/\partial r$ обозначает операцию частного дифференцирования по соответствующей переменной. Через Δ_{ω} мы

обозначили на N оператор Бельтрами-Лапласа, действующий на функции $\varphi(\omega)$, удовлетворяющие соответствующему краевому условию (Дирихле или Неймана) на I_{\pm} .

В [1, 2] была построена полная ортогональная система собственных функций оператора $-\Delta_{\omega}$, имеющего неотрицательный дискретный спектр $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$. Там же с помощью разделения переменных (6) было построено решение задачи (2)-(4) в виде ряда по собственным функциям (см. ниже формулу (13а)). Этот ряд, однако, медленно сходится в ВЧ приближении ($kr, kr_0 \gg 1$), в силу чего эффект ГТД описывается им неудовлетворительно.

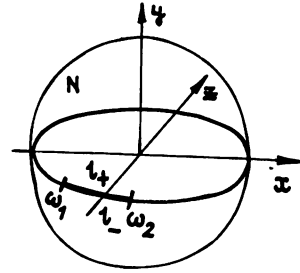


Рис. 2.

Первый шаг в преодолении этой трудности будет состоять в построении решения задачи (2)-(4) в виде контурного (ватсоновского) интеграла. Представим для этого оператор $\Delta + k^2$, стоящий в левой части (2), в следующей форме:

$$(\Delta + k^2) = L_0(r, \lambda) + r^{-2}L(\omega, \lambda). \quad (7)$$

Здесь $L_0 = d_r^2 + 2r^{-1}dr + k^2 - \lambda r^{-2}$ и $L = \Delta_{\omega} + \lambda$, λ - спектральный параметр.

Известно, что в случае разделения переменных типа (7) общая функция Грина $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ представляется в виде свертки функций Грина, соответствующих операторам L_0 и L (см., например, [16], гл. 4, § 2):

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} g_{\lambda}^0(r, r_0) g_{\lambda}(\omega, \omega_0) d\lambda. \quad (8)$$

Здесь $g_{\lambda}^0, g_{\lambda}$ есть функции Грина, отвечающие операторам L_0 и L соответственно. Контур интегрирования γ' изображен на рис. 3. Рассмотрим каждую из функций $g_{\lambda}^0, g_{\lambda}$ по отдельности.

Функция $g_{\lambda}^0(r, r_0)$ отвечает оператору L_0 , действующему на положительной вещественной полуоси переменного r . Она должна удовлетворять условиям (ср. [16], гл. 5, § 1)

$$L_0 g_{\lambda}^0 = -r_0^{-2} \delta(r - r_0), \quad g_{\lambda}^0 = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow 0+;$$

$$(d_r - ik) g_{\lambda}^0 = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Для одномерной функции Грина имеет место следующая хорошо известная формула (см., например, [17]):

$$g_{\lambda}^0(r, r_0) = -g_{\zeta}(r_{\zeta}) g_{\gamma}(r_{\gamma}) / w_0(g_{\zeta}, g_{\gamma}). \quad (10)$$

Здесь $r_{\zeta} = \min\{r, r_0\}$; $r_{\gamma} = \max\{r, r_0\}$; g_{ζ} и g_{γ} - решения однородного дифференциального уравнения с оператором L_0 , удовлетворяющие соответствующему условию при $r \rightarrow +0$ (g_{ζ}) и при $r \rightarrow +\infty$ (g_{γ}) (см. (9)); $w_0(g_{\zeta}, g_{\gamma}) = r^2 w(g_{\zeta}, g_{\gamma})$, где $w(g_{\zeta}, g_{\gamma}) \equiv g_{\zeta}' g_{\gamma} - g_{\zeta} g_{\gamma}'$ есть определитель Вронского.

Из явного вида оператора L_0 , а также условий (9) и формулы (10) нетрудно получить

$$g_{\lambda}^0(r, r_0) = -(\pi/2i) (rr_0)^{-1/2} J_{\nu}(kr_{\zeta}) H_{\nu}^{(1)}(kr_{\gamma}). \quad (11)$$

Здесь J_{ν} , $H_{\nu}^{(1)}$ - функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно и

$$\nu(\lambda) = (\lambda + 1/4)^{1/2}. \quad (12)$$

В последнем равенстве ветвь корня определяется при разрезе вдоль полупрямой $(-\infty, -1/4)$ таким образом, что $\nu(\lambda) > 0$ при $\lambda > -1/4$ (рис. 3, 4).

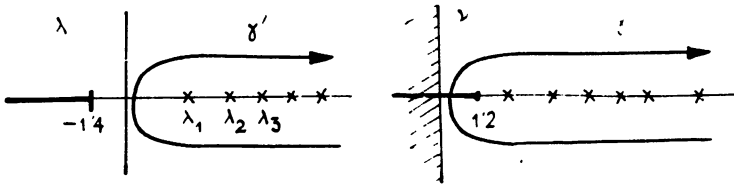


Рис 3,4

Функция Грина $g_{\lambda}(\omega; \omega_0)$ отвечает оператору L , действующему на N . Она должна удовлетворять условиям $(\Delta_{\omega} + \lambda)g_{\lambda} = \delta_{\omega_0}(\omega)$, $g_{\lambda}|_{\partial N} = 0$ или $\partial_n g_{\lambda}|_{\partial N} = 0$, где ∂_n обозначает дифференцирование по нормали к границе $\partial N = I_+ \cup I_-$ (рис. 2).

Функция $g_{\lambda}(\omega, \omega_0)$, являющаяся ядром резольвенты самосопряженного оператора $-\Delta_{\omega}$, есть мероморфная функция на плоскости комплексного переменного λ с полюсами в точках λ_j ($j \geq 1$) - собственных значений оператора $-\Delta_{\omega}$. На рис. 3 точки λ_j обозначены крестиками.

Делая в (8) замену переменной интегрирования (12), учитывая (11), получим

$$G(r, \omega; r_0, \omega_0) = \quad (13a)$$

$$= -\frac{1}{2} (rr_0)^{-1/2} \int_{\gamma} J_{\nu}(kr_{\zeta}) H_{\nu}^{(1)}(kr_{\gamma}) g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu.$$

Здесь $g(\omega, \omega_0, \nu) = g_{\nu^2 - 1/4}(\omega, \omega_0)$ удовлетворяет условиям

$$(\Delta_\omega + \nu^2 - 1/4)g = \delta_{\omega_0}(\omega); \quad (14)$$

$$g|_{\partial N} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_n g|_{\partial N} = 0. \quad (15)$$

Контур γ , изображенный на рис. 4, аналогичен контуру γ' . Подынтегральное выражение в (13а) имеет полюсы в точках ν_j , $j \geq 1$, где $1/2 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$, $\nu_j \rightarrow +\infty$. Сходимость интеграла (13а) (а значит, и (8)) можно обосновать, привлекая известные формулы для асимптотики функций Бесселя и Ханкеля при больших значениях порядка [18], а также оценки для функции $g(\omega, \omega_0, \nu)$ при больших ν .

В случае падения плоской волны, подставляя точную формулу (13а) в (5) и пользуясь асимптотикой функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$,

$$H_\nu^{(1)}(\lambda) \sim (2/\pi\lambda)^{1/2} \exp(i\lambda - i\nu\pi/2 - i\pi/4), \quad (16)$$

получим после элементарных вычислений

$$G(r, \omega; \omega_0) = 2c(kr)^{-1/2} \int_\gamma J_\nu(kr) e^{-i\nu\pi/2} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu, \quad (17a)$$

где $c = e^{3i\pi/4} (2\pi)^{1/2}$.

Полученные представления (13а), (17а) волнового поля G обычно называются ватсоновскими интегралами.

Замечание. Применяя к (13а) и (17а) теорему о вычетах, мы получим представление для G в форме разложения по собственным функциям оператора $\Delta + k^2$:

$$G(r, \omega; r_0, \omega_0) = -\frac{\pi}{2i} (rr_0)^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr_0) H_{\nu_j}^{(1)}(kr) \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0); \quad (13б)$$

$$G(r, \omega; \omega_0) = e^{i\pi/4} (2\pi)^{3/2} (kr)^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} J_{\nu_j}(kr) e^{-i\nu_j\pi/2} \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0). \quad (17б)$$

Здесь $\varphi_j(\omega)$, $j \geq 1$, есть собственные функции оператора $-\Delta_\omega$, соответствующие собственному значению $\lambda_j = \nu_j^2 - 1/4$, т. е.

$$(\Delta_\omega + \nu_j^2 - 1/4)\varphi_j = 0, \quad \varphi_j|_{\partial N} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_n \varphi_j|_{\partial N} = 0. \quad (18)$$

Функции $\varphi_j(\omega)$ выбираются так, чтобы они образовывали ортонормированный базис в $L^2(N)$, т. е.

$$\int_{\mathbb{N}} \varphi_j(\omega) \overline{\varphi_k(\omega)} dS(\omega) = \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

В [1, 2] функции $\varphi_j(\omega)$ строятся явно в сфероконической системе координат (см. часть III) и выражаются через периодические функции Ламе. В этом смысле формула (13б) совпадает с соответствующей формулой в [1, 2], дающей точное решение задачи о точечном источнике. Поскольку правые части (13а) и (13б) тождественно равны, последнее обстоятельство можно считать оправданием представления (13а) (а значит, и (8)).

В следующем пункте мы построим представление функции G в виде интеграла Зоммерфельда, удобное для исследования G в ВЧ приближении.

1.3. *Интеграл Зоммерфельда.* В дальнейшем нам будет полезно следующее хорошо известное представление функции Бесселя $J_\nu(kr)$ интегралом Зоммерфельда [18]:

$$J_\nu(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{W'} \exp[-ikr \cos s + i\nu(\pi/2 - s)] ds. \quad (19)$$

Контур W' на плоскости комплексного переменного s изображен на рис. 5; в заштрихованных зонах подынтегральное выражение экспоненциально убывает на бесконечности.

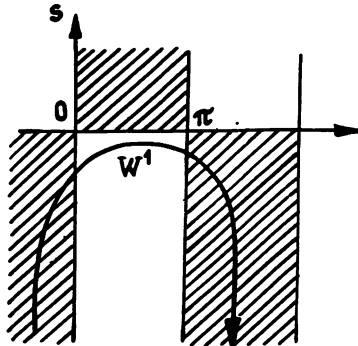


Рис. 5.

Подставляя (19) в (17а) и меняя порядок интегрирования, получим

$$G(r, \omega; \omega_0) = -ic(kr)^{-1/2} \int_{W'} e^{-ikr \cos s} \Phi(\omega, \omega_0, s) ds, \quad (20)$$

где введено обозначение

$$\Phi(\omega, \omega_0, s) = \frac{i}{\pi} \int_{\gamma} e^{-i\nu s} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu. \quad (21)$$

Замена порядков интегрирования корректна, поскольку $\text{Im } s < 0$, и, следовательно, подынтегральное выражение в (21) экспоненциально мало при $\text{Re } \nu \rightarrow +\infty$, $|\text{Im } \nu| < \text{const}$.

Интеграл, стоящий в правой части (20), обозначим через

$$I(\lambda, \omega, \omega_0) \equiv \int_{\mathcal{H}'} e^{-i\lambda \cos s} \Phi(\omega, \omega_0, s) ds, \quad \lambda \equiv kr. \quad (22)$$

Амплитуда $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ интеграла (22), определяемая с помощью (21), аналитична в нижней полуплоскости $\text{Im } s < 0$. Ее можно интерпретировать следующим образом. Введем в рассмотрение положительный самосопряженный оператор $A \equiv (-\Delta_\omega + 1/4)^{1/2}$ в $L^2(N)$. Функции $\varphi_j(\omega)$ (см. (18)) являются также собственными функциями оператора A , соответствующими собственным значениям ν_j , т.е. $A\varphi_j = \nu_j\varphi_j$, $j \geq 1$.

Утверждение. Функция $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ является ядром оператора $\exp(-ias)$. Говоря иначе, выполняются соотношения

$$\Phi(\omega, \omega_0, s) = e^{-iAs} \delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-i\nu_j s} \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0). \quad (23)$$

Первое равенство есть определение того, что Φ - ядро оператора $\exp(-ias)$, т.е. результат его действия на δ -функцию; второе равенство есть следствие того, что система функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой собственных функций оператора A , а также разложения δ -функции по базису:

$$\delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0). \quad (24)$$

Чтобы доказать утверждение, достаточно установить, что правые части (21) и (23) совпадают. Это элементарно следует из свойств функции $g(\omega, \omega_0, \nu)$ как ядра резольвенты оператора A и теоремы о вычетах. Действительно,

$$\begin{aligned} g(\omega, \omega_0, \nu) &= (\nu^2 - A^2)^{-1} \delta_{\omega_0}(\omega) = (\nu^2 - A^2)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\nu^2 - \nu_j^2)^{-1} \varphi_j(\omega) \varphi_j(\omega_0). \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в правую часть (21), получим, применяя теорему о вычетах, правую часть (23).

При вещественных s функция $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ является решением уравнения гиперболического типа

$$(\partial_s^2 - \Delta_\omega + 1/4)\Phi = 0 \quad (25)$$

на N с краевым условием Дирихле или Неймана на границе ∂N :

$$\Phi|_{\partial N} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_n \Phi|_{\partial N} = 0. \quad (26)$$

Согласно теоремам о распроектровании особенностей ([19], гл. 24) при вещественных s функция $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ является гладкой всюду, кроме точек сингулярности, которые определяются с помощью лучевой процедуры на двумерном многообразии N (см. разд. 2.2, II).

Итак, благодаря представлению (20) для поля, порождаемого плоской волной, задача о построении ВЧ асимптотики сводится к изучению асимптотики при $\lambda \rightarrow \infty$ зоммерфельдовского интеграла $I(\lambda, \omega, \omega_0)$ (см. (22)).

Замечание. Объект $I(\lambda, \omega, \omega_0)$, возникающий при описании дифракции плоской волны, описывает процессы ВЧ дифракции на вершине сектора в случае падения достаточно произвольной волны, заданной лучевым разложением

$$u_{\text{пад}}(\vec{r}, k) \approx e^{ik\tau(\vec{r})} \sum_{j=0}^{\infty} U_j(\vec{r}) (-ik)^{-j}, \quad (27)$$

где функции $\tau(\vec{r})$ и $U_j(\vec{r})$ удовлетворяют уравнениям эйконала и переноса (см. например, [16]). Вблизи вершины сектора - точки $\vec{r} = 0$ - лучевая формула (27) локально выглядит как плоская:

$$u_{\text{пад}}(\vec{r}, k) \sim U_0(0) e^{ik\tau(0)} \exp(ikr \langle \nabla\tau(0), \omega \rangle), \quad r \rightarrow 0. \quad (28)$$

Поэтому следует ожидать, что дифракционные процессы, порождаемые вершиной сектора, будут в первом приближении описываться функцией $I(kr, \omega, -\nabla\tau(0))$. В частности, для поля $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$, порожденного точечным источником* (см. (13)), в формуле (28) будем иметь

$$U_0(0) = \exp(ikr_0)/4\pi r_0, \quad \nabla\tau(0) = -\omega_0.$$

В контексте сказанного задача о падении плоской волны на сектор является модельной. В соответствии с введенными обозначениями формула (20), описывающая этот случай, принимает вид

$$G(r, \omega; \omega_0) = -ic(kr)^{-1/2} I(kr, \omega, \omega_0). \quad (29)$$

В последующем мы изучим асимптотику $I(\lambda, \omega, \omega_0)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и ее связь с дифракционными процессами в ВЧ приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraus L. Diffraction by a plane angular sector. Thesis. - N. Y.: University, 1955.
2. Kraus L., Levine L. M. // Commun. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. N 1. P. 49.

* Можно непосредственно вместо (20) изучать интеграл Зоммерфельда с ядром, отвечающим точечному источнику, как это делается в [20], гл. 20, в задаче о дифракции на клине.

3. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. - М.: Наука, 1966.
4. Blume S. //Optic. 1967. V. 26. N 2. P. 150; N 3. P. 192.
5. Satterwhite R. //IEEE Trans. Antenn. Prop. 1974. V. 22. N 3. P. 500.
6. Sahalos J. N., Thiele G. A. //Canad. J. Phys. 1983. V. 61. P. 1583.
7. Blume S., Klinkenbusch L. //Arch. Electr. 1990.
8. Keller J. B. //J. Appl. Phys. 1957. V. 28. N 4. P. 426.
9. Keller J. B. //J. Opt. Soc. Am. 1962. V. 52. N 2. P. 116.
10. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
11. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. - М.: ИЛ, 1958.
12. Смышляев В. П. //ДАН СССР. 1989. Т. 309. N 1. С. 74.
13. Smyshlyayev V. P. //Wave motion. 1990. V. 12.
14. Smyshlyayev V. P. Proceedings of the 1989 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory. - Stockholm, 1989. P. 373.
15. Levine L. //N. Y. Univ., Inst. Math. Sci., Div. Electromagnetic Res., Res. Rep. N BR-33, 1961.
16. Бабиц В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Асимптотические методы в теории дифракции и распространения волн. - Рязань, 1975.
17. Смирнов В. Н. Курс высшей математики. - М.: Главиздат, 1953.
18. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1973. Т. 1-3.
19. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. - М.: Мир, 1986-1988. Т. 1-4.
20. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. - М.: ОНТИ, 1937. Ч. 2.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
31 июля 1990 г.

HIGH-FREQUENCY ASYMPTOTICS OF A WAVE FIELD
DIFFRACTED BY THE PLANE ANGULAR SECTOR. I

V. P. Smyshlyayev

We consider the problem of diffraction of a plane wave by the plane angular sector. The wave process is described by the Helmholtz equation and the boundary conditions of Dirichlet or Neumann are satisfied on the sector. The solution in the form of Sommerfeld integral is constructed. The latter is convenient for the investigation of the problem in the high-frequency approximation.

УДК 537.874.4

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ.

СЛУЧАЙ E-ПОЛЯРИЗАЦИИ

А. Б. Васильев, Н. П. Жук, Д. А. Рапопорт, А. Г. Яровой

Разработан алгоритм численного решения двумерной задачи рассеяния E-поляризованного поля на диэлектрическом цилиндре в плоскостой среде. Исследованы закономерности рассеяния плоской волны на цилиндре, погруженном в однородный диэлектрический слой, с сечением в виде прямоугольника и ромба.

Появление данной работы вызвано рядом практических запросов дефектоскопии и интегральной оптики, что в теоретическом плане приводит к задаче рассеяния волн на цилиндрических телах в плоскостойких средах [1, 2]. Детальное исследование этой задачи было проведено в частных случаях тонкого хорошо проводящего включения (экрана) [3] и однородного кругового цилиндра [4], размещенных в кусочно-однородной среде. Мы обратились к более совершенной модели, в которой учтены как произвольные геометрическая форма и диэлектрическое заполнение цилиндра, так и произвольный плоскостойкий характер окружающей цилиндр среды. Частный случай такой модели с кусочно-однородной средой при чисто мнимой диэлектрической проницаемости широко используется в геофизике [5].

Цель работы - решение на основе интегрального уравнения для электрического поля двумерной задачи дифракции E-поляризованной волны на проницаемом включении в слоистой среде.

Нами разработан новый алгоритм численного решения поставленной задачи, отличительными особенностями которого являются, во-первых, способ вычисления матричных элементов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), учитывающий как наличие сингулярной части у функции Грина, так и расположение полюсов в комплексной плоскости спектрального параметра у ее фурье-образа; во-вторых, решение СЛАУ методом сопряженного градиента с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) по координате вдоль направления однородности среды. В рамках модели, применяемой в дефектоскопии полимерных композиционных материалов (ПКМ) для описания расслоений в ПКМ [6], численно исследовано рассеяние плоской волны на цилиндрах с прямоугольным и ромбовидным сечениями.

1. В рассматриваемой нами модели материальная среда занимает все трехмерное пространство $\vec{R} = (x, y, z)$ и описывается комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$ ($\text{Im}\epsilon(z) \geq 0$), зависящей только от вертикальной координаты z . При $z < b$ ($b < 0$) и $z > 0$ функция $\epsilon(z)$ принимает постоянное значение ϵ_0 и ϵ_1 соответственно, а в пределах интервала $b < z < 0$ представляет собой произвольную кусочно-гладкую функцию. Пусть сторонние монохроматические ($\sim \exp(-i\omega t)$) источники, распределение которых не зависит от координаты x , создают в

описанной регулярной среде поле

$$\vec{E}_0 = \{E_0, 0, 0\}, \quad \vec{H}_0 = \{0, H_{0y}, H_{0z}\}.$$

Рассмотрим рассеяние первичного поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 на аксиально-однородном цилиндре с образующей, параллельной оси Ox и поперечным сечением S . Диэлектрическая проницаемость цилиндра $\epsilon_p(\vec{r})$ представляет собой комплекснозначную кусочно-гладкую функцию переменного вектора $\vec{r} = (0, y, z)$. Область локализации сторонних источников в плоскости yoz считается расположенной снаружи от S .

Полное электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\vec{x}_0$ в такой среде согласно [7, 8] удовлетворяет во всей плоскости интегральному соотношению

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) - k_0^2 \int_S d\vec{r}' \kappa(\vec{r}, \vec{r}') (\epsilon_p(\vec{r}') - \epsilon(\vec{r}')) E(\vec{r}'), \quad (1)$$

где \vec{x}_0 - орт оси Ox , $k_0 = \omega/c$. Скалярная функция Грина $\kappa(\vec{r}, \vec{r}')$, учитывающая слоистый характер регулярной среды, подчиняется уравнению

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2 + k_0^2 \epsilon(z)) \kappa(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad -\infty < y, z < \infty, \quad (2)$$

и условиям излучения при $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$. Условия непрерывности функции и ее производной по z на границах $z = 0, z = b$ (и, возможно, при $b < z < 0$) считаются "встроенными" в (2).

