

ГОСКОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С АПРЕЛЯ 1958 г.

Том 33, № 8

Горький

август 1990

СОДЕРЖАНИЕ

Коростелев В. С., Хлопов Г. И., Шестопалов В. П. Экспериментальное исследование спектральных характеристик когерентных сигналов, отраженных от растительности в коротковолновой части миллиметрового диапазона	895
Борисов Н. Д., Моисеев Б. С. Распространение вдоль земной поверхности медленных МГД-вариаций, генерируемых акустическим импульсным источником	902
Бухман Н. С. Об изменении поляризации плоской электромагнитной волны при отражении от плавного слоя бесстолкновительной плазмы	912
Владимиров С. В., Кривицкий В. С. Стохастическое ускорение частиц в присутствии высокочастотной и низкочастотной плазменной турбулентности	919
Акопян А. В. К теории магнитокулоновских радиационных столкновений зарядов	930
Белинский А. В., Чиркин А. С. Параметрическая генерация сжатого света: дифракционные и дисперсионные явления	938
Боровский И. В., Гамуля О. Г., Хижняк Н. А. Рассеяние электромагнитных волн искусственно-анизотропным слоем из различных материалов	943
Гуреев А. В. Свойства нормальных и присоединенных волн в экранированных неоднородно заполненных волноводах	954
Гулько В. М., Козловский К. И., Коломиец Н. Ф., Кучер А. М., Цыбин А. С., Шиканов А. Е. Подавление электронной проводимости коаксиального ионного диода импульсным магнитным полем спиральной линии	965
Адамсон П. В. К теории резонансной тунNELьной связи поглощающих диэлектрических волноводов	970
Братман В. Л., Денисов Г. Г., Луковников Д. А. Теория мазера на циклотронном авторезонансе с открытой электродинамической системой	976

Краткие сообщения и письма в редакцию

Трофимов В. А. Некоторые инварианты встречного нелинейного взаимодействия световых импульсов	987
Старков А. С. Поле точечного источника в антиволноводе	989
Ким А. Ч., Моргаловский В. П., Постников И. И., Темнов В. М. Электродинамический анализ калориметрической нагрузки на основе излома прямоугольного волновода в H -плоскости	991
Чумаченко В. П. Дифракция волн на толстом прямоугольном экране с продольной щелью	994
Коцаревская И. В. Аналитическое исследование дифракционного спектра периодического цилиндрического волновода	996
Иконников А. В., Якимов А. В. Влияние флуктуаций временной задержки тригеров на работу ЦДЧ с параллельным переносом	1000

Информация

Всесоюзное агентство по авторским правам (ВААП)	1003
Перечень советских журналов, переизданных за рубежом в полном объеме	929, 953, 964, 969, 1002

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, | В. И. ГАПОНОВ |,
В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРА-
ТЕНКО, Ю. А КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИ-
КОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР,
В И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 4 06.90. Подписано к печати 28.11.90
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.
Усл. печ. л. 9,8. Усл. кр.-отт. 11,7. Уч. изд. л. 11,9. Тираж 1210 экз.
Заказ 7140. Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25, Научно-исследовательский
радиофизический институт, редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика».
Телефон 36-01-71.

Горьковская областная типография управления издательств, полиграфии и книжной
торговли, 603116, г. Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 621.371.3,029 65

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ,
ОТРАЖЕННЫХ ОТ РАСТИТЕЛЬНОСТИ
В КОРОТКОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ
МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА**

В. С. Коростелев, Г. И. Хлопов, В. П. Шестопалов

Приведены результаты экспериментального исследования доплеровских спектров сигналов двухмиллиметрового диапазона, отраженных от травяного покрова, кустарника, одиночного дерева и опушки леса на приземных трассах. Для измерений использована когерентная измерительная РЛС на основе генератора дифракционного излучения, параметры которого обеспечивают значительное снижение шум-фактора приемного устройства локатора в диапазоне доплеровских частот по сравнению с генераторами других типов. Показано, что основная энергия отраженных сигналов сосредоточена в области частот меньше 100 Гц.

В связи с освоением миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов радиоволн значительный интерес представляет исследование спектральных характеристик сигналов, отраженных от растительности. К настоящему времени накоплен большой опыт при проведении подобных исследований, основные результаты которых обобщены в монографии [1], однако в коротковолновой части миллиметрового диапазона (КВЧ ММД) данные весьма малочисленны [2-4], а в части спектральных характеристик когерентных сигналов практически отсутствуют.

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию доплеровских спектров сигналов двухмиллиметрового диапазона, отраженных от травяного покрова, кустарника, одиночного дерева и опушки леса на приземных трассах.

Так как значительная часть мощности отраженных сигналов сосредоточена в области very low frequencies (less than 100 Гц), то измерительная РЛС должна обеспечить достаточно низкий уровень собственных частотных шумов в указанном диапазоне. Как показано в работе [5], этому в немалой степени способствует применение генератора дифракционного излучения (ГДИ), параметры колебания которого обеспечивают значительное снижение шум-фактора приемного устройства РЛС (более 25 дБ) в диапазоне доплеровских частот по сравнению с генераторами других типов, в частности ЛОВ. Поэтому для измерений нами использована когерентная РЛС на основе ГДИ [6], сигналы с выхода которой записываются на магнитографе НО-67 и вводятся в ЭВМ типа БЭСМ-6 с помощью комплекса разработанной цифровой аппаратуры [7]. Динамический диапазон регистрируемых сигналов составляет не менее 40 дБ, а полоса анализируемых частот равна 0,8÷3000 Гц.

Результаты многочисленных исследований, выполненных в сантиметровом и длинноволновой части миллиметрового диапазона, показывают, что спектральные характеристики сигналов, отраженных от растительности, хорошо описываются моделью [1,2,7], согласно которой форма спектра до уровня —(10÷15) дБ аппроксимируется гауссовой кривой

$$S(f) = S_0 \exp\{-0,69(f/\Delta f)^2\}, \quad (1)$$

а на крыльях спектра — степенной зависимостью

$$S(f) = S_0 [1 + (f/\Delta f)^n]^{-1}, \quad (2)$$

где Δf — ширина спектра по уровню 0,5. Чтобы оценить возможности использования в КВЧ ММД разработанной модели спектральных характеристик в виде (1), (2), полученные экспериментальные данные обрабатывались с целью измерения параметров n , Δf , S_0 , а также их зависимости от средней скорости ветра \bar{V} и его направления (параллельно \bar{V}_\parallel и перпендикулярно \bar{V}_\perp трассе). Характеристики ветра контролировались с помощью анеморумбометра типа М-63М-1, а результаты измерений спектральных параметров группировались для весенне-летнего и осенне-зимнего периодов, что позволяет оценить вклад лиственного покрова в формировании отраженного сигнала.

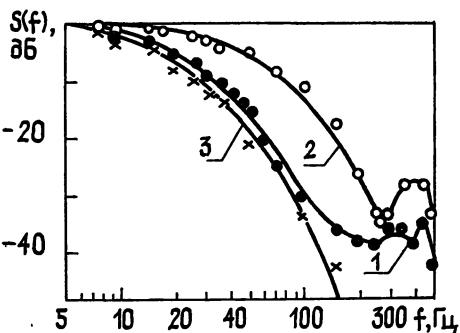


Рис. 1.

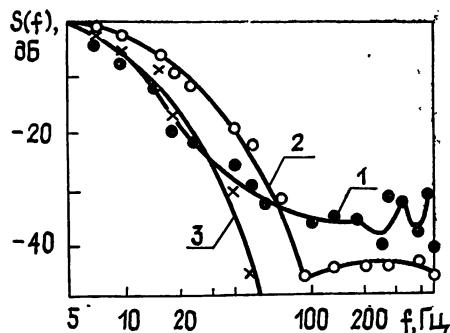


Рис. 2.

На рис. 1—4 приведены примеры спектров доплеровских сигналов, отраженных, соответственно, от высокой травы ($h=0,3 \div 0,5$ м) при скользящих углах $\gamma \approx 1^\circ$, кустарника, одиночного дерева (береза) и опушки лиственного леса, которые получены в результате усреднения 128 реализаций записанного сигнала. При этом кривые 1 и 2 получены в летне-весенний период для средней скорости ветра 1—2 и 4—5 м/с соответственно, а кривые 3 в осенне-зимний при скорости ветра 3 м/с.

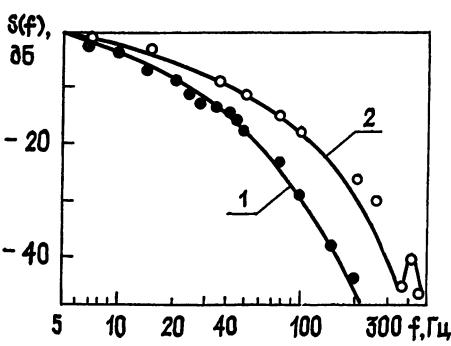


Рис. 3.

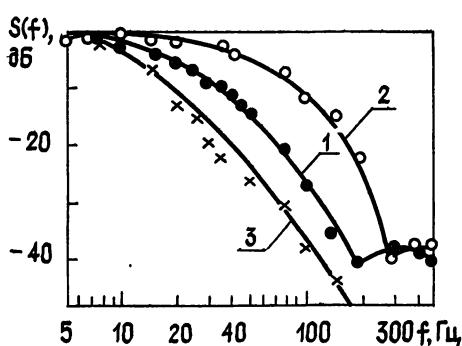


Рис. 4.

Анализ формы исследованных спектров показывает, что в отличие от более длинноволновых диапазонов последние практически не содержат гауссовой компоненты (1) и, начиная с самых малых частот, описываются степенной зависимостью (2). При этом можно условно выделить энергонесущую часть спектра (до уровня —10 дБ) и крылья (ниже уровня —20 дБ), которые характеризуются своими значениями по-

казателя степени n_{10} и n_{20} . Обработка результатов измерений в диапазоне изменения средней скорости ветра 1—7 м/с позволяет рекомендовать эмпирическую зависимость в виде

$$n = n(0) + \alpha \bar{V}, \quad (3)$$

значения параметров которой приведены в табл. 1.

Как видно, особенность спектров сигналов, отраженных от растительности в КВЧ ММД, состоит в том, что увеличение скорости ветра приводит к возрастанию прямоугольности формы спектра: скорость убывания для энергонесущей части спектра уменьшается, а на крыльях увеличивается. Кроме того, сравнение полученных данных с рекомендованной в [1] зависимостью $n = 2(\bar{V} + 2)(\bar{V} + 1)^{-1}$ показывает, что скорости убывания спектральной плотности в своей энергонесущей части практически не отличаются ($n = 2 \div 3$) для умеренной скорости ветра $\bar{V} = 1 \div 4$ м/с. Однако при более сильном ветре и на крыльях спектра его убывание происходит заметно быстрее, причем чем подвижнее отражатели, тем выше скорость убывания.

Рассмотренные особенности спектров характерны для ЧМ сигналов с большим индексом модуляции, что также подтверждается результатами работы [8], где увеличение показателя степени n связывается с уменьшением вклада амплитудных флуктуаций за счет случайных поворотов и взаимных затенений отражателей. Поэтому приведенные данные позволяют сделать вывод о превалирующей роли доплеровского смещения частоты при формировании сигналов, отраженных от растительности в КВЧ ММД, как было отмечено в [2]. Кроме того, при большом удалении от несущей частоты и сильном ветре в спектрах появляется осциллирующая и слабо убывающая компонента, которая нарушает ход степенной зависимости (2) на крыльях спектра и является, по-видимому, особенностью, присущей КВЧ ММД, так как для более длинноволновых диапазонов подобная форма спектра ранее не отмечалась [1, 2, 8, 9]. В настоящее время пока не представляется возможным дать исчерпывающее объяснение отмеченной особенности, однако проведенные наблюдения показывают, что последняя обусловлена наличием лиственной кроны, так как указанные изменения в спектрах сигналов имеют место только для весенне-летнего периода (кривые 1, 2), в то время как для осенне-зимнего периода (кривые 3) форма спектра описывается степенной зависимостью вплоть до уровня —45 дБ. При этом уровень осциллирующей компоненты для кустарника и деревьев (рис. 2—4) выше на 5—10 дБ, чем для травяного покрова (рис. 1).

Указанные обстоятельства безусловно сказываются и на ширине спектра Δf , для которой различными авторами [1, 2, 8, 9] рекомендуется зависимость от средней скорости ветра в виде

$$\Delta f(\text{Гц}) = \beta \lambda^{-1} \bar{V}^\gamma, \quad (4)$$

где показатель степени $\gamma = 1 \div 1,3$; λ (м); \bar{V} (м/с). Полученные в настоящей работе данные, к сожалению, не позволяют достоверно уточнить величину γ , в связи с чем нами в дальнейшем было принято $\gamma = 1$, что, тем не менее, дает возможность удовлетворительно аппроксимировать экспериментальные данные в диапазоне скоростей ветра $\bar{V} = 1 \div 7$ м/с.

В табл. 2 приведены значения параметра β для параллельного (β_1 — графа 1) и перпендикулярного (β_2 — графа 2) направления ветра, полученные в результате обработки экспериментальных данных. Как видно, ширина спектра в осенне-зимний период (зима) вдвадцать раз меньше, чем в весенне-летний (лето), что просто объясняется [1] отсутствием лиственного покрова, играющего важную роль в формировании спектра флуктуаций отраженного сигнала и обеспечивающего повышенное ветровое сопротивление растительности.

Таблица 1

Параметр	Трава	Кустарник	Одиночное дерево	Опушка леса
α_{10}	-0,3	-0,2	-0,34	-0,32
$n_{10}(0)$	2,85	3,7	3,6	4,3
α_{20}	0,064	0,15	0,72	1,0
$n_{20}(0)$	5,1	4,3	2,8	4,3

Таблица 3

Параметр	Трава	Кустарник	Дерево	Опушка
$S_0(0)$, $\frac{dB}{\Gamma_U}$	-36,7	-23,6	-4,0	-5,8
ϵ , $\frac{dB \cdot c}{m \cdot \Gamma_U}$	-2,4	-4,0	-8,6	-4,8

Примечание. Данные взяты из работ: [4] ($\lambda=2,2$)*; [2] ($\lambda=2,2$)**; [3] ($\lambda=3,16$)***;
[2] ($\lambda=3,16$)****.

Таблица 2

Параметр	Трава	Кустарник		Дерево		Опушка	
		Лето	Зима	Лето	Зима	Лето	Зима
$\beta_{\parallel} \cdot 10^2$		1,0	2,9	0,57	3,3	0,64	1,6
$\beta_{\perp} \cdot 10^2$		0,74	2,7	0,4	0,74	0,44	0,8
$\beta_{\parallel}^{eff} \cdot 10^2$		3,4	7,8	1,4	11,8	2,3	4,0
$\beta_{\perp}^{eff} \cdot 10^2$		1,9	6,5	1,3	5,4	2,2	1,9
$\beta_{\parallel}^{eff} \cdot 10^2$		2,2*			25,4**		39,5***
$\beta_{\perp}^{eff} \cdot 10^2$					21,0****		

Кроме того, ширина спектра зависит от направления скорости ветра и достигает максимума, когда последняя параллельна трассе (неважно, на РЛС или от РЛС). В отдельных случаях разница достигает 100%, что также указывает на возрастание вклада фазовых флуктуаций в КВЧ ММД, так как проекция амплитуды перемещений отражателей на направление трассы для параллельного направления ветра максимальна (в среднестатистическом смысле).

В графах 3 и 4 (табл. 2) приведены значения параметра $\beta_{\text{эфф}}$, полученные в результате численного интегрирования экспериментально измеренных спектров для вычисления их эффективной ширины

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{2}{S(0)} \int_0^{\infty} df S(f), \quad (5)$$

позволяющей просто оценить время декорреляции отраженного сигнала $\tau_k = \Delta f_{\text{эфф}}^{-1}$. При этом сравнение с расчетной зависимостью [1] в виде

$\Delta f_{\text{эфф}} = 3,2 \cdot 10^{-2} \lambda^{-1} \bar{V}^{1.3}$ хорошо описывает ширину спектра в диапазоне скоростей ветра $\bar{V} = 1 \div 8$ м/с для травяного покрова и опушки леса, в то время как для кустарника и одиночного дерева расчетное выражение дает заметно заниженную оценку. По-видимому, это объясняется существенно более глубокой хаотической модуляцией скорости колебаний отдельных отражателей для одиночно стоящих объектов растительности (в рассматриваемом случае — кустарник и дерево), чем это предусмотрено в разработанной модели [1], использующей данные о пограничном слое тропосферы с учетом затененности ветрового поля, характерного для поверхности, покрытой более или менее однородной растительностью.

Сравнивая приведенные данные со значениями параметра $\beta_{\text{эфф}}$ в графе 5 (табл. 2), которые соответствуют результатам немногочисленных опубликованных экспериментальных работ в КВЧ ММД [2-4] при некогерентной обработке сигналов в РЛС, можно отметить заметное превышение ранее опубликованных значений в случае одиночного дерева и особенно опушки леса, в то время как для травяного покрова наблюдается хорошее соответствие результатов. Указанное отличие вполне может быть объяснено различными условиями проведения эксперимента, а также невысокой точностью измерения параметра ветрового потока. Тем не менее, расчетная модель [2] в виде $\Delta f_{\text{эфф}} = 2\sqrt{2} \lambda^{-1} m_V \bar{V}$ ($m_V = 0,05 \div 0,1$ — глубина хаотической модуляции скорости колебаний отдельных отражателей для растительности) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные в [2,3] и также обеспечивает завышенные значения для приведенных в настоящей работе условий эксперимента.

Для измерения уровня спектральной плотности отраженного сигнала вблизи нулевых доплеровских частот S_0 необходимо осуществить абсолютную калибровку энергетического потенциала измерительной РЛС, которая в рассматриваемом случае проводилась с помощью доплеровского имитатора в виде выбирирующего уголкового отражателя (УО), установленного в раскрыте диффузора электродинамического громкоговорителя. Как показано в работе [5], значение ЭПР отражателя на первой гармонике частоты вибраций при условии их гармонического закона записывается в виде

$$\sigma_1 = 4\sigma_0 J_1^2(2k\Delta R), \quad (6)$$

где σ_0 — ЭПР собственно УО, $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го рода, ΔR — амплитуда вибраций, $k = 2\pi/\lambda$. При этом значение σ_0 рассчитывается, как правило, с достаточной точностью [10], а условие применимости (6) состоит в отсутствии нелинейных искажений в колебаниях

подвески громкоговорителя, что нетрудно обеспечить при их малой амплитуде. В использованном макете имитатора ЭПР отражателя составила $\sigma_0 = 3,9 \text{ м}^2$, а вибрация осуществлялась с частотой 240 Гц, что обеспечивало значение $\sigma_1 = 0,35 \text{ м}^2$. Величина $S_0 = S(0)$, равная спектральной плотности удельной ЭПР растительности вблизи нулевых доплеровских частот, измерялась в децибелах относительно 1 м² в полосе 1 Гц и рассчитывалась в рамках приближений [1, 11], традиционных для радиолокационных измерений,

$$S_0 = \eta \sigma_1 \left[R_{\text{им}}^4 \int_{S_{\text{oc}}} dS \frac{G\{\theta(S), \varphi(S)\}}{R^4(S)} \right]^{-1}, \quad (7)$$

где $\eta = P/P_0$ — отношение спектральной плотности мощности исследуемого сигнала к мощности 1-й гармоники сигнала имитатора, $R_{\text{им}}$ — дальность до имитатора, R — дальность до элемента dS освещенной площадки S_{oc} , $G(S)$ — значение нормированной диаграммы направленности (ДН) антенны по мощности в направлении на элемент dS . Значение интеграла в (7) численно рассчитывалось для каждого исследованного объекта в отдельности с учетом измерений ДН антенны и геометрии конкретной трассы, а зависимость расстояния R и угловых координат θ и φ ДН антенны определялась выражениями, которые мы приведем, опуская громоздкие выкладки:

$$R = [x^2 + z^2 + R_0^2 + 2R_0z \cos \gamma]^{1/2}, \quad (8)$$

$$\theta = \arccos \frac{R_0 + z \cos \gamma}{R}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left[\sin \gamma \frac{z}{x} \right],$$

где x, z — координаты в плоскости освещенной площадки (z лежит в плоскости ДН антенны при $\varphi = 0$), R_0 — расстояние до центра освещенной площадки по оси ДН, $\gamma \in [0, \pi/2]$ — угол скольжения (угол между осью ДН и осью z системы координат x, y, z освещенной площадки). При этом низшая частота измеряемого спектра определяется временем наблюдения и ограничивается стабильностью параметров аппаратуры, в результате чего величина S_0 измерялась на частоте 5 Гц, что, тем не менее, в некоторых случаях позволяет приближенно считать $S(5 \text{ Гц}) \simeq S(0)$ ввиду пологого характера изменения спектральной плотности при $f \rightarrow 0$ (рис. 1—4). Так как увеличение скорости ветра приводит к перераспределению энергии отраженного сигнала по спектру доплеровских частот, то значение S_0 убывает по закону, который можно приближенно аппроксимировать линейной зависимостью

$$S_0(\bar{V}) = (S_0(0) + \varepsilon \bar{V}), \text{ дБ/Гц}, \quad (9)$$

где значения параметров $S_0(0)$ и ε в диапазоне изменения средней скорости ветра 1—7 м/с соответствуют приведенным в табл. 3.

К сожалению, авторам неизвестны опубликованные данные о поведении спектральной плотности в области нулевых доплеровских частот. Тем не менее характер поведения параметра $S_0(0)$ согласуется с данными для удельной ЭПР растительности [1] (отражаемость деревьев существенно выше, чем для кустарника и особенно для травы), а скорость убывания ε (дБ·с/Гц·м) максимума спектра меняется синхронно с параметром β (см. табл. 2), определяющим степень расширения спектра с увеличением скорости ветра. Таким образом, полученные в двухмиллиметровом диапазоне результаты экспериментального исследования в целом согласуются с ранее развитыми представлениями о спектральных характеристиках когерентных сигналов, отраженных от растительности [4—8, 9].

Тем не менее, следует отметить и ряд особенностей, в том числе:

по сравнению с более длинноволновыми диапазонами форма спектра характеризуется большей прямоугольностью (в энергонесущей части показатель степенной зависимости $S(f) \sim f^{-n}$ ближе к значению 2, а на крыльях спектра $n \geq 5 \div 6$);

при сильном порывистом ветре в спектре появляется пьедестал на уровне $(30 \div 40)$ дБ, обусловленный, по-видимому, амплитудной модуляцией отраженного сигнала движениями лиственного покрова;

ширина спектра существенно зависит от направления ветра относительно трассы (когда вектор скорости ветра параллелен трассе, ширина спектра всегда больше);

основной вклад в формирование спектров когерентных сигналов, отраженных от растительности в КВЧ ММД, вносят эффекты, связанные с доплеровской модуляцией частоты.

ЛИТЕРАТУРА

- Кулемин Г. П., Разказовский В. Б. Рассеяние миллиметровых радиоволн поверхностью земли под малыми углами. — Киев: Наукова думка, 1987. — 232 с.
- Андреев Г. А., Потапов А. А., Хохлов Г. И. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 10. С. 1863.
- Treibits R. N., Heyes R. P., Bognar L. C. // Microwave J. 1978. V. 21. № 8. Р. 49.
- Андреев Г. А., Потапов А. А. // Зарубежная радиоэлектроника. 1984. № 11. С. 28.
- Коростелев В. С., Хлопов Г. И., Шестопалов В. П. // В сб.: Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн. Научное приборостроение. — Киев: Наукова думка, 1988. С. 120.
- Дзюбан В. Г., Коростелев В. С., Хлопов Г. И. и др. // В сб.: II Всесоюзная школа-симпозиум по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. — Фрунзе: Илим, 1986. С. 250.
- Дзюбан В. Г., Коростелев В. С., Хлопов Г. И., Шестопалов В. П. // В сб.: Труды Всесоюзной конференции по статистическим методам обработки данных дистанционного зондирования окружающей среды. — Рига, 1986. С. 92.
- Арманд Н. А., Дякин В. А., Кибордина И. Н. и др. // Радиотехника и электроника. 1975. Вып. 7. Т. 20. С. 1337.
- Капитонов В. А., Мельничук Ю. В., Черников А. А. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18. № 9. С. 1816.
- Кобак В. О. Радиолокационные отражатели. — М.: Сов. радио, 1975. — 248 с.
- Сколник М. Справочник по радиолокации: Перевод с англ. / Под ред. К. Н. Трофимова. — М: Сов. радио, 1976. Т. 1. — 454 с.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
25 апреля 1989 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF SPECTRAL CHARACTERISTICS OF COHERENT SIGNALS REFLECTED FROM VEGETATION IN THE SHORTWAVE MILLIMETER RANGE

V. S. Korostelev, G. I. Khlopov, V. P. Shestopalov

The paper deals with the results of experimental investigation of 2 mm range Doppler spectra signals reflected from grass, bushes, a single tree and forest at earth paths. For measurement a coherent radar is used on a diffraction radiation generator which provides a considerable lowering of the noise-factor of the locator's receiver in the range of Doppler frequencies as compared with generators of different types. It is shown that the main energy of the reflected signals is concentrated in the frequency range lower than 100 Hz.

УДК 550.388.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВДОЛЬ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕДЛЕННЫХ МГД-ВАРИАЦИЙ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ АКУСТИЧЕСКИМ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Н. Д. Борисов, Б. С. Моисеев

С учетом наклона магнитного поля Земли рассмотрена трансформация в ионосфере ударно-акустического импульса в электромагнитное возмущение. Последнее представляет собой суперпозицию квазистатического поля и перемещающегося возмущения. Показано, что в наклонном магнитном поле скорость распространения и амплитуда поля зависят от азимутально-го угла Найден закон изменения поля с расстоянием и даны численные оценки для скорости и амплитуды.

Существует обширный комплекс явлений, при которых в ионосфере возникает источник МГД-возмущений. Так, при вторжении быстрых частиц из магнитосферы или при выбросе легкоионизуемых веществ в ионосфере локально меняется проводимость плазмы и, появляются нестационарные токи [1, 2]. При распространении акустической волны от землетрясения или взрыва из-за трения между нейтральными частицами и ионами происходит разделение зарядов, что ведет к генерации полей и токов [3]. Во всех указанных случаях на ионосферных высотах появляется эффективный источник МГД-возмущений. Подобные возмущения с достаточно низкими частотами ($f \ll 1$ Гц), как известно, не удерживаются ионосферным волноводом в окрестности максимума F -слоя [4]. Вместе с тем имеются свидетельства, что долгопериодные магнитные вариации распространяются вдоль поверхности Земли со скопростями в десятки километров в секунду [5]. Для объяснения этого явления привлекается механизм волноводного распространения в E -слое ионосферы [5, 6]. Однако этот механизм, как показано в разд. 4 настоящей работы, может использоваться лишь в низкоширотной ионосфере, что не позволяет рассмотреть весь комплекс наблюдаемых явлений. В связи с этим в настоящей работе предлагается иной подход, свободный от указанного выше ограничения.

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Пусть в ионосфере возник локализованный источник МГД-возмущений. Генерируемое при этом электромагнитное поле описывается уравнением

$$\text{rot} \text{ rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}^{(e)}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{D} — векторы электрического поля и индукции, $\mathbf{j}^{(e)}$ — сторонний ток, c — скорость света. Введем ортогональную систему координат с вертикальной осью z и осью y , лежащей в плоскости магнитного меридиана. Положим, что вектор магнитного поля \mathbf{H}_0 составляет угол α с осью z . Поскольку на формирование и распространение возмущений влияет не только ионосфера, мы будем учитывать наличие земной коры ($z < 0$) с постоянной проводимостью σ_g , изотропной слабопроводящей атмосферы ($\sigma = \sigma_a$ в области $0 < z < z_a$), неоднородной и анизотропной ионосферы ($z_a < z < z_m$) и, наконец, бесстолкновительной магнито-

сферы ($z > z_m$). Применим преобразование Фурье по времени и горизонтальным координатам к уравнениям (1):

$$E_i(z, r_\perp, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\omega dk_\perp \tilde{E}_i(z, k_\perp, \omega) \exp[i(\omega t - k_\perp r_\perp)]. \quad (2)$$

В результате получим следующую систему связанных уравнений для электрического поля в ионосфере:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + ik_x \frac{dE_z}{dz} - k_y^2 E_x + k_x k_y E_y - \\ - \frac{4\pi i \omega}{c^2} [\sigma_P E_x + \sigma_H (E_y \cos \alpha - E_z \sin \alpha)] = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_x^{(e)}, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + ik_y \frac{dE_z}{dz} - k_x^2 E_y + k_x k_y E_x - \\ - \frac{4\pi i \omega}{c^2} [\sigma_P E_y - \sigma_H E_x \cos \alpha + j^* \sin \alpha] = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_y^{(e)}, \\ i \frac{d}{dz} (k_x E_x + k_y E_y) - \left(k_\perp^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_P \right) E_z - \\ - \frac{4\pi i \omega}{c^2} (j^* \cos \alpha + \sigma_H E_x \sin \alpha) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_z^{(e)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) введены следующие обозначения: $j^* = (\sigma_{||} - \sigma_P) (E_z \cos \alpha + E_y \sin \alpha)$, $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\sigma_{||}$, σ_P , σ_H — продольная, педерсеновская и холловская проводимости ионосферной плазмы. Наконец, начиная с уравнений (3), будем опускать знак \sim над фурье-компонентами поля $E_i(z, k_\perp, \omega)$.

В дальнейшем нас будут интересовать достаточно медленные и крупномасштабные возмущения, для которых можно использовать приближение «тонкой ионосферы» [7]. Интегрируя первые два уравнения системы (3) по z в пределах ионосферы и учитывая, что на границе с атмосферой $\sigma_{||} = \sigma_P = \sigma_a$, а на границе с магнитосферой $\sigma_P/\sigma_{||} \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dE_x}{dz} \Big|_{z_a}^{z_m} + \frac{k_x}{k_\perp^2} \frac{d}{dz} (k_x E_x + k_y E_y) \Big|_{z_a} - i \frac{4\pi \omega}{c^2} \Sigma_P E_x - i \left(k_x \operatorname{tg} \alpha + \frac{4\pi \omega \Sigma_H}{c^2 \cos \alpha} \right) E_y = \\ = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int_{z_a}^{z_m} dz j_x^{(e)}, \\ \frac{dE_y}{dz} \Big|_{z_a}^{z_m} + \frac{k_y}{k_\perp^2} \frac{d}{dz} (k_x E_x + k_y E_y) \Big|_{z_a} + i \frac{4\pi \omega}{c^2} \frac{\Sigma_H}{\cos \alpha} E_x - \\ - i \left(k_y \operatorname{tg} \alpha + \frac{4\pi \omega \Sigma_P}{c^2 \cos \alpha} \right) E_y = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int_{z_a}^{z_m} dz (j_y^{(e)} - j_z^{(e)} \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Sigma_{P, H} = \int dz \sigma_{P, H}$ — интегральные педерсеновская и холловская проводимости ионосферы.

Значения входящих в (4) производных $dE_{x,y}/dz|_{z_a}$ можно найти, ре-

шая уравнения для компонент поля в атмосфере и Земле. При этом удобно перейти к линейным комбинациям

$$\psi_1 = \frac{1}{k_{\perp}^2} (k_x E_x + k_y E_y), \quad \psi_2 = -\frac{1}{k_{\perp}^2} (k_y E_x - k_x E_y), \quad (5)$$

для которых из (3) нетрудно получить

$$\frac{d}{dz} \frac{(4\pi i \omega/c^2)\sigma}{k^2 + (4\pi i \omega/c^2)^2} \frac{d\psi_1}{dz} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma \psi_1 = 0, \quad \frac{d^2 \psi_2}{dz^2} - \left(k_{\perp}^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma \right) \psi_2 = 0, \quad (6)$$

где $\sigma = \sigma_a$ в атмосфере при $0 < z < z_a$ и $\sigma = \sigma_g$ в земле при $z < 0$.

Уравнения (6) справедливы в случае произвольно меняющейся с координатой z проводимости $\sigma = \sigma(z)$. Мы, однако, ограничимся в настоящей работе наиболее простым случаем, считая проводимость атмосферы и Земной коры постоянными, причем $\sigma_a \ll \sigma_g$. Введем дополнительно два условия:

$$k_{\perp} z_a < 1 \text{ и } c^2 k_{\perp}^2 \gg 4\pi \omega \sigma_a. \quad (7)$$

Первое из условий означает, что характерный горизонтальный масштаб возмущения превышает расстояние от земли до ионосферы, а второе — малость атмосферной проводимости. Выбирая затухающие в глубь Земли решения уравнений (6) и проводя сшивку на границе Земля — атмосфера, найдем с помощью условий (7) значения производных $\frac{dE_x}{dz}|_{z_a}$

и $\frac{dE_y}{dz}|_{z_a}$, которые следует подставить в уравнения (4):

$$\frac{dE_{x,y}}{dz}|_{z_a} \simeq \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_g} E_{x,y}. \quad (8)$$

Перейдем к нахождению производных $dE_{x,y}/dz|_{z_m}$ на верхней границе ионосферы. Введем для этого вспомогательную ортогональную систему координат x, y', z' с осью z' , направленной вдоль вектора магнитного поля H_0 и осью y' , лежащей в плоскости магнитного меридиана. Поскольку в магнитосфере продольная проводимость $\sigma_{||}$ очень велика, то приближенно будем считать $E_{z'} = 0$. В этом случае двумерный вектор $E_{\perp} = \{E_x, E_y\}$ можно представить в виде потенциальной и вихревой частей:

$$E_{\perp} = \nabla_{\perp} \Phi + \operatorname{rot} e_{z'} \Psi. \quad (9)$$

Используя связь между системами (x, y, z) и (x, y', z') , получим

$$E_x = -ik_x \Phi - ik_y \cos \alpha \Psi - \sin \alpha \frac{d\Psi}{dz},$$

$$E_y = \cos \alpha \left(-ik_y \cos \alpha \Phi - \sin \alpha \frac{d\Phi}{dz} + ik_x \Psi \right). \quad (10)$$

Для выяснения физического смысла функций Φ и Ψ совершим в системе (3) переход к координатам (x, y', z') и подставим выражения (9). В результате получим уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_A^2} \right) \Psi = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c_A^2} \right) \Phi = 0, \quad (11)$$

где c_A — альфвеновская скорость, Δ — лапласиан. Из (11) следует, что функция Ψ описывает магнитозвуковую волну, а Φ — альфвеновскую:

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left[\left(-\sqrt{\frac{k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c_A^2}}{}} (z - z_m) \right) \right], \quad (12)$$

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left\{ \left[i \left(k_y \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega}{c_A \cos \alpha} \right) \right] (z - z_m) \right\},$$

где Ψ_0 и Φ_0 — неизвестные пока амплитуды волн.

Уравнения (4), (8), (10), (12) являются исходными для определения возникающего возмущения.

2. Общее выражение для магнитных вариаций. Подставим в уравнение (4) найденные выше решения для поля в атмосфере и магнитосфере. Ограничиваюсь не слишком большими поперечными масштабами $k_\perp > \omega/c_A$ и дневными условиями, когда $\Sigma_P, \Sigma_H \gg \Sigma_W \equiv \frac{c^2}{4\pi c_A}$, получим следующие выражения для функций Φ_0 и Ψ_0 :

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \frac{i}{D} \left\{ \left[-i \frac{c^2 \cos \alpha}{4\pi \omega} k_x (k_\perp + q) \left(\cos \alpha + i \frac{k_y}{k_\perp} \sin \alpha \right) + k_x \Sigma_p + ik_\perp \Sigma_H \times \right. \right. \\ & \times \left(\sin \alpha - i \frac{k_y}{k_\perp} \cos \alpha \right) \left. \right] \int j_x^{(e)} dz - \left[i \frac{c^2}{4\pi \omega} k_y (k_\perp + q) \left(\cos \alpha + i \frac{k_y}{k_\perp} \sin \alpha \right) + \right. \\ & \left. \left. + k_x \Sigma_H - ik_\perp \Sigma_p \left(\sin \alpha - i \frac{k_y}{k_\perp} \cos \alpha \right) \right] \cos \alpha \int (j_y^{(e)} - j_z^{(e)} \operatorname{tg} \alpha) dz \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Psi_0 = -\frac{i}{D} \left[\left(k_x \Sigma_H - k_y \frac{\Sigma_p}{\cos \alpha} \right) \int j_x^{(e)} dz + (k_x \Sigma_p \cos \alpha + k_y \Sigma_H) \int (j_y^{(e)} - \operatorname{tg} \alpha j_z^{(e)}) dz \right].$$

Здесь

$$D = \left(\cos \alpha + i \frac{k_y}{k_\perp} \sin \alpha \right) \left[-\frac{k_\perp^2}{\cos \alpha} (\Sigma_p^2 + \Sigma_H^2) + i \frac{c^2}{4\pi \omega} (k_\perp + q) \left(k_x^2 \cos \alpha + \frac{k_y^2}{\cos \alpha} \right) \Sigma_p \right],$$

$$q = (k_\perp^2 + 4\pi i \omega \sigma_g / c^2)^{1/2}.$$

Компоненты магнитного поля можно определить, используя уравнения Максвелла:

$$H_x = -i \frac{c}{\omega} \left(\frac{dE_y}{dz} + ik_y E_z \right), \quad H_y = i \frac{c}{\omega} \left(\frac{dE_x}{dz} + ik_x E_z \right), \quad (14)$$

$$H_z = \frac{c}{\omega} (k_x E_y - k_y E_x).$$

С учетом решений уравнения для поля в атмосфере и граничных условий получим при $z \leq z_a$

$$H_z = i \frac{c}{\omega} k_\perp^2 \left(\cos \alpha + i \frac{k_y}{k_\perp} \sin \alpha \right) \Psi_0, \quad (15)$$

$$H_x = -iq \frac{k_x}{k_\perp^2} H_z, \quad H_y = -iq \frac{k_y}{k_\perp^2} H_z.$$

На верхней границе ионосферы $z = z_m$ аналогичным образом можно найти

$$H_x = i \frac{k_x}{k_\perp} H_z, \quad H_y = i \frac{k_y}{k_\perp} H_z. \quad (16)$$

Вертикальная компонента H_z отличается от (15) вкладом альфеновской моды Φ_0 , который, однако, мал и составляет $\omega/c k_{\perp}$ по порядку величины. Поскольку ионосфера рассматривается как тонкая проводящая пленка, по которой течет ток, то значения тангенциальных компонент магнитного поля H_x, H_y на верхней z_m и нижней z_a границах различаются между собой. В магнитосфере на достаточно больших высотах $k_{\perp}(z-z_m) \gg 1$ магнитное поле представляется альфеновской волной

$$H_z = i \frac{c}{c_A} k_x \sin \alpha \Phi_0 \exp \left[i \left(k_y \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega}{c_A \cos \alpha} \right) (z - z_m) \right], \quad (17)$$

$$H_x = \frac{k_y}{k_x} \frac{H_z}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad H_y = -H_z \operatorname{ctg} \alpha,$$

распространяющейся вверх вдоль магнитной силовой линии. Из (15)–(17) следует, что рассматриваемые фурье-компоненты в горизонтальной плоскости поляризованы линейно ($\operatorname{Im} H_x/H_y = 0$). В то же время в вертикальных плоскостях магнитозвуковая мода имеет эллиптическую поляризацию.

Для нахождения пространственно-временного распределения поля необходимо воспользоваться полученными выше результатами и провести в (15)–(17) обратное преобразование Фурье по ω и k_{\perp} . Отметим, что структура выражений (13) является обычной в теории малых колебаний, когда числитель определяется внешним воздействием, а знаменатель — внутренними свойствами системы. Можно ожидать (см. следующий разд.), что «дисперсионным соотношением» $D(\omega, k) = 0$ определяется в значительной мере эволюция возмущения. Для случая вертикального магнитного поля ($\alpha = 0$) этот результат получен в [8] одним из авторов. Отметим также, что выражения (13) являются весьма общими. Они справедливы для источников различной физической природы. Однако далее мы конкретизируем источник, в качестве которого выберем ударно-акустический импульс над эпицентром землетрясения.

3. Магнитные возмущения от акустического импульса. Зададим в ионосфере акустический импульс в виде слабой квазиплоской ударной волны

$$V_z(r_{\perp}, z, t) = V_0 \frac{t - t_0}{\tau} \theta(t - t_0 + \tau) \theta(t_0 + \tau - t) \exp \left(-\frac{r_{\perp}^2}{a^2} \right), \quad (18)$$

$$V_x = V_y = 0, \quad t_0 = \frac{z}{V_s},$$

которая со скоростью V_s , близкой к звуковой, распространяется вертикально вверх. Здесь V_0 — амплитуда звукового импульса, τ — длительность фазы сжатия (разрежения), a — горизонтальный масштаб на высоте токового слоя, $\theta(t)$ — ступенчатая тета-функция. Считая, что длительность импульса весьма мала по сравнению с интересующими нас временными масштабами $\omega t \ll 1$, приведем приближенное значение фурье-компоненты $V_z(\omega, k_{\perp})$:

$$V_z(\omega, k_{\perp}) \approx -i \frac{V_0 \omega \tau^2 a^2}{3 \sqrt{2\pi}} \exp[-(i\omega t_0 + k_{\perp}^2 a^2/4)]. \quad (19)$$

Возмущение (19) при $\alpha \gg V_0/V_s$ генерирует в ионосфере электрический ток с компонентами

$$j_x^{(e)} = \sigma_p \frac{H_0}{c} \sin \alpha V_z(k_{\perp}, \omega), \quad j_y^{(e)} = -\sigma_H \frac{H_0}{c} \sin \alpha \cos \alpha V_z(\omega, k_{\perp}),$$

$$j_z^{(e)} = \sigma_H \frac{H_0}{c} \sin^2 \alpha V_z(\omega, k_{\perp}).$$

В дальнейшем примем следующую модель проводимости ионосферы:

$$\sigma_{\mu}(z) = \sigma_{\mu}(z_{\mu}) \exp\left(-\frac{|z - z_{\mu}|}{\Delta z_{\mu}}\right), \quad (21)$$

где индекс μ соответствует холловскому (H) или педерсеновскому (P) слою. Производя замену переменной ($\omega \rightarrow \tilde{q}$)

$$\omega = -i \frac{c^2}{4\pi\sigma_g a^2} (\eta^2 - \tilde{q}^2), \quad (22)$$

где $\eta = k_{\perp} a$, $\tilde{q} = qa$, и подставляя (19) — (22) в (15), получим

$$H_z(x, y, z, t) = Q \sum_{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi B_{\mu}(\varphi) M(\varphi), \quad (23)$$

где

$$M(\varphi) = \int_0^{\infty} d\eta \eta^2 \exp [-(\kappa_{\mu} + (1/4)) \eta^2 - i\eta\rho \sin(\varphi + \Psi)] \int_{\Gamma} d\tilde{q} F(\tilde{q}, \eta, \varphi), \quad (24)$$

$$Q = -\frac{2}{3\pi} \frac{\sigma_g a V_s^2 \tau^2}{c^2 (\Sigma_p^2 + \Sigma_H^2)} V_0 H_0 \sin \alpha \cos \alpha, \quad x_{\mu} = \frac{c}{4\pi\sigma_g a^2} \left(t - \frac{\Delta z_{\mu}}{V_s} \right),$$

$$\frac{x}{a} = \rho \cos \Psi, \quad \frac{y}{a} = \rho \sin \Psi.$$

Функция $F(\tilde{q}, \eta, \varphi)$, входящая в (24), может быть разложена на простые множители

$$F(\tilde{q}, \eta, \varphi) = \sum_{m=0}^4 F_m(\eta, \varphi) \frac{e^{x_{\mu} \tilde{q}^2}}{\tilde{q} - q_m}. \quad (25)$$

где

$$\tilde{q}_0 = \eta - G(\varphi), \quad \tilde{q}_{1,2} = \pm \sqrt{\eta^2 + \xi_{\mu}}, \quad \tilde{q}_{3,4} = \pm \sqrt{\eta^2 - \xi_{\mu}},$$

$$G(\varphi) = g (\sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi), \quad g = \frac{a \sigma_g \Sigma_p}{\Sigma_p^2 + \Sigma_H^2}, \quad \xi_{\mu} = \frac{4\pi\sigma_g a^2 V_s}{c^2 \Delta z_{\mu}}.$$

Отметим, что полюс \tilde{q}_0 является корнем дисперсионного уравнения

$D(\omega, k) = 0$, остальные полюсы \tilde{q}_i ($i = 1 - 4$) определяются особенностями источника.

Контур интегрирования Γ и расположение полюсов в комплексной плоскости показаны на рис. 1. Учтем, что для типичных условий параметр ξ_{μ} мал ($\xi_{\mu} \ll 1$). Поэтому можно упростить выражения $F_m(\eta, \varphi)$ и привести их к виду

$$F_0(\eta, \varphi) = -\frac{(\eta - G(\varphi))}{(2\eta - G(\varphi))^2 G(\varphi)},$$

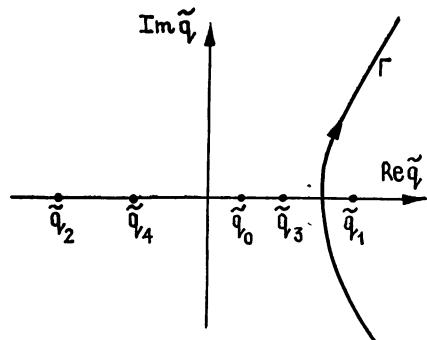


Рис. 1.

$$F_1 = F_3 \simeq \frac{1}{8\eta G(\varphi)}, \quad F_2 = -F_4 = \frac{1}{4\xi_\mu}.$$

Перейдем к вычислению поля $H_z(x, y, z, t)$, определяемого формулами (23), (24). Интеграл по \tilde{q} берется точно и выражается через функции параболического цилиндра

$$\int d\tilde{q} F(\tilde{q}, \eta, \varphi) = i\sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^4 \delta_m D_{-1}(-\delta_m \sqrt{2\xi_\mu} \tilde{q}_m) F_m(\eta, \varphi) \exp\left(\frac{\xi_\mu}{4} q_m^2\right), \quad (27)$$

где $\delta_m = 1$ при $m \neq 1$, $\delta_1 = -1$. Следующий интеграл (24) по переменной η удается вычислить приближенно, используя асимптотику функций параболического цилиндра D_{-1} , при больших значениях аргумента $\sqrt{2\xi_\mu} |q_m| \gg 1$. При этом наиболее простое выражение получается для масштабов $k_\perp > g/2a$, т. е. для расстояний $r_\perp < 2a/g$:

$$M(\varphi) = M_W(\varphi) + M_Q(\varphi), \quad (28)$$

где

$$M_W(\varphi) = -\frac{i\pi}{2} G^{-1}(\varphi) [i\rho \sin(\varphi + \Psi) + 2\xi_\mu G(\varphi)]^{-2},$$

$$M_Q(\varphi) = -\frac{i\pi}{2} G^{-1}(\varphi) \frac{\exp(-\xi_\mu \xi_\mu)}{2\rho^2 \sin^2(\varphi + \Psi)}.$$

Функции $M_W(\varphi)$ и $M_Q(\varphi)$ описывают, соответственно, распространяющееся возмущение и квазистатическое поле.

Рассмотрим, часть $M_W(\varphi)$, отвечающую распространяющемуся возмущению. Основная трудность, возникающая при вычислении интеграла (23), связана с отсутствием аксиальной симметрии из-за наклона магнитного поля. С помощью теоремы о вычетах, проводя интегрирование по φ , после некоторых преобразований можно получить следующий результат. Возмущение магнитозвукового типа (15) в ионосфере, возбуждаемое акустическим источником, представляет собой два импульса. Первый по времени импульс возникает при прохождении акустической волной холловского слоя, а второй — педерсеновского слоя проводимости ионосферной плазмы. Оба эти импульса распространяются от источника в горизонтальной плоскости со скоростями, зависящими от азимутального угла Ψ . Найдем значения максимума поля в каждом из импульсов и горизонтальной скорости перемещения для двух направлений распространения по широте ($\Psi=0$) и вдоль магнитного меридиана ($\Psi=\pi/2$).

При распространении по широте соответствующий максимум возмущения в момент времени t ($t > \Delta z_\mu/V_s$) располагается на расстоянии $\rho_{\max, \mu}$ от источника:

$$\rho_{\max, \mu}(t) = \frac{c^2 \Sigma_P}{a\pi(\Sigma_P^2 + \Sigma_W^2)} \frac{\cos^{7/3} \alpha}{[4 + (1 + \cos^2 \alpha)^2]^{1/3}} \left(t - \frac{\Delta z_\mu}{V_s} \right). \quad (29)$$

Амплитуда компоненты поля H_z в максимуме $\rho_{\max, \mu}$ составляет при этом

$$H_z^0(\rho_{\max, H}) = \frac{f_1(\alpha)}{\Delta z_H^2(t - \Delta z_H/V_s)^2}, \quad H_z^0(\rho_{\max, P}) = -\frac{f_1(\alpha)}{\Delta z_P^2(t - \Delta z_P/V_s)^2}, \quad (30)$$

где

$$f_1(\alpha) = Q \left(\frac{\pi \alpha}{c} \right)^4 \sigma_g^2 \frac{\Sigma_P \Sigma_H}{g^3} \frac{[4 + (1 + \cos^2 \alpha)^2]^{2/3}}{\cos^{14/3} \alpha}.$$

Из (29), (30), следует, что оба импульса перемещаются с одинаковой и постоянной скоростью

$$V(\Psi = 0) = \frac{c^2 \Sigma_P}{\pi(\Sigma_P^2 + \Sigma_H^2)} \frac{\cos^{7/3} \alpha}{[4 + (1 + \cos^2 \alpha)^2]^{1/3}}, \quad (31)$$

но сдвинуты по времени, что связано с различными моментами прохождения акустической волной холловского и педерсеновского слоев. Амплитуда импульсов убывает с расстоянием по закону $H_z(\rho_{\max}) \sim 1/\rho_{\max}^2$, а их ширина при этом увеличивается из-за дисперсии. Полученные выше результаты позволяют оценить характерную полуширину импульса $\Delta\rho \approx 0,6\rho_{\max}$. Отметим также, что значение поля в максимуме возмущения определяется только параметрами ионосферы и не зависит от проводимости земли σ_g .