Обозначим через d_1 и d_2 минимальное и максимальное значение координаты z в области S , занятой включением. Предположим, что в слое $d_1 < z < d_2$ регулярная среда однородна, т.е. $\epsilon(z) = \epsilon_s$. Тогда функция Грина в области $d_1 < z, z' < d_2$ допускает представление

$$\kappa(\vec{r}, \vec{r}') = \kappa_0(\vec{r} - \vec{r}') + h(\vec{r}, \vec{r}'), \quad \kappa_0(\vec{r}) = H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{\epsilon_s} |\vec{r}|) / (4i); \quad (3)$$

$$h(\vec{r}, \vec{r}') = \int_0^\infty d\alpha h(\alpha, z, z') \cos(\alpha(y - y')) / \pi. \quad (4)$$

Здесь $\kappa_0(\vec{r} - \vec{r}')$ - функция Грина однородного пространства с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_s$; контур интегрирования в (4) проходит в комплексной плоскости α так, что все полюсы подынтегрального выражения, лежащие на положительной части действительной оси, обходятся снизу; функция $h(\alpha, z, z')$ определена соотношением

$$h(\mathbf{x}, z, z') = [\exp(i\gamma_s(z - 2d_1))R(\mathbf{x})(\exp(i\gamma_s z') + Q(\mathbf{x})\exp(-i\gamma_s(z' - 2d_2))) + \exp(-i\gamma_s(z - 2d_2))Q(\mathbf{x})(\exp(-i\gamma_s(z') + R(\mathbf{x})\exp(i\gamma_s(z' - 2d_1)))] / (2i\gamma_s P(\mathbf{x})), \quad (5)$$

$$P(\mathbf{x}) = 1 - R(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})\exp(2i\gamma_s(d_2 - d_1)),$$

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\gamma_s \nu - k_0}{\gamma_s \nu + k_0}, \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{\gamma_s \lambda - k_0}{\gamma_s \lambda + k_0},$$

$$\nu(\mathbf{x}) = \frac{-ik_0 \Psi^-(d_1, \mathbf{x})}{\partial_z \Psi^-(d_1 - 0, \mathbf{x})}, \quad \lambda(\mathbf{x}) = \frac{ik_0 \Psi^+(d_2, \mathbf{x})}{\partial_z \Psi^+(d_2 + 0, \mathbf{x})}.$$

Функции $\Psi^\pm(z, \mathbf{x})$ - произвольные решения уравнения $(\partial_z^2 + k_0^2 \epsilon(z) - \mathbf{x}^2)\Psi(z, \mathbf{x}) = 0$, $-\infty < z < \infty$, удовлетворяющие условию излучения при $z \rightarrow -\infty$ (Ψ^-) и $z \rightarrow +\infty$ (Ψ^+); $\gamma_s \equiv \gamma_s(\mathbf{x}) = \sqrt{k_0^2 \epsilon_s - \mathbf{x}^2}$, $\text{Im } \gamma_s \geq 0$.

Первое слагаемое в (3) $\mathcal{H}_0(\vec{r} - \vec{r}')$ учитывает сингулярный характер функции Грина в области источника, второе слагаемое - регулярная функция переменных \vec{r}, \vec{r}' , которая физически соответствует отраженному от границ $z = d_1, z = d_2$ полю точечного источника, расположенного в слое $d_1 < z < d_2$.

Для точек наблюдения \vec{r} , лежащих вне слоя $d_1 < z < d_2$, функция Грина $\mathcal{H}(\vec{r} - \vec{r}')$ рассчитывается по формуле (4), в которой функция $h(\mathbf{x}, z, z')$ заменяется на $\mathcal{H}(\mathbf{x}, z, z')$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}, z, z') &= \exp(i\gamma_s d_2)(1 + Q(\mathbf{x}))[\exp(-i\gamma_s z') + R(\mathbf{x}) \times \\ &\times \exp(i\gamma_s z' - 2d_1)] [\Psi^+(z, \mathbf{x}) / \Psi^+(d_2, \mathbf{x})] / (2i\gamma_s P), \\ &z > d_2, \quad d_1 < z' < d_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}, z, z') &= \exp(-i\gamma_s d_1)(1 + R(\mathbf{x}))[\exp(i\gamma_s z') + Q(\mathbf{x}) \times \\ &\times \exp(i\gamma_s(2d_2 - z'))] [\Psi^-(z, \mathbf{x}) / \Psi^-(d_1, \mathbf{x})] / (2i\gamma_s P), \\ &z < d_1, \quad d_1 < z' < d_2. \end{aligned}$$

После решения уравнения (1) и нахождения электрического поля во всем пространстве компоненты магнитного поля определяются с помощью известных соотношений

$$H_y(\vec{r}) = \partial_z E(\vec{r}) / (ik_0), \quad H_z(\vec{r}) = i\partial_y E(\vec{r}) / (k_0). \quad (7)$$

2. Для решения уравнения (1) воспользуемся методом моментов [9]. Мысленно поместим поперечное сечение включения внутрь прямоугольной сетки, состоящей из $m_1 \times m_2$ идентичных прямоугольных элементов со сторонами, параллельными осям Oy и Oz , и размерами Δy на Δ_z . Каждой ячейке поставим в соответствие пару индексов (i, p) , где $i = 1, \dots, m_1$ - порядковый номер ячейки вдоль оси Oy , а $p = 1, \dots, m_2$ - вдоль оси Oz . Радиус-вектор центра ячейки обозначим через \vec{r}_{ip} , а поперечное сечение - через S_{ip} . Считая размеры ячеек достаточно малыми, применим кусочно-постоянную аппроксимацию диэлектрической проницаемости включения $\epsilon_p(\vec{r})$ и неизвестного поля $E(\vec{r})$:

$$\epsilon_p(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{m_2} \epsilon_p(\vec{r}_{ip}) F_{ip}(\vec{r}), \quad E(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{m_2} E_{ip} F_{ip}(\vec{r}), \quad (8)$$

где $F_{ip}(\vec{r}) = 1$ при $\vec{r} \in S_{ip}$ и $F_{ip}(\vec{r}) = 0$ при $\vec{r} \notin S_{ip}$. Если через ячейку проходит граница области S , то вместо диэлектрической проницаемости в центре ячейки берется усредненное по S_{ip} значение $\epsilon_p(\vec{r})$. Применяя к интегральному уравнению (1) метод моментов с пробными функциями $F_{ip}(\vec{r})$ и весовыми функциями $V_{ip}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_{ip})$, получим СЛАУ II рода для неизвестных величин E_{ip} :

$$E_{ip} + k_0^2 \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{q=1}^{m_2} g(i, p, j, q) \chi(j, q) E_{jq} = E_0(\vec{r}_{ip}), \quad (9)$$

$$\chi(j, q) = \epsilon_p(\vec{r}_{jq}) - \epsilon_s, \quad g(i, p, j, q) = \int_{S_{jq}} d\vec{r}' \kappa(\vec{r}_{ip}, \vec{r}').$$

При вычислении матричных элементов $g(i, p, j, q)$ выделим в явном виде сингулярную часть функции Грина $\kappa(\vec{r}, \vec{r}')$ на основании представления (3), с связи с чем $g(i, p, j, q) = f(i, p, j, q) + h(i, p, j, q)$,

$$f(i, p, j, q) = \int_{S_{jq}} d\vec{r}' \kappa_0(\vec{r}_{ip} - \vec{r}'); \quad (10)$$

$$h(i, p, j, q) = \int_{S_{jq}} d\vec{r}' h(\vec{r}_{ip}, \vec{r}'). \quad (11)$$

Для нахождения f воспользуемся методикой работы [10].

Проинтегрируем по элементарной ячейке S_{1q} уравнение для K_0 , которое формально получается из (2) заменой $\epsilon(z)$ на ϵ_s . Эта процедура позволяет перейти от двукратного интеграла в определении f к однократным интегралам по контуру, ограничивающему область S_{1q} :

$$f(i, p, j, q) = \frac{1}{4ik_0^2 \epsilon_s} \left[F_{1q}(\vec{r}_{1p}) - \int_{z_1}^{z_2} dz' (H(w)(y_1 - y')) \Big|_{y'=y_1}^{y'=y_2} - \int_{y_1}^{y_2} dy' (H(w)(z_p - z')) \Big|_{z'=z_1}^{z'=z_2} \right], \quad (12)$$

$$H(w) = k_0 \sqrt{\epsilon_s} H_1^{(1)}(k_0 \sqrt{\epsilon_s} |\vec{r}_{1p} - \vec{r}'|) / |\vec{r}_{1p} - \vec{r}'|,$$

где $y_{1,2} = y_j \mp \Delta_y/2$, $z'_{1,2} = z_q \mp \Delta_z/2$. Оставшиеся интегралы от функций Ханкеля вычисляются по квадратурным формулам Гаусса с 16 узлами. Использование формулы (12) вместо (10) позволяет сократить время расчета матричных элементов СЛАУ в 20 - 50 раз.

Интеграл в определении h вычисляется аналитически с учетом разложения функции $h(\vec{r}, \vec{r}')$ в интеграл Фурье (4). При наличии полюсов у функции $h(x, z, z')$ на действительной оси или вблизи нее в комплексной плоскости x необходима деформация контура интегрирования в (4) (для применяемых в геофизике моделей из-за чисто мнимой диэлектрической проницаемости среды такая деформация не требуется [5]). Анализ известных контуров интегрирования [11] показал их непригодность в рассматриваемом случае. Нами установлено, что при $k_0|y - y'| \leq 40$ универсальным (не зависящим от явного вида профиля $\epsilon(z)$) является путь интегрирования, состоящий из отрезков прямых в комплексной плоскости x , соединяющих точки: 1 - $x = 0$; 2 - $x = -ik_0 T_a$, $T_a > 0$; 3 - $x = k_0(\sqrt{\epsilon_m} + 1 - iT_a)$, $\epsilon_m = \max_{b \leq z \leq 0}(\epsilon(z))$; 4 -

$x = k_0(\sqrt{\epsilon_m} + 1)$; 5 - $x = k_0 T_b$, $T_b > 0$. Подбором констант T_a , T_b осуществляется "привязка" контура к конкретной модели среды.

Поскольку решение СЛАУ (9) методами прямого обращения матрицы [7] требует значительных затрат машинного времени, то мы применим метод сопряженного градиента [12], ранее успешно использованный в задачах рассеяния электромагнитных волн на телах в свободном пространстве. Так как ядро исходного интегрального уравнения (1) является разностным по переменным y, y' , то матричные элементы $g(i, p, j, q)$ зависят от индексов p, q и разности индексов j, i . Поэтому возникающие в методе сопряженного градиента произведения матрицы $g(i, p, j, q)$ на вектор $X(j, q)$ выполним с помощью БПФ [13].

После нахождения поля внутри включения рассеянное поле $E_s(\vec{r}) = E(\vec{r}) - E_0(\vec{r})$ снаружи от последнего найдем по прямой формуле

$$E_s(\vec{r}) = -k_0^2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{m_2} \chi(i, p) E_{ip} \int_{S_{ip}} d\vec{r}' \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (13)$$

вытекающей из интегрального соотношения (1). Интегралы по площади элементарной ячейки в (13) вычисляются аналитически на основании разложения функции Грина в интеграл Фурье (4), (6). Интегрирование по \mathbf{x} выполняется численно по описанному выше контуру в комплексной плоскости.

В дальней зоне включения в верхнем ($z > 0$) или нижнем ($z < b$) однородном полупространстве, используя геометрическое приближение функции Грина, для плотности потока энергии рассеянного поля получим

$$P_s(L, \varphi) = \frac{c}{4\pi^2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{k_0 L} \sin^2(\mathbf{x}_s \Delta_y / 2) \left| \frac{\sin(\gamma_s \Delta_z / 2) \Psi^+(0, \mathbf{x}_s)}{(\epsilon_s - \epsilon_c \cos^2 \varphi) \Psi^+(d_2, \mathbf{x}_s)} \right. \times \\ \times \frac{(1 + Q(\mathbf{x}_s))}{P(\mathbf{x}_s)} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{m_2} \chi(i, p) \exp(-i\mathbf{x}_s(y_1 - y_0)) [\exp(-i\gamma_s z_p) + \\ \left. + R(\mathbf{x}_s) \exp(i\gamma_s(z_p - 2d_1))] E_{ip} \right|^2, \quad z > 0, \quad \mathbf{x}_s = k_0 \sqrt{\epsilon_c} \cos \varphi, \quad (14)$$

$$P_s(D, \psi) = \frac{c}{4\pi^2} \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{k_0 D} \sin^2(\mathbf{x}_s \Delta_y / 2) \left| \frac{\sin(\gamma_s \Delta_z / 2) \Psi^-(b, \mathbf{x}_s)}{(\epsilon_s - \epsilon_c \cos^2 \psi) \Psi^-(d_1, \mathbf{x}_s)} \right. \times \\ \times \frac{(1 + R(\mathbf{x}_s))}{P(\mathbf{x}_s)} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{p=1}^{m_2} \chi(i, p) \exp(-i\mathbf{x}_s(y_1 - y_0)) [Q(\mathbf{x}_s) \times \\ \left. \times \exp(-i\gamma_s(z_p - 2d_2)) + \exp(i\gamma_s z_p)] E_{ip} \right|^2, \quad z < b, \quad \mathbf{x}_s = k_0 \sqrt{\epsilon_c} \cos \psi.$$

Здесь L и φ (D и ψ) - радиус и азимутальный угол, отсчитываемый от положительного направления оси Oy полярной системы координат с центром в точке $y = y_0$, $z = 0$ ($z = b$): $L = \sqrt{z^2 + (y - y_0)^2}$, $\sin \varphi = z/L$,

$$D = \sqrt{(z - b)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \sin \psi = |z - b|/D, \quad \gamma_s = \gamma_s(\mathbf{x}_s).$$

3. Тестирование предложенного алгоритма было проведено на задаче рассеяния плоской волны на однородном круговом цилиндре с радиусом a и проницаемостью ϵ_p , погруженном на глубину z_p в однородное полупространство $z < 0$ с проницаемостью ϵ_s (расстояние z_p отсчитывается от поверхности $z = 0$ до оси цилиндра). Контрольное решение уравнения (1) было получено численно-аналитическим методом

[4], использующим специфическую форму рассеивателя. Сравнивались значения рассеянного поля на поверхности $z = 0$ и в дальней зоне цилиндра в верхнем ($z > 0$) полупространстве. Для значений параметров $\epsilon_s = 2,5 + 0,1i$, $\epsilon_p = 1$, $k_0 z_p = 2\pi$, $k_0 a = 2\pi/5$ относительное расхождение результатов по модулю не превосходило 10^{-3} в дальней зоне и 10^{-2} на поверхности полупространства. Имевшее место расхождение связано с погрешностью аппроксимации кругового поперечного сечения цилиндра прямоугольными элементами.

Обсудим вычислительные аспекты предложенного алгоритма. Поскольку интегральное уравнение (1) является уравнением II рода типа Фредгольма, то решение СЛАУ (9) при возрастании m_1 и m_2 стремится к решению исходного уравнения [7, 8]. Число точек дискретизации m_1 и m_2 при выбранной аппроксимации поля и использованных пробных функциях зависит от соотношения размеров включения и длин волн внутри и снаружи последнего, формы включения, а также требуемой точности. В контрольном примере относительное изменение найденной величины поля внутри включения при переходе от $m_1 = m_2 = 64$ к $m_1 = m_2 = 32$ не превосходило по модулю 10^{-4} , а к $m_1 = m_2 = 16 \div 10^{-2}$. Для практических приложений обычно достаточно выбирать $10 \div 20$ точек аппроксимации на длину волны во включении [7 - 9].

Число итераций, необходимых для решения СЛАУ (9) определяется размерностью системы, мерой обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ, начальным приближением для искомого поля и требуемой точностью. В контрольном примере в качестве начального приближения выбиралось падающее поле, и приближенное решение с невязкой, равной 10^{-8} , достигалось для разных m_1 , m_2 за $15 \div 25$ итераций (здесь под невязкой приближенного решения \tilde{u} уравнения $\hat{L}u = f$ понимается норма вектора $\hat{L}\tilde{u} - f$). Эффективность используемой процедуры решения СЛАУ характеризуется следующими показателями: решение СЛАУ методом Гаусса требует $C_t m_1^3 m_2^3$ процессорного времени и $0,016 C_p m_1^2 m_2^2$ кбайт памяти (C_t и C_p - некоторые константы; вычисления проводятся с 12-значными цифрами), в то время как использованный метод требует не более $\tilde{C}_t m_2^3 m_1^2 \log_2 m_1$ секунд и $\tilde{C}_p m_2^2 m_1$ кбайт ($\tilde{C}_t \sim C_t$, $\tilde{C}_p \sim C_p$).

Сравним быстродействие и потребности в оперативной памяти (ОП) ЭВМ разработанного нами и существующего [7, 8] алгоритмов. Затрачиваемое обоими алгоритмами время расходуется преимущественно на вычисление коэффициентов и решение СЛАУ. Затраты процессорного времени на решение СЛАУ мы сократили по сравнению с [7, 8] в $(m_1/\log_2 m_1)$ раз. Предложенный нами способ вычисления коэффициентов СЛАУ требует процессорного времени не более чем использованный в [7, 8], но позволяет при этом рассматривать среды с малыми (или отсутствующими) омическими потерями. Поскольку с

решением СЛАУ связаны основные потребности алгоритмов в ОП, то достигнутое нами сокращение объема используемой ОП на этапе решения СЛАУ в m_1 раз по сравнению с [7, 8] приводит к существенной экономии ОП для алгоритма в целом.

4. Применим разработанный алгоритм к решению одной из базовых задач дефектоскопии полимерных композиционных материалов - о рассеянии плоской электромагнитной волны на расслоении в ПКМ [6]. Специфика данной задачи заключается в том, что вмещающая среда характеризуется малыми значениями тангенса угла потерь и представляет собой диэлектрический слой в свободном пространстве. В связи с этим фурье-образ функции Грина $h(x, z, z')$ имеет полюсы вблизи вещественной оси в комплексной плоскости спектрального параметра x .

Положим диэлектрическую проницаемость среды в области $b < z < 0$ равной вещественной константе $\epsilon_s > 1$ (т.е. $d_1 = b$, $d_2 = 0$), а диэлектрические проницаемости верхнего и нижнего полупространств $\epsilon_o = \epsilon_c = 1$. При этом выражения для функций $R(x)$, $Q(x)$ из (5) принимают вид

$$R(x) = Q(x) = (\gamma_s - \gamma_o) / (\gamma_s + \gamma_o), \quad \gamma_o = \sqrt{k_o^2 - x^2} \quad (\text{Im } \gamma_o \geq 0).$$

Наличие полюса (или полюсов) у функции $h(x, z, z')$ на действительной оси в комплексной плоскости x требует описанной выше деформации контура интегрирования в (4). Оптимальные (по критериям точности и времени вычислений) значения констант T_a , T_b следующие: $T_a = 2/\sqrt{k_o|y - y'|}$ при $1 < k_o|y - y'| \leq 40$ и $T_a = 2$ при $k_o|y - y'| \leq 1$, $T_b = \sqrt{\epsilon_s} + 20/\min((k_o z + k_o z' - 2k_o b), |k_o z + k_o z'|)$.

Численно исследованы закономерности рассеяния плоской волны, падающей на слой из верхнего ($z > 0$) полупространства под углом скольжения φ_o . Поперечное сечение включения выбрано в виде:

а) прямоугольника со сторонами, параллельными осям Oy и Oz , и размерами a и h соответственно; б) ромба с диагоналями, параллельными осям Oy и Oz , и длинами a и h . Центр включения располагался в точке $y = 0$, $z = -z_p$. Диэлектрическая проницаемость цилиндра полагалась равной $\epsilon_p = 1$ (такое включение описывает расслоение в образце ПКМ). Угловое распределение рассеянного поля в дальней зоне включения характеризовалось индикатрисой рассеяния

$$\sigma_1(\varphi) = \lim_{L \rightarrow \infty} (LP_s(L, \varphi) / P_o), \quad z > 0, \quad (15)$$

где P_o - плотность потока энергии вышеупомянутой плоской волны при $z = +0$.

Падение плоской волны на диэлектрический слой приводит к возникновению в последнем стоячей волны в результате интерференции полей, отраженных от верхней и нижней границ. При попадании тонкого ($k_o h \leq 0,3$) включения в пучность стоячей волны рассеянное им поле максимально по величине, а при попадании в узел - минимально. Описанное явление отчетливо проявляется на частотной зависимости рассеянного в надира (т.е. при $\varphi = 90^\circ$) поля и может служить

принципиальной основой для определения глубины залегания включения z_p . Частотная зависимость сечения рассеяния σ_1 прямоугольного цилиндра приведена на рис. 1 при $|b|/a = 4$, $z_p/a = 2$, $h/a = 0,06$, $\epsilon_s = 3$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

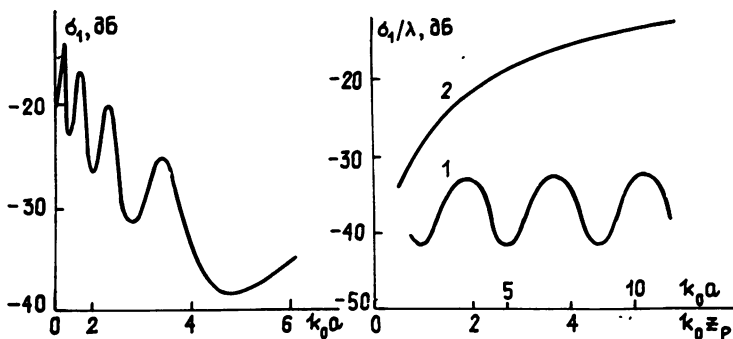


Рис 1,2.

Сечения рассеяния зависят как от глубины погружения z_p включения, так и от его размеров. Величина рассеянного в надир поля монотонно возрастает с увеличением параметра $k_0 a$ и осциллирует с периодом $\pi/(2k_0\sqrt{\epsilon_s})$ при изменении z_p . Зависимость величины рассеянного прямоугольным включением в надир поля от глубины залегания (кривая 1) и длины a (кривая 2) представлена на рис. 2 ($k_0 h = 0,15$, $\epsilon_s = 3$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varphi = 90^\circ$; 1 - $k_0 a = 1$, $k_0 |b| = 20$; 2 - $k_0 z_p = 2$, $k_0 |b| = 4$). Индикатрисы рассеяния прямоугольного включения для разных значений z_p изображены на рис. 3 ($k_0 a = 1$; $k_0 |b| = 4$; $k_0 h = 0,15$; $\epsilon_s = 3$; $\varphi_0 = 90^\circ$; $k_0 z_p = 1,28$ (кривая 1), 2, 185(2), 3, 09(3)). В случае нормального падения зондирующей волны индикатрисы рассеяния прямоугольного включения с $k_0 a \leq 6$; $k_0 h \leq 0,3$ обращаются в нуль только при скользящих углах φ и монотонно возрастают при $\varphi \rightarrow 90^\circ$. Индикатриса рассеяния включения с $7 \leq k_0 a \leq 13$ имеет два минимума при нескользящих углах φ , с $14 \leq k_0 a \leq 20$ - четыре и т. д. Зависимости $\sigma_1(\varphi)$ прямоугольного цилиндра длиной $k_0 a = 4$ (кривая 1), 9(2), 16(3) представлены на рис. 4 ($k_0 |b| = 4$, $k_0 h = 0,15$; $k_0 z_p = 2$, $\epsilon_s = 3$, $\varphi_0 = 90^\circ$). Увеличение толщины h включения приводит к сглаживанию минимумов индикатрисы рассеяния и увеличению рассеянного поля при всех углах φ .

Форма включения сказывается на угловом распределении рассеянного поля при $k_0 a \geq 6$, $k_0 h \geq 0,3$. Для ромбовидного включения с размерами $k_0 a \leq 10$, $k_0 h \leq 1$, расположенного в слое с $k_0 |b|/\sqrt{\epsilon_s} \leq 2\pi$, $\sigma_1(\varphi)$ обращается в нуль при скользящих углах φ и монотонно

возрастает при $\varphi \rightarrow 90^\circ$ (если $\varphi_0 = 90^\circ$). На рис. 5 изображены индикатрисы рассеяния прямоугольного включения с толщиной $k_0 h = 0,15$ (кривая 1), 0,9 (кривая 3) и ромбовидного включения с $k_0 h = 0,9$ (кривая 2) ($k_0 a = 9$, $k_0 |b| = 4$, $k_0 z_p = 2$, $\varepsilon_s = 3$, $\varphi_0 = 90^\circ$).

5. Таким образом, в работе предложен новый высокоэффективный алгоритм численного решения двумерной задачи дифракции E-поляризованных волн на диэлектрическом цилиндре произвольного сечения в плоскостной среде. Применение нового способа вычисления матричных элементов и использование итерационной схемы для решения СЛАУ позволили существенно сократить время вычислений и снизить объем требуемой памяти по сравнению с существующим алгоритмом [7, 8]. Различие в эффективности обоих алгоритмов растет с увеличением размеров включения (по сравнению с длиной волны). Кроме того, использованный нами метод расчета коэффициентов СЛАУ позволяет расширить область применимости алгоритма на среды с малыми (и даже отсутствующими) омическими потерями. Алгоритм одинаково эффективен для включений как однородных, так и неоднородных, как с координатной, так и некоординатной формой поперечного сечения, поэтому он может служить основой для решения задач визуализации широкого класса проницаемых объектов в слоистых средах.

С помощью предложенного алгоритма решена практически важная для дефектоскопических приложений задача о рассеянии плоской волны на расслоении в ПКМ. Обнаруженные физические закономерности могут быть использованы для определения размеров и места расположения расслоения.

В заключение авторы выражают благодарность О. А. Третьякову за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения и С. Н. Шульге за предоставленные им результаты расчетов контрольной задачи о рассеянии плоской волны на однородном круговом цилиндре в однородной полупространстве.

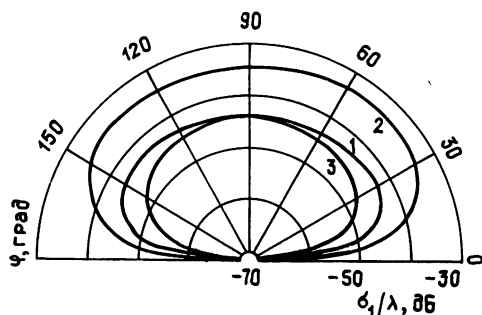


Рис. 3.

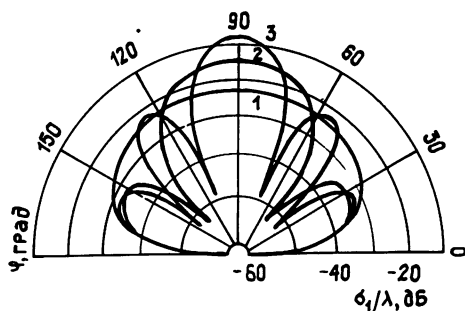


Рис. 4.

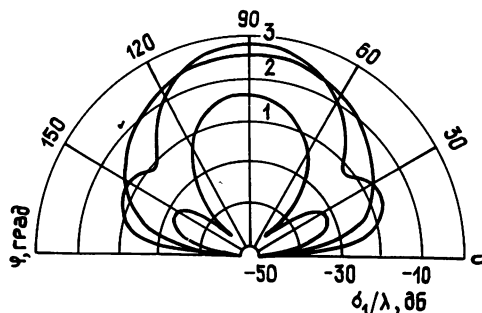


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. П. // Дефектоскопия. 1989. N 9. С. 24.
2. Uzunoglu N.K., Fikioris J.S. // J.Opt.Soc.America. 1982. V. 72. N 5. P. 628.
3. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. - Киев: Наукова думка, 1989. - 251 с.
4. Cottis P.G., Kanelloropoulos J.D. // Int.J.Electr. 1986. V. 61. N 4. P. 477.
5. Дмитриев В. И., Барышникова И. А., Захаров Е. В. Аномальные электромагнитные поля пластовых тел. - Л.: Недра, 1977. - 168 с.
6. Технологический неразрушающий контроль пластмасс/А. И. Потапов, В. М. Игнатов, Ю. Б. Александров и др. - Л.: Химия, 1979. - 288 с.
7. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. Метод интегральных уравнений при моделировании электромагнитных зондирований неоднородных сред//Вычислительные методы и программирование. -М.: Гос. ун-т, 1980. Вып. 32. С. 200.
8. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. Метод интегральных уравнений для задач магнитотеллурического зондирования в случае сред с произвольной двумерной неоднородностью//Математические модели прикладной электродинамики/Под ред. В. И. Дмитриева, А. С. Ильинского. - М.: Гос. ун-т, 1984. С. 3.
9. Richmond J.H. // IEEE Trans. Antennas Propagation. 1965. V. 13. N 2. P. 334.
10. Su Ch.-Ch. // IEEE Trans. Antennas Propagation. 1987. V. 35. N 12. P. 1418.
11. Michalski K.A., Butler C.M. // IEE Proc. 1987. V. 134. Pt.H. N 1. P. 93.
12. Mittra R., Chan C.H. // Electromagnetics. 1985. N 5. P. 123.
13. Воеводин В. В., Тартышников Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. - М.: Наука, 1987. - 319 с.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 июля 1990 г.

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF SCATTERING FROM A DIELECTRIC CYLINDER OF ARBITRARY CROSS SECTION SHAPE INSIDE A PLANE-LAYERED MEDIUM. THE E-SCATTERING CASE

A. B. Vasil'ev, N. P. Zhuck, D. A. Rapoport, A. G. Yarovoj

A numerical scheme to obtain the solution of two-dimensional problem of E-polarized wave scattering from a dielectric cylinder embedded into plane-layered medium is described. The cross section of rectangular and rhomboid cylinders inside a homogeneous dielectric slab is investigated.

УДК 533.9.537

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЙЯНИЯ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМАГНИЧЕННОМ ПУЧКЕ ЭЛЕКТРОНОВ

М. В. Кузелев, В. А. Панин

Исследована нелинейная динамика рассеяния линейно поляризованных электромагнитных волн на немагнитном пучке нерелятивистских электронов. Получены общие нелинейные уравнения, проанализированы линейные режимы рассеяния. Для случая пучков большой плотности общие нелинейные уравнения сведены к системе, содержащей лишь кубические нелинейности. Записаны аналитические выражения для амплитуд взаимодействующих волн и для характерных времен развития процессов.

Процессы рассеяния электромагнитных волн на электронных пучках традиционно привлекают к себе большое внимание [1 - 6]. Последнее обусловлено широкими перспективами применения процессов рассеяния для создания различного рода излучающих устройств типа ЛСЭ [7, 8], не говоря уже о фундаментальной роли этих явлений в динамике как равновесной, так и неравновесной плазмы. Несмотря на большое количество работ по теории рассеяния имеется еще целый ряд вопросов, требующих детальной проработки.

Суть дела в следующем. Известно, что в процессах рассеяния резонансная сила, действующая на электрон со стороны электромагнитного поля, пропорциональна произведению амплитуд падающей и рассеянной волн (комбинационная сила). При этом произведение амплитуд волн может иметь совершенно различное происхождение. Так, для прямолинейных пучков в бесконечно сильном продольном магнитном поле сила, действующая на электрон, пропорциональна продольному электрическому полю $\mathcal{F} \sim E_z = E_1 \exp(i\varphi_1) + E_2 \exp(i\varphi_2)$, и произведение амплитуд взаимодействующих волн $E_1 E_2$ возникает в результате разложения фаз φ_1 и φ_2 по быстрым осцилляциям координат электронов и последующего усреднения [1 - 5]. При усреднении предполагается, что движение электрона в полях E_1 и E_2 является быстрым, а в поле комбинационной волны $E_1 E_2$ - медленным.

Другая ситуация возникает в поперечно-осциллирующих пучках [7, 8]. Так, при рассеянии на немагнитном электронном пучке чисто поперечных электромагнитных волн $\mathcal{F} \sim (\partial/\partial z)(A_1 + A_2)^2$, где A_1 и A_2 - векторные потенциалы падающей и рассеянной волн. Если электромагнитное поле обладает циркулярной поляризацией, то процедура возведения в квадрат суммы $A_1 + A_2$ сразу без какого-либо усреднения выделяет медленную составляющую силы $(-\partial/\partial z)(A_1 A_2)^*$.

* Для циркулярно поляризованных волн $A_1^2 = \text{const}$ и $A_2^2 = \text{const}$ [8].

Ситуация усложняется при линейной поляризации волн. В этом случае в результате возведения в квадрат наряду с медленным слагаемым $\sim A_1 A_2$ появятся и быстроосциллирующие члены. Однако после проведения описанной выше процедуры разложения фаз $\varphi_{1,2}$ и усреднения они также дадут вклад в медленное движение. Таким образом, математически случай рассеяния на пучке линейно поляризованных поперечных волн содержит в себе элементы теории рассеяния как циркулярно поляризованных волн, так и элементы теории рассеяния квазипоперечных волн на замагниченных пучках. Данное обстоятельство приводит к необходимости последовательного учета в теории рассеяния линейно поляризованных волн пучковых нелинейностей разной природы. Этим вопросам и посвящена настоящая работа, в которой получены общие нелинейные уравнения теории рассеяния линейно поляризованных волн на немагнитном пучке; выведено дисперсионное уравнение линейной теории и проанализированы линейные режимы рассеяния. Для случая пучков большой плотности методом разложения по траекториям электронов [9] общие нелинейные уравнения сведены к системе, содержащей лишь кубические нелинейности; записаны аналитические выражения для амплитуд насыщения взаимодействующих волн и для волн характерных времен развития процессов.

Поскольку теория рассеяния линейно поляризованных волн на релятивистских электронных пучках имеет достаточно специфические особенности, в настоящей работе мы ограничимся случаем нерелятивистских пучков. Релятивистская теория будет изложена в последующих работах.

Представим векторные потенциалы линейно поляризованных поперечных электромагнитных волн в виде

$$\vec{A}_1 = \{A_{x1}, 0, 0\}, \quad \vec{A}_2 = \{A_{x2}, 0, 0\}, \quad (1)$$

где

$$A_{xj} = \frac{1}{2} [A_j(t) \exp(-i\omega_j t + ik_j z) + \text{к. с.}], \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

и запишем следующую систему уравнений движения электронов пучка:

$$\frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{c}{mc} v_x \frac{\partial}{\partial z} (A_{x1} + A_{x2}),$$

$$v_x = -\frac{e}{mc} (A_{x1} + A_{x2}). \quad (3)$$

Здесь z - координата электрона в направлении движения пучка, v_z - его продольная скорость, v_x - поперечная, а φ - скалярный потенциал поля, возникающего при продольной модуляции пучка по плотности (потенциал волны плотности заряда).

Следуя известному в теории рассеяния подходу, считаем движение электронов в полях A_{x1} и A_{x2} быстрым, а движение в поле комбинационной волны $A_1 A_2^* \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z)$ и в поле волны плотности заряда

$$\varphi = \frac{1}{2} [\varphi_0(t) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z) + \text{к. с.}] \quad (4)$$

медленным, где $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$, $k_0 = k_1 - k_2$.

Подставляя выражения (2) и (4) в систему (3), получим следующее уравнение для продольной скорости:

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} = & -\frac{i}{2} \frac{e}{m} k_0 [\varphi_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z) - \text{к. с.}] - \\ & -\frac{i}{4} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 k_0 [A_1 A_2^* \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z) - \text{к. с.}] - \\ & -\frac{i}{4} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 [k_1 A_1^2 \exp(-2i\omega_1 t + 2ik_1 z) + k_2 A_2^2 \exp(-2i\omega_2 t + \\ & + 2ik_2 z) + k_+ A_1 A_2 \exp(-i\omega_+ t + ik_+ z) - \text{к. с.}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\omega_+ = \omega_1 + \omega_2$, $k_+ = k_1 + k_2$. Из (5) видно, что первое и второе слагаемые дают вклад в медленное движение, причем второе слагаемое есть результат возведения в квадрат суммы $A_{x1} + A_{x2}$. Последнее третье слагаемое в (5) является быстроосциллирующим. Применяя к нему соответствующую процедуру разложения фаз и усреднения [1-5], можно получить дополнительный вклад в медленное движение. Для этого представим координату z и продольную скорость электрона v_z в виде

$$z = ut + z' + \tilde{z}, \quad v_z = v' + \tilde{v}. \quad (6)$$

Здесь \tilde{z} и \tilde{v} - быстрые осцилляции координаты и скорости, а z' и v' - медленные (u - скорость невозмущенного пучка). Отметим, что процедура усреднения, а следовательно, и представление (6) имеют смысл, если выполнено неравенство [5]

$$\max[t_0^{-2}, \omega_b^2] \ll (\omega_{1,2} - k_{1,2}u)^2, \quad k_0^2 u^2, \quad (7)$$

где t_0 - характерное время изменения амплитуд взаимодействующих волн, а ω_b - ленгмюровская частота электронов пучка. Кроме того, для корректности процедуры усреднения требуется легко выполнимое предположение о малости амплитуд быстрых осцилляций электронов:

$$|k_{1,2} \tilde{z}| \ll 1. \quad (8)$$

Именно условие (8) позволяет записать выражение для быстрых осцилляций координаты электрона в виде

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & \frac{i}{16} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} [k_1 A_1^2 \exp(-2i\omega_1 t + 2ik_1 ut + 2ik_1 z') + \\ & + k_2 A_2^2 \exp(-2i\omega_2 t + 2ik_2 ut + 2ik_2 z') + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ k_+ A_1 A_2 \exp(-i\omega_+ t + ik_+ ut + ik_+ z') - \text{к. с.}],$$

где $\Omega_0 = \omega_1 - k_1 u \approx \omega_2 - k_2 u \approx \frac{1}{2} (\omega_+ - k_+ u)$.

С учетом (7) и (9) медленные движения электронов описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dz'}{dt} = v' - u, \quad \frac{dv'}{dt} = -\frac{i}{2} \frac{e}{m} k_0 [\varphi_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 ut + \\ + ik_0 z') - \text{к. с.}] - \frac{i}{4} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 k_0 [A_1 A_2^* \exp(-i\omega_0 t + ik_0 ut + ik_0 z') - \\ - \text{к. с.}] + \frac{1}{4} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \langle \tilde{z} [2k_1^2 A_1^2 \exp(-2i\omega_1 t + 2ik_1 ut + 2ik_1 z') + \\ + 2k_2^2 A_2^2 \exp(-2i\omega_2 t + 2ik_2 ut + 2ik_2 z') + k_+^2 A_1 A_2 \times \\ \times \exp(-i\omega_+ t + ik_+ ut + ik_+ z') - \text{к. с.}] \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

в которых угловые скобки означают усреднение по быстрым осцилляциям. Отметим, что система (10) описывает динамику электронов как в режиме одночастичного, так и в режиме коллективного рассеяния [10]. Выражая далее амплитуду потенциала продольных плазменных колебаний пучка φ_0 через амплитуду волны плотности заряда ρ_1 [5],

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \frac{4\pi en_b}{k_0^2} \rho_1 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 ut), \\ \rho_1 = \frac{2}{L} \int_0^L \exp(-ik_0 z') dz_0, \end{aligned} \quad (11)$$

и проводя усреднение в (10), запишем уравнения движения электронов в виде

$$\begin{aligned} \frac{dz'}{dt} = v' - u, \\ \frac{dv'}{dt} = -\frac{i}{2} \frac{\omega_b^2}{k_0} [\rho_1 \exp(ik_0 z') - \text{к. с.}] - \frac{i}{4} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 k_0 [A_1 A_2^* \exp(-i\tilde{D}t + \\ + ik_0 z') - \text{к. с.}] - \frac{i}{64} \left(\frac{e}{mc}\right)^4 \frac{k_0}{\Omega_0^2} [2k_1 k_2 A_1^2 A_2^{*2} \exp(-2i\tilde{D}t + \\ + 2ik_0 z') + k_1 k_+ A_1 |A_1|^2 A_2^* \exp(-i\tilde{D}t + ik_0 z') + \end{aligned} \quad (12)$$

$$+ k_2 k_1 A_1 |A_2|^2 \exp(-i\bar{D}t + ik_0 z') - \text{к. с.}]$$

Здесь $\bar{D} = \omega_0 - k_0 u$.

Остановимся подробнее на структуре второго уравнения. В нем первое слагаемое представляет собой силу, возникающую вследствие модуляции заряда пучка, а второе и третье - резонансную силу со стороны падающей и рассеянной волн. Происхождение второго слагаемого определяется возведением в квадрат суммы $A_{x1} + A_{x2}$, а третьего - усреднением по быстрым осцилляциям. Отметим, что кроме алгебраических нелинейностей второго и четвертого порядков по амплитудам A_1 и A_2 уравнение движения содержит еще трансцендентную нелинейность $\exp[ik_0 z(t, z_0)]$, которую в ряде случаев можно свести к алгебраической (см. ниже). Учет алгебраических нелинейностей более высокого, чем четвертый, порядка при проведении усреднения и получении выражения (9) явился бы в силу неравенства (8) превышением точности.

Перейдем теперь к описанию динамики электромагнитного поля. Амплитуды падающей и рассеянной волн удовлетворяют волновому уравнению для векторного потенциала

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (A_{x1} + A_{x2}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A_{x1} + A_{x2}) = - \frac{4\pi}{c} j_x, \quad (13)$$

которое после подстановки (2) и элементарного преобразования расщепляется на два* уравнения для амплитуд A_1 и A_2 :

$$\frac{2i\omega_j}{c^2} \frac{\partial A_j}{\partial t} - \left(k_j^2 - \frac{\omega_j^2}{c^2} \right) A_j = - \frac{4\pi}{c} \frac{2}{L} \int_0^L j_x(t, z) \exp(i\omega_j t - ik_j z) dz, \quad (14)$$

$$j = 1, 2.$$

При получении (14) учтено, что амплитуды A_1 и A_2 являются медленными функциями времени.

Считая, что для моноскоростного пучка поперечный ток определяется выражением [11]

$$j_x(t, z) = en_b \int v_x(t, z_0) \delta[z - z(t, z_0)] dz_0, \quad (15)$$

перепишем уравнения (14) в виде

$$\frac{2i\omega_j}{c^2} \frac{dA_j}{dt} - \left(k_j^2 - \frac{\omega_j^2}{c^2} \right) A_j = - \frac{4\pi en_b}{c} \frac{2}{L} \int_0^L v_x(t, z_0) \times \exp(i\omega_j t - ik_j z(t, z_0)) dz_0, \quad (16)$$

* Как обычно, функции $\exp(ik_1 z)$ и $\exp(ik_2 z)$ считаются ортогональными на некотором пространственном отрезке $z \in [0, L]$.

причем под $v_x(t, z_0)$ следует понимать выражение

$$v_x(t, z_0) = -\frac{e}{2mc} [A_1 \exp(-i\omega_1 t + ik_1 z) + A_2 \exp(-i\omega_2 t + ik_2 z) + \text{к. с.}] \Big|_{z=z(t, z_0)}. \quad (17)$$

Далее, подставляя выражение (17) в (16) и используя представление (6), получим следующую систему уравнений для амплитуд волн:

$$\begin{aligned} \frac{2i\omega_1}{c^2} \frac{dA_1}{dt} - \left(k_1^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2}\right) A_1 = \frac{\omega_b^2}{2c^2} \frac{2}{L} \int_0^L dz_0 [A_1 + \\ + A_2 \exp(i\tilde{\omega}t - ik_0 z') - 2ik_1 \langle \tilde{z} A_1^* \exp(2i\omega_1 t - 2ik_1 ut - \\ - 2ik_1 z') \rangle - ik_+ \langle \tilde{z} A_2^* \exp(i\omega_+ t - ik_+ ut - ik_+ z') \rangle], \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2i\omega_2}{c^2} \frac{dA_2}{dt} - \left(k_2^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2}\right) A_2 = \frac{\omega_b^2}{2c^2} \frac{2}{L} \int_0^L dz_0 [A_2 + A_1 \exp(-i\tilde{\omega}t + \\ + ik_0 z') - ik_+ \langle \tilde{z} A_1^* \exp(i\omega_+ t - ik_+ ut - ik_+ z') \rangle - \\ - 2ik_2 \langle \tilde{z} A_2^* \exp(2i\omega_2 t - 2ik_2 ut - 2ik_2 z') \rangle]. \end{aligned}$$

В окончательном виде уравнения для динамики амплитуд падающей и рассеянной волн получаются после подстановки в (18) выражения (9) для \tilde{z} , проведения процедуры усреднения по быстрым осцилляциям и записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{2i\omega_1}{c^2} \frac{dA_1}{dt} - \left\{ k_1^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} + \frac{\omega_b^2}{c^2} \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} (2k_1^2 |A_1|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + k_+^2 |A_2|^2) \right] \right\} A_1 = \frac{\omega_b^2}{2c^2} \left[A_2 \rho_1 e^{i\tilde{\omega}t} + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} \times \right. \\ \left. \times \left(2k_1 k_2 A_1^* A_2^2 \rho_2 e^{2i\tilde{\omega}t} + 2k_1 k_+ |A_1|^2 A_2 \rho_1 e^{i\tilde{\omega}t} + k_1 k_+ A_1^2 A_2^* \rho_1^* e^{-i\tilde{\omega}t} + \right. \right. \\ \left. \left. + k_2 k_+ |A_2|^2 A_2 \rho_1 e^{i\tilde{\omega}t} \right) \right], \quad (19) \end{aligned}$$

$$\frac{2i\omega_2}{c^2} \frac{dA_2}{dt} - \left\{ k_2^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} + \frac{\omega_b^2}{c^2} \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} (2k_2^2 |A_2|^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 + k_+^2 |A_1|^2 \Big] \Big\} A_2 = & \frac{\omega_b^2}{2c^2} \left[A_1 \rho_1^* e^{-i\tilde{D}t} + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} \left(2k_1 k_2 A_2^* A_1^2 \rho_2^* e^{-2i\tilde{D}t} + \right. \right. \\
 & + 2k_2 k_+ |A_2|^2 A_1 \rho_1^* e^{-i\tilde{D}t} + k_2 k_+ A_2^* A_1^2 \rho_1^* e^{i\tilde{D}t} + \\
 & \left. \left. + k_1 k_+ |A_1|^2 A_1 \rho_1^* e^{-i\tilde{D}t} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \rho_2 = \frac{2}{L} \int_0^L e^{-2ik_0 z'} dz_0.$$

В левых частях уравнений (19) в фигурных скобках заключены нелинейные дисперсионные соотношения для спектров падающей и рассеянной волн. Поскольку в вакууме или в другой слабозамедляющей недиспергирующей среде электромагнитные волны подчиняются линейному закону дисперсии $\omega_1 = k_1 c$ и $\omega_2 = k_2 c$, то выражения в фигурных скобках фактически сводятся только к кубическим нелинейным поправкам для спектров. Далее эти поправки, в силу их малости, не учитываются.