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай распространения в плоскости магнитного меридиана ($\Psi = \pi/2$). Максимумы возмущения в этом случае перемещаются со скоростью

$$V\left(\Psi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{c^2 \Sigma_P}{\pi(\Sigma_P^2 + \Sigma_H^2)} \frac{\cos \alpha}{[4\cos^4 \alpha + (1 + \cos^2 \alpha)^2]^{1/3}}, \quad (32)$$

а их значения убывают по закону

$$H_z^0(\rho_{\max}, H) = \frac{f_2(\alpha)}{\Delta z_H^2(t - \Delta z_H/V_s)^2}, \quad H_z^0(\rho_{\max}, P) = \frac{\Sigma_P^2}{\Sigma_H^2} \frac{f_2(\alpha)}{\Delta z_P^2(t - \Delta z_P/V_s)^2}, \quad (33)$$

где

$$f_2(\alpha) = Q \left(\frac{\pi \alpha}{c} \right)^4 \sigma_g^2 \frac{\Sigma_H^2}{g^3} \frac{[4 \cos^4 \alpha + (1 + \cos^2 \alpha)^2]^{2/3}}{\cos^6 \alpha}.$$

Из (31), (32) следует, что в наклонном магнитном поле ($\alpha \neq 0$) скорости распространения возмущения по различным направлениям оказываются неодинаковыми. Амплитуды поля на фиксированном расстоянии от источника также зависят от азимутального угла Ψ . При приближении к экватору $\alpha \rightarrow \pi/2$ амплитуды импульсов растут, а их скорость убывает*.

Выше рассматривалась эволюция перемещающегося возмущения на ограниченных расстояниях $r_g \leq 2a/g$. На больших расстояниях (или при больших временах $\gamma_{\mu} g > 1$) механизм распространения возмущения вдоль поверхности Земли становится диффузионным. При этом амплитуда магнитного возмущения, пропорциональная $g^{-3}x_{\mu}^{-2}$, существенно зависит от проводимости земли σ_g и быстро убывает с расстоянием как ρ^{-4} . Уменьшается также и скорость перемещения магнитного импульса:

$$V_{\max} \approx \frac{c}{[4\pi\sigma_g(t - \Delta z_{\mu}/V_s)]^{1/3}}. \quad (34)$$

Что касается квазистатической части поля, то закон ее убывания также меняется на более быстрый ($\sim \rho^{-3}$). Таким образом, на расстояниях, несколько превышающих $\rho \sim g^{-1}$, возмущение практически полностью затухает.

4. Сопоставление с механизмом волноводного распространения. В работах [5, 6] обсуждался механизм горизонтального распространения магнитных возмущений, связанный с образованием волновода в E -слое ионосферы. Выясним, в каком соотношении находится этот механизм и предложенный нами. Ограничимся для простоты рассмотрением дву-

* Отметим, что наше рассмотрение не справедливо для углов α , достаточно близких к $\pi/2$ (см. следующий раздел).

Мерной задачи, когда $k_x = 0$ (распространение в плоскости геомагнитного меридиана). Тогда из первого уравнения системы (3) находим при углах α , близких к $\pi/2$,

$$\frac{dE_x}{dz} \Big|_{z_a}^{z_m} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \Sigma_P E_x + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int_{z_a}^{z_m} dz \sigma_H E_z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int dz j_x^{(e)}. \quad (35)$$

Выражая в ионосфере компоненту E_z через E_x с помощью других уравнений системы (3), получим приближенно (опуская источники $j_y^{(e)}$, $j_z^{(e)}$)

$$\left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} + ik_y \sin \alpha \right)^2 E_z - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_P E_z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_H E_x. \quad (36)$$

Представляя E_z в виде $E_z = \tilde{E}_z \exp(-ik_y \operatorname{tg} \alpha z)$, находим

$$\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial z^2} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_P \tilde{E}_z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_H(z) \exp(ik_y \operatorname{tg} \alpha z) E_x. \quad (37)$$

Поскольку компонента E_x почти постоянна в ионосфере, а $\sigma_H(z)$ меняется на толщине холловского слоя Δz_H , то характер решения уравнения (37) зависит от величины параметра $\Delta z_H k_y \operatorname{tg} \alpha$. Если выполняется условие

$$\Delta z_H k_y \operatorname{tg} \alpha \gg 1, \quad (38)$$

что справедливо при почти горизонтальном магнитном поле $\pi/2 - \alpha \ll \ll 1/\Delta z_H k_y$, то из (35), (36), следует, что существует затухающая волноводная мода $\omega(k_y)$, которая была найдена ранее в [5] без учета поглощения. Дисперсионное соотношение $\omega(k_y)$ с учетом поглощения в ионосфере и Земле следует из уравнения

$$\left(\frac{4\pi \omega}{c^2} \right)^2 \cdot \frac{\int \sigma_H^2 dz}{k_y^2 + (4\pi i \omega/c^2) \sigma_P(z_H)} = k_y + \sqrt{k_y^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_g + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \Sigma_P}. \quad (39)$$

Оценки показывают, что поглощение является весьма значительным, его минимум приходится на достаточно малые значения $k_y < z_a^{-1}$.

При обратном по отношению к (38) условии

$$\Delta z_H k_y \operatorname{tg} \alpha \ll 1, \quad (40)$$

что выполняется даже при весьма малом отклонении от горизонтального магнитного поля $\pi/2 - \alpha > 1/k_y \Delta z_H$, механизм волноводного распространения оказывается в принципе невозможным. При этом из системы (3) следуют наши результаты. Таким образом, механизм волноводного распространения в E -слое может использоваться лишь в очень узкой приэкваториальной области.

Заключение. Оценим параметры магнитного возмущения, генерируемого слабой ударно-акустической волной над эпицентром землетрясения. Значения интегральных проводимостей для дневных условий и среднеширотной ионосферы (максимум солнечной активности) приведены в [9]: $\Sigma_P = 4 \cdot 10^{13}$ см/с, $\Sigma_H = 2 \cdot 10^{13}$ см/с (для геомагнитной широты $\theta = 30^\circ$). Длительность полупериода τ выберем в соответствии с результатами наблюдений [10]: $\tau = 12$ с. Остальные параметры: $a = 10^7$ см, $V_s = 430$ м/с, $V_0 = 3 \cdot 10^4$ см/с, $\Delta z_H = 1,5 \cdot 10^6$ см, $\Delta z_P = 3 \cdot 10^6$ см, $\sigma_g = 10^6$ с⁻¹, $\alpha = 41^\circ$, $H = 0,3$ Э. При этом на предельном расстоянии от эпицентра $r_p(x_\mu \sim g^{-2})$, где еще существует локализованный слабозатухающий импульс (30), (33), получим

$$|H| \simeq 0,1 \text{ нТ}, V \simeq 16 \text{ км/с при } \Psi = 0, \rho_\pi = 4,8,$$

$$|H| \simeq 0,04 \text{ нТ}, V \simeq 28 \text{ км/с при } \Psi = \pi/2, \rho_\pi = 8,8.$$

Видно, что в плоскости магнитного меридиана магнитное возмущение в виде локализованного слабозатухающего импульса распространяется на большее расстояние (~ 1000 км) и с большей скоростью ($V \approx 28$ км/с). Отметим, что в эпицентре можно ожидать возмущение с большей амплитудой. Оценку поля в магнитосфере несложно получить, используя (17):

$$|H|(z > z_m) \approx \frac{\Sigma_w \Sigma_p}{\Sigma_H^2 + \Sigma_p^2} |H|(z_a). \quad (41)$$

Из (41) следует, что в дневных условиях, когда $\Sigma_{p,H} \gg \Sigma_w$, в магнитосфере возмущения значительно слабее, нежели в ионосфере.

Таким образом, согласно проведенному выше исследованию над эпицентром землетрясения генерируются локализованные импульсы МГД-возмущений, которые распространяются в горизонтальной плоскости со скоростью, значительно меньшей альфвеновской. Амплитуда импульса и величина его скорости зависят от азимутального угла и магнитного наклонения. При приближении к экватору при одинаковом акустическом воздействии магнитное возмущение растет по величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляцкий В. Б., Мальцев Ю. П. Магнитосферно-ионосферное взаимодействие.—М.: Наука, 1983.—192 с.
2. Борисов Н. Д., Ораевский В. Н., Ружин Ю. Я. // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 27. № 6. С. 623.
3. Борисов Н. Д., Моисеев Б. С. // В сб.: Ионосферные исследования № 48.—М.: Наука, 1990.
4. Greifinger C., Greifinger P. S. // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. P. 7473.
5. Сорокин В. М., Федорович Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 3. С. 490.
6. Голиков Ю. В., Д'Коста Л., Пилиленко В. А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1985. Т. 25. № 6. С. 824.
7. Альперович Л. С., Федоров Е. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 10. С. 1238.
8. Борисов Н. Д. // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 28. № 3. С. 469.
9. Gurevich A. V., Krylov A. L., Tsedilina E. E. // Space Science Rev. 1976. V. 19. P. 59.
10. Tanaka T., Tchinose T., Okuzawa T. et al. // J. Atm. Terr. Phys. 1984. V. 38. P. 413.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
АН СССР

Поступила в редакцию
9 марта 1989 г.

THE PROPAGATION ALONG THE EARTH SURFACE OF SLOW MHD-VARIATIONS GENERATED BY THE ACOUSTIC PULSED SOURCE

N. D. Borisov, B. S. Moiseev

The transformation in the ionosphere of the shot-acoustic pulse in the electromagnetic perturbation is considered with an account of the slope of the magnetic earth field. The electromagnetic perturbation is the superposition of the quasi-stationary field and the moving perturbation. It is shown that the propagation velocity and the amplitude of the field depend on the azimuthal angle in the slope magnetic field. The law of the field change with the distance and quantitative estimations of the velocity and the amplitude are obtained.

УДК 533.951

**ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПЛОСКОЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ
ОТ ПЛАВНОГО СЛОЯ БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ**

H. C. Бухман

Изучена квазиклассическая асимптотика для плоской волны, отражающейся от плавного слоя бесстолкновительной плазмы. Обсуждена деполяризация плоской волны, а также пространственное разделение волнового пучка на линейно поляризованные компоненты при отражении от слоя.

1. Задача об отражении плоской электромагнитной волны (ЭМВ) от плавного плазменного слоя является одной из простейших среди практически значимых задач линейной электродинамики [1]. Тем не менее даже в идеализированной постановке (линейная зависимость плотности плазмы $n(z)$ от продольной координаты z) эта задача не имеет решений в классе табулированных специальных функций, в связи с чем неоднократно (см. [2] и цитируемую там литературу) предпринималось ее численное исследование. Так, в [2] приведены результаты расчетов ослабления P -поляризованной плоской волны при отражении от линейного слоя. Вместе с тем отсутствие (в известной нам литературе) численных результатов по фазе отраженной P -волны не позволяет рассчитать поляризационную структуру отраженной волны в случае, когда падающая волна не является чисто S - или P -поляризованной. Решение этой задачи и является основной целью настоящей работы.

Рассмотрим распространение плоской монохроматической ЭМВ в бесстолкновительной плазме с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z) = 1 - n(z)/n_c$ [1]. Пусть zy — плоскость падения волны. Тогда волну можно разложить на две компоненты — S ($E_x \neq 0, E_{y,z} = 0$) и P ($E_x = 0, E_{y,z} \neq 0$), причем для P -компоненты [1]

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{i}{k_0 \epsilon} G' \exp(-ik_y y), \quad G' = \frac{dG}{dz}, \\ E_z &= \frac{k_y}{k_0 \epsilon} G \exp(-ik_y y), \\ G'' - \frac{\epsilon'}{\epsilon} G' + k_z^2(z) G &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$k_z^2 = k^2(z) - k_y^2 = k_0^2 (\epsilon(z) - \sin^2 \alpha_0), \quad k_0 = \omega/c.$$

В (1) подразумевается фактор $e^{i\omega t}$, $k_y = \text{const}$ — поперечная составляющая волнового вектора, α_0 — угол падения волны в вакууме, т. е. при $\epsilon = 1$.

2. Ориентируясь на изучение отражения от плавного плазменного слоя, ограничимся далее случаем параксиальных плоских волн*:

$$k_y \ll k_0, \quad \alpha_0 \ll 1. \tag{2}$$

* В случае $k_y \sim k_0$ и плавного плазменного слоя точку поворота и особую точку дифференциального уравнения (1), определяемые условиями $k_z = 0$ и $\epsilon = 0$ соответственно, можно считать изолированными и применять метод эталонных задач, как в [1].

Пусть $\varepsilon(z) \geq 0$ при $z \leq z_0$, $\varepsilon(z) = (z_0 - z)/L$ при $z \rightarrow z_0$ ($n(z_0) = n_c$), $\varepsilon(-\infty) = 1$ (вакуум). Тогда в коротковолновом пределе ($k_0 \rightarrow \infty$) эталонным для уравнения P -волны (1) является уравнение плазменного резонанса (П1), изученное в Приложении*.

Используя метод эталонных задач [3] и результаты Приложения, нетрудно показать, что при выполнении условий применимости ВКБ-приближения к уравнению $G'' + k^2(z)G = 0$ (на практике для этого достаточно $k_0 L \gg 1$) квазиклассическая асимптотика для P -волны вдали от точки отражения $z_{\text{отр}}$ выглядит следующим образом:

$$E_{y+} = \frac{Ce^{-i\pi/4}}{\sqrt{k}} \exp\left(-i \int_{z_{\text{отр}}}^z k_z dz - ik_y y\right),$$

$$E_{y-} = R_{y-} \frac{Ce^{i\pi/4}}{\sqrt{k}} \exp\left(i \int_{z_{\text{отр}}}^z k_z dz - ik_y y\right), \quad E_z \ll E_y, \quad (3)$$

где $k_z^2(z_{\text{отр}}) = 0$, т. е. $z_{\text{отр}} = z_0 - \alpha_0^2 L$. В (3) E_{y+} , E_{y-} — ВКБ-асимптотики падающей и отраженной компонент поля соответственно, а R_{y-} — корректировочный (по сравнению с обычной квазиклассикой) коэффициент, зависящий только от параметра плазменного резонанса $\tau = (k_0 L)^{1/3} \alpha_0$:

$$R_{y-} = -i \frac{B_2 \exp(-i\varphi_2) + ibB_1 \exp(-i\varphi_1)}{B_2 \exp(i\varphi_2) + ibB_1 \exp(i\varphi_1)}, \quad (4)$$

где $b = \pi\tau^2/4$. Из (4) нетрудно получить выражение для коэффициента поглощения падающей волны по интенсивности** $Q = 1 - |R_{y-}|^2$:

$$Q = 2\gamma/(1+\gamma), \quad \gamma = 2b/(B_2^2 + (bB_1)^2). \quad (5)$$

Зависимость параметров $B_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ от τ приведена в табл. 2.

Из (П.11) видно, что при $\tau \rightarrow 0$ (нормальное падение) $R_{y-} \rightarrow 1$, при $\tau \rightarrow \infty$ (угол падения велик по сравнению с углом, при котором достигается максимальное поглощение) $R_{y-} \rightarrow -1$. В табл. 1 приведены вычисленные с использованием данных табл. 2 и (4), (5) зависимости фазы коэффициента отражения $R_{y-}(\arg R_{y-})$ и коэффициента поглощения по интенсивности Q от параметра плазменного резонанса τ (вероятная ошибка — несколько единиц последнего разряда). Зависимость $Q(\tau)$ находится в удовлетворительном согласии с [2].

3. Пусть падающая (в плоскости xy) на плазменный слой параксиальная (2) плоская волна задана соотношениями типа (3):

$$E_{x,y+} = \frac{C_{x,y+} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{k}} \exp\left(-i \int_{z_{\text{отр}}}^z k_z dz - ik_y y\right), \quad (6)$$

где множитель поляризации

$$P_+ = E_{x+}/E_{y+} = C_{x+}/C_{y+}. \quad (7)$$

Используя результаты п. 2 для E_y (P -компоненты) и обычную квазиклассику для E_x (S -компонента), для отраженной волны получим

* Этаплонный для S -волны является уравнение Эйри [3], что позволяет использовать для S -волны стандартный метод ВКБ [1].

** Это поглощение связано со значительным (бесконечно большим при $v \rightarrow 0$) возрастанием продольной компоненты ЭМВ в окрестности поверхности критической концентрации плазмы $n(z) = n_e$, что приводит к конечности коэффициента поглощения при $v \rightarrow 0$ (подробнее см. [4]). Потерянная ЭМВ энергия расходуется на нагрев плазмы вблизи поверхности критической концентрации плазмы [1].

$$E_{x,y-} = \frac{C_{x,y-} e^{i\pi/4}}{\sqrt{k}} \exp\left(i \int_{z_{\text{отр}}}^z k_z dz - ik_y y\right), \quad (8)$$

где $C_{x-} = C_{x+}$, $C_{y-} = C_{y+} R_{y-}$. Тогда для множителя поляризации отраженной волны $P_- = E_{x-}/E_{y-}$ имеем

$$P_- = P_+/R_{y-}, \quad |P_-| = |P_+|/\sqrt{1-Q}, \quad (9)$$

$$\arg P_- = \arg P_+ - \arg R_{y-},$$

а для интегрального коэффициента поглощения плоской волны (6)

$$Q_{\text{инт}} = Q(\tau)/(1 + |P_+|^2). \quad (10)$$

При $\tau \rightarrow 0$ $P_- = P_+$ — состояние поляризации волны в случае нормального падения, естественно, не изменяется; при $\tau \gg 1$ $P_- = -P_+$, что находится в соответствии с геометрооптическим законом Рытова [4].

Т а б л и ц а 1

τ	Q	$-\arg R_{y-}/\pi$	τ	Q	$-\arg R_{y-}/\pi$
0,00	0,0000	0,0000	1,05	0,2548	0,6994
0,05	0,0066	0,0016	1,10	0,2100	0,7300
0,10	0,0260	0,0070	1,15	0,1690	0,7577
0,15	0,0572	0,0162	1,20	0,1323	0,7826
0,20	0,0985	0,0294	1,25	0,1008	0,8050
0,25	0,1479	0,0467	1,30	0,0738	0,8210
0,30	0,2025	0,0681	1,35	0,0539	0,8431
0,35	0,2593	0,0937	1,40	0,0378	0,8588
0,40	0,3157	0,1241	1,45	0,0257	0,8729
0,45	0,3683	0,1592	1,50	0,0169	0,8856
0,50	0,4138	0,1992	1,55	0,0108	0,8964
0,55	0,4510	0,2438	1,60	0,0067	0,9062
0,60	0,4771	0,2918	1,65	0,0040	0,9147
0,65	0,4912	0,3426	1,70	0,0023	0,9222
0,70	0,4930	0,3945	1,75	0,0013	0,9288
0,75	0,4825	0,4460	1,80	0,00069	0,9347
0,80	0,4607	0,4961	1,85	0,00036	0,9400
0,85	0,4295	0,5436	1,90	0,00018	0,9447
0,90	0,3909	0,5877	1,95	0,87—4	0,9488
0,95	0,3473	0,6284	2,00	0,40—4	0,9527
1,00	0,3010	0,6656	∞	0,0	1,000

При промежуточных τ состояние поляризации отраженной волны может существенно отличаться от состояния поляризации падающей волны, если только падающая волна не является чисто S - или P -поляризованной ($P_+ \neq 0, \infty$). При этом, как видно из табл. 1, амплитуда множителя поляризации изменяется не очень значительно ($|P_-| = 1,0 \div 1,4 |P_+|$), фаза же способна изменяться в пределах $(0 \div \pi)$. Так, например, в случае $\tau = 0,8$ ($\alpha_0 = 0,8 (k_0 L)^{-1/3}$) при $P_+ = \pm 0,734$ (падающая волна линейно поляризована, угол между плоскостью поляризации и плоскостью падения $xy \theta = \pm 36,3^\circ$) имеем $P_- = \exp(\pm i\pi/2)$ — отраженная волна поляризована циркулярно. Интегральный коэффициент поглощения волны $Q_{\text{инт}}$ в этом случае составляет около 30%. Если же при $\tau = 0,8$ на слой падает циркулярно поляризованная волна ($P_+ = \exp(\pm i\pi/2)$), имеем $P_- = \mp 1,362$ — отраженная волна оказывается линейно поляризованной, угол между плоскостью поляризации и плоскостью падения $xy \theta = \mp 53,7^\circ$. В этом случае $Q_{\text{инт}} = 23\%$. В общем случае при падении на слой линейно поляризованной волны отраженная волна будет поляризована эллиптически.

4. Теперь обратим внимание на резкую (в рассматриваемом нами пределе $k_0 L \gg 1$) зависимость параметра плазменного резонанса τ от

угла падения волны в вакууме α_0 : $\partial\tau/\partial\alpha_0 = (k_0 L)^{1/3} \gg 1$. Поскольку добавочная (к ВКБ) фаза отраженной P -волны определяется функцией $\arg R_{y-}(\tau)$, естественно ожидать добавочного (по отношению к геометрической оптике) сдвига волнового пучка в плоскости падения при отражении от плавного плазменного слоя (т. е. эффекта типа Гооса—Хенхен [5, 6]).

Действительно, рассуждая аналогично [5] (с геометрооптической точностью, т. е. без учета квазиоптических дифракционных эффектов, рассмотренных в скалярном приближении, например, в [7]), нетрудно показать, что при отражении от плазменного слоя $\epsilon(z)$ P -поляризованного пучка ЭМВ с углом падения (при $\epsilon=1$) α_0 произойдет не только частичное поглощение энергии пучка в соответствии с (5), но и сдвиг его как целого в плоскости падения на величину Σ по сравнению со скалярной геометрической оптикой [4]*:

$$\Sigma(\tau(\alpha_0)) = k_0^{-1}(k_0 L)^{1/3} \partial(\arg R_{y-}(\tau))/\partial\tau. \quad (11)$$

При этом, разумеется, предполагается, что ширина углового спектра пучка по осям x, y $\Delta\alpha_{x,y}$ мала по сравнению с его углом падения α_0 — в противном случае нельзя говорить о единой для пучка P - или S -поляризации. При отражении же от слоя S -поляризованного пучка в тех же предположениях $\Sigma=0$, т. е. в рамках геометрооптической точности поправок к скалярной геометрической оптике нет.

Отмеченное обстоятельство приводит (в случае смешанной поляризации пучка) к пространственному разделению его P - и S -компонент при отражении. Видно, что при $k_0 L \gg 1$ и $\tau \sim 1$ (т. е. $\alpha_0 \sim (k_0 L)^{-1/3}$) сдвиг между P - и S -компонентами может составить много длин волн и (на границе применимости приближения неизменности профиля пучка при отражении, при $\Delta\alpha \sim \alpha_0$) может оказаться сопоставим с шириной исходного пучка в перетяжке (определенной шириной его углового спектра $\Delta\alpha_{x,y}$ [7]). В случае же $\tau \gg 1$ ($\alpha_0 \gg (k_0 L)^{-1/3}$) Σ становится экспоненциально мало и мы вновь убеждаемся в справедливости геометрической оптики [4].

Автор благодарен А. Л. Гутману и А. С. Сахарову за интерес к работе и стимулирующую критику.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О решении дифференциального уравнения плазменного резонанса

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение плазменного резонанса [1, 2]:

$$xy'' - y' - x(x+a)y = 0, \quad a \geq 0. \quad (\text{П.1})$$

Оно имеет [2, 8] две особые точки — слабо особую $x=0$ и сильно особую $x=\infty$. Найдем два линейно независимых решения (П.1). Одно из них регулярно в $x=0$ и может быть представлено в виде [2, 8]

$$y_1 = x^2 \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i, \quad C_0 = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = a/8, \\ C_i = (aC_{i-2} + C_{i-3})/(i(i+2)), \quad i \geq 3. \quad (\text{П.2})$$

Видно, что при $x \rightarrow +\infty$ y_1 экспоненциально возрастает. Второе решение $y_2(x)$ зафиксируем условием

$$W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = -x; \quad (\text{П.3a})$$

$$y_2 \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.36})$$

* Разумеется, вблизи каустики формулы геометрической оптики, ни со сдвигом, ни без него, как обычно, неприменимы.

Условию (П.3а), удовлетворяет ряд [2, 8]

$$y_2 = \frac{a}{4} (y_1 \ln x + \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i), \quad d_0 = 2/a, \quad d_1 = 0, \quad (П.4)$$

$$d_i = (ad_{i-2} + d_{i-3} - 2(i-1)C_{i-1})/(i(i-2)), \quad i \geq 3.$$

Выбором параметра d_2 можно удовлетворить и условию (П.3б). Вместо (П.4) можно использовать следующую непосредственно из (П.3а), (П.3б), формулу

$$y_2 = y_1 \int_x^{+\infty} y_1^{-2} x dx. \quad (П.5)$$

Из (П.4), (П.5) видно, что y_2 имеет точку ветвления $x=0$; для однозначного задания y_2 необходимо зафиксировать правило обхода этой точки. Поэтому дополним определение функции y_2 (П.3а), (П.3б) указанием на обход точки $x=0$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости (x), что соответствует введению бесконечно слабого поглощения [1, 2].

Из (П.4), (П.5) видно, что при $x > 0$

$$\operatorname{Re} y_2 = y_1 \int_x^{+\infty} y_1^{-2} x dx, \quad \operatorname{Im} y_2 = 0, \quad (П.6)$$

а при $x < 0$

$$\operatorname{Re} y_2 = y_1 \int_x^{+\infty} y_1^{-2} x dx, \quad \operatorname{Im} y_2 = (\pi a/4) y_1. \quad (П.7)$$

2. Табулирование функций $y_{1,2}$ проводилось в интервале значений x , обеспечивающем выход (с достаточной точностью) $y_{1,2}$ на свои ВКБ-асимптотики при $x \rightarrow \pm\infty$. Для определения $y_1(x)$ в окрестности $x=0$ использовался ряд (П.2); вдали от $x=0$ использовалось дифференциальное уравнение (П.1). Для вычисления $y_2(x)$ при $x \geq x_{\text{тр}}$ ($x_{\text{тр}} \sim -1$) использовались интегралы (П.6), (П.7); при взятии интеграла в смысле главного значения (П.7) из подынтегрального выражения с использованием (П.2), (П.4) выделялась особенность, которая интегрировалась аналитически; регулярный остаток интегрировался численно. Для определения y_2 при $x < x_{\text{тр}}$ также использовалось непосредственно дифференциальное уравнение (П.1). Такая методика счета исключала экспоненциальную (при больших положительных x) или параболическую (при малых x) неустойчивость вычислений.

3. Основным результатом вычислений явилось установление связи между асимптотическим поведением $y_{1,2}$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \pm\infty$. Асимптотика функций $y_{1,2}(x)$ при $x \rightarrow 0$ зафиксирована в их определении:

$$y_1 = x^2 + O(x^4), \quad y_2 = 1/2 + O(x^2 \ln x). \quad (П.8)$$

При $x \rightarrow +\infty$ ВКБ-асимптотика

$$y_{1,2} = A_{1,2} t_+^{1/4} \exp(\pm(2/3)t_+^{3/2}), \quad t_+ = x + a, \quad (П.9)$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$\operatorname{Re} y_{1,2} = B_{1,2} t_-^{1/4} (\sin(2/3)t_-^{3/2} + \varphi_{1,2}), \quad t_- = -t_+, \quad (П.10)$$

$$\operatorname{Im} y_1 = 0, \quad \operatorname{Im} y_2 = (\pi a/4) \operatorname{Re} y_1.$$

Асимптотические коэффициенты $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ связаны условием (П.3а): $2A_1 A_2 = 1$. $B_1 B_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$. Вычисленная зависимость A , B , φ от

параметра плазменного резонанса τ ($a=\tau^2$) представлена в табл. 2 (вероятная ошибка результата — несколько единиц последнего разряда). При больших τ можно воспользоваться асимптотическими (при $\tau \rightarrow \infty$) формулами, которые нетрудно получить в рамках метода эталонных задач [3]:

$$A_1 = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}\tau^3\right), \quad A_2 = \frac{1}{2A_1}, \quad B_1 = \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{2}{3}\tau^3\right), \quad (\text{П.11})$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad B_2 = \frac{4}{\tau^2} \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{2}{3}\tau^3\right), \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Таблица 2

τ	$1000 A_1$	A_2	B_1	B_2	φ_1/π	φ_2/π
0,00	917,4	0,5450	1,835	1,090	1,9165	0,7499
0,05	915,4	0,5462	1,837	1,091	1,9171	0,7508
0,10	909,4	0,5498	1,843	1,092	1,9189	0,7535
0,15	899,3	0,5560	1,853	1,095	1,9220	0,7580
0,20	885,3	0,5648	1,868	1,100	1,9261	0,7643
0,25	867,5	0,5764	1,887	1,105	1,9315	0,7724
0,30	845,9	0,5911	1,911	1,112	1,9379	0,7821
0,35	820,8	0,6092	1,940	1,121	1,9454	0,7933
0,40	792,3	0,6311	1,975	1,131	1,9539	0,8061
0,45	760,6	0,6574	2,016	1,143	1,9632	0,8203
0,50	726,0	0,6887	2,064	1,158	1,9734	0,8359
0,55	688,8	0,7259	2,120	1,174	1,9844	0,8528
0,60	649,5	0,7699	2,185	1,193	1,9960	0,8707
0,65	608,3	0,8219	2,260	1,215	0,0082	0,8896
0,70	565,8	0,8837	2,346	1,240	0,0208	0,9092
0,75	522,4	0,9571	2,447	1,269	0,0338	0,9294
0,80	478,6	1,045	2,564	1,303	0,0469	0,9502
0,85	434,9	1,150	2,701	1,342	0,0602	0,9713
0,90	391,9	1,276	2,860	1,388	0,0734	0,9924
0,95	350,0	1,429	3,049	1,441	0,0864	1,0134
1,00	309,6	1,615	3,272	1,504	0,0992	1,0341
1,00*	409,6*	1,221*	3,108*	1,918*	0,2500*	1,2500*
1,05	271,2	1,844	3,536	1,577	0,1116	1,0542
1,10	235,1	2,127	3,855	1,666	0,1234	1,0737
1,15	201,6	2,480	4,238	1,771	0,1347	1,0922
1,20	171,0	2,924	4,706	1,898	0,1453	1,1096
1,25	143,3	3,488	5,281	2,054	0,1552	1,1258
1,30	118,7	4,213	5,993	2,444	0,1643	1,1406
1,35	97,04	5,153	6,887	2,482	0,1726	1,1540
1,40	78,30	6,385	8,015	2,778	0,1801	1,1658
1,45	62,33	8,022	9,462	3,155	0,1869	1,1762
1,50	48,92	10,22	11,33	3,636	0,1930	1,1853
1,55	37,83	13,22	13,79	4,260	0,1984	1,1929
1,60	28,82	17,35	17,04	5,076	0,2031	1,1995
1,65	21,62	23,13	21,42	6,160	0,2074	1,2050
1,70	15,95	31,34	27,40	7,614	0,2111	1,2096
1,75	11,58	43,19	35,67	9,597	0,2145	1,2135
1,80	8,260	60,53	47,32	12,34	0,2174	1,2168
1,85	5,791	86,35	63,95	16,18	0,2200	1,2197
1,90	3,986	125,4	88,14	21,68	0,2224	1,2222
1,95	2,693	185,6	123,9	29,65	0,2244	1,2243
2,00	1,785	280,1	177,8	41,41	0,2263	1,2263
2,00*	1,926*	259,6*	165,3*	50,98*	0,2500*	1,2500*

Здесь $\beta = 0,3085$ — константа, определяемая интегралом

$$\beta = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{f_1(x) x^3 dx}{I_1^3(x)},$$

где I_1 — модифицированная функция Бесселя [3], а

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} g_i, \quad g_i = \frac{g_{i-1} + (2^{2i} i! (i+1)!)^{-1}}{(2i+3)(2i+5)}, \quad g_{-1} = 0.$$

Результаты вычислений с использованием асимптотики (П.11) в табл. 2 отмечены звездочкой. Видно, что (П.11) дает достаточно точные значения A , B , ϕ уже при $\tau \sim 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гизбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
2. Омельченко О. Я., Панченко В. И., Степанов К. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 10. С. 1484.
3. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
5. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
6. Годин О. А. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 1. С. 31.
7. Бухман Н. С., Гутман А. Л. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 1. С. 163.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.

Воронежский лесотехнический
институт

Поступила в редакцию
13 февраля 1989 г.

MODIFICATION OF POLARIZATION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE AFTER THE REFLECTION FROM A SMOOTH LAYER OF COLLISIONLESS PLASMA

N. S. Bukhman

Quasiclassical asymptotics for a plane wave after reflection by a smooth layer of collisionless plasma is considered. Depolarization of the plane wave and space separation of wave beam into linear-polarized components after the reflection are also discussed.

УДК 533.951

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ И НИЗКОЧАСТОТНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

C. V. Владимиров, B. C. Кривицкий

Основываясь на общем выражении для интеграла столкновений частиц, взаимодействующих одновременно с резонансными и нерезонансными волнами в турбулентной плазме, решена общая задача стохастического ускорения. Получено уравнение, описывающее изменение со временем распределения частиц по энергиям. Особенностью этого уравнения является третий порядок дифференцирования по энергиям (учет только квазилинейного взаимодействия приводит ко второму порядку дифференцирования). Исследовано решение этого уравнения для начального δ-образного распределения типа «пучка». Показано, что описанный эффект, связанный с наличием нерезонансных волн, превышает квазилинейный эффект на начальных этапах релаксации и на «хвостах» распределения частиц пучка, а также приводит к сдвигу (со временем) величины $\varepsilon_{\max}(t)$, на которую приходится в момент времени t максимум распределения частиц.

1. Исследование механизмов стохастического ускорения частиц в плазме имеет большое значение, например, для астрофизических приложений — в задачах, связанных с космическими лучами [1]. Одним из первых исследованных механизмов статистического ускорения является хорошо известное ускорение Ферми, при котором частица увеличивает свою среднюю энергию в процессах столкновений со случайно движущимися магнитными облаками.

Помимо относительно малоэффективных механизмов фермиевского типа, значительный обмен энергией между волнами и частицами в турбулентной плазме (который в определенных условиях приводит к ускорению частиц) происходит при резонансном взаимодействии черенковского типа, описываемом квазилинейной теорией [2]. (Физические аспекты стохастического ускорения при выполнении черенковского условия подробно обсуждались в [3, 4].) Для изменения энергии частиц в этом случае достаточно наличия только резонансных полей, влияние других видов волн (в квазилинейном приближении) не учитывается. При этом изменение со временем средней энергии частиц пропорционально квадрату амплитуды резонансного поля. Однако в том случае, когда в плазменной системе возбуждены многие коллективные степени свободы (а именно это, как правило, и происходит), оказывается возможным существование волн, не находящихся в резонансе с частицами плазмы. Вопрос о влиянии таких волн на ускорение частиц не столь тривиален. В частности, оказывается, что уже в следующем порядке по энергии волн (пропорциональном четвертой степени поля) нерезонансные волны изменяют характер ускорения частиц. Механизм, посредством которого осуществляется это изменение, тот же самый, что и в достаточно исследованном эффекте так называемого плазменного мазера (конверсии энергии плазменных колебаний вверх по частоте, см. [5] и указанную там литературу). Различие при исследовании стохастического ускорения частиц по сравнению с исследованием конверсии вверх по частоте по сути дела заключается лишь в «точке зрения». Так, авторы работ [5] (и подобных им) рассматривали эффект плазменного мазера «с точки зрения» нерезонансных волн, интересуясь прежде всего

возможностями усиления высокочастотных нерезонансных волн. Напротив, в работах [6] авторы изучали обращенный эффект плазменного мазера «с точки зрения» частиц. В этих работах были получены выражения для интеграла столкновений частиц плазмы, обусловленного наличием нерезонансных полей.

В настоящей работе на основе выражения для интеграла столкновений, найденного в [6], исследован характер стохастического ускорения частиц в присутствии нерезонансных полей. В одномерном случае рассмотрена задача эволюции начального δ-образного распределения частиц (типа моноэнергетического пучка).

2. Рассмотрим плазму, в которой возбуждены резонансные $E_{\omega q}$ и нерезонансные $E_{\Omega k}$ волны. Для первых предполагается выполненным черенковское условие

$$\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

для вторых предполагается отсутствие черенковского резонанса

$$\Omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \neq 0, \quad (2)$$

а также резонанса рассеяния с резонансными волнами

$$\Omega - \omega - (\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \neq 0 \quad (3)$$

интересующих нас частиц плазмы, описываемых усредненной по ансамблю функцией распределения $\Phi_p = \langle f_p \rangle$. В этих условиях изменение распределения частиц подчиняется уравнению [6]

$$\frac{\Delta}{\partial t} \hat{J} \Phi_p = \hat{J} \Phi_p + [\hat{J}, \hat{J}] \Phi_p, \quad (4)$$

где $\hat{J} \equiv \hat{J} + \delta \hat{J}$ — «перенормированный» квазилинейный оператор, который определяется выражением

$$\begin{aligned} \hat{J} = \pi e^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\omega dq |E_{\omega q}|^2 \frac{q_i q_j}{q^2} \left\{ \delta(\omega - q \cdot v) + \frac{e^2}{m_e^2} \int d\Omega dk |E_{\Omega k}|^2 (k \cdot v) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\delta'(\omega - q \cdot v)}{(\Omega - k \cdot v)^3} - \frac{(k \cdot v)}{k^2} \frac{\delta(\omega - q \cdot v)}{(\Omega - k \cdot v)^4} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial}{\partial p_i} (D_{ij}^L + \delta D_{ij}^L) \frac{\partial}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, «перенормированный» квазилинейный оператор $(\hat{J} + \delta \hat{J})$, стоящий в правой части уравнения (4), помимо обычного квазилинейного члена \hat{J} , содержит еще и поправки, обусловленные наличием нерезонансных волн*. Наибольший интерес, однако, представляет второй

* Следует иметь в виду, что, вообще говоря, в правой части уравнения (4) присутствуют члены, содержащие только резонансные поля и пропорциональные (в низшем нелинейном порядке) $|E_{\omega q}|^4$. Учет этих членов (а также аналогичных вкладов и в более высоких порядках по степеням резонансного поля) приводит лишь к так называемому турбулентному уширению резонанса (1), не меняя вид квазилинейного оператора \hat{J} как оператора второго порядка дифференцирования по импульсам, если перенormировать коэффициент диффузии в \hat{J} известным образом — см. в [3]. Также [3] не меняет степень дифференцирования оператора \hat{J} и учет эффекта рассеяния нерезонансных волн, если, в отличие от (3), может выполняться условие резонанса рассеяния с резонансными волнами (часть вклада $\sim |E_{\omega q}|^2 |E_{\Omega k}|^2$) или с нерезонансными волнами (вклад $\sim |E_{\Omega k}|^4$). В силу этого обстоятельства все эти эффекты здесь не рассматриваются.

член правой части уравнения (4), содержащий оператор \hat{I} и описывающий «неквазилинейное» воздействие на частицы нерезонансных волн,

$$\hat{I} = \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{e^2}{2} \int d\Omega dk \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{|E_{\omega k}|^2}{(\Omega - k \cdot v)^2} \frac{\partial}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij}' \frac{\partial}{\partial p_j}. \quad (6)$$

В выражениях (4)–(6) $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ есть коммутатор операторов, $e = -|e|$ и m_e — заряд и масса электрона, $\delta'(x) \equiv d\delta(x)/dx$, $|E_{\omega q}|^2$ — корреляционная функция фурье-компоненты электрического поля в резонансной волне (ради простоты все волны, как резонансные, так и нерезонансные, считаются продольными),

$$\langle E_{i, \omega q} E_{j, \omega' q'} \rangle = |E_{\omega q}|^2 \frac{q_i q_j}{q^2} \delta(\omega + \omega') \delta(q + q'); \quad (7)$$

$$E_{\omega q} = \int \frac{dt dr}{(2\pi)^4} E(t, r) \exp(i\omega t - iq \cdot r) \equiv \frac{q}{|q|} E_{\omega q}, \quad (8)$$

$|E_{\omega k}|^2$ — корреляционная функция фурье-компоненты электрического поля в нерезонансной волне, определяемая аналогично (7) и (8).

Существенным отличием уравнения (4) от обычного квазилинейного является более высокий порядок дифференцирования по импульсам, а также степень этого порядка — третья. (Вообще говоря, уравнение (4) содержит максимальную производную четвертого порядка, однако в силу коммутации операторов \hat{I} и \hat{J} максимальный порядок понижается до третьего, см. ниже.) Именно появление более высокого нечетного порядка дифференцирования и приводит к некоторому изменению характера стохастического ускорения в присутствии нерезонансных волн по сравнению с резонансным ускорением, описываемым квазилинейной теорией.

3. Одномерный случай реализуется в тех ситуациях, когда плазма находится в достаточно сильном магнитном поле $H_0 \rightarrow \infty$, т. е. при электронной (ионной) циклотронной частоте $\omega_{He(i)} = |e|H_0/(m_{e(i)}c)$ (где c — скорость света, $|e|$ и m_i — заряд и масса ионов), много большей всех остальных характерных частот задачи (например, $\omega_{pe(i)} = (4\pi n_e e^2/m_{e(i)})^{1/2}$ — электронной (ионной) плазменной частоты, где $n_e = n_i$ — концентрация электронов или ионов). Нетрудно показать, что формулы (5) и (6) справедливы и в этом случае, если скорости частиц и волновые векторы волн направлены вдоль магнитного поля. Уравнение (4) тогда запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} (\tilde{D}_L + D_L' D_N') \frac{\partial \Phi_p}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left[D_N, \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2, D_L \right] \frac{\partial \Phi_p}{\partial p}, \quad (9)$$

где приняты обозначения

$$\tilde{D}_L = \pi e^2 \int d\omega dq |E_{\omega q}|^2 \delta(\omega - qv) \times \quad (10)$$

$$\times \left(1 - q^2 \frac{e^2}{m^2} \int d\Omega dk \frac{|E_{\omega k}|^2}{(\Omega - kv)^2} \right);$$

$$D_L = \pi e^2 \int d\omega dq |E_{\omega q}|^2 \delta(\omega - qv); \quad (11)$$

$$D_N = \frac{e^2}{2} \int d\Omega dk \frac{|E_{\omega k}|^2}{(\Omega - kv)^2}; \quad (12)$$

$$D_L' \equiv \frac{dD_L}{dp} = \pi e^2 \int d\omega dq |E_{\omega q}|^2 \frac{q}{m} \delta'(\omega - qv); \quad (13)$$

$$D'_N \equiv \frac{d\tilde{D}_N}{dp} = e^2 \int d\Omega dk |E_{\Omega k}|^2 \frac{\mathbf{k}}{m} \frac{1}{(\Omega - kv)^3}. \quad (14)$$

Коммутатор в уравнении (9) определяется выражением

$$\left[D_N, \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2, D_L \right] = D_N \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2 D_L - D_L \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2 D_N. \quad (15)$$

Мы рассматриваем группу ускоряемых частиц с массой m и концентрацией n , их распределение по импульсам описывается функцией Φ_p (частицы нерелятивистские; вообще, все выражения типа (5), (6), (10)–(14) записаны для нерелятивистских частиц). Среднее значение какой-либо величины x , относящейся к ускоряемым частицам, обозначим чертой сверху, т. е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \int \frac{dp}{2\pi} \Phi_p x, \quad (16)$$

где, естественно, $n = \int \Phi_p dp / 2\pi$. Скорость изменения средней энергии частицы будет равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\epsilon} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t}, \quad (17)$$

где для формально введенной величины $\partial \epsilon / \partial t$ имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{d}{dp} F(p); \quad (18)$$

$$F(p) = (\tilde{D}_L + D'_N D'_L) v + \left[D_L, \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2, D_N \right] v. \quad (19)$$

Увеличение среднеквадратичного разброса энергий можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\epsilon}^2 - (\bar{\epsilon})^2) = \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\Delta \epsilon)^2} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \epsilon)^2}, \quad (20)$$

где $\Delta \epsilon = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}$, а

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \epsilon)^2 = 2(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}) \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \tilde{G}(p). \quad (21)$$

Функция $\tilde{G}(p)$, равная

$$\tilde{G}(p) = 2vF(p) + 4 \frac{\partial}{\partial p} \left[D_L v, \frac{\partial}{\partial p}, D_N v \right], \quad (22)$$

описывает флюктуационное ускорение частицы. В самом деле, предположим, что в плазме в момент $t=0$ появляются частицы с импульсом $p=p_0$ (и, соответственно, с энергией $\epsilon=\epsilon_0$): $\Phi_p = 2\pi n \delta(p-p_0)$. Тогда при $t=0$ имеем $\bar{p}=p_0$ и $\bar{\epsilon}=\epsilon_0$, темп набора энергии $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0}$, увеличение квадратичного разброса по энергиям

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \epsilon)^2 \Big|_{t=0} = \tilde{G}(p_0). \quad (23)$$

Таким образом, можно сказать, что $\partial \epsilon / \partial t$ описывает систематическое ускорение частицы.

Для описания эффектов ускорения удобно использовать функцию распределения по энергиям частиц Φ_ε , определяемую в одномерном случае соотношением

$$\Phi_p = 2\pi \frac{d\varepsilon}{dp} \Phi_\varepsilon, \quad \int \Phi_\varepsilon d\varepsilon = n. \quad (24)$$

Тогда вместо (9) для этой функции распределения получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\Phi_\varepsilon F(\varepsilon)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} (\Phi_\varepsilon \tilde{G}(\varepsilon)) - \frac{1}{3} \frac{\partial^3}{\partial \varepsilon^3} (\Phi_\varepsilon H(\varepsilon)), \quad (25)$$

где $F(\varepsilon) = F(p)|_{p=\sqrt{2m\varepsilon}}$ и аналогично $\tilde{G}(\varepsilon) = \tilde{G}(p)|_{p=\sqrt{2m\varepsilon}}$, $H(\varepsilon) = H(p)|_{p=\sqrt{2m\varepsilon}}$, а

$$H(p) = 6v^3(D_L D'_N - D_N D'_L) \equiv 6v^3[D_L D'_N]. \quad (26)$$

(В (26) коммутатор аналогично определению (15) «переставляет» индексы L и N , оставляя «на месте» дифференцирование.)

Таким образом, мы получили, что максимальный порядок дифференцирования — третий. Этот факт и приводит к ряду следствий, принципиально отличных от результатов квазилинейного рассмотрения.

4. Рассмотрим начальную задачу: пусть в момент времени $t=0$ имеется δ -образное распределение электронов по энергиям: $\Phi_\varepsilon = n\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Далее, уравнение (25) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 H(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^3}\right) \Phi_\varepsilon - \left(F(\varepsilon) - \frac{\partial \tilde{G}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{\partial^2 H(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right) \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2} \left(\tilde{G}(\varepsilon) - 2 \frac{\partial H(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} - \frac{1}{3} H(\varepsilon) \frac{\partial^3 \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon^3} \equiv \\ &\equiv -A(\varepsilon) \Phi_\varepsilon - B(\varepsilon) \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2} C(\varepsilon) \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} - \frac{1}{3} H(\varepsilon) \frac{\partial^3 \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon^3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассматривая эволюцию δ -образного распределения, считаем коэффициенты A , B , C и H в уравнении (27) не зависящими от энергии ε , т. е. положим $A(\varepsilon) = A(\varepsilon_0)$ и т. д. Такое приближение во всяком случае справедливо при $(\Delta\varepsilon)^2 \ll \varepsilon_0^2$, т. е. при относительно малом разбросе по энергиям (и ускорении либо торможении как целого) эволюционирующего начального распределения («пучка»).

Коэффициенты A , B и C (но не H) содержат члены различного порядка малости. Наибольший вклад в эти коэффициенты дает квазилинейная диффузия, поэтому можно записать

$$\begin{aligned} A &\simeq -\frac{1}{p} D'_L|_{p=p_0}, \quad C \simeq 2v^2 D_L|_{p=p_0} \equiv G(>0), \\ B &\simeq -\frac{v}{p^3} \frac{d}{dp} p^3 D_L|_{p=p_0} = v_0 p_0 A - \frac{3G}{2v_0 p_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Положительный знак константы G существен (подчеркнем, что $G>0$ всегда), так как только при $G>0$ пучок эволюционирует, «расплываясь» в пространстве энергии (или импульса, скорости; впрочем, это хорошо известный результат). Наибольший интерес, однако, представляет последний член в правой части (27), содержащий коэффициент H .