В итоге полная система уравнений, описывающая нелинейную динамику рассеяния линейно поляризованных волн на незамагниченном пучке нерелятивистских электронов запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dz'}{dt} = v' - u, \quad \frac{dv'}{dt} = & - \frac{i}{2} \frac{\omega_b^2}{k_0} [\rho_1 \exp(ik_0 z') - \text{к. с.}] - \\
 & - \frac{i}{4} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k_0 [A_1 A_2^* \exp(-i\tilde{D}t + ik_0 z') - \text{к. с.}] - \\
 & - \frac{i}{64} \left(\frac{e}{mc} \right)^4 \frac{k_0}{\Omega_0^2} [2k_1 k_2 A_1^2 A_2^* \exp(-2i\tilde{D}t + 2ik_0 z') + \\
 & + k_1 k_+ A_1 |A_1|^2 A_2^* \exp(-i\tilde{D}t + ik_0 z') + k_2 k_+ A_1 |A_2|^2 A_2^* \exp(-i\tilde{D}t + \\
 & + ik_0 z') - \text{к. с.}], \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{4i\omega_1}{\omega_b^2} \frac{dA_1}{dt} = & A_2 \rho_1 e^{i\tilde{D}t} + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} \left(2k_1 k_2 A_1^* A_2^2 \rho_2^* e^{2i\tilde{D}t} + \right. \\
 & + 2k_1 k_+ |A_1|^2 A_2 \rho_1 e^{i\tilde{D}t} + k_1 k_+ A_1^2 A_2^* \rho_1^* e^{-i\tilde{D}t} + k_2 k_+ |A_2|^2 A_2 \rho_1 e^{i\tilde{D}t} \Big), \\
 \frac{4i\omega_2}{\omega_b^2} \frac{dA_2}{dt} = & A_1 \rho_1^* e^{-i\tilde{D}t} + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{1}{\Omega_0^2} \left(2k_1 k_2 A_2^* A_1^2 \rho_2^* e^{-2i\tilde{D}t} + \right. \\
 & + 2k_2 k_+ |A_2|^2 A_1 \rho_1^* e^{-i\tilde{D}t} + k_2 k_+ A_2^2 A_1^* \rho_1^* e^{i\tilde{D}t} +
 \end{aligned}$$

$$+ k_1 k_+ |A_1|^2 A_1 \rho_1^* e^{-i\tilde{\omega}t}),$$

где

$$\rho_n = \frac{2}{L} \int_0^L \exp(-ink_0 z') dz_0. \quad (21)$$

Легко показать, что из трех последних уравнений системы (20) следуют соотношения Мэнли - Роу [12]

$$\begin{aligned} \omega_1 |A_1|^2 + \omega_2 |A_2|^2 &= \omega_1 |A_{10}|^2 + \omega_2 |A_{20}|^2, \\ \frac{1}{L} \int_0^L v' dz_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_0 \omega_1}{\omega_b^2} |A_1|^2 &= u + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_0 \omega_1}{\omega_b^2} |A_{10}|^2, \quad (22) \\ \frac{1}{L} \int_0^L v' dz_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_0 \omega_2}{\omega_b^2} |A_2|^2 &= u - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_0 \omega_2}{\omega_b^2} |A_{20}|^2, \end{aligned}$$

при получении которых использованы первые три из следующих начальных условий:

$$A_1|_{t=0} = A_{10}, \quad A_2|_{t=0} = A_{20}, \quad v'|_{t=0} = u, \quad z|_{t=0} = z_0 \in [0, L]. \quad (23)$$

Если в уравнениях (20) отбросить члены, получившиеся в результате усреднения по быстрым осцилляциям, то получим систему, описывающую обычные трехволновые взаимодействия [5].

Перейдем теперь к анализу линейной стадии процессов рассеяния. Для этого положим

$$z' = z_0 + \hat{z}, \quad v' = u + \hat{v}, \quad (24)$$

где \hat{z} и \hat{v} - малые возмущения. В линейном приближении амплитуды гармоник волн плотности заряда имеют вид

$$\rho_n = -ink_0 \frac{2}{L} \int_0^L \hat{z} \exp(-ink_0 z_0) dz_0. \quad (25)$$

Считая далее, что волна с индексом "1" является сигнальной (рассеянной), а с индексом "2" - накачкой (падающей), перепишем с учетом линейного приближения уравнения (20) следующим образом: :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{z}}{dt^2} &= -\frac{i}{2} \frac{\omega_b^2}{k_0} [\rho_1 \exp(ik_0 z_0) - \text{к. с.}] - \frac{i}{4} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k_0 [A_1 A_{20}^* \exp(-i\tilde{\omega}t + \\ &+ ik_0 z_0) \left(1 + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega^2} |A_{20}|^2 \right) - \text{к. с.}], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\frac{4i\omega_1}{\omega_b^2} \frac{dA_1}{dt} = A_{20}\rho_1 e^{i\tilde{D}t} \left(1 + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right).$$

Исключая с помощью (25) величину \hat{z} , имеем

$$\frac{d^2 \rho_1}{dt^2} + \omega_b^2 \rho_1 = - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k_0 \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right] \times \\ \times A_1 A_{20}^* e^{-i\tilde{D}t}, \quad (27)$$

$$\frac{4i\omega_1}{\omega_b^2} \frac{dA_1}{dt} = \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right] A_{20} \rho_1 e^{i\tilde{D}t}.$$

Поскольку на линейной стадии рассеяния

$$A_1 = A_0 e^{-i\delta\omega t}, \quad \rho_1 = \rho_0 e^{-i\delta\omega t - i\tilde{D}t}, \quad (28)$$

где $\delta\omega$ - инкремент, то из (27) следует дисперсионное уравнение

$$\delta\omega^2 (\delta\omega + 2\tilde{D}) = \frac{\omega_b^2}{8\omega_1} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k_0 |A_{20}|^2 \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right]. \quad (29)$$

Величина \tilde{D} , определенная выше, является расстройкой, и равенство $\tilde{D} = \omega_0 - k_0 u = -\omega_b$ означает резонанс комбинационной волны с медленной волной плотности заряда пучка, а $\tilde{D} = +\omega_b$ - с быстрой.

Для пучков малой плотности, когда

$$\delta\omega \gg 2\tilde{D}, \quad (30)$$

рассеяние происходит в одночастичном или комптоновском режиме [10] с инкрементом

$$\delta\omega = i \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\omega_b^2}{8\omega_1} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k_0 |A_{20}|^2 \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right] \right\}^{1/3}, \quad (31)$$

причем в явном виде неравенство (30) запишется следующим образом:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{k_0}{8\omega_1 \omega_b} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 |A_{20}|^2 \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right] \right\}^{1/3} \gg 1. \quad (32)$$

В пределе, обратном неравенствам (30) и (32), когда плотность пучка электронов достаточно велика и выполнено условие резонанса с медленной волной плотности заряда, реализуется коллективное или рамановское рассеяние [10] с инкрементом

$$\delta\omega = \frac{i}{4} \left\{ \frac{\omega_b k_0}{\omega_1} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 |A_{20}|^2 \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{k_2 k_+}{\Omega_0^2} |A_{20}|^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (33)$$

Вернемся теперь к системе (20) и отметим, что она получена в самой общей постановке задачи, т.е. не "привязана" пока ни к какой конкретной ситуации. Рассмотрим в качестве примера магнитостатический ондулятор [8]. Для этого положим

$$A_2 = A_{20} = \text{const}, \quad \omega_2 = 0, \quad k_2 = -\alpha, \quad \omega_1 = k_1 c, \quad (34)$$

где $\alpha = 2\pi/\lambda_0$, а λ_0 - период ондулятора. Тогда основные параметры, входящие в систему уравнений (20) и в дисперсионное уравнение (29), запишутся в конкретной форме:

$$k_1 = \alpha \frac{u}{c - u}, \quad k_+ = \alpha \frac{2u - c}{c - u},$$

$$k_0 = \alpha \frac{c}{c - u}, \quad \Omega_0 = \alpha u, \quad u < c. \quad (35)$$

Рассмотрим еще один пример: рассеяние линейно поляризованных поперечных волн на немагнитном пучке в системе с диэлектрическим заполнением. Считая, что падающая и рассеянная волны имеют линейный закон дисперсии

$$\omega_1 = k_1 v_\Phi, \quad \omega_2 = -k_2 v_\Phi, \quad (36)$$

получим

$$k_1 = \frac{1}{2} k_0 \frac{v_\Phi + u}{v_\Phi}, \quad k_2 = -\frac{1}{2} k_0 \frac{v_\Phi - u}{v_\Phi},$$

$$k_+ = k_0 \frac{u}{v_\Phi}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{2} k_0 \frac{v_\Phi^2 - u^2}{v_\Phi}. \quad (37)$$

Из формул (37) и рис. 1 видно, что в зависимости от соотношения между фазовой скоростью электромагнитных волн и скоростью пучка возможны два различных процесса рассеяния. В случае, когда $u < v_\Phi$ (точки пересечения 1 и 2 на рис. 1), имеет место рассеяние с повышением или понижением частоты [5]. При этом процесс с повышением частоты реализуется, если рассеянная волна имеет частоту и волновое число ω_1 и k_1 , а падающая (накачка) - ω_2 и k_2 соответственно. В противоположном пределе, когда $u > v_\Phi$ (точки пересечения 1 и 3 на рис. 1), независимо от того, какая волна является накачкой, в системе развивается взрывной процесс и амплитуды всех взаимодействующих волн растут

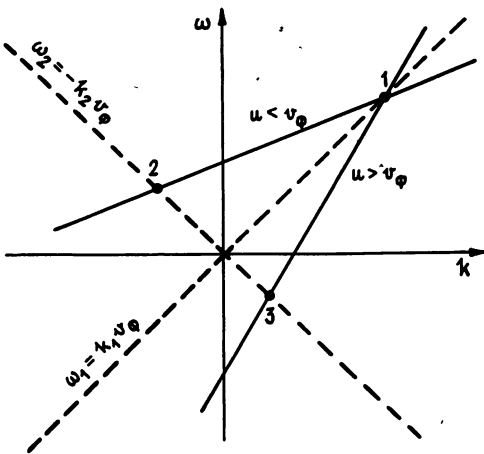


Рис. 1.

одновременно [5, 15]. Последнее, кстати, легко видеть из соотношений Мэнли - Роу (22), если считать $\omega_2 < 0$.

Перейдем к рассмотрению процессов рассеяния на немагнитных пучках большой плотности. В этом случае процессы носят коллективный характер, а нелинейная динамика определяется эффектом нелинейного сдвига частоты [15]. Аналогичная ситуация имеет место при рассеянии квазипоперечных волн на прямолинейных замагниченных пучках [5].

Прежде чем перейти к упрощению системы (20), введем следующие безразмерные переменные:

$$\tau = \omega_b t, \quad y = k_0 z', \quad \eta_0 = \tilde{D}/\omega_b, \quad k_0 L = 2\pi,$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{e}{m} k_0 \frac{\sqrt{2\omega_{1,2}}}{\omega_b^{3/2} c} A_{1,2}, \quad \nu_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega_b}{\sqrt{4\omega_1 \omega_2}}, \quad (38)$$

$$\hat{\nu} = \frac{1}{16} \frac{\omega_b^3}{\Omega_0^2 \sqrt{4\omega_1 \omega_2}} \frac{2k_1 k_2}{k_0^2}, \quad \nu_{1,2} = \frac{1}{16} \frac{\omega_b^3}{\Omega_0^2 2\omega_{1,2}} \frac{k_{1,2} k_+}{k_0^2}.$$

С учетом (38) уравнения (20) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\tau} = & -i\nu_0 \left[\varepsilon_2 \rho_1 e^{i\eta_0 \tau} + \hat{\nu} \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \rho_2 e^{2i\eta_0 \tau} + \right. \\ & \left. + \nu_1 \left(2|\varepsilon_1|^2 \varepsilon_2 \rho_1 e^{i\eta_0 \tau} + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* \rho_1^* e^{-i\eta_0 \tau} \right) + \nu_2 |\varepsilon_2|^2 \varepsilon_2 \rho_1 e^{i\eta_0 \tau} \right], \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\tau} = & -i\nu_0 \left[\varepsilon_1 \rho_1 e^{-i\eta_0 \tau} + \hat{\nu} \varepsilon_2^* \varepsilon_1^* \rho_2^* e^{-2i\eta_0 \tau} + \right. \\ & \left. + \nu_2 \left(2|\varepsilon_2|^2 \varepsilon_1 \rho_1^* e^{-i\eta_0 \tau} + \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^* \rho_1 e^{i\eta_0 \tau} \right) + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 \varepsilon_1 \rho_1^* e^{-i\eta_0 \tau} \right], \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} = & -\frac{i}{2} (\rho_1 e^{iy} - \text{к. с.}) - \frac{i}{2} \nu_0 \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2^* e^{iy - i\eta_0 \tau} (1 + \hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^* e^{iy - i\eta_0 \tau} + \right. \\ & \left. + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) - \text{к. с.} \right], \quad \rho_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dy_0 e^{-iny_0}. \end{aligned} \quad (39)$$

Отсюда видно, что если параметры $\hat{\nu} = \nu_1 = \nu_2 = 0$, то система (39) сведется к известным уравнениям трехволнового взаимодействия [5].

Воспользуемся далее методом разложения по траекториям электронов, предложенным в работе [9], и представим координату электрона в виде

$$y = y_0 + w(\tau) + \tilde{X}(y_0, \tau), \quad \tilde{X}(y_0, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n(\tau) e^{iny_0} + \text{к. с.} \right), \quad (40)$$

где функция $W(\tau)$ описывает смещение электронного пучка как целого, а $\tilde{X}(y_0, \tau)$ - осцилляторные движения электронов. После подстановки выражений (40) в систему (39) и проведения разложения экспонент по \tilde{X} с точностью, учитывающей все пучковые нелинейности третьего порядка, получим следующие уравнения для величин ε_1 , ε_2 , a_1 , a_2 , W :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon_1}{d\tau} &= -\nu_0 \left[f\varepsilon_2 \exp(-iW + i\eta_0\tau) + 2\hat{\nu}\varepsilon_1^* \varepsilon_2^2 \left(a_2 - \frac{i}{2} a_1^2 \right) \times \right. \\
 &\times \exp(-2iW + 2i\eta_0\tau) + \nu_1 (2|\varepsilon_1|^2 \varepsilon_2 f \exp(-iW + i\eta_0\tau) - \\
 &- \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* f^* \exp(iW - i\eta_0\tau)) + \nu_2 \varepsilon_2 |\varepsilon_2|^2 f \exp(-iW + i\eta_0\tau) \left. \right], \\
 \frac{d\varepsilon_2}{d\tau} &= \nu_0 \left[\varepsilon_1 f^* \exp(iW - i\eta_0\tau) + 2\hat{\nu}\varepsilon_2^* \varepsilon_1^2 \left(a_2^* + \frac{i}{2} a_1^{*2} \right) \times \right. \\
 &\times \exp(2iW - 2i\eta_0\tau) + \nu_2 (2|\varepsilon_2|^2 \varepsilon_1 f^* \exp(iW - i\eta_0\tau) - \\
 &- \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^* f \exp(-iW + i\eta_0\tau)) + \nu_1 \varepsilon_1 |\varepsilon_1|^2 f^* \exp(iW - i\eta_0\tau) \left. \right], \\
 \frac{d^2 a_1}{d\tau^2} + a_1 &= \frac{1}{2} |a_1|^2 a_1 + i a_1^* a_2 - i \nu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \left[1 - \frac{1}{4} |a_1|^2 + \right. \\
 &+ i \hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^* a_1^* \exp(iW - i\eta_0\tau) + (\nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \left(1 - \frac{1}{4} |a_1|^2 \right) \left. \right] \times \\
 &\times \exp(iW - i\eta_0\tau) - \frac{i}{2} \nu_0 \varepsilon_1^* \varepsilon_2 (1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \times \\
 &\times \left(i a_2 + \frac{1}{4} a_1^2 \right) \exp(-iW + i\eta_0\tau), \tag{41} \\
 \frac{d^2 a_2}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} \nu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^* [a_1 (1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) - \\
 &- 2i \hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \exp(iW - i\eta_0\tau)] \exp(iW - i\eta_0\tau), \\
 \frac{d^2 W}{d\tau^2} &= \frac{\nu_0}{4} \left\{ \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \left[(1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) f^* + 2\hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \left(a_2^* + \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. + \frac{i}{2} a_1^{*2} \right) \exp(iW - i\eta_0\tau) \right] \exp(iW - i\eta_0\tau) + \text{к. с.} \right\}, \\
 f &= \left(1 - \frac{1}{8} |a_1|^2 \right) a_1 - \frac{i}{8} a_1^* a_2.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в уравнениях (41) имеются слагаемые более высокого, чем третий, порядка нелинейности. Так, дополнительный вклад вносят, в частности, множители типа $|\varepsilon_{1,2}|^2 \varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2^2$. Однако если одна из волн является накачкой с большой амплитудой, например волна ε_2 , то множители типа $\varepsilon_2 |\varepsilon_2|^2$ (см. слагаемое, пропорциональное ν_2 в правой части первого уравнения) не дают вклада в порядок нелинейности.

Последнее уравнение системы (41) с помощью первых двух легко интегрируется один раз. В результате имеем

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{1}{4}(|\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_{10}|^2) = \frac{1}{4}(|\varepsilon_2|^2 - |\varepsilon_{20}|^2),$$

$$\varepsilon_{1,20} = \varepsilon_{1,2}|_{\tau=0}. \quad (42)$$

Делая далее замену переменных

$$\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1 \exp\left(-i \frac{W}{2}\right), \quad \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 \exp\left(i \frac{W}{2}\right),$$

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \exp(-i\eta_0 \tau), \quad \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 \exp(-2i\eta_0 \tau) \quad (43)$$

и считая $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$ медленными функциями времени, перепишем уравнения (41) в виде ($\eta_0 = -1$)^{*}

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\tau} + \frac{i}{8}(|\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_{10}|^2)\varepsilon_1 = & -\nu_0 \left\{ \varepsilon_2^* Q + 2\hat{\nu} \varepsilon_1^* \varepsilon_2^2 \left[-\frac{3}{8} i \alpha_1^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{8} \nu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^* ((1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \alpha_1 - 2i\hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^*) \right] + \right. \\ & \left. + \nu_1 (2|\varepsilon_1|^2 \varepsilon_2 Q - \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* Q^*) + \nu_2 \varepsilon_2 |\varepsilon_2|^2 Q \right\}, \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\tau} + \frac{i}{8}(|\varepsilon_2|^2 - |\varepsilon_{20}|^2)\varepsilon_2 = & \nu_0 \left\{ \varepsilon_1 Q^* + 2\hat{\nu} \varepsilon_2^* \varepsilon_1^2 \left[\frac{3}{8} i \alpha_1^{*2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{8} \nu_0 \varepsilon_2 \varepsilon_1^* ((1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \alpha_1^* + 2i\hat{\nu} \varepsilon_2 \varepsilon_1^*) \right] + \right. \\ & \left. + \nu_2 (2|\varepsilon_2|^2 \varepsilon_1 Q^* - \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^* Q) + \nu_1 \varepsilon_1 |\varepsilon_1|^2 Q^* \right\}, \quad (44) \end{aligned}$$

^{*}Поскольку гармоника α_2 не находится в резонансе с комбинационной волной, для нее из четвертого уравнения системы (41) следует алгебраическое соотношение $\alpha_2 = (i/8)\alpha_1^2 - (1/8)\nu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^* [(1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \alpha_1 - 2i\hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^*]$. Последнее позволяет легко исключить α_2 из первых трех уравнений.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\alpha_1}{d\tau} + \frac{3}{16} i |\alpha_1|^2 \alpha_1 = -\frac{1}{2} \nu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \left[(1 + \nu_1 |\varepsilon_2|^2 + \right. \\
& + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \left(1 - \frac{1}{8} |\alpha_1|^2 \right) + \frac{3}{4} \hat{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2^* \alpha_1^* - \frac{1}{16} \nu_0 (1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \\
& \quad \left. + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \varepsilon_1^* \varepsilon_2 \alpha_1 - \frac{1}{8} \nu_0 \hat{\nu} |\varepsilon_1|^2 |\varepsilon_2|^2 \right] - \\
& - \frac{1}{32} \nu_0 (1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) \varepsilon_1^* \varepsilon_2 \alpha_1^2, \\
Q = & \left(1 - \frac{1}{16} |\alpha_1|^2 \right) \alpha_1 + \frac{i}{16} \nu_0 (1 + \nu_1 |\varepsilon_1|^2 + \\
& + \nu_2 |\varepsilon_2|^2) |\alpha_1|^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^* + \frac{1}{8} \nu_0 \hat{\nu} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^* \alpha_1^*.
\end{aligned}$$

Уравнения (44) справедливы при выполнении неравенства [13]

$$\nu_0 |\varepsilon_{20}| \ll 1, \quad (45)$$

которое аналогично неравенству (32). Отметим также, что отброшенные в уравнениях (19) нелинейные поправки, заключенные в фигурных скобках, имеют третий порядок, но согласно результатам работы [14] их вклад в нелинейную динамику незначителен.