Так, в частности, как предпоследнее ($\sim \partial^2 \Phi_\varepsilon / \partial \varepsilon^2$), так и последнее

$(-\partial^3 \Phi_\varepsilon / \partial \varepsilon^3)$ слагаемые приводят к «размытию» пучка. Разница, однако, состоит в том, что, помимо квадратичного размытия (21), появляется «кубическое размытие», выражаемое формулой

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varepsilon)^3 = 3((\Delta \varepsilon)^2 - (\overline{(\Delta \varepsilon)^2})) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 3\Delta \varepsilon \tilde{G}(\varepsilon) + H(\varepsilon). \quad (29)$$

Аналогично (23) в начальный момент эволюции пучка имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varepsilon)^3|_{t=0} = H(\varepsilon_0). \quad (30)$$

Таким образом, увеличение $\Delta \varepsilon$ происходит как по закону $\sim \sqrt{Gt}$ благодаря квазилинейному члену (с многочисленными нелинейными поправками), так и по закону $\sim \sqrt{|H|t}$, благодаря «чисто» нелинейному члену $H \partial^3 \Phi_\varepsilon / \partial \varepsilon^3$. Разброс $\Delta \varepsilon$ в квазилинейном случае достигает величины ε_0 за время $\tau_L \sim G^{-1}$, а в нелинейном случае — за время $\tau_N \sim |H|^{-1}$. Отношение

$$\frac{\tau_L}{\tau_N} \sim \frac{|H|}{G\varepsilon_0} \ll 1, \quad (31)$$

так как коэффициент H содержит (как минимум) один малый множитель по сравнению с G ; это отношение $W/n_e T_e$, где W — плотность энергии нерезонансных волн, T_e — температура электронов. (Требование $(W/n_e T_e) \ll 1$ являлось необходимым условием при выводе интеграла столкновений (5) — см. [6].) Из (31) видно, что время полного размытия пучка определяется квазилинейным интегралом. Тем не менее учет последнего члена в правой части (27) оказывается важным при малых временах t , когда $(Ht)^2 > (Gt)^3$. Таким образом, начальная стадия размытия (при $t < \tau_{cr}$) происходит по закону $\Delta \varepsilon \sim t^{1/3}$, а не $\sim t^{1/2}$, критическое время τ_{cr} определяется из равенства $(Ht)^2 = (Gt)^3$ и дается величиной

$$\tau_{cr} \sim \frac{H^2}{G^3} = \tau_L \left(\frac{\tau_L}{\tau_N} \right)^2. \quad (32)$$

Из этого выражения можно получить, что

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_L} = \left(\frac{\tau_L}{\tau_N} \right)^2 \sim \frac{H^2}{G^2 \varepsilon_0^2} \ll 1, \quad (33)$$

так как содержит (как минимум) малый множитель $(W/n_e T_e)^2$.

Получим теперь точное решение уравнения (27) (с постоянными коэффициентами); для выбранных нами начальных условий этим решением будет являться так называемое фундаментальное решение оператора $\hat{L}_N = \partial/\partial t + A + B\partial/\partial \varepsilon - (1/2)G\partial^2/\partial \varepsilon^2 + (1/3)H\partial^3/\partial \varepsilon^3$. (Фундаментальное решение (функция Грина) \mathcal{E} дифференциального оператора \hat{L} есть обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению $\hat{L}\mathcal{E} = \delta$; для уравнений типа (27) с первой производной по времени функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t, \varepsilon)$ описывает временную эволюцию начального δ-образного распределения.) С помощью фурье-преобразования по времени и по энергиям из (27) нетрудно получить, что фундаментальное решение \mathcal{E}_N оператора \hat{L}_N есть

$$\mathcal{E}_N = \frac{\theta(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp \left(i \frac{Ht}{3} u^3 - \frac{Gt}{2} u^2 + i(-Bt + \varepsilon - \varepsilon_0)u - At \right), \quad (34)$$

где $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ — функция Хевисайда. Исследованием выражения (34) мы сейчас и займемся.

5. Функцию (34) нетрудно привести к виду, совпадающему с хорошо исследованной функцией Эйри:

$$\mathcal{E}_N = \frac{\theta(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(i \frac{Ht}{3} \left(u + \frac{iG}{2H}\right)^3 + i \left(\frac{G^2 t}{4H} - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right)\right) \times \\ \times \left(u + \frac{iG}{2H}\right) + \frac{G}{2H} \left(\frac{G^2}{6H} t - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right) - At \right). \quad (35)$$

Считаем сперва, что $H > 0$. В этом случае имеем

$$\mathcal{E}_N = \frac{\theta(t)}{(Ht)^{1/3}} \exp\left(\frac{G}{2H} \left(\frac{G^2}{6H} t - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right) - At\right) \text{Ai}\left((Ht)^{-1/3} \left(\frac{G^2 t}{4H} - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right)\right), \quad (36)$$

где

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\left(i\xi x + i \frac{\xi^3}{3}\right) \quad (37)$$

— функция Эйри. Отметим сразу же, что при $H > 0$ имеем $(G^2/6H - B) > 0$, поскольку всегда $G^2 \gg BH$ (G и B содержат только квазилинейные члены, в то время как H содержит дополнительный малый множитель $(W/n_e T_e)$ — см. (31) и (33)). Рассмотрим асимптотику решения (36) при фиксированном времени и энергии $\varepsilon \rightarrow \infty$ (т. е. «на хвосте» распределения частиц). Получаем

$$\mathcal{E}_N \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow \infty]{\theta(t)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (Ht)^{-1/4} \left(\frac{G^2 t}{4H} - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right)^{-1/4} \times \\ \times \left(1 + O\left((Ht)^{1/2} \left(\frac{G^2 t}{4H} - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right)^{-3/2}\right)\right) \exp\left(\frac{G}{2H} \left(\frac{G^2 t}{6H} - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right) - At - \frac{2}{3} (Ht)^{-1/2} \left(\frac{G^2 t}{4H} - Bt + \varepsilon - \varepsilon_0\right)^{3/2}\right) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow \infty]{\theta(t)} \frac{1}{2(\pi^2 H t \varepsilon)^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^{3/2}}{(Ht)^{1/2}}\right). \quad (38)$$

Асимптотику (38) стоит сравнить с фундаментальным решением \mathcal{E}_L оператора диффузии, который для простоты запишем в виде $\partial/\partial t - G\partial^2/\partial z^2$:

$$\mathcal{E}_L = \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi G t}} \exp(-\varepsilon^2/4Gt). \quad (39)$$

Из сравнения (38) и (39) видно, что асимптотика \mathcal{E}_N спадает с ростом $\varepsilon \rightarrow \infty$ медленнее (при фиксированном времени t), чем фундаментальное решение \mathcal{E}_L . Кроме того, отметим, что \mathcal{E}_N как функция от ε имеет максимум, за которым следует экспоненциальный спад — это легко видеть из (38).

Выражение (36) позволяет исследовать и асимптотическое поведение решения при фиксированной энергии и $t \rightarrow +\infty$, т. е. временную эволюцию распределения $\Phi_\varepsilon(t)$ (в момент $t=0$ δ-образного). Основными интересующими нас характеристиками распределения $\Phi_\varepsilon(t)$ будем

считать теперь среднюю энергию $\varepsilon(t)$ (определенную согласно (16)) и значение $\varepsilon_{\max}(t)$, на которое приходится в момент времени t максимум распределения $\Phi_\varepsilon(t)$.

Величины $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_{\max}(t)$ меняются с течением времени под действием «интеграла столкновений», фигурирующего в правой части уравнения (27). Рассмотрим вопрос о том, какой тип временной зависимости $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_{\max}(t)$ порождает каждый член в правой части (27).

Первое слагаемое $A\Phi_\varepsilon$ приводит лишь к экспоненциальному возрастанию либо затуханию (подчеркнем, что ничего страшного в экспоненциальном возрастании в данном случае нет, поскольку мы рассматриваем это слагаемое изолированно от других членов; при учете всех членов никакого экспоненциального возрастания, разумеется, не будет)

распределения Φ_ε , не меняя при этом, естественно, ни ε , ни ε_{\max} . Второе слагаемое $B\partial\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon$ приводит к сдвигу (без искажения формы) по энергии ε распределения Φ_ε как целого со «скоростью» $d\varepsilon/dt=B$; при этом $\varepsilon(t)=\varepsilon(0)+B\cdot t$, $\varepsilon_{\max}(t)=\varepsilon_{\max}(0)+B\cdot t$. Наконец, третье слагаемое $G\partial^2\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon^2$ описывает обычное диффузионное размытие начального распределения, в процессе которого не меняются ни ε , ни ε_{\max} .

Последнее слагаемое в правой части уравнения (27) $H\partial^3\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon^3$ характеризует исследуемый тип нелинейного взаимодействия частиц и волн. Этот член имеет специфический характер и приводит к времененным зависимостям $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_{\max}(t)$, в каком-то смысле промежуточным между «волновым сдвигом» $B\partial\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon$ (меняющим, хотя и тривиальным образом, как ε , так и ε_{\max}) и «диффузией» $G\partial^2\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon^2$ (которая не меняет ни ε , ни ε_{\max} ; кстати, аналогичным образом действуют вообще все четные по оператору дифференцирования $\partial/\partial\varepsilon$ «интегралы столкновений», пропорциональные $\partial^4/\partial\varepsilon^4$, $\partial^6/\partial\varepsilon^6$ и т. д.). А именно, «интеграл столкновений» $(1/2)G\partial^2\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon^2 - (1/3)H\partial^3\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon^3$ (мы ради простоты положили $B=0$ для исключения из рассмотрения «чисто волнового» сдвига ε и ε_{\max} , что можно достичь путем перехода к новой временной переменной $t'=t-\varepsilon/B$, и положили $A=0$, что можно получить переходом к $\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon \exp(-At)$) приводит к неизменной во времени средней энергии ε , в то время как ε_{\max} эволюционирует (как нетрудно получить из выражения (36) для фундаментального решения) при малых временах $t \ll \tau_{\text{cr}}$ (см. (32)) по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max}(t) &= \varepsilon_{\max}(0) + \frac{\lambda_1}{2} \operatorname{sign}(H) G \left(\frac{t}{H^2} \right)^{1/3} = \\ &= \varepsilon_{\max}(0) \left[1 + \frac{\lambda_1}{2} \operatorname{sign}(H) \left(\frac{t}{\tau_{\text{cr}}} \right)^{1/3} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где $\lambda_1 \approx -1$ — точка первого максимума функции Эйри. При больших временах $t \gg \tau_{\text{cr}}$ величина $(\varepsilon_{\max}(t) - \varepsilon_{\max}(0))$ выходит на постоянное асимптотическое значение

$$\varepsilon_{\max}(\infty) = \varepsilon_{\max}(0) - \frac{H}{G} = \varepsilon_{\max}(0) - \operatorname{sign}(H) \varepsilon_0 \left(\frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau_L} \right)^{1/2}. \quad (41)$$

6. В проведенном выше исследовании мы предполагали $H > 0$. Рассмотрим на примере конкретных ситуаций, когда реализуется это предположение. При этом прежде всего следует обсудить вопрос о том, какие волны считать резонансными, а какие — нерезонансными.

В рассматриваемом нами одномерном случае (возможном при $H_0 \rightarrow \infty$, или $\omega_{He(i)} \rightarrow \infty$) из всех возможных циклотронных резонансов

Следует учитывать лишь резонанс с $n = 0$, условие которого записывается в виде

$$\omega - q_z v_z = 0, \quad (42)$$

где ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля H_0 . Для моноэнергетического пучка (движущегося вдоль z), который «появляется» при $t=0$, условие (42) может выполняться для ленгмюровских волн и не выполняться для ионно-звуковых волн. Действительно, в одномерной ситуации закон дисперсии ионно-звуковых волн имеет вид $\omega = |q_z| v_s$, где $v_s = (T_e/m_i)^{1/2}$, и для нарушения условия (42) для этих волн достаточно потребовать $v_0 > m T_e / m_i$ (m — масса рассматриваемых частиц, $m=m_e$ либо $m=m_i$ при исследовании эволюции начальных δ-образных распределений электронов либо ионов), что, как правило, имеет место. Что касается ленгмюровских волн, то их закон дисперсии при $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ имеет вид $\omega = \omega_{pe} |q_z| / |\mathbf{q}|$, что согласно (42) приводит к легко выполнимому условию

$$\omega_{pe} - |\mathbf{q}| v_0 = 0. \quad (43)$$

Итак, примем, что резонансными волнами $|E_{\omega q}|^2$ являются ленгмюровские, а нерезонансным волнам $|E_{\Omega k}|^2$ отвечает ионный звук. Для простоты рассмотрим случай, когда как ленгмюровские волны, так и ионный звук распространяются строго вдоль магнитного поля: $q_\perp = k_\perp = 0$ (что вполне естественно в пределе $\omega_{He} \rightarrow \infty$).

Для резонансных ленгмюровских волн коэффициент D_L квазилинейной диффузии равен

$$D_L(v) = \frac{\pi m_e}{2 n_e} \omega_{pe} (q W_q) \Big|_{q=\omega_{pe}/v} > 0, \quad (43a)$$

где W_q — спектральная плотность энергии этих волн, $W_r = \int dq W_q$. Из этого выражения нетрудно получить

$$D'_L = - \frac{\pi}{2m_e} \frac{\omega_{pe}^2}{v^2} \left(\frac{d}{dq} q W_q \right) \Big|_{q=\omega_{pe}/v}. \quad (44)$$

Для степенных спектров ленгмюровских волн

$$W_q = \text{const } q^\nu \quad (45)$$

получаем

$$D'_L = - \frac{\nu + 1}{p} D_L. \quad (46)$$

Для нерезонансных (ионно-звуковых) волн «нелинейная диффузия» равна ($\Omega \ll kv$)

$$D_N = \frac{e^2}{2v^2} \int d\Omega dk \frac{|E_{\Omega k}|^2}{k^2} > 0, \quad (47)$$

откуда получаем

$$D'_N = - \frac{2}{p} D_N. \quad (48)$$

Окончательно имеем

$$H(\varepsilon) = 12 \frac{e}{m^2} D_L D_N (\nu - 1). \quad (49)$$

Таким образом, коэффициент $H(\varepsilon)$ положителен на возрастающих

(с ростом q) участках спектров резонансных (ленгмюровских) волн W_q . На «плато» и спадающих участках $H < 0$.

7. При $H < 0$ асимптотика (35) имеет знакопеременный вид, а именно

$$\mathcal{E}_N \xrightarrow[\substack{\epsilon \rightarrow \infty \\ H < 0}]{\theta(t)} \frac{\theta(t)}{\sqrt{\pi}} (|H| t \epsilon)^{-1/4} \exp(-G \epsilon / 2 |H|) \cos\left(\frac{2}{3} \frac{\epsilon^{3/2}}{(t |H|)^{1/2}}\right). \quad (50)$$

Сомнительно, конечно, что знакопеременная функция распределения несет какую-либо физическую информацию. Однако помимо осциллирующего члена в (50) присутствует экспоненциальный множитель, так что в некоторых случаях \mathcal{E}_N будет приближена к нулю прежде, чем начнет осциллировать. В самом деле, перепишем (50), введя $\tau_{cr} \equiv H^2/G^3$ и $\tau_N \equiv \epsilon_0^4/|H|$:

$$\mathcal{E}_N \xrightarrow[\substack{\epsilon \rightarrow \infty \\ H < 0}]{\theta(t)} \frac{\theta(t)}{\sqrt{\pi \epsilon_0}} \left(\frac{\epsilon t}{\epsilon_0 \tau_N} \right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\epsilon \tau_N^{1/3}}{2 \epsilon_0 \tau_{cr}^{1/3}}\right) \cos\left(\frac{2}{3} \frac{\epsilon^{3/2} \tau_N^{1/2}}{\epsilon_0^{3/2} t^{1/2}}\right). \quad (51)$$

Из этого уравнения видно, что для больших времен $t \gg \tau_{cr}$ функция \mathcal{E}_N имеет сколько-нибудь значительную величину при постоянном знаке, а осциллировать начинает, лишь приблизившись к нулю за счет экспоненциального множителя. Но на ранних этапах эволюции ($t \ll \tau_{cr}$) эта функция знакопеременна не только при экспоненциально малых значениях. По этому поводу можно сделать два замечания. Во-первых, исследуя асимптотику функции распределения при $\epsilon \rightarrow \infty$, не следует забывать о резонанском характере ленгмюровских (в разобранном в п. 6 настоящей статьи примере) волн. Если считать эти волны резонансными по отношению к частицам с большими энергиями ϵ (по сравнению с T_e), то их длина волны $\lambda = 2\pi v/\omega_{pe}$ ($v = \sqrt{2}\epsilon/m$) также должна быть достаточно большой, что в свою очередь оправдывает рассмотрение нарастающих (с уменьшением λ) спектров турбулентности ($v > 1$), приводя к $H(\epsilon) > 0$, когда асимптотикой фундаментального решения (36) при $\epsilon \rightarrow \infty$ является знакопостоянная функция (38). Во-вторых, не следует забывать и об исходных предположениях, сделанных при исследовании уравнения (27), когда мы положили A, B, G и H постоянными. Это допущение, вполне правомерное при $(\epsilon - \epsilon_0)^2 \sim (\Delta \epsilon)^2$ ($\ll \epsilon_0^2$), может вносить неточности при $(\epsilon - \epsilon_0)^2 \gg \epsilon_0^2$ ($\gg (\Delta \epsilon)^2$), т. е. при исследовании поведения решения при больших ϵ , значительно превышающих ϵ_0 (на величину, много большую среднего разброса $\sqrt{(\Delta \epsilon)^2}$). По крайней мере, можно сказать, что в этом случае начальный пучок разобьется на серию «сгустков» с убывающей (при $\epsilon \rightarrow \infty$) плотностью.

Указанные замечания, однако, не нарушают справедливости утверждения о необходимости учета нелинейного взаимодействия частиц одновременно с резонансными и нерезонансными волнами на «хвостах» распределений (равно как и на малых временах) при решении задачи об эволюции начального распределения типа «пучка» в турбулентной плазме. Кроме того, справедливыми (независимо от знака H) остаются и выводы об эволюции величин $\epsilon(t)$ и $\epsilon_{max}(t)$ в рассмотренной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астрофизика космических лучей / Под ред. В. Л. Гинзбурга. — М.: Наука, 1984.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82; 1962. Дополнение 2. С. 465; D'gumpton W. E., Pines P. // Nucl. Fusion. 1962. Suppl. Part 3. Р. 1049.
3. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. — М.: Атомиздат, 1971.
4. Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 842.
5. Исааков С. Б., Кривицкий В. С., Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90.

С. 933; Кривицкий В. С., Прядко Ю. М., Цытович В. Н. Препринт
ФИАН № 132. М., 1988.

- 6 Krivitsky V S, Vladimirov S. V. Proceed of the XIX Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases — Belgrade: Univ. of Belgrade, 1989. V. I. P 66:
Владимиров С. В., Кривицкий В. С. // Физика плазмы. 1990. Т. 16. С. 599.

Институт общей физики
АН СССР

Поступила в редакцию
25 апреля 1989 г.

STOCHASTIC ACCELERATION OF PARTICLES IN THE PRESENCE OF HIGH-FREQUENCY AND LOW-FREQUENCY PLASMA TURBULENCE

S. V. Vladimirov, V. S. Krivitskij

A general problem is solved of charged particles acceleration due to their simultaneous interaction with resonant and nonresonant waves in a turbulent plasma. An equation describing the temporal change of particles distribution is obtained. A characteristic feature of this equation is its third order of the derivative with respect to the energy (while taking into account only the quasilinear interaction results in the second order of the derivative). The solution of this equation for an initial δ -shaped beam-like distribution is investigated. It is shown that the nonlinear effect considered in the present paper may exceed the quasilinear effect at the initial stage of the beam relaxation and for «the tails» of the particles distribution function. This nonlinear process also provides a shift of the value $\varepsilon_{\max}(t)$ at which the distribution function achieves its maximum at the moment t .

ПЕРЕЧЕНЬ СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛОВ, ПЕРЕИЗДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ В ПОЛНОМ ОБЪЕМЕ

1. Автоматика
2. Автоматика и вычислительная техника
3. Автоматика и телемеханика
4. Автоматическая сварка
5. Автометрия
6. Акустический журнал
7. Астрономический вестник
8. Астрономический журнал
9. Астрофизика
10. Атомная энергия
11. Биология моря
12. Биоорганическая химия
13. Биотехнология
14. Биофизика
15. Биохимия
16. Бюллетень экспериментальной биологии и медицины
17. Вестник машиностроения
18. Вестник ЛГУ. Математика
19. Вестник МГУ. Биология
20. Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика
21. Вестник МГУ. Геология
22. Вестник МГУ. Математика и механика
23. Вестник МГУ. Почвоведение
24. Вестник МГУ. Физика
25. Вестник МГУ. Химия
26. Водные ресурсы
27. Вопросы вирусологии
28. Вопросы ихтиологии
29. Высокомолекулярные соединения. Серия А
30. Гелиотехника
31. Генетика
32. Геология и геофизика
33. Геомагнетизм и аэрономия
34. Геотектоника
35. Геохимия
36. Гидробиологический журнал

(Продолжение см. с. 953)

УДК 533.951

К ТЕОРИИ МАГНИТОКУЛОНОВСКИХ РАДИАЦИОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЗАРЯДОВ

А. В. Акопян

В борновском приближении разработана квазиклассическая теория тормозного излучения, возбужденного электрон-ионным радиационным столкновением при наличии внешнего неквантующего магнитного поля. Получены общие выражения для составляющих углового-частотного распределения интенсивности излучения, позволяющих детально изучить характер данного процесса. Обнаружен эффект магниторелятивистского подавления излучения при сравнительно низких частотах. При высоких частотах излучение подчиняется закону Бете и Гайтлера. Обсуждается вопрос о зависимости степени линейной поляризации излучения от характерных параметров задачи. Показано, что излучение может иметь стопроцентную линейную поляризацию.

1. В лабораторном и астрофизическом условиях одним из основных и распространенных способов испускания электромагнитных волн широкого диапазона является тормозное излучение при кулоновских столкновениях зарядов. Среди разнообразных практических приложений в этом направлении важным становится изучение процессов радиационных столкновений, разыгрываемых при наличии внешнего магнитного поля. В существующих работах по данному вопросу в основном исследовался случай сильного квантующего магнитного поля [1-4]. Изучение вопроса в первую очередь было связано с излучением из компактных астрофизических объектов, в которых существуют магнитные поля большой интенсивности. Помимо этого представляет интерес изучение кулоновских радиационных столкновений в случае классического магнитного поля, когда условие квантования для энергии поперечного движения зарядов не выполняется. Такой процесс назовем магнитокулоновским радиационным столкновением (МКРС) зарядов.

Применительно к таким важным намагниченным излучающим объектам, какими являются пульсары, проявление МКРС-процесса можно трактовать следующим образом. Вблизи поверхности пульсара, где напряженность магнитного поля достигает вплоть до критического значения $B_0 \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс, радиационные столкновения более естественно считать происходящими в квантующем магнитном поле. В пренебрежении кулоновским возбуждением уровней Ландау заряды можно считать находящимися на низшем уровне [5-7]. Тормозное излучение произойдет в основном торможением заряда в продольном направлении вдоль силовых линий магнитного поля [7]. Наряду с этим примем, что часть первичных пробных энергичных электронов и позитронов, рожденных в приполярной области магнитосферы пульсара, из-за синхротронного излучения, быстро высвечивая поперечные степени и двигаясь вдоль внешних силовых линий дипольного магнитного поля, удаляются до больших расстояний от поверхности пульсара. Тогда ввиду того, что напряженность поля значительно ослаблена (обратно пропорционально кубу расстояния), разумно считать поле неквантующим и перейти к классическому рассмотрению. При этом, поскольку плотность пульсарной плазмы также быстро падает с расстоянием, то ее предполагаем разреженной настолько, что не оказывает влияния на МКРС-процесс.

В настоящей работе в квазиклассическом пределе изучается вопрос

о влиянии внешнего магнитного поля на интенсивность и линейную поляризацию излучения при МКРС-процессе в вакууме.

2. Пусть пробный электрон, движущийся с релятивистской скоростью v , импульсом p и энергией ϵ_p вдоль постоянного магнитного поля $B \uparrow z$, сталкивается с хаотически расположенными тяжелыми ионами. Будем считать, что при элементарном акте взаимодействия электрон передает импульс $\hbar q$ и испускает квант с волновым вектором k и частотой ω . В пренебрежении отдачей ионов закон сохранения энергии для элементарного акта излучения.

$$\epsilon_p = \epsilon_{p-\hbar k - \hbar q} + \hbar \omega .$$

Отсюда для интересующего нас квазиклассического случая имеем условие испускания волны

$$\omega - kv = qv . \quad (1)$$

Найдем фурье-образ напряженности электрического поля излучения, пользуясь [8, 9]:

$$E_\omega = \frac{e}{c^2} \frac{1}{(1 - n_k v/c)^3} \left[n_k \left[n_k - \frac{v}{c}, w_\omega \right] \right], \quad (2)$$

где e — заряд электрона, $n_k = k/k$, w_ω — вектор ускорения электрона. Последний находится из уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (rv) = \frac{e}{m} \left(-\nabla \varphi(r) + \frac{1}{c} [vB] \right) . \quad (3)$$

Здесь m — масса покоя электрона, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, $\varphi(r)$ — потенциальное поле, созданное ионами:

$$\varphi(r) = \sum_l \frac{Ze}{|r - r_l|} = 4\pi \sum_l Ze \int \frac{e^{iq(r-r_l)}}{q^2} \frac{dq}{(2\pi)^3}, \quad (4)$$

где Z — зарядовое число ионов, r_l — радиус-вектор l -го иона.

Решим уравнение (3) относительно v в предположении, что столкновения приводят лишь к малому возмущению движения электрона. Положим

$$v = v^{(0)} + v^{(1)}(t) + \dots , \quad (5)$$

$$r = r^{(0)} + r^{(1)}(t) + \dots , \quad r^{(1)}(t) = \int v^{(1)}(t) dt ,$$

где $v^{(0)}$, $r^{(0)}$ — невозмущенные значения скорости и радиуса-вектора ($v^{(0)} \uparrow B$), $v^{(1)}(t)$, $r^{(1)}(t)$ — их возмущения, так что

$$v^{(1)} \ll v^{(0)} . \quad (6)$$

Из (3) — (6) в первом приближении для фурье-образа возмущения скорости получим (опуская в дальнейшем индекс «0» у $v^{(0)}$ и $r^{(0)}$)

$$v_\omega^{(1)}(q) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{m\gamma} \sum_l \frac{Ze^{iq(r-r_l)}}{q^2} \frac{qv}{(qv)^2 - \omega_B^2} \times$$

$$(7)$$

$$\times \left\{ q - \frac{v}{c^2} (qv) - \frac{\omega_B^2}{(qv)^2} n \left(nq - \frac{(nv)(qv)}{c^2} \right) + i \frac{\omega_B}{qv} [nq] \right\} \delta(\omega - kv - qv) ,$$

где $n = B/B$, $\omega_B = eB/mc\gamma$ — циклотронная частота. Содержащееся под δ -функцией выражение есть не что иное, как закон сохранения

в (1). Выражения (5) — (7) совместно описывают закон магнитокулоновского дрейфа излучающего электрона.

Приобретенное электроном ускорение в первом приближении есть

$$w_{\omega}^{(1)}(q) = i(qv)v_{\omega}^{(1)}(q). \quad (8)$$

Из (6) и (7) приходим к выводу, что имеет место следующее условие применимости борновского приближения в магнитном поле:

$$\frac{Ze^3}{\hbar v} \ll \frac{2}{\omega_B} |\omega - kv - \omega_B| \ll 1, \quad (9)$$

справедливое при $\omega - kv \approx \omega_B$.

Для изучения поляризации излучения представим вектор напряженности электрического поля в виде суммы:

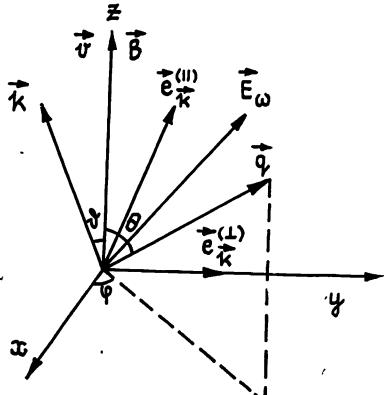


Рис. 1.

$E_{\omega} = e_k^{(\perp)} E_{\omega \perp} + e_k^{(\parallel)} E_{\omega \parallel}$,
 $E_{\omega \perp} = e_k^{(\perp)} E_{\omega}$, $E_{\omega \parallel} = e_k^{(\parallel)} E_{\omega}$,
где $e_k^{(\perp)} = [vn_k]/v$, $e_k^{(\parallel)} = [n_k e_k^{(\perp)}]$ — единичные векторы поляризации, соответственно нормальный и параллельный плоскости излучения (v, n_k) (см. рис. 1). Из (2), (7) и (8) получим

$$E_{\omega \perp}(q) = \frac{i}{\pi} \frac{e^3}{m\gamma c^2} \sum_l \frac{Ze^{iq(r-r_l)}}{q} \times \times \frac{\sin \theta (1 - (v/c) \cos \vartheta)}{(1 - (v/c) \cos \vartheta)^2 - \omega_B^2/\omega^2} \times \quad (10)$$

$$\times \left(\sin \varphi - i \frac{\omega_B}{\omega} \frac{\cos \varphi}{1 - (v/c) \cos \vartheta} \right) \delta(\omega - kv - qv);$$

$$E_{\omega \parallel}(q) = \pm \frac{i}{\pi} \frac{e^3}{m\gamma c^2} \sum_l \frac{Ze^{iq(r-r_l)}}{q} \left[\frac{\sin \theta (v/c - \cos \vartheta)}{(1 - (v/c) \cos \vartheta)^2 - \omega_B^2/\omega^2} \times \times \left(\cos \varphi + i \frac{\omega_B}{\omega} \frac{\sin \varphi}{1 - (v/c) \cos \vartheta} \right) + \frac{\omega \sin \vartheta}{qv\gamma^2(1 - (v/c) \cos \vartheta)} \right] \delta(\omega - kv - qv). \quad (11)$$

Здесь ϑ — угол излучения между векторами v и k ; θ, φ — сферические углы, определяющие направление вектора q . Отметим, что компонент поля (10) вызван ускорением электрона в поперечном по отношению к магнитному полю направлении, тогда как компонент в (11) — ускорением как в поперечном (член, пропорциональный γ^{-1}), так и в продольном (член, пропорциональный γ^{-3}) направлениях.

3. Найдем составляющие углового-частотного распределения интенсивности излучения за единицу времени из единицы объема согласно формуле

$$\frac{dJ_{\alpha}(\omega, \Omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{(2\pi)^2} \int |E_{\omega, \alpha}|^2 dq, \quad (12)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла излучения, $\alpha = \parallel, \perp$. Подставляя (10) и (11) в (12), получим для соответствующих поляризаций

$$\frac{dJ_{\perp}(\omega, \Omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{A}{\gamma^2} \frac{(1 - \beta x)^2 + \xi^2}{((1 - \beta x)^2 - \xi^2)^2} \ln \frac{vq_0}{\varphi(1 - \beta x)}; \quad (13)$$

$$\frac{dJ_{\parallel}(\omega, \Omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{A}{\gamma^2} \frac{1}{(1-\beta x)^2} \left[(\beta - x)^2 \frac{(1-\beta x)^2 + \xi^2}{((1-\beta x)^2 - \xi^2)^2} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{vq_0}{\omega(1-\beta x)} + \frac{1-x^2}{\gamma^4(1-\beta x)^2} \right], \quad (14)$$

$$x = \cos \vartheta, \quad \beta = v/c, \quad \xi = \omega_B/\omega, \quad A = Z^2 n_0 r_e^3 m c^2 / 2\pi\beta,$$

где n_0 — плотность ионов, r_e — классический радиус электрона, q_0 — наибольший импульс отдачи: $q_0 \gg q_{\min} = (\omega/v)(1-\beta x)$. При получении (13) и (14) проведено усреднение по положениям ионов, а также квадрат δ -функции заменен через первую степень согласно [10]. Излучение трактовалось как процесс, при котором виртуальные кванты с «частотой» qv , рассеиваясь на дрейфующем электроне, переходят в реальные.

Перейдем к изучению предельных значений скоростей.

1) *Нерелятивистский случай: $v \ll c$.* Из (13) и (14)

$$\frac{dJ_{\perp}(\omega, \Omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{A(1+\xi^2)}{(1-\xi^2)^2} \ln \frac{vq_0}{\omega}; \quad (15)$$

$$\frac{dJ_{\parallel}(\omega, \Omega)}{d\omega d\Omega} = A \left[\frac{(1+\xi^2)x^2}{(1-\xi^2)^2} \ln \frac{vq_0}{\omega} + (1-x^2) \right]. \quad (16)$$

При высоких частотах $\omega \gg \omega_B$, когда можно пренебречь влиянием магнитного поля, ускорения нерелятивистского электрона в продольном и поперечном направлениях вносят одинаковые вклады в излучение. Проинтегрировав тогда в (15) и (16) по всему телесному углу и просуммировав вместе полученные результаты, приняв $q_0 = mv/\hbar$, мы перейдем к формуле Бете и Гайтлера для спектральной интенсивности [10, 11]. При низких же частотах $\omega \ll \omega_B$ $dJ_{\perp}(\omega)/d\omega \sim \omega^2/\omega_B^2 \rightarrow 0$, т. е. магнитное поле подавляет излучение, поляризованное в плоскости, перпендикулярной плоскости излучения. По такому же закону стремится к нулю часть интенсивности $dJ_{\parallel}(\omega)/d\omega$, обусловленная поперечным компонентом ускорения. Не подавленное магнитным полем излучение вызывается ускорением электрона в продольном направлении. Соответствующая этому спектральная интенсивность уже не подчиняется закону Бете и Гайтлера. Полезно отметить, что в [12] квантomeханическим путем также доказана неприменимость закона Бете и Гайтлера в области сильного магнитного поля.

Из (9), (15) и (16) следует, что в диапазоне частот $\frac{Z}{137} \frac{c}{v} \ll \ll 2 \left| 1 - \frac{\omega_B}{\omega} \right| \ll 1$ значения интенсивностей обеих поляризаций сверху будут ограничены величиной $2 \cdot 137^2 r_e^3 n_0 \frac{c}{v} m c^2 \ln \frac{mv}{\hbar\omega}$, так что в указанном диапазоне можно ожидать значительное возрастание уровня интенсивностей.

2). *Ультрапрелятивистский случай: $v \sim c$, $\gamma \gg 1$.* Рассмотрим следующие области значений частот и углов излучения.

а) Область

$$1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \gg \frac{\omega_B}{\omega}. \quad (17)$$

В этом случае, когда снова можно пренебречь влиянием магнитного поля, излучения обеих поляризаций сосредоточены главным образом внутри ориентированного вдоль \vec{v} конуса направленности с узким углом раствора $\vartheta \sim \gamma^{-1}$. Из (13), (14) и (17) для волн из области высоких

ких частот

$$2\gamma^2\omega_B \ll \omega \ll \frac{mc^2\gamma}{\hbar} \quad (18)$$

получим

$$\frac{dJ_{\perp}(\omega, \vartheta)}{d\omega d\vartheta} = \frac{4Z^2 n_0 r_e^3 m c^2}{\gamma^3} \frac{\vartheta}{(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^2} \ln \frac{2\gamma^2 q_0 c}{\omega}; \quad (19)$$

$$\frac{dJ_{\parallel}(\omega, \vartheta)}{d\omega d\vartheta} = \frac{4Z^2 n_0 r_e^3 m c^2}{\gamma^2} \frac{\vartheta (\vartheta^2 - \gamma^{-2})^2}{(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^4} \ln \frac{2\gamma^2 q_0 c}{\omega}. \quad (20)$$

Эти интенсивности обусловлены ускорением электрона в поперечном направлении. Вклад продольного компонента ускорения в излучение в γ^{-2} раз меньше. Из (19) и (20) проинтегрированные по всем углам излучения интенсивности будут

$$\frac{dJ_{\perp}(\omega)}{d\omega} = 2Z^2 n_0 r_e^3 m c^2 \ln \frac{2\gamma^2 c q_0}{\omega}, \quad \frac{dJ_{\parallel}(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{3} \frac{dJ_{\perp}(\omega)}{d\omega}. \quad (21)$$

Складывая вместе выражения в (21) и подбирая, следяя [10, 11], $q_0 = mc/\hbar$, мы снова перейдем к формуле Бете и Гайтлера, согласно которой интенсивность зависит от частоты и квадрата энергии логарифмически.

б) Область

$$1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \ll \frac{\omega_B}{\omega}. \quad (22)$$

В этой области проявляется сильное влияние магнитного поля на излучение. Из (13) и (22) следует, что

$$\frac{dJ_{\perp}(\omega)}{d\omega} \sim \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2, \quad (23)$$

т. е. имеет место сильное магниторелятивистское подавление излучения, поляризованного в плоскости, перпендикулярной плоскости (k, v). Излучение по углам распределено почти изотропно. Обратимся теперь к поляризованному в плоскости (k, v) излучению. Из (14) видно, что выпущенное вне конуса направленности излучение тоже подвергается сильному магниторелятивистскому подавлению по закону в (23). Основной же вклад получается от излучения в спектре частот

$$\omega \ll 2\gamma^2\omega_B, \quad (24)$$

концентрированного внутри конуса направленности с углом раствора $\vartheta \sim \gamma^{-1}$. Из (14) и (24)

$$\frac{dJ_{\parallel}(\omega, \vartheta)}{d\omega d\vartheta} = \frac{16Z^2 n_0 r_e^3 m c^2}{\gamma^6} \frac{\vartheta^3}{(\vartheta^2 + \gamma^{-2})^4}. \quad (25)$$

В отличие от (20) интенсивность в (25) обусловлена ускорением электрона вдоль магнитного поля и поэтому не подавлена им. В направлении движения излучение отсутствует. Полученная из (25) спектральная интенсивность

$$\frac{dJ_{\parallel}(\omega)}{d\omega} = \frac{4}{3} \frac{Z^2 n_0 r_e^3 m c^2}{\gamma^2} \quad (26)$$

постоянна в области спектра (24) и, что главное, подвержена релятивистскому подавлению,

Особый интерес представляет излучение, испускаемое внутри конуса направленности, вблизи резонансной частоты $\omega \approx 2\gamma^2\omega_B$. Как следует из (9), (13) и (14), в узком интервале частот

$$\frac{Z}{137} \ll 2 \left| 1 - \frac{2\gamma^2\omega_B}{\omega(1 + \gamma^2\theta^2)^2} \right| \ll 1 \quad (27)$$

уровни интенсивностей обеих поляризаций сверху ограничены величиной

$$\frac{dJ(\omega)}{d\omega} = 2 \cdot 137^2 n_0 r_e^3 m c^3 \ln \frac{2\gamma^2 m c^2}{\hbar \omega}. \quad (28)$$

Таким образом, вблизи характерной частоты $\omega \approx 2\gamma^2\omega_B$ можно ожидать значительное превышение интенсивности направленного излучения над задаваемой по бете-гайтлеровскому закону. Данная особенность может представлять интерес для практической цели.

Из полученных результатов заключаем, что в ультрарелятивистском пределе классическая формула Бете и Гайтлера для намагниченного вакуума применима только для области высоких частот $\omega \gg 2\gamma^2\omega_B$, и, согласно (18), при магнитных полях $B \ll (1/2)B_0$. Обнаруженный здесь эффект релятивистского и магниторелятивистского подавления интенсивностей при сравнительно низких частотах является одной из наиболее характерных особенностей данного излучения и играет существенную роль в распределении энергии по спектру частот.

4. Магнитное поле, управляя возмущением движения электрона, тем самым влияет на поляризацию излучения. Здесь вкратце обсудим свойства линейной поляризуемости. Введем степень линейной поляризации

$$\eta = \frac{\int [|\mathbf{E}_{\omega \perp}|^2 - |\mathbf{E}_{\omega \parallel}|^2] dq}{\int [|\mathbf{E}_{\omega \perp}|^2 + |\mathbf{E}_{\omega \parallel}|^2] dq}, \quad (29)$$

позволяющую нам исследовать поляризацию в разных ее аспектах. В нерелятивистском пределе из (10), (11) и (29)

$$\eta = \sin^2 \theta \frac{(1 + \omega_B^2/\omega^2) \ln(mv^2/\hbar\omega) - (1 - \omega_B^2/\omega^2)^2}{(1 + \omega_B^2/\omega^2)(1 + \cos^2 \theta) \ln(mv^2/\hbar\omega) + (1 - \omega_B^2/\omega^2)^2}. \quad (30)$$

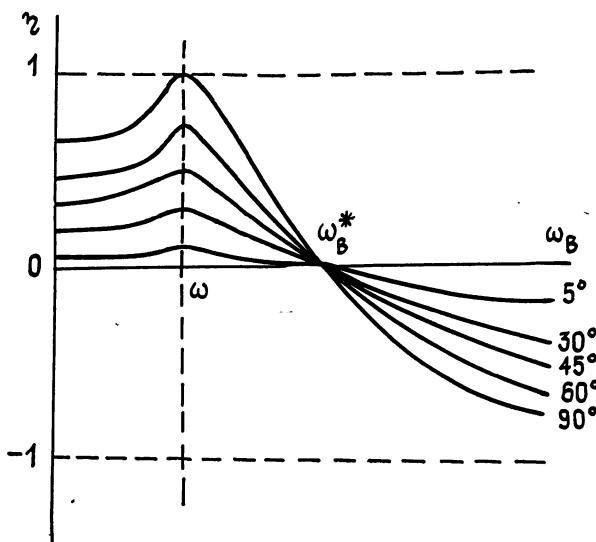


Рис. 2.

При $\omega_B \ll \omega$ волны всегда поляризованы преимущественно перпендикулярно плоскости излучения [13]. Представляет интерес выявление зависимости степени поляризации волны заданной частоты от магнитного поля, угла излучения и энергии электрона. На рис. 2 приводится графическое изображение такой зависимости при разных значениях угла излучения, где принято $\ln = 2$. Видно, что с возрастанием напряженности магнитного поля меняются как величина, так и знак степени поляризации. В пределе $\omega_B \gg \omega$ волны стремятся к 100%-ной поляризованности в плоскости излучения. Степень поляризации достигает максимального значения при $\omega_B = \omega$ и проходит через нуль независимо от угла излучения при $\omega_B \approx 2,1\omega$. С уменьшением угла излучения поляризованность ослабляется.

Анализ показывает, что с возрастанием энергии электрона общая точка пересечения кривых с осью абсцисс, где исчезает поляризация, перемещается вправо, а точки пересечения кривых с осью ординат перемещаются вверх. Таким образом, с увеличением энергии зависимость степени поляризации от магнитного поля становится более плавной.

В ультраквантитативистском пределе из (10), (11) и (29) для волн из области высоких частот (18) получим

$$\eta = \frac{2\gamma^2 \gamma^2}{1 + \gamma^4 \delta^4}. \quad (31)$$

Внутри конуса направленности волны имеют положительную поляризацию, причем для волн, излученных вдоль границы поверхности конуса, степень поляризации достигает 100%. В диапазоне низких частот (24), согласно результатам в (23) и (25), волны полностью поляризованы в плоскости излучения. Вблизи же характерной частоты $\omega = 2\gamma^2 \omega_B$ выпущенные вне конуса направленности волны почти не поляризованы, тогда как внутри конуса волны поляризованы положительно, со степенью поляризации в (31). Таким образом, в разных областях углов, энергий и частот магнитное поле существенно меняет характер линейной поляризации.

5. Как показано выше, в зависимости от значения магнитного поля описывающие МКРС-процесс основные величины имеют различные свойства. Наиболее важные для данного процесса — это магнитное, релятивистское и магниторелятивистское подавления интенсивности в определенных областях спектра, а также эффективная зависимость линейной поляризации от магнитного поля и энергии. В этих отношениях наше излучение выгодно отличается от синхротронного (циклотронного) излучения. И, вообще говоря, рассматриваемое излучение не сопровождается синхротронным излучением, хотя в ходе столкновений образуется перпендикулярный к магнитному полю компонент скорости. Последний приводит к переменному магнитокулоновскому дрейфу, а волны излучаются за счет энергии поступательного движения электрона.

Полученные результаты определенным образом удовлетворяют условиям, свойственным излучению пульсаров: образование провала в спектрах, направленность излучения и высокая степень линейной поляризации [14]. Так, например, можно предполагать, что провал связан с подавлением интенсивности излучения в области частот, ниже частоты $2\gamma^2 \omega_B$. Пусть, для иллюстрации, на поверхности пульсара $B \sim 10^{12}$ Гс. Рассмотрим излучение, возбужденное электроном энергии $\sim 10^8$ эВ на расстоянии $\sim 10^8$ r от пульсара, где r — радиус пульсара. Согласно (28) и (31) вблизи частоты $\omega \approx 2\gamma^2 \omega_B \sim 2 \cdot 10^{11}$ Гц возбуждается | направленное тормозное излучение значительной интенсивности, поляризованное преимущественно в плоскости, перпендикулярной плоскости излучения.

В заключение отметим, что полученные здесь результаты можно применить к разным практическим приложениям магнитоуправляемого тормозного излучения зарядами произвольных энергий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chiu H. Y., Caputo V., Fassio-Caputo L. // Phys. Rev. 1969. V. 185. P. 1607.
2. Chiu H. Y., Caputo V. // Astrophys. J. 1971. V. 163. P. 577.
3. Virtamo J., Jaupo P. // Appl. J. 1973. V. 182. P. 935.
4. Сазонов В. Н., Туганов В. Ф. // Изв. вузов. Радиофизика., 1975. Т. 18. № 2. С. 165.
5. Бескин В. С., Гуревич А. В., Истомин Я. Н. // УФН. 1986. Т. 150. № 2. С. 257.
6. Железняков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 2. С. 144.
7. Акопян А. В., Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. Вып. 5. С. 1824.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.
9. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир. 1965.
10. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969.
11. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1980.
12. Лоскутов Ю. М., Скоблев В. В. // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия. 1975. Т. 16. № 6. С. 721.
13. Корчак А. А. // ДАН СССР. 1967. Т. 173. № 2. С. 291.
14. Манчестер В., Тейлор Дж. Пульсыры. — М.: Мир. 1980.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила в редакцию
21 апреля 1989 г.

TO THE THEORY OF MAGNETIC-COULOMB RADIATIONAL COLLISIONS OF CHARGED PARTICLES

A. V. Akopyan

Quasi-classical theory in Born approximation is developed for bremsstrahlung, which is excited by the electron-ion radiational collisions in the external non-quantizing magnetic field. The general expressions for components of angular-frequency distribution of radiation intensity are obtained, which makes possible to investigate in detail the character of that process. The effect of magneto-relativistic suppression of radiation at low frequencies is found. At high frequencies the radiation is subject to the Bethe-Heitler law.

The aspect of linear polarization degree dependence on characteristic parameters of the problem is discussed. It is shown that radiation may have 100% linear polarization.

УДК 535.14

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СЖАТОГО СВЕТА: ДИФРАКЦИОННЫЕ И ДИСПЕРСИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

A. B. Белинский, A. C. Чиркин

Рассмотрена задача о параметрической генерации квантовых сжатых состояний света в поле пространственно ограниченной или импульсной классической накачки. Развита теория, позволяющая получить приближенное аналитическое решение, справедливое в приосевой области взаимодействующих пучков (импульсов) на начальном этапе усиления. Установлено, что дифракционное и дисперсионное расплывание усиливающейся волны приводит к появлению фазового набега и снижению эффективности сжатия.

Параметрические процессы являются одним из наиболее эффективных способов генерации сжатых состояний световых волн [1], чему имеется уже не одно экспериментальное подтверждение (см., например, тематический выпуск [2]). Однако достигнутое к настоящему времени снижение шумов фотoreегистрации ниже уровня дробового шума, являющееся, пожалуй, наиболее привлекательным свойством сжатых состояний, не превышает нескольких десятков процентов [2]. Вместе с тем, для использования сжатых световых полей в различных приложениях, например для увереной регистрации гравитационных волн [3], достигнутые значения сжатия явно малы. Поэтому задача создания источников сжатого света для разнообразных применений по-прежнему остается актуальной.

Повышение эффективности параметрического взаимодействия волн и, следовательно, сжатия усиливающей волны может, очевидно, достигаться либо при помощи фокусировки накачки, либо использованием в качестве накачки мощных сверхкоротких световых импульсов. В таких ситуациях необходимым становится учет соответственно дифракционных эффектов и дисперсионных свойств среды. Выполненные в этом направлении работы [4, 5] не решают проблему полностью. Так, в [4] проанализировано влияние пространственной неоднородности накачки на эффективность сжатия лишь на самом начальном этапе взаимодействия. Что же касается генерации импульсов сжатого света, то их рассмотрение проведено без учета дисперсии нелинейной среды [5].

Следует отметить, что в случае параметрического усиления регулярных пучков и импульсов учет дифракции и дисперсии среды произведен в [6, 7], где представлены результаты численного расчета. Однако когда речь идет о генерации сжатого света, необходимо принимать во внимание квантовые флуктуации. Таким образом, расчет приобретает статистический характер. В этом случае желательно оперировать аналитическими результатами, из которых проще получать статистические характеристики процесса.

Предметом настоящей работы является анализ генерации сжатых состояний, основанный на подходе, позволяющем учет дифракционных или дисперсионных эффектов свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. При этом сравнительно несложно проанализировать поведение флуктуаций квадратурных компонент сжатого света.

Рассмотрим вначале роль дифракционных эффектов, обусловленных поперечной пространственной ограниченностью пучка накачки. Про-

цесс вырожденного коллинеарного параметрического усиления будем описывать в приближении заданной классической недифрагирующей накачки (цилиндрический усиливающий канал). При этом

$$\frac{\partial E^{(+)}(\rho, z)}{\partial z} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E^{(+)}(\rho, z) = \beta(\rho) E^{(-)}(\rho, z), \quad (1)$$

где $E^{(+)}(\rho, z)$ и $E^{(-)}(\rho, z)$ — медленно меняющиеся операторы положительно-частотной и отрицательно-частотной частей оператора электрического поля, k — волновое число сигнальной волны (рассматриваем взаимодействие монохроматических волн), излучение распространяется в положительном направлении оси z , а вектор ρ перпендикулярен ей, коэффициент $\beta(\rho)$ определяется нелинейными свойствами среды, амплитудой и профилем накачки.