Прежде чем обсуждать аналитические решения системы (44), вернемся к уравнениям (39) и оценим вклад слагаемых, пропорциональных параметрам $\hat{\nu}$, ν_1 и ν_2 . В частности, для случая магнитостатического ондулятора из уравнения для u имеем

$$\begin{aligned}
\hat{\nu} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^*| & \sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{cu} \frac{c}{c-u}, \quad \nu_1 |\varepsilon_1|^2 \sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{cu} \frac{|2u-c|c}{(c-u)^2}, \\
\nu_2 |\varepsilon_2|^2 & \sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{u^2} \frac{|2u-c|}{c-u},
\end{aligned} \quad (46)$$

где $\tilde{\nu}_1 \approx \frac{e}{mc} |A_{1,2}|$. В рассматриваемом в настоящей работе случае нерелятивистского пучка $\hat{\nu} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^*| \sim \nu_1 |\varepsilon_1|^2 \sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{cu} \ll 1$, а $\nu_2 |\varepsilon_2|^2 \sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{u^2} \leq 1$.

Таким образом, лишь последнее слагаемое вносит вклад в нелинейную динамику рассеяния.

С учетом сказанного уравнения (44) для модели магнитостатического ондулятора существенно упрощаются и имеют вид

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\tau} + \frac{i}{8} (|\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_{10}|^2) \varepsilon_1 = -\nu_0 (1 + \nu_2 |\varepsilon_{20}|^2) \times$$

$$\times (1 - \frac{1}{16} |a_1|^2) a_1 \epsilon_{20} - \frac{i}{16} \nu_0^2 (1 + \nu_2 |\epsilon_{20}|^2) |\epsilon_{20}|^2 |a_1|^2 \epsilon_1,$$

$$\frac{da_1}{d\tau} + \frac{3}{16} i |a_1|^2 a_1 = - \frac{1}{16} \nu_0 (1 + \nu_2 |\epsilon_{20}|^2) |a_1|^2 \epsilon_1 \epsilon_{20}^* - \quad (47)$$

$$- \frac{1}{2} \nu_0 (1 + \nu_2 |\epsilon_{20}|^2) (1 - \frac{1}{16} |a_1|^2) \epsilon_1 \epsilon_{20}^* -$$

$$- \frac{1}{32} \nu_0 (1 + \nu_2 |\epsilon_{20}|^2) \epsilon_1^* \epsilon_{20} a_1^2 + \frac{i}{32} \nu_0^2 (1 + \nu_2 |\epsilon_{20}|^2) |\epsilon_1|^2 |\epsilon_{20}|^2 a_1.$$

Переходя далее к действительным амплитудам и фазам взаимодействующих волн

$$\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 e^{i\varphi_1}, \quad \epsilon_{20} \rightarrow \epsilon_{20} e^{i\varphi_{20}}, \quad a_1 \rightarrow a e^{i\varphi_a}, \quad \varphi_1 - \varphi_{20} - \varphi_a = \Phi, \quad (48)$$

находим интеграл энергии и фазовый интеграл системы (47):

$$\epsilon_1^2 - \epsilon_{10}^2 = 2a^2, \quad a_{10} = 0,$$

$$\nu_0 (1 + \nu_0 \epsilon_{20}^2) (1 - \frac{1}{16} a^2) \epsilon_1 \epsilon_{20} a \sin \Phi + \frac{3}{32} a^4 - \quad (49)$$

$$- \frac{1}{32} \nu_0^2 (1 + \nu_2 \epsilon_{20}^2) \epsilon_1^2 \epsilon_{20}^2 a^2 - \frac{1}{32} \epsilon_1^4 + \frac{1}{16} \epsilon_{10}^2 \epsilon_1^2 = \frac{1}{32} \epsilon_{10}^4.$$

Учитывая, что амплитуда статической накачки ϵ_{20} намного превосходит амплитуду сигнальной волны ϵ_{10} , сведем систему (47) к одному уравнению для $X = a^2$:

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{32} \sqrt{1 - 4\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2} \left\{ -X \left[X^3 + \frac{256\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2}{1 - 4\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2} X^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2048\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2}{1 - 4\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2} X - \frac{1024\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2 \epsilon_{10}^2}{1 - 4\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (50)$$

где $q = 1 + \nu_2 \epsilon_{20}$. Решение уравнения (50) стандартным образом выражается через эллиптические функции и имеет вид

$$X = \frac{1}{2} \epsilon_{10}^2 \left\{ 128\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4\nu_0^2 \epsilon_{20}^2 q^2}} - 1 \right) \operatorname{sn}^2(y, r) \right\} \times \quad (51)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_{10}^2 (1 - 4\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2) + 128\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2}} - 1 \right) \operatorname{cn}^2(y, r) \right\}^{-1},$$

где

$$y = \frac{\nu_0}{\sqrt{2}} \varepsilon_{20} Q \tau, \quad r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{64} \frac{\varepsilon_{10}^2}{\varepsilon_{20}^2} \sqrt{\varepsilon_0^4 + \frac{\varepsilon_{20}^2}{4\nu_0^2 Q^2}}. \quad (52)$$

Характерное время развития неустойчивости, когда амплитуда рассеянной волны достигает максимального значения, определяется формулой

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{\nu_0 \varepsilon_{20} Q} \ln \left[\frac{\varepsilon_{20}}{\varepsilon_{10}} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{20}^4 + \frac{\varepsilon_{20}^2}{8\nu_0^2 Q^2} \right)^{-1/4} \right]. \quad (53)$$

В случае адиабатического включения поля, когда $\varepsilon_{10} = 0$, $\varepsilon_{20} \neq 0$, решение определяется следующим выражением:

$$x = 16 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{8} \frac{1 - 4\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2}{\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2}} \operatorname{ch}[\sqrt{2} \nu_0 \varepsilon_{20} Q (\tau + \tau_0)] + 1 \right\}^{-1},$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \nu_0 \varepsilon_{20} Q} \ln \left(\frac{128\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2}{1 - 4\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2} \sqrt{1 + \frac{1}{8} \frac{1 - 4\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2}{\nu_0^2 \varepsilon_{20}^2 Q^2}} \right). \quad (54)$$

В более общем случае, когда накачка не является статической и имеет место трехволновый процесс рассеяния, вклад слагаемых, пропорциональных $\hat{\nu}$, ν_1 , ν_2 , определяется из (37) и (38) следующими формулами:

$$\begin{aligned} \hat{\nu} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^*| &\sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{|\nu_\Phi^2 - u^2|}, & \nu_1 |\varepsilon_1|^2 &\sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{(\nu_\Phi - u)^2} \frac{u}{\nu_\Phi + u}, \\ \nu_2 |\varepsilon_2|^2 &\sim \frac{\tilde{\nu}_1^2}{(\nu_\Phi + u)^2} \frac{u}{|\nu_\Phi - u|}. \end{aligned} \quad (55)$$

Из (55) видно, что при $\nu_\Phi \ll c$ ($u \ll c$) все три слагаемых могут быть не малы и оказывать существенное влияние на динамику неустойчивости. При этом решения уравнений (44) имеют исключительно громоздкий вид и поэтому здесь не обсуждаются.

Рассмотрим самый важный случай, когда рассеяние происходит в

вакууме ($v_{\phi} = c$). Имеем $\hat{\nu} |\epsilon_1 \epsilon_2^*| \sim \tilde{v}_1^2 / c^2 \ll 1$, $\nu_1 |\epsilon_1|^2 \sim \nu_2 |\epsilon_2|^2 \sim (\tilde{v}_1^2 / c^2) (u/c) \ll 1$, т.е. вкладом дополнительных нелинейностей в первом приближении можно пренебречь. В результате система (44) существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{d\epsilon_1}{d\tau} + \frac{i}{8} (|\epsilon_1|^2 - |\epsilon_{10}|^2) \epsilon_1 = -\nu_0 \left(1 - \frac{1}{16} |\alpha_1|^2\right) \alpha_1 \epsilon_2 - \frac{i}{16} \nu_0^2 |\epsilon_2|^2 |\alpha_1|^2 \epsilon_1, \quad (56)$$

$$\frac{d\epsilon_2}{d\tau} + \frac{i}{8} (|\epsilon_2|^2 - |\epsilon_{20}|^2) \epsilon_2 = -\nu_0 \left(1 - \frac{1}{16} |\alpha_1|^2\right) \alpha_1^* \epsilon_1 - \frac{i}{16} \nu_0^2 |\epsilon_1|^2 |\alpha_1|^2 \epsilon_2,$$

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} + \frac{3}{16} i |\alpha_1|^2 \alpha_1 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8} |\alpha_1|^2\right) \epsilon_1 \epsilon_2^* - \frac{1}{32} \nu_0 \alpha_1^2 \epsilon_1^* \epsilon_2 + \frac{i}{32} \nu_0^2 |\epsilon_1|^2 |\epsilon_2|^2 \alpha_1.$$

Процедура нахождения решения системы уравнений (56) аналогична приведенной выше, и поэтому приведем сразу окончательный результат:

$$x = \alpha^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{10}^2 \frac{\left(\epsilon_{20}^2 + 16 - \sqrt{(\epsilon_{20}^2 + 16)^2 + \frac{25}{8} \frac{\epsilon_{20}^2}{\nu_0^2}} \right) \operatorname{sn}^2(z, p)}{\frac{25}{256} \frac{\epsilon_{10}^2}{\nu_0^2} + \left(\epsilon_{20}^2 + 16 - \sqrt{(\epsilon_{20}^2 + 16)^2 + \frac{25}{8} \frac{\epsilon_{20}^2}{\nu_0^2}} \right) \operatorname{cn}^2(z, p)}. \quad (57)$$

Здесь

$$z = \frac{\nu_0}{\sqrt{2}} \epsilon_{20} \tau, \quad p = 1 - \frac{1}{32} \frac{\epsilon_{10}^2}{\epsilon_{20}^2} \sqrt{(\epsilon_{20}^2 + 16)^2 + \frac{25}{8} \frac{\epsilon_{20}^2}{\nu_0^2}}, \quad (58)$$

а характерное время рассеяния дается следующей формулой:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{\nu_0 \epsilon_{20}} \ln \left\{ 16 \frac{\epsilon_{20}}{\epsilon_{10}} \left[(\epsilon_{20}^2 + 16)^2 + \frac{25}{8} \frac{\epsilon_{20}^2}{\nu_0^2} \right]^{-1/4} \right\}. \quad (59)$$

В случае адиабатического включения поля, когда $\epsilon_{10} = 0$, $\epsilon_{20} \neq 0$, решение выражается через гиперболические функции:

$$x = \frac{128 \sqrt{2} \nu_0^2 \epsilon_{20}^2}{25 \nu_0 \epsilon_{20} \operatorname{ch}(\sqrt{2} \nu_0 \epsilon_{20} \tau) + 8 \sqrt{2} \nu_0^2 (\epsilon_{20}^2 + 16)}. \quad (60)$$

Решения (57) и (60) согласуются с результатами работы [13] для случая рассеяния на прямолинейном пучке в одномерном приближении.

В заключение отметим, что в общем случае дополнительные нелинейности оказывают существенное влияние на динамику рассеяния линейно поляризованных волн. Однако определяющую роль на нелинейной стадии они должны играть при рассеянии на релятивистских пучках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. //ЖЭТФ. 1979. Т.76. N.3. С.930.
2. Литвак А. Г., Петрухина В. И., Трахтенгерц В. Ю. //Письма в ЖЭТФ. 1973. Т.18. N 3. С.190.
3. Огнивенко В. В. //Радиотехника и электроника. 1982. Т.27. N 9. С.1818.
4. Балакирев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т.25. N 10. С.1198.
5. Кузелев М. В., Панин В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т.27. N 4. С.426.
6. Кузелев М. В., Панин В. А., Плотников А. П., Рухадзе А. А. //ЖЭТФ. 1989. Т.95. N 9. С.865.
7. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. - М.: Мир, 1987. - 240 с.
8. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах /Под ред. А. А. Рухадзе. - М.: Мир, 1983. - 282 с.
9. Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Кузелев М. В., Панин В. А. //ЖЭТФ. 1986. Т.91. N 5. С.1620.
10. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. //УФН. 1987. Т.152. N 2. С.285.
11. Кузелев М. В., Панин В. А., Рухадзе А. А., Филиппычев Д. С. Препринт ИОФАН СССР N 172. - М., 1984.
12. Кадомцев Б. Б. Коллективные эффекты в плазме. - М.: Мир, 1988. - 304 с.
13. Кузелев М. В., Бобылев Ю. В., Панин В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 10. С.1193.
14. Кузелев М. В., Панин В. А. //Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1987. Т.28. N 1. С.30.
15. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. - М.: Энергоиздат, 1981. - 223 с.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 июля 1990 г.

NONLINEAR SCATTERING THEORY OF LINEAR-POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVES BY THE NON-MAGNETIC BEAM OF ELECTRONS

M. V. Kuzelev, V. A. Panin

An article is devoted to the investigation of nonlinear dynamic scattering of linear-polarized electromagnetic waves by the non-magnetic beam of non-relativistic electrons. General nonlinear equations are received, linear regimes of scattering are analysed. For the case of the large density of beam the general nonlinear equations are reduced to the system, containing only cubic nonlinear members. Analytic expressions for amplitudes of interacting waves and typical times of the process development are noted.

УДК 533.951

ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ГРАНИЦ НА СПЕКТР ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННО-ВАКУУМНЫХ СТРУКТУРАХ

В. Л. Голуб, А. Н. Кондратенко

Изучено влияние металла на спектр поверхностных волн в цилиндрических волноведущих структурах вида металл - плазма - вакуум - металл, металл - вакуум - плазма - металл, а также волноводов с одной металлической границей. Показано, что такие границы могут существенно влиять на спектральные свойства волновода и приводить к изменению характера дисперсии поверхностной волны. Получены аналитические выражения для частоты симметричных поверхностных волн в различных интервалах спектра. Найденная сильная зависимость фазовой скорости от размера внутреннего металлического цилиндра может оказаться удобной для синхронизации пучка и волны в плазменном волноводе.

При использовании плазменных волноведущих структур для создания плазменных генераторов и усилителей одной из важных задач является удобство управления спектром возбуждаемых волн, в частности, их фазовой скоростью. Поверхностные волны (ПВ), которые имеют фазовую скорость, не превышающую скорость света в вакууме, могут эффективно использоваться для взаимодействия с электронными пучками. В работах [1, 2] подробно исследовались цилиндрические волноводы типа плазма - вакуум и вакуум - плазма. Было показано, что параметрами управления спектром ПВ могут служить плотность плазмы, радиус волновода и внешнее магнитное поле. Если поместить такие структуры во внешнюю металлическую оболочку, то можно обнаружить [1], что, оставаясь качественно подобными, дисперсионные кривые могут располагаться выше или ниже по частоте (в зависимости от типа волновода), чем в отсутствие металла. Однако в некоторых случаях влияние металлических границ может быть значительно сильнее и полностью изменять характер спектра ПВ.

В данной работе исследуются дисперсионные свойства непотенциальных поверхностных волн в коаксиальных цилиндрических структурах типа металл - вакуум - плазма - металл (МВПМ), металл - плазма - вакуум - металл (МПВМ) и их предельные случаи отсутствия одной из металлических оболочек без внешнего магнитного поля.

Дисперсионное уравнение для ПВ. Рассмотрим бесконечно длинные цилиндры с осью вдоль оси z , вложенные друг в друга в последовательности: металл ($r \leq r_1$), вакуум ($r_1 < r \leq r_2$), плазма ($r_2 < r \leq r_3$), металл ($r > r_3$). Решение системы уравнений Максвелла и материальных уравнений будем искать в виде ПВ, распространяющейся вдоль оси z , а плазму описывать в линейном, гидродинамическом приближении. Ниже рассматриваются только симметричные волны (с нулевым азимутальным

числом), так как они наиболее чувствительны к наличию металлических границ. Используя непрерывность тангенциальных (z, φ) компонент полей \vec{E} и \vec{H} на границе $r = r_2$ и равенство их нулю при $r = r_1, r_3$, можно получить дисперсионное уравнение для структуры МВМ:

$$\frac{k}{\alpha_v} \left[\frac{I_1(\alpha_v r_2)}{I_0(\alpha_v r_1)} + \frac{K_1(\alpha_v r_2)}{K_0(\alpha_v r_1)} \right] \left[\frac{I_0(\alpha_v r_2)}{I_0(\alpha_v r_1)} - \frac{K_0(\alpha_v r_2)}{K_0(\alpha_v r_1)} \right]^{-1} +$$

$$+ \varepsilon \frac{k}{\alpha} \left[\frac{K_1(\alpha r_2)}{K_0(\alpha r_3)} + \frac{I_1(\alpha r_2)}{I_0(\alpha r_3)} \right] \left[\frac{K_0(\alpha r_2)}{K_0(\alpha r_3)} - \frac{I_0(\alpha r_2)}{I_0(\alpha r_3)} \right]^{-1} = 0. \quad (1)$$

Здесь обозначено: I_m, K_m - соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда порядка m ;

$$\alpha_v^2 = k_z^2 - k^2, \quad \alpha^2 = k_z^2 - \varepsilon k^2, \quad k = \omega/c,$$

$$\varepsilon = 1 - 1/\mu^2, \quad \mu = \omega/\omega_p, \quad (2)$$

ω_p - плазменная электронная частота; k_z - волновой вектор вдоль оси z . Для структуры МВМ нужно в (1) взаимно поменять местами α и α_v и переставить ε от второго слагаемого к первому. Введем следующие безразмерные параметры:

$$q = k_z r_2, \quad R_i = \omega_p r_i / c \quad (i = 1, 2, 3), \quad h_1 = R_2 - R_1,$$

$$h_2 = R_3 - R_2, \quad \beta = \omega/kc. \quad (3)$$

В дальнейшем нас будут интересовать такие области спектров, где наличие металла существенно, а именно:

$$\alpha_v \Delta r_{1,2} \ll 1, \quad \alpha \Delta r_{1,2} \ll 1 \quad (\Delta r_1 = r_2 - r_1, \quad \Delta r_2 = r_3 - r_2) \quad (4)$$

(в безразмерных переменных эти условия принимают различный вид в зависимости от области изменения R_2 и q).

Волновод вакуум - плазма - металл (ВПМ). Сначала покажем, что в уже изученной структуре ВПМ [1] металлическая оболочка может изменить характер дисперсии поверхностной волны. В пределе из формулы (1) получаем уравнение

$$\frac{1}{\alpha_v} \frac{I_1(\alpha_v r_2)}{I_0(\alpha_v r_2)} + \frac{\varepsilon}{\alpha} \left[\frac{K_1(\alpha r_2)}{K_0(\alpha r_3)} + \frac{I_1(\alpha r_2)}{I_0(\alpha r_3)} \right] \left[\frac{K_0(\alpha r_2)}{K_0(\alpha r_3)} - \frac{I_0(\alpha r_2)}{I_0(\alpha r_3)} \right]^{-1} = 0. \quad (5)$$

Используя асимптотики функций Бесселя и Макдональда, можно получить аналитические выражения для спектра при различных соотношениях между R_2 и q .

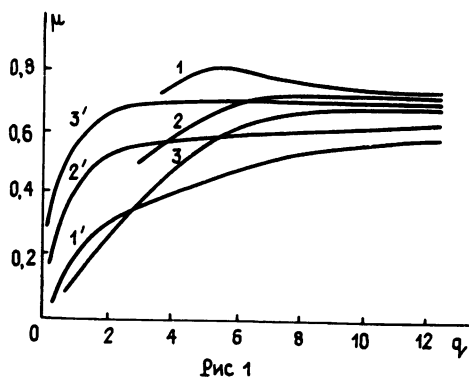
$$\mu \approx \left[\frac{1/2q + \text{cth}(qh_2/R_2)}{1 + \text{cth}(qh_2/R_2)} \right]^{1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при } q \gg 1, q \gg R_2; \quad (6)$$

$$\mu \approx (1 + R_2 \text{th } h_2 / 2)^{-1/2} \quad \text{при } R_2 \gg 1, q \ll R_2; \quad (7)$$

$$\mu \approx \left[1 + \frac{q^2 \ln(R_3/R_2)}{2} \right]^{-1/2} \quad \text{при } 1 \gg q \gg R_2; \quad (8)$$

$$\mu \approx \left[1 + \frac{R_2^2 \ln(R_3/R_2)}{2} \right]^{-1/2} \quad \text{при } 1 \gg R_2 \gg q. \quad (9)$$

Формула (7) указывает на различное поведение спектра ПВ в зависимости от значений R_2 и h_2 . Для $R_2 \text{th } h_2 > 2$ предельная частота слева на дисперсионной кривой лежит ниже асимптоты $\mu = 1/\sqrt{2}$ при $q \rightarrow \infty$, а для $R_2 \text{th } h_2 < 2$ выше и появляется область с аномальной дисперсией. На рис. 1 кривая 1 соответствует $R_2 = 5$, а кривая 2 - $R_2 = 5, 2$ при $R_3 = 5, 5$. В отсутствие металла спектр с отрицательной групповой скоростью существует только при малых R_2 ($R_2 < 1$).



Рассмотрим теперь волноводы, в которых присутствует внутренний металлический цилиндр и отсутствует внешний.

Металл - вакуум - плазма (МВП). Такая структура соответствует пределу $r_3 \rightarrow \infty$. При этом дисперсионное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{\varepsilon_v} \left[\frac{I_1(\varepsilon_v r_2)}{I_0(\varepsilon_v r_1)} + \frac{K_1(\varepsilon_v r_2)}{K_0(\varepsilon_v r_1)} \right] \left[\frac{I_0(\varepsilon_v r_2)}{I_0(\varepsilon_v r_1)} - \frac{K_0(\varepsilon_v r_1)}{K_0(\varepsilon_v r_1)} \right]^{-1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \frac{K_1(\varepsilon r_2)}{K_0(\varepsilon r_2)} = 0. \quad (10)$$

Отсюда можно получить следующие выражения для спектра ПВ:

$$\mu \approx \left[\frac{1+1/2q}{1+\text{cth}(qh_1/R_2)} \right]^{1/2} \quad \text{при } q \gg R_2, q \gg 1; \quad (11)$$

$$\mu \approx \left(1 + \frac{\ln 2/q}{\ln R_2/R_1} \right)^{-1/2} \quad \text{при } 1 \gg q \gg R_2; \quad (12)$$

$$\mu \approx \frac{q}{R_2} \left[1 + \frac{q^2}{R_2^2} + \frac{\ln 2/q}{\ln R_2/R_1} \right]^{-1/2} \quad \text{при } 1 \gg R_2 \gg q, \quad (13)$$

формулы (12), (13) характеризуют поведение спектра при малых волновых числах ($q \ll 1$) вблизи предельной точки: здесь дисперсия всегда нормальная. Из (11) следует, что при $q \gg 1$ групповая скорость отрицательна. Численный расчет показывает, что область смены характера дисперсии определяется отношением R_1/R_2 и можно получить три качественно различных типа дисперсионных кривых как функции радиуса R_1 при фиксированном R_2 :

спектр только с аномальной дисперсией ($R_1 = 0, R_2 < 1$),

спектр с изменяющейся дисперсией ($R_1/R_2 \ll 1, R_2 < 1$),

спектр с нормальной дисперсией ($R_1/R_2 \leq 1, R_2 < 1$).