Заменим операторы $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ в (1) соответственно на $E^{(+)}e^{i\varphi}$ и $E^{(-)}e^{-i\varphi}$, где $\varphi(\rho, z)$ — выбираемая определенным образом действительная фазовая функция (см. ниже). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^{(+)}}{\partial z} + iE^{(+)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E^{(+)} + \frac{E^{(+)}}{2k} \Delta_{\perp} \varphi + \frac{iE^{(+)}}{2k} \operatorname{grad}^2 \varphi + \\ + \frac{1}{k} \operatorname{grad} E^{(+)} \operatorname{grad} \varphi = \beta E^{(-)} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Прибавим и вычтем из (2) соответствующее эрмитово-сопряженное уравнение. Полагая $\beta(\rho)$ действительной положительной функцией (переход к комплексному β ведет лишь к изменению начального значения φ), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial z} - X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\Delta_{\perp} X_2}{2k} + \frac{X_1}{2k} \Delta_{\perp} \varphi - \frac{X_2}{2k} \operatorname{grad}^2 \varphi + \\ + k^{-1} \operatorname{grad} X_1 \operatorname{grad} \varphi = \beta (X_1 \cos 2\varphi - X_2 \sin 2\varphi); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial z} + X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\Delta_{\perp} X_1}{2k} + \frac{X_2}{2k} \Delta_{\perp} \varphi + \frac{X_1}{2k} \operatorname{grad}^2 \varphi + \\ + k^{-1} \operatorname{grad} X_2 \operatorname{grad} \varphi = -\beta (X_2 \cos 2\varphi + X_1 \sin 2\varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_1 = (E^{(+)} + E^{(-)})/2$, а $X_2 = (E^{(+)} - E^{(-)})/i2$ — квадратурные компоненты.

Выберем фазу $\varphi(\rho, z)$ так, чтобы она учитывала взаимное влияние квадратурных компонент. При этом система сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial z} + \frac{X_1}{2k} \Delta_{\perp} \varphi + k^{-1} \operatorname{grad} X_1 \operatorname{grad} \varphi = \beta X_1 \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial X_2}{\partial z} + \frac{X_2}{2k} \Delta_{\perp} \varphi + k^{-1} \operatorname{grad} X_2 \operatorname{grad} \varphi = -\beta X_2 \cos 2\varphi; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\Delta_{\perp} X_2}{2k} + \frac{X_2}{2k} \operatorname{grad}^2 \varphi = \beta X_2 \sin 2\varphi, \\ X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\Delta_{\perp} X_1}{2k} + \frac{X_1}{2k} \operatorname{grad}^2 \varphi = -\beta X_1 \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Последняя система уравнений не является переопределенной, поскольку замена X_1 на X_2 соответствует изменению φ на $\pi/2$. Это позво-

Ляется ограничиться анализом только двух уравнений, например, для X_1 .

Ограничим далее наше рассмотрение приосевой областью ($\rho \approx 0$), полагая $\beta(\rho)$ и $\varphi(\rho, z)$ гладкими осесимметричными функциями. При этом $\text{grad } \varphi|_{\rho \sim 0} \approx 0$.

Основной практический интерес представляют, естественно, значительные коэффициенты сжатия световых полей (большие инкременты усиления), что возможно при условии превышения дифракционной длины характерной нелинейной длины. В этом случае роль вторых слагаемых в (5) несущественна. Строго говоря, ими можно пренебречь при

$$|\Delta_{\perp} \varphi| \ll 2k\beta |\cos 2\varphi|, \quad (7)$$

вследствие чего, как будет показано ниже, возникает ограничение на длину взаимодействия.

При сделанных предположениях решением (5) является

$$X_{1,2}(\rho, z) = X_{1,2}(\rho, 0) \exp(\pm \Gamma), \quad \Gamma = \beta \int_0^z \cos 2\varphi dz, \quad (8)$$

где верхний знак соответствует индексу «1», а фаза φ определяется из уравнения*

$$\frac{d\varphi}{dz} - \left(\frac{\Delta_{\perp} \beta}{2k} \right) \int_0^z \cos 2\varphi dz + \beta \sin 2\varphi = 0. \quad (9)$$

Отметим, что выбранная таким образом $\varphi(\rho, z)$ обеспечивает максимальное различие в усиении квадратурных компонент, т. е. оптимальное сжатие, если на входе фаза $\varphi|_{z=0} = 0$ и согласно (9) $\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=0} = 0$. При этом в соответствии с (7) необходимо потребовать

$$|\varphi| < \pi/4. \quad (10)$$

Из (9) нетрудно получить

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\beta \cos 2\varphi \frac{d\varphi}{dz} - \frac{\Delta_{\perp} \beta}{2k} \cos 2\varphi = 0. \quad (11)$$

Анализ уравнений (10) и (11) позволяет заключить, что $\varphi(\rho, z)$ — периодическая функция по z с точками перегиба при $\varphi = \pi/4 + \pi m/2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и достигающая экстремальных значений при $\varphi = \pi m/2$. Введением замены $p = d\varphi/dz$, $q = \sin 2\varphi$ выражение (11) сводится к виду

$$p \frac{dp}{dq} + \beta p - \frac{\Delta_{\perp} \beta}{4k\beta} = 0 \quad (12)$$

с решением

$$q = \beta^{-1} \left[\ln \left(1 - \frac{4kp\beta}{\Delta_{\perp} \beta} \right) - p \right] \quad (13)$$

или, после обратной подстановки,

$$\frac{d\varphi}{dz} + \frac{\Delta_{\perp} \beta}{4k\beta} \ln \left(1 - \frac{4kp\beta}{\Delta_{\perp} \beta} \frac{d\varphi}{dz} \right) + \beta \sin 2\varphi = 0. \quad (14)$$

* Здесь для придания наглядности рассмотрению мы положили, что на входе имеется лишь одна плоская волна, находящаяся в вакуумном или когерентном состоянии, т. е. $\Delta_{\perp} X_{1,2}(\rho, 0) = 0$. Такое упрощение позволит рассмотреть влияние неоднородности профиля накачки в чистом виде. Эффекты, связанные с многомодовостью излучения на входе, рассмотрены в [10].

Найти аналитическое решение (14) не представляется возможным. Вместе с тем на интересующем нас интервале (10) справедливо приближение

$$\varphi \simeq (e^{-2\beta z} + 2\beta z - 1) \Delta_{\perp} \beta / 8\beta^2 k. \quad (15)$$

На рис. 1 представлены зависимости фазы 2φ и инкремента Γ от длины взаимодействия βz , построенные для центра пучка при гауссовом профиле накачки радиусом R , т. е. $\Delta_{\perp} \beta|_{\rho=0} = -4\beta_0/R^2$, $\beta_0 = \beta(0)$. Сплошные линии соответствуют численному решению (9), а штриховые — приближению (15) (кривая 1 — $\beta_0 k R^2 = 1$, кривая 2 — $\beta_0 k R^2 = 4$). Видно, что на интервале $|\varphi| < \pi/4$ эти кривые практически совпадают.

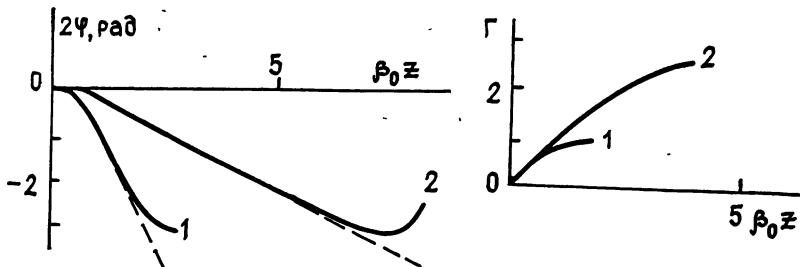


Рис. 1.

Дифракция вызывает снижение инкремента усиления Γ по сравнению с геометрооптическим приближением $\beta_0 z$. Это приводит к уменьшению эффективности сжатия, поскольку дисперсия флуктуаций подавляемой квадратуры

$$\langle \Delta X_2^2(z) \rangle = \langle \Delta X_2^2(z=0) \rangle \exp(-2\Gamma), \quad (16)$$

где $\langle \Delta X_2^2 \rangle = \langle X_2^2 \rangle - \langle X_2 \rangle^2$, а квантовое усреднение производится по исходному состоянию входной волны (когерентному или вакуумному).

Несмотря на заметный рост фазы, дисперсия квадратурных компонент и инкремент меняются сравнительно мало по отношению к геометрооптическому приближению. Это связано с тем, что выбранная нами функция $\varphi(\rho, z)$ является оптимальной в каждом сечении z с точки зрения минимизации квадратуры X_2 и ее флуктуаций.

Подстановка (15) в (7) дает наглядные условия применимости нашего подхода. Например, при $\beta z \gg 1$ $|\Delta_{\perp} \varphi|_{\rho=0} = 4z/kR^4$ и

$$z < \frac{\beta_0}{2} (kR^2)^2 \cos 2\varphi < \frac{1}{8} \beta_0 D^2, \quad (17)$$

где $D = 2kR^2$ — дифракционная длина пучка накачки.

Однако выполнение условия (17) не является достаточным, так как существует еще и ограничение (10). Подстановка (15) в (10) при $\beta z \gg 1$ дает

$$z < \pi D/8. \quad (18)$$

Таким образом, изложенное рассмотрение справедливо при одновременном выполнении (17) и (18), т. е. на начальном этапе усиления.

Обратимся теперь к вопросу о роли дисперсионного расплывания сигнала в поле заданной импульсной накачки (рассматриваем взаимодействие плоских волн). В случае нераспивающегося импульса накачки и выполнения группового синхронизма рассматриваемый процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial E^{(+)}(\tau, z)}{\partial z} - \frac{i}{2} k'' \frac{\partial^2 E^{(+)}(\tau, z)}{\partial \tau^2} = \beta(\tau) E^{(-)}(\tau, z), \quad (19)$$

где время $\tau = t - z/u$, u — групповая скорость, $k'' = (\partial/\partial\omega)(u^{-1})$ — дисперсия групповой скорости.

В силу пространственно-временной аналогии [8] уравнения (1) и (18) сходны. Аналогом $(k'')^{-1}$ является волновое число k , а времени τ — расстояние в поперечном сечении ρ . Это позволяет воспользоваться полученными выше результатами. Некоторое отличие возникает лишь из-за различной размерности одномерного τ и двумерного ρ . Это проявляется в том, что аналогом радиуса R во временной задаче является $T/\sqrt{2}$, где T — длительность гауссова импульса накачки. Следовательно, все полученные зависимости, в том числе и кривые на рисунке, переносятся на временную задачу. При этом кривые 1 и 2 соответствуют $\beta_0 T^2 / 2 |k''| = 1$ и 4. Отметим, что для сред с нормальной дисперсией $k'' > 0$ и знак ф следует изменить на противоположный.

Таким образом, дисперсионное расплывание усиливаемой волны, как и дифракция, приводит к снижению эффективности сжатия. Подчеркнем, что пренебрежение дисперсионным расплыванием импульса накачки физически оправдано тем, что дисперсия групповой скорости накачки может быть существенно меньше дисперсии сигнальной волны [9].

В заключение отметим, что развитую теорию можно использовать и для анализа параметрического усиления не только квантовых, но и классических шумовых сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

- Смирнов Д. Ф., Трошин А. С. // УФН. 1987. Т. 153. С. 233.
- Squeezed States of the Electromagnetic Field. // J. Opt. Soc. Am. B. 1987. V. 4. № 10.
- Caves C. M. // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 1693.
- Белинский А. В., Чиркин А. С. // Тезисы докл. 13 Международной конф. по когерентной и нелинейной оптике. — Минск, 1988. Ч. 1. С. 107.
- Yurke B., Grangier P., Slusher R. E., Potasek M. J. // Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 3586.
- Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 834.
- Василяускас В., Стабинис А. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. С. 1881.
- Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
- Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
- Ахманов С. А., Белинский А. В., Чиркин А. С. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. С. 873.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 мая 1988 г.,
в окончательном варианте
28 ноября 1989 г.

PARAMETRIC GENERATION OF SQUEEZED LIGHT: DIFFRACTIVE AND DISPERSIVE PHENOMENA

A. V. Belinskij, A. S. Chirkin

A problem of light quantum squeezed parametric generation has been considered in the case of spatial limited or impulse classical pump. The theory has been developed which provides obtaining the analytical solution in the paraxial region of interaction beams (or pulses) at the beginning of amplification. It has been established that the signal beam diffractive and dispersive spreading causes an additional phase shift and squeezing degradation.

УДК 537.874.4.01

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ИСКУССТВЕННО-АНИЗОТРОПНЫМ СЛОЕМ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

И. В. Боровский, О. Г. Гамуля, Н. А. Хижняк

В работе получено и исследовано решение задачи рассеяния на бесконечном искусственно-анизотропном слое, образованном частыми, периодически повторяющимися ячейками, состоящими из двух плотно уложенных брусьев прямоугольной формы. Брусья выполнены из магнитодизлектрика, диэлектрика или металла. В рамках единого метода решения задачи рассеяния для слоя из магнитодиэлектрических брусьев построен алгоритм решения и получено описание рассеянных полей для всех возможных колебаний. Проведено численное и аналитическое исследование полученных выражений.

Актуальность теоретического анализа электродинамических характеристик искусственно-анизотропных материалов обусловлена их широким применением при конструировании элементов антенно-волноводного тракта (волноводов, рупоров со стенками, обладающими анизотропным импедансом), для создания антенных обтекателей, при решении некоторых задач электромагнитной совместимости и для других целей [1, 2].

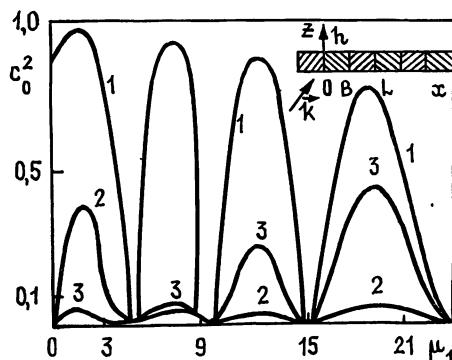


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость c_0^2 от μ_1 для металло-магнитодиэлектрической решетки без потерь: $\varphi=0^\circ$, $h/\lambda=0,3$; $\varepsilon_1=3$; $\theta=0,1$ — кривая 1, $\theta=0,5$ — кривая 2, $\theta=0,9$ — кривая 3.

Рис. 2. Зависимость c_0^2 от θ для металло-магнитодиэлектрической решетки без потерь: $\varphi=60^\circ$, $h/\lambda=0,3$; $\varepsilon_1=1$, $\mu_1=1$ — кривая 1, $\varepsilon_1=3$, $\mu_1=1$ — кривая 2, $\varepsilon_1=1$, $\mu_1=3$ — кривая 3, $\varepsilon_1=3$, $\mu_1=3$ — кривая 4.

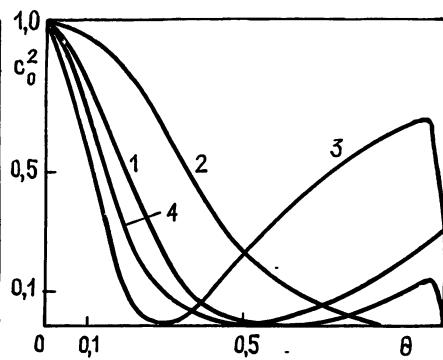


Рис. 2.

В работе получено и исследовано решение задачи рассеяния на бесконечном искусственно-анизотропном слое, образованном частыми ($\lambda/L \gg 1$), периодически повторяющимися ячейками, состоящими из двух плотно уложенных брусьев прямоугольной формы (рис. 1). Период структуры L . Брусья выполнены из магнитодизлектрика, диэлектрика или металла. В рамках единого метода решения задачи рассеяния для слоя из магнитодиэлектрических брусьев построен алгоритм решения и получено аналитическое описание рассеянных полей для всех возможных комбинаций названных материалов. Проведено численное и аналитическое исследование полученных выражений.

Постановка задачи. На плоский двумерный слой (решетку) из однотипных ячеек, образованных двумя магнитодиэлектрическими брусьями с материальными параметрами ϵ_1 , μ_1 и ϵ_2 , μ_2 , падает плоская электромагнитная волна. Ее волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен образующим брусьев. Необходимо получить выражения для рассеянных полей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, граничным условиям, условию квазипериодичности, закону сохранения энергии и условию ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства.

В качестве исходных выражений выберем строгие интегральные соотношения макроскопической электродинамики, которые эквивалентны уравнениям Максвелла и удовлетворяют необходимым граничным условиям [3]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + (\text{gradiv} + \mathbf{k}^2) \Pi^{\circ} - ik\mu_1 \text{rot} \Pi^{\circ}; \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + (\text{gradiv} + \mathbf{k}^2) \Pi^{\circ} - ik\epsilon_1 \text{rot} \Pi^{\circ}. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Pi^{\circ} &= \frac{1}{4\pi} \int [\epsilon(r') - 1] \mathbf{E}(r') f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \\ \Pi^{\circ} &= \frac{1}{4\pi} \int [\mu(r') - 1] \mathbf{H}(r') f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \\ f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= \frac{\exp\{ik[(x-x')^2 + (z-z')^2 + (y-y')^2]^{1/2}\}}{[(x-x')^2 + (z-z')^2 + (y-y')^2]^{1/2}}, \\ \epsilon(r') &= \begin{cases} \epsilon_1, & x' \in [0, b] + mL \\ \epsilon_2, & x' \in [b, L] + mL \end{cases}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\mu(r')$ определяется аналогично $\epsilon(r')$. Интегрирование проводится по всему объему V всех рассеивателей рассматриваемого слоя. Использование соотношений (1) и (2) предполагает определенную последовательность действий. На первом этапе, решая системы интегральных уравнений (1) и (2), находим выражения для компонентов \mathbf{E} и \mathbf{H} внутренних полей слоя. В рассматриваемом случае уравнения (1) и (2) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода с полярными ядрами типа

$$k(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \leq c/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\alpha},$$

где $0 < \alpha < 3$. Такие уравнения имеют единственное решение [3]. Компоненты векторов напряженностей рассеянных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} определяются на втором этапе в результате интегрирования в (1) и (2) по объему V при $z' \in V$ и $z \notin V$. При $z > z'$ получаем выражения для прошедшего поля. Невозмущенные компоненты \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 «погашаются» [3] противоположными им слагаемыми, образующимися в результате интегрирования в (1) и (2). При $z < z'$ получаем выражения, состоящие из компонентов падающего и отраженного полей.

Так как $\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}$, то рассматриваемая векторная задача разделяется на две независимые скалярные, описывающие рассеяние \mathbf{E} - и \mathbf{H} -поляризованных волн. Рассматривая структуру из магнитодиэлектрических брусьев, достаточно построить решение для одной (любой) поляризации. Так, рассеяние H -поляризованной волны описывается группой интегральных соотношений из (1) и (2) для E_x, E_y, E_z , а E -поляризованной — группой соотношений для H_x, H_y, H_z . Из (1) и (2) следует, что выражение (2) можно получить из (1) формальной заменой компонентов векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на одноименные компоненты \mathbf{H} и \mathbf{E} соответственно, а также ϵ на μ , μ на ϵ , k на $-k$. Таким образом, если

в результате решения задачи рассеяния H -поляризованной волны получены выражения для E_x, H_y, E_z , то выражения для компонентов рассеянных полей E -поля образуем указанной формальной заменой. Этот прием вдвое уменьшает объем всех необходимых выкладок и справедлив только для магнитодиэлектрических материалов. Однако, преобразуя в найденных выражениях материальные параметры магнитодиэлектрика, ниже получаем решения поставленной задачи и для других материалов или их комбинаций.

Рассмотрим рассеяние H -поляризованной волны. Аналитическое решение соответствующей системы интегральных уравнений относительно E_x, H_y, E_z не представляется возможным. Однако для интегральных функционалов $C_{x(1)}, C_{z(1)}, G_{y(1)}$ такое решение возможно. Запишем рассеянные поля в виде

$$H_y(x, z) = H_{0y}(x, z) + \frac{k}{2} \left\{ ik \hat{L} [(\mu_1 - 1) G_{y(1)}^{(1)} + (\mu_2 - 1) G_{y(1)}^{(2)}] - \right. \quad (4)$$

$$\left. - \hat{L} \psi_s [(\epsilon_1 - 1) C_{z(1)}^{(1)} + (\epsilon_2 - 1) C_{z(1)}^{(2)}] + \hat{L} \frac{\partial}{\partial z} [(\epsilon_1 - 1) C_{x(1)}^{(1)} + (\epsilon_2 - 1) C_{x(1)}^{(2)}] \right\},$$

$$E_x = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial z} H_y, \quad E_z = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} H_y.$$

Здесь \hat{L} — интегральный оператор,

$$\hat{L} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(ix\psi_s) \kappa_s^{-1} \int_0^h dz' \exp(i|z-z'| \kappa_s),$$

$$\kappa_s = \sqrt{k^2 - \psi_s^2}, \quad \psi_s = k_x + \frac{2\pi}{L} s,$$

$$G_{y(1)}^{(1)}(\psi_s, z) = \frac{1}{L} \int_0^b H_y(x', z) \exp(-ix'\psi_s) dx',$$

$$G_{y(1)}^{(2)} = \frac{1}{L} \int_b^L H_y(x', z) \exp(-ix'\psi_s) dx',$$

$$C_{x,z(1)}^{(1)}(\psi_s, z) = \frac{1}{L} \int_0^b E_{x,z}(x', z) \exp(-ix'\psi_s) dx',$$

$$C_{x,z(1)}^{(2)} = \frac{1}{L} \int_b^L E_{x,z}(x', z) \exp(-ix'\psi_s) dx'.$$

Надстрочные индексы 1 и 2 в (4) и последующих выражениях указывают номер бруса в ячейке слоя.

Рассмотрим случай, когда в рассеянном поле (4) доминирует центральная гармоника поля $S=0$ (одноволновое рассеяние). На практике одноволновое рассеяние реализуется для частых структур ($\lambda \gg L$). При этом рассматриваемый слой может описываться как простейшая анизотропная структура — одноосный кристалл [4]. Для частой структуры оценки соотношений (5а) (по модулю) при $S \geq 1$ получаем с помощью леммы Римана и метода Лапласа

$$\psi_s \approx k \frac{\lambda}{L} S, \quad \kappa_s \approx \psi_s, \quad G_{y(1)}(\psi_s, z) \sim S^{-1},$$

$$C_{x,z(1)}(\psi_s, z) \sim S^{-1}, \quad \hat{L}C, \hat{L}G \sim \left(\frac{\lambda}{L} S\right)^{-2} S^{-1}.$$

Таким образом, характер убывания функционалов C и G зависит лишь от их номера S , а выражений $\hat{L}C$ и $\hat{L}G$ — от отношения L/λ . Следовательно, сохраняя в выражении (4) лишь центральную гармонику, мы пренебрегаем величинами, порядок малости которых выше $O\left(S^2 \frac{\lambda}{L}\right)^{-2}$.

Таким образом, для определения рассеянных полей в одноволновом приближении достаточно найти лишь нулевые функционалы $C_{x(1)}(\psi_0, z)$, $C_{z(1)}(\psi_0, z)$, $G_{y(1)}(\psi_0, z)$.