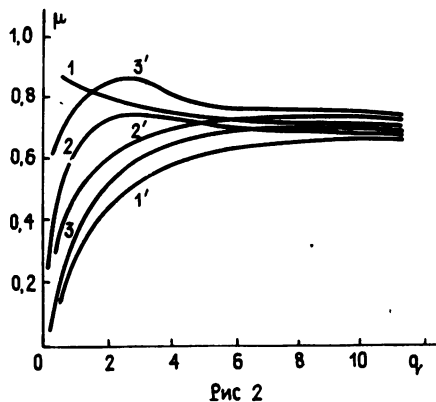


Рис 2

Строго говоря, в последнем случае также имеет место смена знака групповой скорости, однако это происходит в области $q \gg 1$, где $\beta \ll 1$ и эффект очень слабо выражен. На рис. 2 представлены характерные дисперсионные кривые для данного волновода. Кривые 1 - 3 соответствуют значениям $R_1 = 0; 0, 2; 0, 7$ при $R_2 = 0, 8$. Отметим, что при любом, сколь угодно малом (но ненулевом) значении R_1 будет кривая с резким максимумом: точка с $v_{гр} = 0$ смещается влево по q с уменьшением R_1 . Поведение фазовой скорости $\beta = \beta(\mu)$ как функции частоты совершенно различно для указанных кривых. Если в

отсутствие внутренней границы β резко возрастает от 0,15 до 0,95 в интервале изменения μ от 0,7 до 0,8, то для кривой 3 имеет место плавный рост β от 0,15 до 0,34 при уменьшении μ от 0,7 до 0,1. При больших значениях безразмерных радиусов R_2 качественное поведение спектра ПВ остается таким, как и без металла.

Структура металл - плазма - вакуум (МПВ). Для этого волновода имеют место следующие асимптотические формулы для частоты ПВ:

$$\mu \approx \left[\frac{\text{cth}(qh_1/R_2) - 1/2q}{\text{cth}(qh_1/R_2) + 1} \right]^{1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при } q \gg 1, q \gg R_2; \quad (14)$$

$$\mu \approx \left(1 + \frac{\ln(R_2/R_1)}{\ln 2/q} \right)^{-1/2}, \quad \text{при } 1 \gg q \gg R_2. \quad (15)$$

Для области $1 \gg R_2 \gg q$ возникает трансцендентное уравнение, которое решалось численно:

$$(q^2/R_2^2 - \mu^2) \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) + \frac{\ln(R_2/R_1)}{\ln[2/(R_2(q^2/R_2^2 - \mu^2)^{1/2})]} = 0. \quad (16)$$

Формула (15) указывает на зависимость предельной частоты слева на

дисперсионной кривой от величины R_1/R_2 : с увеличением R_1 при фиксированном R_2 эта частота повышается. Численный расчет показывает, что при $R_2 < 1$, $R_1/R_2 \leq 1$ и $q \sim 1$ в спектре появляется область с аномальной дисперсией. Примеры спектров для такого волновода представлены на рис. 2 кривыми 1' - 3', которые соответствуют значениям $R_1 = 0; 0, 2; 0, 7$ при $R_2 = 0, 8$. В отсутствие металла групповая скорость всегда положительна. Как показывает вышеприведенное рассмотрение, при наличии внутренней металлической границы фактически теряет смысл понятие высокочастотной и низкочастотной ветви ПВ, которое используется соответственно для структур вакуум - плазма и плазма - вакуум.

Структуры МВПМ и МПВМ. Волновод с двумя ограничивающими цилиндрами обладает большим числом параметров для управления частотой волны. Приведем некоторые формулы для волновода МВПМ в различных областях спектра:

$$\mu \approx [(1 + 1/2q)/2]^{1/2} \quad \text{при } q \rightarrow \infty; \quad (17)$$

$$\mu \approx [h_1/(h_1 + h_2)]^{1/2} \quad \text{при } q \gg 1, \quad q \gg R_2, \quad qh_1/R_2 \ll 1; \quad (18)$$

$$\mu \approx \left(1 + \frac{\ln(R_3/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} \right)^{-1/2} \quad \text{при } 1 \gg q \gg R_2; \quad (19)$$

$$\mu \approx q/R_2 \left[1 + q^2/R_2^2 + \frac{\ln(R_3/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} \right]^{-1/2} \quad \text{при } 1 \gg R_2 \gg q. \quad (20)$$

На рис. 1 кривая 3 соответствует значениям $R_1 = 4, 5$, $R_2 = 5$, $R_3 = 5, 5$. Из графика видно, что эффект смены характера дисперсии за счет формулы (7) подавляется резким снижением предельной частоты слева из-за внутренней металлической границы.

Между структурами МВПМ и МПВМ имеется симметрия следующего вида: соответствующие асимптотические выражения для частоты (формулы (17) - (20) совпадают с точностью до взаимной перестановки величин h_1 и h_2 , $\ln(R_3/R_2)$ и $\ln(R_2/R_1)$). Отметим, что наличие близко лежащей внешней металлической границы может ликвидировать область аномальной дисперсии при малых значениях волнового числа q , возникающую за счет внутренней границы. На рис. 1 представлены спектры 1' - 3' для структуры МВПМ, которые соответствуют значениям $R_1 = 0, 2; 0, 7; 0, 75$, $R_2 = 0, 8$; $R_3 = 0, 85$. Известно, что при помещении плазменных волноводов во внешнее продольное магнитное поле поверхностная волна превращается в обобщенно-поверхностную, у которой зависимость амплитуд полей от координаты r приобретает осциллирующую компоненту [1, 5]. Однако спектр $\mu = \mu(q, u)$ является плавной функцией u (здесь $u = \omega_n/\omega_p$, ω_n - циклотронная электронная частота). Можно показать, что по крайней мере для слабых полей ($u < 1$) все выше перечисленные особенности спектров сохраняются.

В работе исследовано влияние металлических оболочек на спектр поверхностных волн в плазменно-вакуумных структурах. Аналитические

выражения для частоты и численно найденные дисперсионные кривые показывают, что в определенной области параметров наличие металла может качественно изменить спектр ПВ. Наряду с методами управления спектром при помощи плотности плазмы и внешнего магнитного поля такой способ - управление граничными условиями - является достаточно эффективным из-за большой чувствительности дисперсионных свойств ПВ к металлическим границам и может оказаться удобным в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратенко А.Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 208 с.
2. Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Шварцбург А.Б. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. - М.: Наука, 1982. - 272 с.
3. Файнберг Я.Б. //Укр. физ. журн. 1978. Т.23. N 11. С.1885.
4. Кондратенко А.Н., Олефир В.П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 6. С.654.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 июля 1990 г.

THE METAL BOUNDARY INFLUENCE ON THE SURFACE WAVES IN THE PLASMA-VACUUM STRUCTURES

V. L. Golub, A. N. Kondratenko

The influence of metal on the surface wave spectrum in the cylindrical structures of such types as metal - vacuum - plasma - metal, metal - plasma - vacuum - metal and one-boundaries structures is studied. It is shown that metal can cause the change of the surface wave dispersion. The analytical expressions for a frequency of symmetric waves in the different spectrum regions are obtained. The strong phase velocity relation on the radius of internal metal boundary can be convenient for a bunch-wave synchronization.

УДК 539.2

ТЕПЛОБМЕН ФЛУКТУАЦИОННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ МЕЖДУ ХОРОШО ПРОВОДЯЩИМИ ТАНГЕНЦИАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМИ МЕТАЛЛАМИ

В. Г. Полевой

Получено общее выражение для теплового потока, обусловленного флуктуационным электромагнитным полем, между хорошо проводящими нагретыми до разных температур тангенциально неоднородными (со свойствами, зависящими от координат точки поверхности) металлами, заполняющими полупространства, разделенные плоским вакуумным зазором произвольной ширины a . Подробно исследован практически важный частный случай плавной зависимости параметров металлов от тангенциальных координат, когда общие выражения существенно упрощаются.

В работе [1] было получено выражение для теплового потока, обусловленного флуктуационным электромагнитным полем, между двумя произвольными средами, разделенными плоским вакуумным зазором ширины a . При этом предполагалось, что указанные среды являются тангенциально однородными, т. е. их свойства не зависят от координат точки поверхности. Вместе с тем представляет существенный теоретический и практический интерес вопрос о теплообмене и в том случае, когда среды являются тангенциально неоднородными. В этом случае тепловой поток зависит от относительного сдвига сред и относительного угла их поворота вокруг оси, ортогональной границам сред. Если не делать дополнительных предположений о свойствах сред, то поставленная задача очень сложна и не удастся получить обозримые аналитические результаты. Поэтому мы ограничимся рассмотрением частного случая сред, а именно случаев хорошо проводящих металлов.

1. Общее выражение для теплового потока

Рассматриваемая нами структура изображена на рис. 1. Металлы 1 и 2 поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2 соответственно. Они заполняют полупространства $z < 0$ и $z > a$, разделенные плоским вакуумным зазором ширины a .

Предполагается, что свойства металлов зависят от тангенциальных координат $x_1 = x$ и $x_2 = y$. На поверхности хорошо проводящих металлов, как известно (см., например, [2]), выполняются приближенные граничные условия Леонтовича, которые связывают между собой тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей $\vec{E}(t, \vec{x})$ и

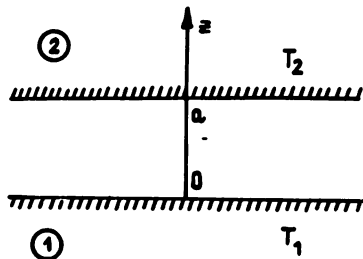


Рис. 1.

$\vec{H}(t, \vec{x})$ (через \vec{x} обозначен двумерный вектор с компонентами $\vec{x} = (x_1, x_2)$). Разложим поля $\vec{E}(t, \vec{x})$ и $\vec{H}(t, \vec{x})$, взятые на границах металлов 1 или 2, в интегралы Фурье по времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(t, \vec{x}) \\ \vec{H}(t, \vec{x}) \end{array} \right\} = \int d\omega e^{-i\omega t} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\omega, \vec{x}) \\ \vec{H}(\omega, \vec{x}) \end{array} \right\}.$$

Тогда на поверхности металла 2 граничное условие Леонтовича имеет вид

$$\vec{E}(\omega, \vec{x}) = \zeta_2(\omega, \vec{x}) [\vec{H}(\omega, \vec{x}), \vec{n}], \quad (1)$$

где \vec{n} - единичный вектор, направленный по оси z , а $\zeta_2(\omega, \vec{x})$ - поверхностный импеданс металла 2. На границе металла 1, аналогично (1), имеем

$$\vec{E}(\omega, \vec{x}) = -\zeta_1(\omega, \vec{x}) [\vec{H}(\omega, \vec{x}), \vec{n}], \quad (2)$$

где $\zeta_1(\omega, \vec{x})$ - поверхностный импеданс металла 1. Знак минус в формуле (2) соответствует тому, что вектор единичной нормали \vec{n} направлен не внутрь металла 1, а наружу. Неоднородность металлов проявляется в зависимости их поверхностных импедансов от тангенциальных координат x_1 и x_2 . В том частном случае, когда оба металла могут быть описаны теорией нормального скин-эффекта, их поверхностные импедансы, как известно, имеют вид

$$\zeta_1(\omega, \vec{x}) = (1 - i)\sqrt{\omega/8\pi\sigma_1(\vec{x})}, \quad \zeta_2(\omega, \vec{x}) = (1 - i)\sqrt{\omega/8\pi\sigma_2(\vec{x})}, \quad (3)$$

где $\sigma_1(\vec{x})$ и $\sigma_2(\vec{x})$ - проводимости металлов 1 и 2 как функции тангенциальных координат.

В случае хорошо проводящих металлов их поверхностные импедансы являются малыми величинами, т.е. $|\zeta_{1,2}| \ll 1$. В силу этого в дальнейшем, при вычислении теплового потока, мы будем ограничиваться (так же как и в [1]) основным порядком по малым импедансам металлов.

Тепловой поток от металла 1 к металлу 2, взятый в произвольной точке (\vec{x}, z) внутри вакуумного зазора, очевидно, определяется z -компонентой усредненного вектора Пойнтинга флуктуационного электромагнитного поля. Используем для теплового потока в точке (\vec{x}, z) обозначение $P(\vec{x}, z)$. Тогда имеем

$$P(\vec{x}, z) = \frac{c}{4\pi} \langle [\vec{E}(\vec{x}, z, t), \vec{H}(\vec{x}, z, t)] \rangle.$$

Угловыми скобками обозначено усреднение по флуктуациям электромагнитного поля. В силу стационарности условий тепловой поток $P(\vec{x}, z)$ не зависит от времени. В случае тангенциально неоднородных металлов поток $P(\vec{x}, z)$ зависит как от тангенциальных координат, так и от нормальной координаты z . Однако в реальных условиях, как правило, измеряется не $P(\vec{x}, z)$, а тепловой поток \bar{P} , усредненный по достаточно большой (в пределе - бесконечно большой) площади S плоскости, проведенной на некотором уровне z внутри вакуумного зазора ортогонально оси z , т. е.

$$\bar{P} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_S d^2x P(\vec{x}, z). \quad (4)$$

Очевидно, \bar{P} в силу определения не зависит от \vec{x} . Нетрудно понять, что он не зависит и от координаты z . Это объясняется тем, что в вакуумном зазоре отсутствуют источники флуктуационного электромагнитного поля. В силу этого при вычислении \bar{P} по формуле (4) в качестве z можно взять любое значение из интервала $(0, a)$. Оказывается удобным брать $P(\vec{x}, z)$ на поверхности одного из металлов. Мы далее будем рассматривать $P(\vec{x}, z)$ на поверхности металла 2, т. е. полагать $z = a$ и использовать для $P(\vec{x}, a)$ обозначение

$$P(\vec{x}) \equiv P(\vec{x}, a).$$

Корреляторы флуктуационного электромагнитного поля, входящие в определение теплового потока, в произвольной точке (\vec{x}, z) вакуумного зазора могут быть найдены с использованием обобщенного закона Кирхгофа [3], который выражает эти корреляторы через смешанные тепловые потери полей, порождаемых вспомогательными источниками (точечными диполями), помещенными в точку (\vec{x}, z) . Тепловой поток $P(\vec{x})$ может быть записан через его спектральную плотность по положительным частотам $S(\vec{x}, \omega)$:

$$P(\vec{x}) = \int_0^{\infty} d\omega S(\vec{x}, \omega).$$

Применение обобщенного закона Кирхгофа приводит к следующему выражению для $S(\vec{x}, \omega)$ (громоздкие промежуточные выкладки мы при этом опускаем):

$$S(\vec{x}, \omega) = \frac{2}{\pi} [\Pi(T_1, \omega) - \Pi(t_2, \omega)] \zeta_2'(\vec{x}, \omega) \int d^2x' \zeta_1'(\vec{x}', \omega) Y(\vec{x}', \vec{x}, \omega), \quad (5)$$

где

$$\Pi(T, \omega) = \hbar\omega / (e^{\omega/\omega_T} - 1), \quad \omega_T = T/\hbar,$$

\hbar - постоянная Планка, T - температура, измеренная в энергетических

единицах. Через ζ'_1 и ζ'_2 обозначены вещественные части поверхностных импедансов металлов. Из свойства диссипативности сред следует, что $\zeta'_{1,2} > 0$. Функция $Y(\vec{x}', \vec{x})$ имеет следующий вид (аргумент ω для краткости опускаем):

$$Y(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \Phi_{\alpha\beta}(\vec{x}', \vec{x}) \Phi_{\alpha\beta}^*(\vec{x}', \vec{x}), \quad (6)$$

причем

$$\Phi_{\alpha\beta}(\vec{x}', \vec{x}) \int d^2\mathfrak{x} \int d^2\mathfrak{x}' \exp(i\vec{x}\mathfrak{x}' - i\vec{x}'\mathfrak{x}) H_{\alpha\beta}^{-1}(\vec{\mathfrak{x}}, \vec{\mathfrak{x}}'), \quad (7)$$

где $\vec{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$, $\vec{\mathfrak{x}}' = (\mathfrak{x}'_1, \mathfrak{x}'_2)$ - двумерные волновые векторы, по всему пространству которых в (7) производится интегрирование. Греческие индексы пробегает значения 1, 2, а по повторяющимся индексам производится суммирование. Через $H_{\alpha\beta}^{-1}(\vec{\mathfrak{x}}, \vec{\mathfrak{x}}')$ обозначено ядро оператора \hat{H}^{-1} , обратного оператору \hat{H} с ядром $H_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}}, \vec{\mathfrak{x}}')$, т. е.

$$\int d^2\mathfrak{x}'' H_{\alpha\gamma}(\vec{\mathfrak{x}}, \vec{\mathfrak{x}}'') H_{\gamma\beta}^{-1}(\vec{\mathfrak{x}}'', \vec{\mathfrak{x}}') = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{\mathfrak{x}} - \vec{\mathfrak{x}}'),$$

причем $H_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}}, \vec{\mathfrak{x}}')$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}}, \vec{\mathfrak{x}}') &= [B_t(\mathfrak{x}) T_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}}) + B_1(\mathfrak{x}) L_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}})] \delta(\vec{\mathfrak{x}} - \vec{\mathfrak{x}}') + \\ &+ i[\tilde{\zeta}_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \operatorname{ch} q(\mathfrak{x}) a + \tilde{\zeta}_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \operatorname{ch} q(\mathfrak{x}') a] \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\mathfrak{x} = |\vec{\mathfrak{x}}|$,

$$B_t(\mathfrak{x}) = \frac{k}{q(\mathfrak{x})} \operatorname{sh} q(\mathfrak{x}) a, \quad B_1(\mathfrak{x}) = -\frac{q(\mathfrak{x})}{k} \operatorname{sh} q(\mathfrak{x}) a,$$

$$q(\mathfrak{x}) = \sqrt{\mathfrak{x}^2 - k^2}, \quad k = \omega/c, \quad (9)$$

c - скорость света в вакууме. Выбор знака радикала в (9) произволен.

Матрицы $T_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}})$ и $L_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}})$ имеют компоненты

$$T_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta}{\mathfrak{x}^2}, \quad L_{\alpha\beta}(\vec{\mathfrak{x}}) = \frac{\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta}{\mathfrak{x}^2}.$$

Наконец, через $\tilde{\zeta}_1(\vec{\mathfrak{x}})$ и $\tilde{\zeta}_2(\vec{\mathfrak{x}})$ обозначены фурье-спектры поверхностных импедансов $\zeta_1(\vec{x})$ и $\zeta_2(\vec{x})$, так что

$$\zeta_{1,2}(\vec{x}) = \int d^2x \tilde{\zeta}_{1,2}(\vec{x}) e^{i\vec{x}\vec{x}}$$

Отметим, что из (5) автоматически следует, что при $T_1 > T_2$ спектральная плотность теплового потока $S(\vec{x}, \omega)$ положительна, т.е. тепло течет от горячего тела к холодному. Для этого необходимо учесть, что, согласно (6), $\gamma(\vec{x}', \vec{x}) > 0$. Далее имеем, что $[\Pi(T_1, \omega) - \Pi(T_2, \omega)] > 0$. Кроме того, как уже отмечалось, $\zeta'_{1,2} > 0$.

В принципиальном отношении приведенные выше выражения решают задачу о нахождении теплового потока $P(\vec{x})$, а следовательно, и потока \bar{P} , усредненного по бесконечно большой площади, если известна зависимость импедансов металлов от тангенциальных координат. Однако при конкретных расчетах возникают серьезные математические сложности, связанные с тем, что необходимо производить обращение оператора \hat{H} с ядром (8). Ясно, что при произвольной зависимости импедансов от координат \vec{x} выполнить такое обращение в аналитическом виде невозможно. Поэтому в следующем разделе мы рассмотрим один практически важный частный случай, когда вычисления можно довести до конца и получить простые аналитические результаты.

2. Случай импедансов с плавной зависимостью от тангенциальных координат

В данном разделе мы будем считать, что импедансы $\zeta_1(\vec{x})$ и $\zeta_2(\vec{x})$ являются плавными функциями тангенциальных координат \vec{x} . В соответствующем месте ниже критерий плавности изменения импедансов будет указан более строго. В силу медленности изменения импедансов их фурье-спектры $\tilde{\zeta}_1(\vec{x})$ и $\tilde{\zeta}_2(\vec{x})$ будут узкими функциями \vec{x} , существенно отличными от нуля в достаточно узкой окрестности точки $\vec{x} = 0$. Это позволяет, например, считать, что

$$\tilde{\zeta}_2(\vec{x} - \vec{x}') \operatorname{ch} q(\vec{x}')a = \tilde{\zeta}_2(\vec{x} - \vec{x}') \operatorname{ch} q(\vec{x})a.$$

С учетом этого ядро $H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}')$ из (8) можно переписать в виде

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = [B_1(\vec{x}) T_{\alpha\beta}(\vec{x}) + B_1(\vec{x}) L_{\alpha\beta}(\vec{x})] \delta(\vec{x} - \vec{x}') + i\delta_{\alpha\beta} \tilde{\zeta}(\vec{x} - \vec{x}') \operatorname{ch} q(\vec{x})a, \quad (10)$$

где использовано обозначение

$$\tilde{\zeta}(\vec{x} - \vec{x}') = \tilde{\zeta}_1(\vec{x} - \vec{x}') + \tilde{\zeta}_2(\vec{x} - \vec{x}').$$

Учтем теперь, что $T_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Тогда (10) принимает вид

$$H_{\alpha\beta}(\vec{a}, \vec{a}') = T_{\alpha\beta}(\vec{a}) [B_t(\vec{a}) \delta(\vec{a} - \vec{a}') + ib(\vec{a}) \tilde{\zeta}(\vec{a} - \vec{a}')] + \\ + L_{\alpha\beta}(\vec{a}) [B_1(\vec{a}) \delta(\vec{a} - \vec{a}') + ib(\vec{a}) \tilde{\zeta}(\vec{a} - \vec{a}')],$$

где для краткости обозначено

$$b(\vec{a}) = \text{ch } q(\vec{a})a.$$

После этого, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, ядро оператора \hat{H}^{-1} можно записать следующим образом:

$$H_{\alpha\beta}^{-1}(\vec{a}, \vec{a}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \exp[-i(\vec{a} - \vec{a}')x] \times \quad (11) \\ \times \left\{ \frac{T_{\alpha\beta}(\vec{a})}{B_t(\vec{a}) + ib(\vec{a}) \zeta(\vec{x})} + \frac{L_{\alpha\beta}(\vec{a})}{B_1(\vec{a}) + ib(\vec{a}) \zeta(\vec{x})} \right\},$$

где

$$\zeta(x) = \zeta_1(x) + \zeta_2(x),$$

т.е. суммарный импеданс в координатном представлении. Используя выражение для ядра оператора \hat{H}^{-1} можно по формулам (5), (6) и (7) рассчитать спектральную плотность теплового потока $S(\vec{x}, \omega)$. После простых вычислений получаем, что

$$S(\vec{x}, \omega) = \frac{\Pi(T_1) - \Pi(T_2)}{\pi^2} \zeta'_1(\vec{x}) \zeta'_2(\vec{x}) \times \quad (12) \\ \int_0^\infty d\alpha \alpha \left\{ \frac{1}{|B_t(\vec{a}) + ib(\vec{a}) \zeta(\vec{x})|^2} + \frac{1}{|B_1(\vec{a}) + ib(\vec{a}) \zeta(\vec{x})|^2} \right\}.$$

Это выражение по своей структуре совпадает с соответствующим выражением для теплового потока между хорошо проводящими тангенциально однородными металлами, полученным в [1], с тем, однако, отличием, что входящие в (12) импедансы являются функциями тангенциальных координат. В силу этого при вычислении интегралов в (12) можно воспользоваться готовым результатом из [1]. Тогда для $S(\vec{x}, \omega)$ имеем выражение

$$S(\vec{x}, \omega) = \frac{\Pi(T_1) - \Pi(T_2)}{\pi^2} k^2 Z(\vec{x}, \omega) f(ka/\pi),$$

где

$$Z(\vec{x}, \omega) = \frac{\zeta'_1(\vec{x}, \omega) \zeta'_2(\vec{x}, \omega)}{\zeta'_1(\vec{x}, \omega) + \zeta'_2(\vec{x}, \omega)},$$

а функция $f(y)$ имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{2y} + \frac{m}{y} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6y^3},$$

$m \equiv [y]$ - целая часть числа y .

Пусть импедансы зависят от частоты по одинаковому степенному закону:

$$\zeta'_1(\vec{x}, \omega) = b_1(\vec{x})\omega^s, \quad \zeta'_2(\vec{x}, \omega) = b_2(\vec{x})\omega^s,$$

где $b_1(\vec{x})$ и $b_2(\vec{x})$ от частоты не зависят. Случай $s = 1/2$ соответствует нормальному скин-эффекту, а $s = 2/3$ - аномальному. Тогда интегральный (по частоте) тепловой поток, согласно (1), имеет следующий вид:

$$P(\vec{x}) = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} Q(a), \quad (13)$$

где функция $Q(a)$ описывает зависимость теплового потока от ширины зазора:

$$Q(a) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \left[\omega_1^{4+s} W_s(r_1) - \omega_2^{4+s} W_s(r_2) \right].$$

Здесь

$$\omega_{1,2} = T_{1,2}/\hbar, \quad r_{1,2} = a\omega_{1,2}/\pi c,$$

а функция $W_s(r)$ равна

$$W_s(r) = \int_0^\infty dt \frac{t^{3+s}}{e^t - 1} f(rt).$$

Ее свойства при $s = 1/2$ и $s = 2/3$ подробно исследованы в (1). Поэтому здесь для нас основной интерес представляет не зависимость теплового потока от ширины зазора, а влияние на него неоднородности металлов.

Прежде чем рассмотреть какой-либо конкретный случай зависимости импедансов от тангенциальных координат, уточним, что следует понимать под медленностью изменения импедансов в зависимости от \vec{x} . Пусть l - характерный масштаб, на котором импедансы $\zeta_1(\vec{x})$ и $\zeta_2(\vec{x})$ меняются существенным образом. Тогда их спектры имеют ширину порядка $\Delta \varepsilon \sim 1/l$. Очевидно, на этой ширине функции $V_t(\varepsilon)$, $V_1(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$, входящие в (11), должны меняться мало. Это, как нетрудно видеть, означает, что Δq (изменение q) должно быть таким, чтобы

$$a|\Delta q| \ll 1. \quad (14)$$

При этом необходимо учесть, что область интегрирования по ε в (11) определяется областью существенного нарастания функций $\text{ch}q\varepsilon$ и $\text{sh}q\varepsilon$, т. е.

$$q \leq 1/a.$$

Учитывая, что $q = \sqrt{a^2 - k^2}$, перепишем неравенство (14) в виде

$$\frac{\alpha x}{q} \Delta x \sim \frac{a}{l} \sqrt{1 + (ka)^2} \ll 1. \quad (15)$$

При интегрировании спектральной плотности теплового потока $S(\vec{x}, \omega)$ по частоте область интегрирования в основном ограничивается характерным масштабом $k \sim 1/\lambda_w$, где λ_w - виновская длина волны, отвечающая температуре более горячего тела. С учетом сказанного перепишем неравенство (15) следующим образом:

$$l \gg a \sqrt{1 + (a/\lambda_w)^2}. \quad (16)$$

Этим неравенством и определяется характерный пространственный масштаб, на котором импедансы могут существенно изменяться. Из (16) видно, что при заданном l полученные выражения для теплового потока применимы для не слишком широких зазоров.

В качестве примера рассмотрим случай, когда импедансы металлов 1 и 2 зависят от тангенциальных координат по одному и тому же закону, но при этом металлы сдвинуты друг относительно друга вдоль границ на некоторый вектор \vec{l} , т. е.

$$b_1(\vec{x}) = b(\vec{x}), \quad b_2(\vec{x}) = b(\vec{x} - \vec{l}).$$

Далее удобно положить

$$b(\vec{x}) = 1/g(\vec{x}).$$

В случае применимости теории нормального скин-эффекта, как видно из (3),

$$g(\vec{x}) = \sqrt{8\pi\sigma(\vec{x})}.$$

Тогда для теплового потока $P(\vec{x})$ из (13) имеем

$$P(\vec{x}) = Q(a) / [g(\vec{x}) + g(\vec{x} - \vec{l})]. \quad (17)$$

Пусть далее для простоты $g(\vec{x})$ зависит лишь от одной координаты, например, $x_1 = x$, и является периодической функцией периода L . Предполагается также, что сдвиг производится вдоль оси x на расстояние l . В этом случае для усредненного по площади теплового потока \bar{P} из (6) получаем выражение

$$\bar{P}(l) = \frac{Q(a)}{L} \int_0^L \frac{dx}{g(x) + g(x - l)}. \quad (18)$$

Очевидно, что усредненный поток является периодической функцией относительного сдвига металлов l с периодом L . Пусть, например,

$$g(x) = \alpha + \beta \cos(2\pi x/L) \quad (\alpha > \beta > 0). \quad (19)$$

При этом проводимость меняется по закону*

$$\sigma(x) = \frac{1}{8\pi} \left[\alpha + \beta \cos \frac{2\pi x}{L} \right]^2.$$

Тогда усредненный поток, вычисленный по формуле (18), имеет вид

$$\bar{P}(l) = \frac{Q(\alpha)}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2 \pi l/L}}. \quad (20)$$

Таким образом, $\bar{P}(l)$ меняется от минимального значения $\bar{P}_{\min} = \bar{P}(L/2) = Q(\alpha)/2\alpha$ до максимального значения $\bar{P}_{\max} = \bar{P}(0) = Q(\alpha)/2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, так что

$$\bar{P}_{\max} / \bar{P}_{\min} = 1/\sqrt{1 - (\beta/\alpha)^2}.$$

Рассмотрим теперь зависимость теплового потока \bar{P} от относительного угла поворота сред в том случае, когда металлы (как и в предыдущем примере) одинаковы, но при этом они повернуты друг относительно друга на некоторый угол θ вокруг оси z , т. е.:

$$g_1(\vec{x}) = g(x_1), \quad g_2(\vec{x}) = g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta),$$

причем $g(x)$ имеет вид (19). Тогда, согласно (17), тепловой поток $P(\vec{x})$ равен

$$P(\vec{x}) = Q(\alpha)/[g(\vec{x}_1) + g(\xi)], \quad (21)$$

где

$$\xi = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

и, очевидно, является периодической функцией двух переменных x_1 и ξ . В этом случае при вычислении \bar{P} можно проводить усреднение $P(\vec{x})$ по области периодичности (ромбу $0 < x_1 < L$, $0 < \xi < L$) с площадью $S = L^2/\sin \theta$. Тогда, как нетрудно показать, для \bar{P} имеем выражение

$$\bar{P} = \frac{Q(\alpha)}{L^2} \int_0^L dx \int_0^L d\xi \frac{1}{g(x) + g(\xi)} = \frac{Q(\alpha)}{\pi\alpha} \bar{K}(\beta/\alpha), \quad (22)$$

где

* Коэффициенты α и β не должны быть слишком близки друг к другу, чтобы не нарушилось условие применимости рассматриваемого приближения, состоящее в малости поверхностных импедансов металлов на характерной частоте планковского распределения $\omega_{T_1} = k_b T_1 / \hbar$, отвечающей более высокой температуре T_1 . Указанное условие в данном случае имеет вид $\sqrt{\omega_{T_1}} / (\alpha - \beta)$, что не препятствует возможности отношению α/β меняться в достаточно широких пределах.

$$\tilde{K}(\beta/\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (\beta/\alpha)^2 \sin^2 \varphi}}$$

- полный эллиптический интеграл первого рода.

Отметим одно существенное обстоятельство. Согласно результату (22) усредненный тепловой поток не зависит от относительного угла поворота сред θ . С другой стороны, выражение (20) для $\bar{P}(1)$ при $l = 0$ следует рассматривать как отвечающее углу $\theta = 0$. Оно, однако, не совпадает с (22) (за исключением случая $\beta = 0$, когда металлы тангенциально однородны). Это кажущееся противоречие связано с наличием двух неперестановочных предельных переходов. Один отвечает стремлению площади усреднения к бесконечности: $S \rightarrow \infty$, а другой - $\theta \rightarrow 0$. Чтобы прояснить ситуацию, предположим, что усреднение проводится не по бесконечно большой площади (как реально бывает), а например, по площади круга достаточно большого радиуса R . При этом мы имеем в виду, что R значительно превосходит период изменения поверхностных импедансов L : $R \gg L$. Обозначим через $\bar{P}_R(\theta)$ тепловой поток, усредненный по кругу радиуса R , при угле поворота θ . Ясно, что при больших θ этот круг содержит много ячеек периодичности потока $P(\vec{x})$. Например, при $\theta = \pi/2$ число ячеек имеет порядок $\pi R^2/L^2 \gg 1$. В этом случае $\bar{P}_R(\theta = \pi/2)$ будет очень близко к (22), т. е.

$$\bar{P}_R(\theta = \pi/2) = \frac{Q(\alpha)}{\pi\alpha} \tilde{K}(\beta/\alpha). \quad (23)$$

При малых же углах $\theta \leq L/R$ в круге может не содержаться ни одной ячейки периодичности и поэтому $\bar{P}_R(\theta = 0)$ будет существенно отличаться от (23), но практически совпадать с (20) (при $l = 0$):

$$\bar{P}_R(\theta = 0) = Q(\alpha)/2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (24)$$

Таким образом, тепловой поток $\bar{P}_R(\theta)$ при изменении угла будет очень быстро меняться от значения (24) при $\theta = 0$ до $\bar{P}_R(\theta = \pi/2)$ при $\theta \geq L/R$. Удобной характеристикой степени анизотропии теплового

потока может служить отношение $F \equiv \bar{P}_R(\theta = \pi/2)/\bar{P}_R(\theta = 0)$, для которого из (23) и (24) имеем

$$F(\psi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - (\beta/\alpha)^2} \tilde{K}(\beta/\alpha) = \frac{2}{\pi} \times$$

$\times \cos \psi \tilde{K}(\sin \psi)$, где параметр ψ определяется равенством $\sin \psi = \beta/\alpha$. График $F(\psi)$ показан на рис. 2. Таким образом, в зависимости от параметра (β/α) отношение тепловых потоков $F(\psi)$ меняется от нуля до единицы.

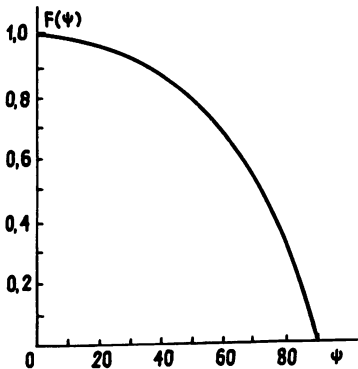


Рис. 2.

Автор благодарен С. М. Рытову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Полевой В. Г., Рытов С. М. //ЖЭТФ. 1980. Т.79. Вып. 6(12). С.2087.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - М.:Наука, 1982.
3. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. - М.:Наука, 1967.

Радиотехнический институт
АН России

Поступила в редакцию
6 июля 1990 г.

THE HEAT TRANSFER BETWEEN TANGENTIAL INHOMOGENEOUS GOOD CONDUCTORS DUE TO A FLUCTUATION ELECTROMAGNETIC FIELD

V. G. Polevoj

The general expression for a heat flux due to a fluctuation electromagnetic field between two tangential inhomogeneous good conductors differently heated is obtained. The special case of slow tangential inhomogeneous conductors is investigated in detail.

УДК 621.382.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ШУМОВ p^+nn^+ -СТРУКТУР ИЗ ПОЛУПРОВОДНИКА, КОМПЕНСИРОВАННОГО ДВУХЗАРЯДНЫМИ АКЦЕПТОРАМИ

В. М. Арутюнян, З. Н. Адамян, Э. В. Гаспарян, С. В. Мелконян

Изложены результаты теоретического расчета спектра генерационно-рекомбинационных и диффузионных шумов в p^+nn^+ -структуре, базовая область которых компенсирована примесью, создающей двухзарядные глубокие акцепторные уровни. Приведены результаты экспериментальных исследований шумовых процессов в такой структуре. Приведено сравнение результатов теории с экспериментальными данными.

В литературе анализу генерационно-рекомбинационных (Γ - P) и диффузионных шумов в легированных полупроводниках и в приборах на основе таких полупроводников посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ [1 - 13]. В частности, в работах [1, 2], посвященных изучению Γ - P шумов в полупроводниках, содержащих многозарядные глубокие уровни (Γ_U), расчеты проведены для сравнительно простого случая - омической зависимости ВАХ в условиях отсутствия инжекции носителей тока. Вклад же инжекционного тока в формирование спектра Γ - P и диффузионного шума структур с одинарной и двойной инжекцией изучен, в частности, в работах [3 - 7]. Однако объектами исследований в этих работах были полупроводники, легированные мелкими примесями, существенно не влияющими на Γ - P процессы и прохождение тока. Шумы в полупроводниковых инжекционных структурах, базовая область которых легирована однозарядными рекомбинационными Γ_U , рассмотрены, например, в [8 - 10]. Вместе с тем, интерес к изучению шумовых явлений в инжекционных полупроводниковых структурах не ограничивается только рассмотрением случая, когда в запрещенной зоне функционирует только один Γ_U . Основной вклад в Γ - P шум обычно вносят те Γ_U , вблизи которых расположены квазиуровни Ферми для электронов и дырок. В пользу такого утверждения говорят результаты работ [7, 11]. Привлекает интерес также изучение случая, когда в запрещенной зоне существуют по крайней мере два Γ_U в диапазоне таких уровней инжекции, когда квазиуровень Ферми располагается между ними и в Γ - P процессах участвуют оба Γ_U . При наличии в полупроводнике многозарядных примесных атомов задача существенно усложняется.

1. Постановка задачи. В настоящей работе методом Ланжевена вычислены шумы в p^+nn^+ -"длинных" инжекционных структурах, базовая область которых изготовлена из полупроводника, компенсированного примесью, создающей два акцепторных уровня. Основные уравнения, описывающие физические процессы и токопрохождение в таком полупроводнике в одномерном случае таковы:

$$j_n = e u_n n E + e D_n \frac{\partial n}{\partial x} - e h_n, \quad j_p = e u_p p E - e D_p \frac{\partial p}{\partial x} + e h_p; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & w_{10} p_1 N_0 - w_{10} p (N - N_0 - N_{2-}) + \\ & + w_{21} p_2 (N - N_0 - N_{2-}) - w_{21} p N_{2-} - \frac{1}{e} \frac{\partial j_p}{\partial x} - r_p; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\epsilon}{4\pi e} \frac{\partial E}{\partial x} = p - n + N_D - N_- - 2N_{2-}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial t} = & w_{01} n_1 (N - N_0 - N_{2-}) - w_{01} n N_0 + w_{10} p (N - N_0 - N_{2-}) - \\ & - w_{10} p_1 N_0 - r_0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{2-}}{\partial t} = & w_{12} n (N - N_0 - N_{2-}) - w_{12} n_2 N_{2-} + \\ & + w_{21} p_2 (N - N_0 - N_{2-}) - w_{21} p N_{2-} + r_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь ϵ - диэлектрическая проницаемость, N_0 , N_- и N_{2-} - концентрации нейтральных, однократно и двукратно отрицательно заряженных ГУ соответственно, N - полная концентрация ГУ, N_D - концентрация мелких доноров, n_1 и p_1 , n_2 и p_2 - статистические факторы Шокли - Рида для однозарядного и двухзарядного ГУ соответственно, w_{01} , w_{10} и w_{12} , w_{21} - коэффициенты захвата электронов и дырок на однозарядный и двухзарядный ГУ соответственно, h_n и h_p - источники диффузионного шума электронов и дырок, r_p - источник Г-Р шума для дырок. В (4) и (5) r_0 и r_2 описывают шум, обусловленный случайными изменениями концентрации N_- и N_{2-} во времени и являются статистически независимыми. Остальные обозначения в (1) - (5) обычные (см., например, [9, 10]).

Как известно, для "длинных" диодов можно с успехом применить дрейфовое приближение, воспользоваться условием квазинейтральности [14] и сделать соответствующие упрощения в основных уравнениях (1) - (5). Далее эти уравнения разделим на постоянные и переменные составляющие и линеаризуем. В результате получим следующую связь между фурье-компонентами переменных составляющих концентрации электронов (n_n) и дырок (p_n):

$$n_n = \frac{\Lambda_p}{\Lambda_n} p_n - \frac{\Lambda_0 r_{2n}}{w_{12} \Lambda_n} - \frac{\Lambda_2 r_{0n}}{w_{10} \Lambda_n}, \quad (6)$$

где

$$\Lambda_0 = \frac{i\omega}{w_{10}} + \theta_1 (n + 2n_1) + p_1 + 2p,$$

$$\Lambda_2 = \frac{i\omega}{v_{21}} + \theta_2(n_2 + 2n) + p + 2p_2,$$

$$\Lambda_n = \Lambda_0 \Lambda_2 + \Lambda_2(\theta_1 N_0 - \theta_1 n_1 - p) + \Lambda_0(\theta_2 N_- - \theta_2 n - p_2),$$

$$\Lambda_p = \Lambda_0 \Lambda_2 + \Lambda_2(N_- - \theta_1 n_1 - p) + \Lambda_0(N_{2-} - \theta_2 n - p_2),$$

$$\theta_1 = v_{01}/v_{10}, \quad \theta_2 = v_{12}/v_{21},$$

$\omega = 2\pi f$, f - частота.

Для простоты записи здесь и в дальнейшем опустим индекс "0" (обозначающий постоянную составляющую) при записи концентраций n , p , N_0 , N_- , N_{2-} и напряженности электрического поля E . Индексом "n" обозначены переменные фурье-составляющие этих величин. Для переменной фурье-компоненты плотности полного тока \vec{j} имеем выражение

$$\vec{j} = eu_p(p + bn)E_n + eu_p(p_n + bn_n)E + e(h_{pn} - h_{nn}). \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение n_n из (6) в режиме холостого хода получим

($\vec{j} = 0$)

$$p_n(x, \omega) = - \frac{jE_n}{eu_p \alpha E^2} + b \cdot \frac{\alpha \Lambda_0 + r_{0n} \Lambda_2}{v_{10} \alpha \Lambda_n} - \frac{h_{pn} - h_{nn}}{\alpha u_p E}. \quad (8)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\alpha(x, \omega) = 1 + b \frac{\Lambda_p}{\Lambda_n}, \quad b = \frac{u_n}{u_p}, \quad \alpha = \frac{v_{10}}{v_{21}}, \quad (9)$$

x - координата вдоль базы ($x = 0$ у p^+n -перехода, $x = d$ у pn^+ -перехода).

Далее подставляя выражения для плотности электронного и дырочного токов (1) в уравнение непрерывности (2), используя выражения для N_{0n} и $N_{2-,n}$, получаемые из решения системы уравнений (4) и (5), а также (6) и (8), после несложных, но громоздких математических преобразований получим следующее дифференциальное уравнение для переменной фурье-компоненты напряженности электрического поля E_n :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{E_n}{\alpha} \left(p \frac{\Lambda_p}{\Lambda_n} - n \right) \right] - \frac{(\Lambda + i\omega\tau) j E_n}{eu_n u_p \tau \alpha E^2} = \psi. \quad (10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Lambda = 1 - \frac{w_{21}\tau}{\Lambda_0} \left\{ A \left(1 - \frac{\Lambda_p}{\Lambda_n} \right) + (N_- - \theta_1 N_0) [\alpha(p_1 + 2p) - p - 2p_2] \right\},$$

$$\Lambda = \Lambda_0(\alpha p - p - p_2) + (\theta_1 N_0 - \theta_1 n_1 - p) [\alpha(p_1 + 2p) - p - 2p_2],$$

$$\psi = - \frac{r_{pn}}{u_n} - \frac{C_0 r_{0n} + C_2 r_{2n}}{\alpha u_p \Lambda_n} - \frac{d}{dx} \left[\frac{E(r_{0n} \Lambda_2 + \alpha r_{2n} \Lambda_0)}{w_{10} \alpha \Lambda_n} \right] +$$

$$+ \frac{(\Lambda + i\omega\tau)(h_{pn} - h_{nn})}{u_n u_p \tau \alpha E} - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\alpha u_n} \left(h_{nn} + \frac{\Lambda_p}{\Lambda_n} b h_{pn} \right) \right],$$

$$C_0 = \frac{1}{\alpha \Lambda_0} \left\{ \frac{\alpha \Lambda_n}{b} [\alpha(p_1 + 2p) - p - 2p_2] - C_2 \Lambda_2 \right\},$$

$$\tau = (w_{01} N_- + w_{21} N_{2-})^{-1},$$

$$C_2 = \frac{\Lambda_0}{w_{21} \tau} (1 + i\omega\tau) - K\Lambda - (N_- + \theta_1 N_0) [\alpha(p_1 + 2p) - p - 2p_2],$$

$$K = 1 + 1/b.$$

Решая дифференциальное уравнение (10) с общепринятым условием $E = 0$ при $x = 0$, находим формулу для определения переменной Фурье-составляющей напряжения V_n :

$$V_n = \int_0^d E_n(x) dx = \int_0^d \frac{e u_n u_p \alpha \tau \psi}{j(\Lambda + i\omega\tau)} \times$$

$$\times \left\{ E^2 - 2 \exp(-I_1) \int_0^E E \exp(I_1) dE \right\} dx, \quad (11)$$

где

$$I_1 = \int_d^x \frac{j(\Lambda + i\omega\tau) \Lambda_n}{e u_n u_p \tau E^2 (p \Lambda_p - n \Lambda_n)} dx.$$

Отметим, что при выводе (11) мы использовали только условие квазинейтральности объемного заряда в базовой области и дрейфовое приближение, о применимости которых уже говорилось выше, так что уравнение (11) для определения V_n имеет общий характер.

Ниже будут получены и рассмотрены отдельно выражения для спектральной плотности (СП) шумов для случаев слабого и умеренного уровней инжекции, когда на ВАХ формируются участки омической и квадратичной зависимости. СП шумов по напряжению (S_v) определяется с

помощью формулы (11) следующим образом:

$$S_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle v_n v_n^* \rangle, \quad v_n = \int_{-t}^t v(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (12)$$

где символами * и $\langle \dots \rangle$ обозначены комплексно-сопряженная величина и усреднение по статистическому ансамблю идентичных систем соответственно.

Для дальнейшего вычисления S_v по формулам (12) и (11) необходимо задать конкретные зависимости концентрации дырок от уровня инжекции или тока и распределения напряженности статического электрического поля E по базе [14, 15].

2. Омический участок ВАХ. Для омического участка ВАХ характерно, что E , E_n и все остальные величины, входящие в (10), не зависят от координаты x , поэтому имеем из (10)

$$E_n = \frac{eu_n u_p \alpha \tau E^2}{j(\Lambda + i\omega\tau)} (\psi_{\text{ом}}^{\Gamma-P} + \psi_{\text{ом}}^{\text{диф}}), \quad (13)$$

где

$$\psi_{\text{ом}}^{\Gamma-P} = \frac{r_{pn}}{u_n} + \frac{C_0 r_{on} + C_2 r_{2n}}{\alpha u_p \Lambda_n}, \quad (14)$$

$$\psi_{\text{ом}}^{\text{диф}} = \frac{\Lambda + i\omega\tau}{u_n u_p \alpha \tau E} (h_{nn} - h_{pn}).$$

Поскольку для омической области при слабом уровне инжекции

$$E = \frac{V}{d} = \frac{j}{eu_n(n + p/b)} = \frac{j}{eu_n n_0},$$

то из (13) и (14) получаем окончательно

$$E_n = \frac{\alpha \tau j}{ebn_0^2(\Lambda + i\omega\tau)} \left(\frac{r_{pn}}{u_n} + \frac{C_0 r_{on} + C_2 r_{2n}}{\alpha u_p \Lambda_n} \right) + \frac{h_{nn} - h_{pn}}{u_n n_0}. \quad (15)$$

Заметим, что уровень инжекции, определяемый величиной j , характеризуется также концентрацией n_0 ($n_0 = j/eu_n E = n + p/b$).

Тогда, используя только второй член в правой части (15), формулу (12) и известные выражения для спектров h_n и h_p [4], легко получить формулу Найквиста:

$$S_v^{\text{диф}} = 4kT(V/I), \quad (16)$$

где k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, V - статическое напряжение на приборе, $I = jS$ - ток через прибор (S - площадь поперечного сечения базы).

СП Γ -Р шума обусловлена первым членом правой части (15). Используя известные формулы для авто- и взаимокорреляционных функций источников Γ -Р шума [16], получим

$$S_v^{\Gamma-P} = \left(\frac{j\tau}{ebu_n n_0^2} \sqrt{\frac{2d}{S}} \right)^2 \frac{\alpha\alpha^*}{(\Lambda + i\omega\tau)(\Lambda + i\omega\tau)^*} \left[w_{01}(p_1 N_0 + pN_-) \times \right. \\ \times \left(1 - \frac{bc_0}{\alpha\Lambda_n} \right) \left(1 - \frac{bc_0}{\alpha\Lambda_n} \right)^* + w_{21}(p_2 N_- + pN_{2-}) \left(1 - \frac{bc_2}{\alpha\Lambda_n} \right) \left(1 - \frac{bc_2}{\alpha\Lambda_n} \right)^* + \\ \left. + w_{01}(nN_0 + n_1 N_-) \frac{b^2 c_0^* c_0}{\alpha\alpha^* \Lambda_n \Lambda_n^*} + w_{12}(nN_- + n_2 N_{2-}) \frac{b^2 c_2^* c_2}{\alpha\alpha^* \Lambda_n \Lambda_n^*} \right]. \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, токовая зависимость $S_v^{\Gamma-P}(j)$ - квадратичная. От частоты $S_v^{\Gamma-P}$ зависит довольно сложно через величины α , Λ , C_0 , C_2 .

Конкретизируя материал исследования и тип двухзарядной примеси, можно намного упростить формулу (17). С помощью несложных преобразований из полученного нами выражения $S_v^{\Gamma-P}$ (17), используя известное соотношение $S_v/V^2 = S_{\Delta n}/n^2$, легко перейти к формуле для СП флуктуации концентрации электронов $S_{\Delta n}$, полученной в работе [11] (учитывая, что полупроводник n -типа проводимости, $n \gg p$, и подставляя $w_{10} = w_{21} = 0$). Следовательно, из наших расчетов как частный случай следуют результаты, полученные в [11]. Поэтому, основываясь на результатах [11], можно найти соответствующее условие (подобное условию (41) работы [11]), при котором задачу с взаимосвязанными двухуровневыми центрами (в отличие от модели двух невзаимосвязанных уровней [11]) также можно свести к одноуровневой задаче.

3. Квадратичный участок ВАХ. При умеренных уровнях инжекции, когда концентрации носителей тока уже сильно зависят от уровня инжекции, а следовательно, от напряженности поля $E(x)$, точный расчет СП шумов намного усложняется. Дальнейшие расчеты проведены конкретно для p^+nn^+ -структур из $Si<Zn>$.

Статические характеристики инжекционных структур из n - $Si<Zn>$ рассмотрены в [14], где получено, что для умеренного уровня инжекции, когда

$$p \approx \frac{p_1(p_2 + \theta_2 n_0)(n_0 + 2N - N_D)}{(p_1 + \theta_1 n_0)(N - N_D - n_0)}, \quad (18)$$

$$E(x) = \left\{ \frac{2j(d-x)[\theta_2(2N - N_D) + p_2]}{eu_n u_p \tau_0^2 p_2 (2N - N_D)} \right\}^{1/2},$$

ВАХ описывается квадратичной зависимостью. Здесь $\tau_{p2}^0 = (w_{21}N)^{-1}$ - время жизни неосновных носителей, обусловленное двукратно отрицательно заряженными центрами Zn в Si, остальные обозначения обычные [14, 15].

Используя формулы (18), а также выражения для спектров источников Г-Р и диффузионных шумов, после соответствующих довольно громоздких математических преобразований из (11) получаем следующие выражения для СП Г-Р ($S_v^{\Gamma-P}$) и диффузионных ($S_v^{\text{диф}}$) шумов:

$$S_v^{\Gamma-P}(\omega) = \frac{48vd\beta^2}{\delta u_p p_2 S} \left[1 + \frac{P_2}{\Theta_2(2N-N_0)} \right] \frac{1}{1+\varphi^2} \left\{ 2\beta^2 \frac{1+(1+\alpha\delta) \left(\varphi_p \frac{N}{\alpha p_1}\right)^2}{(1+\varphi_p^2) \left[1+\left(\varphi_p \frac{N}{\alpha p_1}\right)^2\right]} \times \right. \\ \left. \times \frac{1+2\varphi_1^2}{1+\varphi_2^2} + \frac{\beta(1+\frac{4}{3}\varphi_1\varphi_2)}{(1+\varphi_2^2)(1+\varphi_p^2)} + \frac{5-9\varphi_2^2(2-\varphi_2^2)+\varphi_1^2[5-\varphi_2^2(14-23\varphi_2^2)]}{15(1+\varphi_2^2)^3} \right\}; \quad (19)$$

$$S_v^{\text{диф}}(\omega) = 4kT \frac{V}{I} \left(\frac{2\beta}{1+\varphi_2^2} \left\{ 3 + \frac{5}{4}(\varphi\beta)^2 - (\varphi\beta^2)^2 + \frac{1}{4}(\varphi^2\beta^3)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[21b\beta^2 \frac{\varphi}{\varphi_p} - \frac{3}{2} b\beta \frac{\varphi}{\varphi_p} + \varphi^2 \left(\frac{9}{2}\beta + \frac{21}{4} b\beta^4 \frac{\varphi}{\varphi_p} - 1 \right) \right] + \right. \quad (20) \\ \left. + \frac{\varphi^4}{4}\beta^3 \left(6 + 29\beta + 15b\beta^5 \frac{\varphi}{\varphi_p} \right) + \frac{21}{4} \varphi^6 \beta^8 \right) \left(1 + \varphi^2 \right)^{-1} \left(1 + \varphi_p^2 \right)^{-1} \right).$$

В формулах (19) и (20) $\delta = (2N - N_d)/(N_d - N)$ - степень компенсации, $\beta = u_p \tau_{p2}^0 E (x=0)/2d = \tau_{p2}^0/T_p$, T_p - время пролета дырок через базовую область диода, $\varphi = \omega \tau_n^0$, $\varphi_p = \omega \tau_{p2}^0$, $\varphi_1 = \varphi\beta/2$, $\varphi_2 = \varphi\beta^2$, $\tau_n^0 = (\delta w_{12}N)^{-1}$ - время жизни электронов.

4. Экспериментальные данные и обсуждение результатов. Объектом экспериментальных исследований служили диодные p^+np^+ -структуры, изготовленные нами на основе Si, компенсированного цинком, с исходным удельным сопротивлением 4 Ом·см (после компенсации 5 - 10 кОм·см). Измерялись электрические, шумовые и пороговые характеристики при комнатной температуре в интервале частот от 3 до $2 \cdot 10^4$ Гц, в области интенсивностей излучения, изменяющихся в пределах $\Phi = 10^{13} - 3 \cdot 10^{15}$ фотон/см²·с. В наших экспериментах ошибка измерений не превышала 10%. На типичных ВАХ исследуемых структур четко выражены омический, первый квадратичный, сублинейный и второй квадратичный участки. Теоретическое рассмотрение ВАХ этих структур проведено в [14]. На рис. 1 представлены измеренные частотные зависимости СП шумов по току $S_i(f)$ (кривые 1' - 3'), а также

приведены соответствующие теоретические кривые, рассчитанные по формулам (17) (кривая 3) и (19) (кривые 1, 2). Кривые на рис. 1 соответствуют случаям: 1, 1' - $I = 5 \cdot 10^{-4}$ А; 2, 2' - $I = 3,5 \cdot 10^{-4}$ А; 3, 3' - $I = 1,2 \cdot 10^{-4}$ А. Заметим, что при построении расчетных точек сделан переход от S_V к S_I с помощью соотношения $S_I = S_V / |R|^2$. При этом использовались значения для R , взятые из [15, 17], а величина S составляла $2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$.

Как следует из [15, 17], в области омической ВАХ $R \approx 5 \text{ кОм}$, а в области квадратичной ВАХ $R \approx 3,5 \text{ кОм}$. Расчетные и измеренные зависимости хорошо согласуются в области частот $f \geq 100 \text{ Гц}$. При частотах $f < 100 \text{ Гц}$ экспериментальные зависимости изменяются, как $1/f^\alpha$ ($\alpha \approx 1 - 1,3$) и заметно превышают по величине теоретические значения шумов, рассчитанных по формулам (17) и (19). Это связано с преобладающей ролью фликкер-шумов в исследуемых структурах при низких частотах, вклад которых не отражен в наших расчетах. Первый излом теоретических и экспериментальных кривых при частоте $f \approx 300 \text{ Гц}$ соответствует времени жизни основных носителей $5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Вторым изломом при частоте $\sim 2,5 \cdot 10^3 \text{ Гц}$, появляющийся с ростом инжекции при переходе от омической ВАХ к квадратичной, соответствует некоторому времени $\tau_j = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$. В аналитической формуле (19) этому времени соответствует значение $\tau_j = (\tau_{p2}^0 / T_p) \tau_n^0$. При слабом уровне инжекции, когда n_0 равна концентрации тепловых равновесных носителей, процесс захвата электронов на ГУ очень слаб, T_p велико и по величине одного порядка с τ_{p2}^0 в Г-Р процессах, пока не участвует однозарядный ГУ.

Тогда $\tau_j \approx \tau_n^0$ и на СП шумов второй излом не проявляется, а сливается с первым и формируется только один излом (см. кривые 3 и 3' на рис. 1). С ростом инжекции при формировании квадратичной ВАХ вследствие изменения заселенности ГУ (кинетики) значения τ_{p2}^0 , τ_n^0 и T_p скачком уменьшаются, причем скорость изменения T_p слабее. Используя соотношение $p/\tau_p = n/\tau_n$ и выражение для $p(n_0)$ из формулы (18), можно показать, что при умеренном уровне инжекции ($\tau_p = \tau_{p2}^0 = \text{const}$) $1/\tau_n = 1/\tau_n^0 (1 + T_p/\tau_{p2}^0) = 1/\tau_n^0 + 1/\tau_j$. Следовательно, время τ_j , соответствующее второму излому на кривых S_I , описывает изменение времени жизни электронов в условиях инжекции. При достижении

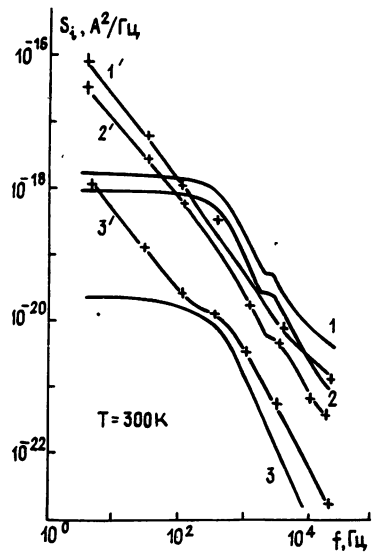


Рис 1

некоторого уровня инжекции n_0^* , $\tau_{p2}^0/T_p < 1$ и $\tau_j < \tau_n^0$, а $T_p \approx \tau_n^0$ и, следовательно, $\tau_j \approx \tau_{p2}^0$. Таким образом, при инжекции на СП шумов возникают два излома при частотах, соответствующих $1/\tau_n^0$ и $1/\tau_j$, что объясняется активным участием и однозарядного, и двухзарядного ГУ в Г-Р процессах. Следовательно, значение времени τ_j изменяется в пределах $\tau_n^0 < \tau_j < \tau_{p2}^0$ в зависимости от уровня инжекции и на СП шумов может проявиться один или два излома.

Значение n_0^* определим из условия $\tau_n^0 = T_p$, оно равно

$$n_0^* = j\tau_n^0/2ed = I\tau_n^0/2eV_0,$$

где V_0 - полный объем базовой области. Таким образом, уровень инжекции n_0^* определяется половиной количества электронов, инжектируемых в единичный объем базы за время, равное времени жизни электронов. Это понятно, так как каждый инжектированный и захваченный электрон создает уже один двухзарядный ГУ. При таком n_0^* $\tau_j = \tau_n^0$ и второй излом должен проявиться уже при частоте $1/\tau_{p2}^0$. При $f > 300$ Гц зависимость $S_1(\omega)$ близка к квадратичной.

Экспериментально определена зависимость $S_1(I)$ при частотах $f = 3 \cdot 10^2$ Гц и $f = 3 \cdot 10^3$ Гц. Найдено, что $S_1 \sim I^2$. Расчетные кривые, полученные для тех же частот, по наклону также совпадают с экспериментальными. Нижние ветви экспериментальных кривых, смещенные в сторону меньших токов (до 10^{-5} А), вероятно, связаны с низкочастотным фликкер-шумом, где, как известно [18], также реализуется зависимость $S_1 \sim I^2$. Промежуток между кривыми $S_1(I)$ (между "концом" фликкер-шума и "началом" Г-Р шума) уменьшается с ростом частоты [19]. Полученные нами токовые зависимости квадрата фотоотклика ΔI^2 более сильные, чем $S_1(I)$, и имеют вид $\Delta I^2 \sim I^{2,5 \div 3}$.

Освещение диодов приводит к уменьшению величин S_1 и ΔI^2 . При постоянстве тока ($2 \cdot 10^{-5}$ А) и интенсивности освещения $\Phi > 10^{13}$ фотон/см²·с выполняется соотношение $S_1 \sim \Phi^{-1}$ и $\Delta I^2 \sim \Phi^{-2}$. На основе зависимостей S_1 и ΔI^2 от f , I и Φ выявлены зависимости пороговой чувствительности $P_{пор}$ от этих же параметров. В области $f < 10^2$ Гц при $\Phi = 1,5 \cdot 10^{13}$ фотон/см²·с и $\Phi = 9 \cdot 10^{14}$ фотон/см²·с наблюдается рост $P_{пор}$, связанный с вкладом в шум некоррелированной с фотооткликом низкочастотной компоненты S_1 . При $f > 10^2$ Гц $P_{пор}$ не зависит от частоты. Для $\Phi \geq 3 \cdot 10^{15}$ фотон/см²·с $P_{пор}$ постоянно во

всем исследуемом частотном диапазоне. С ростом Φ $P_{\text{пор}}$ увеличивается, что связано с возрастанием величины $s_1/\Delta I^2$. Уменьшение $P_{\text{пор}}$ с ростом тока до $I \approx 10^{-5}$ А обусловлено более быстрым возрастанием ΔI^2 по сравнению с s_1 . Особенно ярко это проявляется при малых Φ ($1,5 \cdot 10^{13}$ фотон/см²·с). Уменьшение $P_{\text{пор}}$ с ростом тока подчиняется закону $I^{-1/4}$. Начиная с $I = 10^{-5}$ А с ростом тока при больших интенсивностях излучения наблюдается рост $P_{\text{пор}}$. Минимальное значение пороговой чувствительности достигается при $\Phi \approx 10^{14}$ фотон/см²·с, $I = 10^{-5}$ А и $f \approx 10^2$ Гц. При этих условиях $P_{\text{пор}} = 6 \cdot 10^{-13}$ Вт/Гц^{1/2}. Для тех же фотодиодов при 77 К в [20] для $P_{\text{пор}}$ получено значение $2 \cdot 10^{-15}$ Вт/Гц^{1/2}.

Как показывает анализ, уравнение (19) можно использовать также для описания переменной фурье-составляющей электрического поля для случая p^+pn^+ -структур, когда базовая область p -типа компенсирована двухзарядными донорными центрами. Для этого в (11) под v_{01} и v_{10} необходимо понимать вероятности захвата электронов и дырок на двукратно положительно заряженные донорные центры, а под v_{12} и v_{21} - вероятности захвата электронов и дырок на однократно положительно заряженные центры, n_1 и p_1 в этом случае будут соответствовать статистическим факторам Шокли - Рида для двукратно положительно заряженного донорного центра, а n_2 и p_2 - статистическим факторам для однократно положительно заряженного центра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuringer L.J., Bernard W. // Phys. Rev. Lett. 1961. V.6. N 9. P.455.
2. Klassen F.M. // Phys. Stat. Solid. 1962. V.2. P.299.
3. Worch P.R., Bilger H.R. // Sol. Stat. Electronics. 1971. V.14. N 5. P.383.
4. Huang C., Van der Ziel A. // Physica. 1974. V.78. N 2. P.220.
5. Nicolet M.-A., Bilger H.R., Zijlstra J.J. // Phys. Stat. Sol. 1975. V. 70. N 1. P. 9.; N 2. P. 415.
6. Van Vliet K.M., Friedman A. et al. // J. Appl. Phys. 1975. V.46. N 4. P. 1804.
7. Bosman J., Zijlstra R.J.J. // Sol. Stat. Electr. 1982. V. 25. N 4. P. 273.
8. Залетаев Н.Б., Серебренников И.С., Стафеев В.И. // ФТП. 1982. Т.16. N 2. С. 324.
9. Арутюнян В.М., Гаспарян Ф.В., Мелконян С.В. // Изв. АН АрмССР. Физика. 1985. Т. 20. N 4. С. 211.
10. Арутюнян В.М., Гаспарян Ф.В., Мелконян С.В. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. N 2. С. 416.
11. Van Rheenen A.D., Bosman J., Van Vliet K.M. // Sol. Stat. Electr. 1985. V. 28. N 5. P. 457.
12. Мхитарян З.О., Баргесян Р.С., Арутюнян В.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. N 9. С. 1218.
13. Арутюнян В.М., Мхитарян З.О., Баргесян Р.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 8. С. 984.

14. Арутюнян В.М. Генерационно-рекомбинационные эффекты и двойная инжекция в полупроводниках. - Ереван: Изд. АН АрмССР. 1977. - 322 с.
15. Harutyunyan V.M, Gasparyan F.V.//Phys. Stat. Sol. 1978. V. A49. P. 797.
16. Van Vliet K.M.//Sol. Stat. Electr. 1970. V. 13. N 9. P. 649.
17. Harutyunyan V.M, Gasparyan F.V.//Electr. Technol. 1980. V. 13. N 3. P. 53.
18. Hooge F.N., Kleinpenning T.G.M., Vandamme L.K.J.//Repts. Progr. Phys. 1981. V. 44. P. 479.
19. Гаспарян Ф.В., Адамян З.Н., Арутюнян В.М. Кремниевые фотоприемники. - Ереван: Гос. ун-т, 1989. - 362 с.
20. Maher A.T., Streetman B.G., Holonyak N.//Trans. IEEE. 1969. V. ED-16. P. 963.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 июня 1990 г.

NOISES OF THE $p^{+}nn^{+}$ -STRUCTURE BASED ON SEMICONDUCTOR
COMPENSATED BY DOUBLE-CHARGED ACCEPTORS

*V. M. Arutyunyan, Z. N. Adamyan, F. V. Gasparyan,
S. V. Melkonyan*

$p^{+}nn^{+}$ -structures with the base region compensated by impurities, creating by double - ionized centres, are studied. The theoretical analysis of generation - recombination and diffusion noises as well as the experimental measurements of the noises are presented. The results of experiments coincide with the analytical estimations.