Построим систему уравнений для функционалов $C_{x,z(1)}$ и $G_{y(1)}$ при произвольных соотношениях L/λ . Аналитическое же решение ее получим лишь для нулевых функционалов. Для H -поляризации исходная система интегродифференциальных уравнений представляется в виде

$$\begin{aligned} H_y &= H_{0y} + \frac{ik^2}{4} T_y - \frac{k}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_z - \frac{\partial}{\partial z} T_x \right), \\ E_x &= E_{0x} + \frac{i}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) T_x + \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} T_z + \frac{k}{4} \frac{\partial}{\partial z} T_y, \\ E_z &= E_{0z} + \frac{i}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) T_z + \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} T_x - \frac{k}{4} \frac{\partial}{\partial x} T_y, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} T_{x,z}(x, z) &= \int_{S'} [\varepsilon(x') - 1] E_{x,z}(x', z) H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) dx' dz', \\ T_y(x, z) &= \int_{S'} [\varepsilon(x') - 1] H_y(x', z) H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) dx' dz', \\ \varepsilon(x+L) &= \varepsilon(x), \quad \mu(x+L) = \mu(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрирование в (7) производится по нормальному сечению S' слоя (в плоскости xoz). Сходимость интегралов T во всех точках области S' обеспечивается логарифмической особенностью функции $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|)$ в окрестности точек $\rho' = \rho$. Функции E и H принадлежат пространству L_2 , обеспечивая сходимость интегралов T при $x, z \rightarrow \infty$. Физически это означает, что выполняется условие ограниченности энергии электромагнитного поля в любом ограниченном объеме пространства. Для того, чтобы из (6) получить систему уравнений относительно искомых функционалов $C_{x,z(1)}$ и $G_{y(1)}$, необходимо действовать на (6) ограниченным оператором

$$\hat{A}_j^{(m)} = \int_{(2\pi/L)j}^{(2\pi/L)(j+1)} dv e^{ixv} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{nL+b_m-1}^{nL+b_m} d\tau e^{-i\tau v}, \quad (8)$$

используя в преобразованиях условие квазипериодичности внутренних полей

$$H, E(x+L, z) = H, E(x, z). \quad (9)$$

Функцию Ханкеля $H_0^{(1)}$ представим интегралом Зоммерфельда:

$$H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iw(x-x') + i|z-z'| \sqrt{k^2 - w^2})}{\sqrt{k^2 - w^2}} dw, \quad z \neq z', \quad (10)$$

Необходимо также выполнить корректную перестановку операторов $\partial^2/\partial x^2$ и $\int dx' dz'$. Для этого точку $\rho' = \rho$ окружим произвольным контуром l , охватывающим достаточно малую область, в которой справедливо представление $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) \simeq 2i\pi^{-1} \ln k |\rho - \rho'|$. В оставшейся области интегрирования S/S' функция $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|)$ не имеет особенности и указанные операторы перестановочны. В области S_1 формальная перестановка приводит к расходящемуся интегралу. Однако если интегрирование по плоскости S_1 заменить интегрированием по охватывающему контуру l , не содержащему сингулярности, и стягивать контур к сингулярной точке $\rho' = \rho$ так, чтобы при этом $S_1 \rightarrow 0$ и выполнялось условие $|z - z'| \neq 0$ (см. (10)), то

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{S'} E_x(\rho') H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) ds' = 4iE_x(\rho).$$

Таким образом, искомая система уравнений относительно функционалов $C_{x,z(1)}$ и $G_{y(1)}$ в m -м брусе ячейки представляется в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_m C_{x(l)}^{(m)}(\psi_n, z) &= C_{0x(l)}^{(m)}(\psi_n, z) + \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{s-n}^m \times \\ &\times \left\{ \sum_{l=1}^N \frac{i\kappa_s^2}{2} I_{xs}^{(l)}(\epsilon_l - 1) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [I_{zs}^{(l)}(\epsilon_l - 1)\psi_s - M_s^{(l)}(\mu_l - 1)k] + \right. \\ &\quad \left. + (\epsilon_l - 1)C_{x(l)}^{(l)}(\psi_s, z) \right\}; \\ C_{z(l)}^{(m)}(\psi_n, z) &= C_{0z(l)}^{(m)}(\psi_n, z) + \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{s-n}^{(m)} \left\{ \sum_{l=1}^N \frac{i\psi_s}{2} [(\epsilon_l - 1)\psi_s I_{zs}^{(l)} - M_s^{(l)}(\mu_l - 1)k] - \right. \\ &\quad \left. - (\epsilon_l - 1)\psi_s \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} I_{xs}^{(l)} - (\epsilon_l - 1)C_{z(l)}^{(l)}(\psi_s, z) \right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} G_{y(l)}^{(m)}(\psi_n, z) &= G_{0y(l)}^{(m)}(\psi_n, z) + \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{s-n}^{(m)} \left\{ \sum_{l=1}^N -\frac{ik}{2} [I_{zs}^{(l)}(\epsilon_l - 1)\psi_s - \right. \\ &\quad \left. - M_s^{(l)}(\mu_l - 1)k] - k \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} I_{xs}^{(l)}(\epsilon_l - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, \quad a_{s-n} = \frac{1}{L} \int_{b_l}^{b_{l+1}} \exp \left[i \frac{2\pi}{L} (S - n)\tau \right] d\tau, \\ I_{x,z}^{(l)} &= \frac{1}{\kappa_s} \int_0^h \exp(i\kappa_s |z - z'|) C_{x(l), z(l)}^{(l)}(z', \psi_s) dz', \\ M_s^{(l)} &= \frac{1}{\kappa_s} \int_0^h \exp(i\kappa_s |z - z'|) G_{y(l)}^{(l)}(\psi_s, z') dz'. \end{aligned} \quad (14)$$

Получим решение системы уравнений (11)–(13) в приближении нулевых функционалов. Для нечастых структур число слагаемых, удерживаемых в системе уравнений (11)–(13), зависит от ряда физических и геометрических параметров рассеивающего слоя. В этом случае метод решения такой системы существенно отличается от приведенного ниже.

Алгебраическими преобразованиями можно систему уравнений (11)–(13) привести к дифференциальным уравнениям. Для этого, например, исключим слагаемые, содержащие интегралы по z' . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \tilde{C}_{z(1)}^{(2)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{C}_{z(1)}^{(2)} & \left[(k^2 - \psi_0^2)(1 + \varepsilon_z) + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} (1 - \theta) \chi_4 \right] + \\ + \tilde{C}_{z(1)}^{(2)} (k^2 - \psi_0^2) & \left[\varepsilon_z (k^2 - v^2) + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} (1 - \theta) \chi_4 \right] = \tilde{G}_{0y(1)} (k_x^2 - \psi_0^2) \times \\ \times \left[(1 - \theta) k \chi_1 (\psi_0 - k_x) - \frac{k_x}{k} (k^2 - \psi_0^2) + \frac{k_z^2}{\varepsilon_z^2 k} (k_x + \psi_0 \varepsilon_z (\varepsilon_z - 1)) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{C}_x^{(2)} = \frac{1}{1 + \theta (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \chi_3 (1 - \theta)} \left[\frac{k_z}{k} \left(1 - \frac{k_x k_z}{\psi_0 k} \right) \tilde{G}_{0y} + \frac{i}{\psi_0} \varepsilon_x \frac{\partial}{\partial z} \tilde{C}_z^{(2)} \right]; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_y^{(2)} \psi_0 k (1 - \theta) \chi_1 &= \left(k^2 (\varepsilon_x \mu_x - \psi_0^2) - k^2 (1 - \theta) \chi_1 \varepsilon_x + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{C}_z^{(2)} + \tilde{G}_{0y} \left[\frac{k_x}{k} \left(k^2 - \psi_0^2 - \frac{k_z^2}{\varepsilon_z} \right) - \frac{v k_z^2}{k \varepsilon_z} (\varepsilon_z - 1) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\tilde{G}_{0y} = H_{0y}, \quad \tilde{G}_y^{(2)} = G_y^{(2)} / (1 - \theta), \quad \tilde{C}_{x,z}^{(2)} = C_{x,z}^{(2)} / (1 - \theta),$$

$$\chi_1 = (\mu_1 - 1) \theta / (1 - \theta) + (\mu_2 - 1), \quad \chi_2 = (\varepsilon_1 - 1) \theta / (1 - \theta) + (\varepsilon_2 - 1),$$

$$\chi_3 = (\varepsilon_1 - 1) \theta / (1 - \theta) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + (\varepsilon_2 - 1), \quad \chi_4 = \psi_0^2 \chi_2 + k^2 \varepsilon_x \chi_1,$$

$$\varepsilon_x = 1 + (1 - \theta) (\varepsilon_2 - 1) + \theta (\varepsilon_1 - 1), \quad \mu_x = 1 + (1 - \theta) (\mu_2 - 1) + \theta (\mu_1 - 1),$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_1 \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 (1 - \theta) + \varepsilon_2 \theta), \quad \mu_z = \mu_1 \mu_2 / (\mu_1 (1 - \theta) + \mu_2 \theta), \quad \theta = b/L,$$

$$G_{y(1)}^{(1)} = \theta / (1 - \theta) G_{y(1)}^{(2)}, \quad C_{x(1)}^{(1)} = C_{x(1)}^{(2)} \theta / (1 - \theta) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (18)$$

$$C_{z(1)}^{(1)} = C_z^{(2)} \theta / (1 - \theta), \quad v \equiv \psi_S.$$

Решения уравнений (15)–(17) представляются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{z(1)}^{(2)} (\psi_0, z) &= A_1^{(2)} \exp(i k_3 z) + A_2^{(2)} \exp[-i k_3 (z - h)] + A_0 \exp(i k_z z), \\ \tilde{C}_{x(1)}^{(2)} (\psi_0, z) &= \frac{1}{1 + \theta (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \chi_3 (1 - \theta)} \left[\frac{k_3 \varepsilon_x}{\psi_0} (-A_1^{(2)} \exp(i k_3 z) + A_2^{(2)} \exp[-i k_3 (z - h)]) \right. \\ \left. + A_{0x} \exp(i k_z z) \right], \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{y(1)}^{(2)} (\psi_0, z) &:= \frac{1}{\psi_0 k (1 - \theta) \chi_1} [-\varepsilon_x k^2 (1 - \theta) \chi_1 (A_1^{(2)} \exp(i k_3 z) + \\ + A_2^{(2)} \exp[i k_3 (z - h)]) + \tilde{A}_{0y} \exp(i k_z z)], \end{aligned}$$

где A_0 — частное решение дифференциального уравнения (15), а \tilde{A}_{0x} и \tilde{A}_{0y} выражаются через A_0 .

Неизвестные коэффициенты $A_1^{(2)}$ и $A_2^{(2)}$ определим из уравнения (13), подставляя туда решения (19а). Собирая слагаемые с одинаковыми фазовыми множителями, получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_1^{(2)}$ и $A_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} (k_3 + \epsilon_z k_z) - A_2^{(2)} \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} (k_3 - \epsilon_z k_z) &= -H_{0y} \frac{2k_z k_r}{k}, \\ -A_1^{(2)} (k_3 - \epsilon_z k_z) + A_2^{(2)} (k_3 + \epsilon_z k_z) &= 0. \end{aligned} \quad (196)$$

Решение уравнений (196) совместно с соотношениями (18), (19а) дает все необходимые функционалы, подставляя которые в (4), получим выражения для отраженного и прошедшего полей E - и H -поляризованных волн.

Отраженное поле:

$$H_y^{\text{опр}} = \exp(i k_x x - i k_z z) H_{0y} [(k_3^2 - \epsilon_z^2 k_z^2) i \sin h k_3] \times \quad (20)$$

$$\times [\cos h k_3 \cdot 2 k_z \epsilon_z k_3 - i \sin h k_3 (k_3^2 + \epsilon_z^2 k_z^2)]^{-1};$$

$$E_y^{\text{опр}} = \exp(i k_x x - i k_z z) E_{0y} [(\kappa_3^2 - \mu_z^2 k_z^2) i \sin h \kappa_3] \times \quad (21)$$

$$\times [\cos h \kappa_3 \cdot 2 k_z \mu_z \kappa_3 - i \sin h \kappa_3 (\kappa_3^2 + \mu_z^2 k_z^2)]^{-1};$$

прошедшее поле:

$$H_y^{\text{пр}} = \exp(i k_x x + i k_z z) H_{0y} [2 k_3 k_z \epsilon_z \exp(-i k_z h)] \times \quad (22)$$

$$\times [\cos h k_3 \cdot 2 k_z \epsilon_z k_3 - i \sin h k_3 (k_3^2 + \epsilon_z^2 k_z^2)]^{-1};$$

$$E_y^{\text{пр}} = \exp(i k_x x + i k_z z) E_{0y} [2 \kappa_3 k_z \mu_z \exp(-i k_z h)] \times \quad (23)$$

$$\times [\cos h \kappa_3 \cdot 2 k_z \mu_z \kappa_3 - i \sin h \kappa_3 (\kappa_3^2 + \mu_z^2 k_z^2)]^{-1},$$

где

$$k_3^2 = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} (k^2 \epsilon_x \mu_x - k_x^2), \quad \kappa_3^2 = \frac{\mu_z}{\mu_x} (k^2 \epsilon_x \mu_x - k_x^2), \quad (24)$$

ϵ_x , μ_x , ϵ_z , μ_z определены в (18). Из (20) — (23) непосредственными вычислениями убеждаемся в выполнении закона сохранения энергии. При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ выражения (20) — (23) тождественны выражениям, полученным в [4] для частой диэлектрической решетки.

Здесь полезно отметить, что предложенный метод позволит рассмотреть и двухслойные анизотропные структуры. Если в окончательных выражениях для полей, рассеянных такими структурами, для параметров второго слоя осуществить формальный предельный переход $|\epsilon| \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$, $|\epsilon\mu| \rightarrow 1$ [5], то мы получим выражения для полей, рассеянных анизотропным магнитодиэлектрическим слоем на металлической подложке:

$$\begin{aligned} H_y^{\text{опр}} &= \exp(i k_x x - i k_z z) H_{0y} [k_z \cos k_3 h + i \sin k_3 h (k_3 / \epsilon_z)] \times \\ &\times [\cos k_z \cos k_3 h - i \sin k_z \cos k_3 h (k_3 / \epsilon_z)]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y^{\text{опр}} &= \exp(i k_x x - i k_z z) E_{0y} [(\kappa_3 / \mu_z) \cos \kappa_3 h + i k_z \sin \kappa_3 h] \times \\ &\times [(\kappa_3 / \mu_z) \cos \kappa_3 h - i k_z \sin \kappa_3 h]^{-1}, \end{aligned}$$

где κ_3 , k_3 , ε_x , μ_x , ε_z , μ_z определены выражениями (18) и (24).

Исследование решения. С помощью формул (20) — (23) можно исследовать свойства искусственно-анизотропных слоев различных типов, образованных частыми периодически повторяющимися ячейками, состоящими из двух плотно уложенных брусьев прямоугольной формы. Брусья могут быть выполнены из магнитодиэлектрика, диэлектрика или металла. В связи с этим исследуемые структуры удобно рассматривать как металлические или магнитодиэлектрические решетки с различным (диэлектрическим, магнитодиэлектрическим) заполнением.

В рамках данной статьи покажем только некоторые, наиболее характерные рассеивающие свойства исследуемых структур. Более детальные исследования могут проводиться по мере необходимости с помощью полученных в статье выражений.

Свойства решеток различных типов удобно исследовать, сравнивая их коэффициенты отражения по мощности c_0^2 . Для магнитодиэлектрических решеток

$$c_0^{H2} = \frac{(k_3^2 - \varepsilon_z^2 k_z^2)^2 \sin^2 h k_3}{4\varepsilon_z^2 k_z^2 k_3^2 + \sin^2 h k_3 (k_3^2 - \varepsilon_z^2 k_z^2)^2}, \quad (25)$$

$$c_0^{E2} = \frac{(\kappa_3^2 - \mu_z^2 k_z^2)^2 \sin^2 h \kappa_3}{4\mu_z^2 k_z^2 \kappa_3^2 + \sin^2 h \kappa_3 (\kappa_3^2 - \mu_z^2 k_z^2)^2}.$$

Если в (25) для материальных параметров ε_2 , μ_2 одного бруса ячейки выполнить предельный переход $|\varepsilon_2| \rightarrow \infty$, $\mu_2 \rightarrow 0$, $|\varepsilon_2 \mu_2| \rightarrow 1$, а параметры другого бруса ε_1 и μ_1 оставить без изменения, то получим аналогичные (25) выражения для металлической решетки с магнитодиэлектрическим заполнением (металло-магнитодиэлектрической решетки)

$$c_0^{H2} = \frac{(k_1^2 - \varepsilon_1^2 k_z^2/\theta^2)^2 \sin^2 h k_1}{4\varepsilon_1^2 k_z^2 k_1^2/\theta^2 + \sin^2 h k_1 (k_1^2 - \varepsilon_1^2 k_z^2/\theta^2)^2}, \quad (26)$$

$$c_0^{E2} = 1,$$

где $k_1^2 = k^2 \varepsilon_1 \mu_1$.

В выражениях (25) и (26) переход от магнитодиэлектрических брусьев к диэлектрическим может быть осуществлен при $\mu=1$, $\varepsilon \neq 1$. При $\varepsilon_1=1$ выражение (26) соответствует результатам, полученным в [6] для решеток из частых металлических брусьев.

Из (25) и (26) очевидно, что энергия рассеянного поля ограничена в любом конечном объеме пространства.

Из выражений (24), (25) следует полное прохождение плоской электромагнитной волны через решетку возможно только в результате либо интерференционного эффекта, либо благодаря эффекту Малюжинца.

Для существования интерференционного эффекта необходимо выполнение следующих условий:

$$\sin h k_3 = 0 \quad (H\text{-поляризация}), \quad (27)$$

$$\sin h \kappa_3 = 0 \quad (E\text{-поляризация})$$

для магнитодиэлектрических решеток;

$$\sin h k_1 = 0 \quad (H\text{-поляризация}) \quad (28)$$

для металло-магнитодиэлектрических решеток.

Для магнитодиэлектрических решеток из (20) и (21) устанавливаем [7], что эффект Малюжинца имеет место при

$$k_3^2 = \varepsilon_z^2 k_z^2 \quad (H\text{-поляризация}),$$

$$x_3^2 = \mu_z^2 k_z^2 \quad (E\text{-поляризация});$$

для металло-магнитодиэлектрических решеток —

$$\theta = \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \varphi \quad (H\text{-поляризация}). \quad (30)$$

Поскольку для падающей E -поляризованной волны металло-магнитодиэлектрическая решетка является полностью отражающей и для магнитодиэлектрических решеток переход от H -к E -поляризации можно осуществить формальной заменой $\mu \rightarrow \epsilon$, $\epsilon \rightarrow \mu$, $k \rightarrow -k$, $H_y \rightarrow E_y$, при проведении численных расчетов достаточно рассмотреть, например, случай H -поляризованной волны.

Проведенные расчеты показывают, что зависимость c_0^2 от ϵ и (или) μ материала заполнения для металло-магнитодиэлектрической решетки имеет вид функции с последовательно повторяющимися провалами до нуля, вызванными интерференционным эффектом (рис. 1). Характер этой зависимости существенно искажает эффект Малюжинца, влияние которого проявляется в уменьшении амплитуды коэффициента отражения в области значений параметра μ_1 , для которого названный эффект существует. На рис. 1 для кривых 1, 2 и 3 эффект Малюжинца, как видно, имеет место при $\mu_1=300$, $\mu_1=12$ и $\mu_1=37$ для решеток с $\theta=0,1; 0,5; 0,9$ соответственно и при угле падения, равном нулю. С ростом значений μ (или ϵ) (как и при уменьшении толщины решетки) расстояние между соседними нулями увеличивается. Исследования показали, что для магнитодиэлектрических решеток зависимость c_0^2 от ϵ и (или) μ , так же как и для металло-магнитодиэлектрических решеток, имеет колебательный характер. С увеличением ширины щелей расстояние между соседними минимумами возрастает, а их амплитуда уменьшается.

На рис. 2 полное прохождение падающей волны обеспечивается за счет эффекта Малюжинца. Для магнитодиэлектрических решеток с большими значениями ϵ и μ эффект Малюжинца наблюдается для целого ряда значений θ (при неизменном φ) (рис. 3, кривая 1).

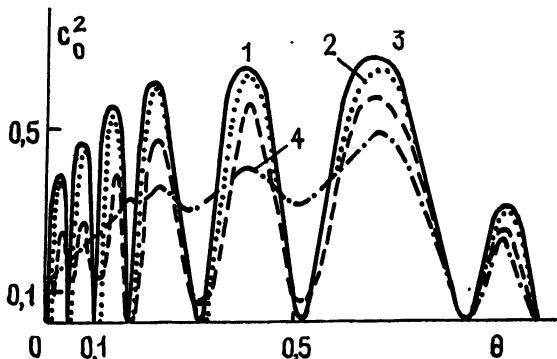


Рис. 3. Зависимость c_0^2 от θ для магнитодиэлектрической решетки:

$\varphi=60^\circ$, $h/\lambda=0,3$, $\epsilon_2=12$, $\mu_2=12$; кривая 1 — без потерь, кривая 2 — $\operatorname{tg} \alpha_n = 0,0083$, кривая 3 — $\operatorname{tg} \alpha_n = -0,0415$, кривая 4 — $\operatorname{tg} \alpha_n = 0,166$.

С помощью надлежащего выбора геометрических и физических параметров решетки можно достигнуть практически полного прохождения энергии в заданных диапазонах углов падения (рис. 4, кривые 2, 7). Для магнитодиэлектрических решеток ($\epsilon > 1$, $\mu > 1$) зависимость от угла падения φ имеет более гладкий вид, чем для металло-магнитодиэлектрических решеток, и резонансные эффекты выражены слабее.

Для магнитодиэлектрических решеток с заполнением могут наблю-

даться те же эффекты, что и для магнитодиэлектрических решеток без заполнения. Изменением геометрических размеров и материала заполнения можно в широких пределах варьировать отражательные свойства решеток. Например, зависимость от ϕ может иметь как резонансный характер (полное прохождение при $\phi \neq 0$), так и монотонно возрастать с ростом угла падения (рис. 4). Соответствующим подбором параметров можно добиться практически полного прохождения (отражение меньше -30 дБ) в диапазоне 60° (и выше), что позволяет применять такие решетки в качестве согласующих элементов (рис. 4, кривая 7).

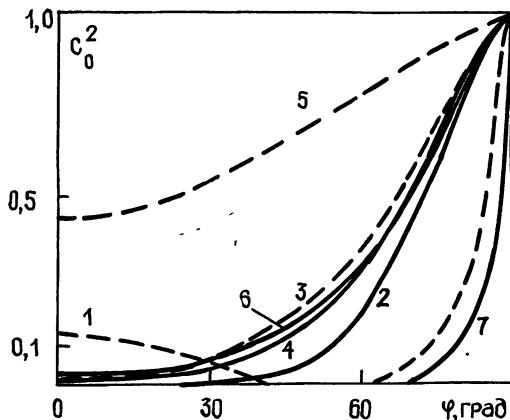


Рис. 4. Зависимость c_0^2 от ϕ для магнитодиэлектрической решетки:

$h/\lambda=0,3$; кривая 1— $\epsilon_2=6$, $\mu_2=1$, $\theta=0,1$, кривая 2— $\epsilon_2=6$, $\mu_2=1$, $\theta=0,9$, кривая 3— $\epsilon_2=6$, $\mu_2=6$, $\theta=0,1$, кривая 4— $\epsilon_2=6$, $\mu_2=6$, $\theta=0,9$, кривая 5— $\epsilon_2=1$, $\mu_2=6$, $\theta=0,1$, кривая 6— $\epsilon_2=1$, $\mu_2=6$, $\theta=0,9$, кривая 7— $\epsilon_1=9$, $\epsilon_2=12$, $\mu_1=9$, $\mu_2=12$, $\theta=0,1$.

Учет поглощения ($\text{Im } \epsilon \neq 0$) для всех типов решеток искажает картину (рис. 3), при этом c_0^2 меняется неоднозначно: в окрестностях максимумов отражения c_0^2 , как правило, уменьшается, а в окрестностях минимумов увеличивается. С ростом потерь вид соответствующих зависимостей искажается, а эффекты полного прохождения Малюжинца заплывают. Очевидно, конечно, что при усилении поглощения существенно уменьшается мощность волны, прошедшей сквозь решетку.

Предложенный подход позволяет получить и исследовать аналитически и численно выражения для полей, рассеянных искусственно-анизотропным слоем, образованным прямоугольными брусьями из магнитодиэлектрика, удовлетворяющих всем необходимым физическим условиям. Показано, что, выбирая определенным образом материальные параметры ϵ и μ , можно получить выражения для полей, рассеянных решетками из диэлектрика, металла, магнитодиэлектрика и различных их комбинаций. Формализована связь между решениями для обеих поляризаций. Проведено численно-аналитическое исследование отражательных свойств данного анизотропного слоя, получены условия существования эффектов полного прохождения (Малюжинца и интерференционного). Установлено, что подбором материальных и геометрических параметров слоя можно изменять его отражательные свойства в достаточно широких пределах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dracone C. // IEEE Trans. Antenn. Propag. AP. 1978. V. 26. № 4. P. 459
2. Mahmoud S. F., Aly M. S. // IEEE Trans. Antenn. Propag. AP. 1987. V. 35, № 2. P. 212.

3. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. — Киев: Наукова думка, 1986. С. 15; 31.
4. Боровский И. В., Хижняк Н. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 2. С. 231.
5. Хижняк Н. А., Гал Л. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 10. С. 1596
6. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос. ун-т, 1973.
7. Боровский И. В., Хижняк Н. А. // ЖТФ. 1987. Т. 57. № 6. С. 1219.

Радиоастрономический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1989 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING BY THE ARTIFICIALLY ANISOTROPIC LAYER FORMED OF VARIOUS MATERIALS

I. V. Borovskij, O. G. Gamulya, N. A. Khizhnyak

A solution of the scattering problem the artificially anisotropic infinite layer, formed by frequent periodically cells, consisting of two densely packed rectangular rods, has been obtained and investigated. Rods are made of a magnetodielectric material. Using a single method of the scattering problem solution a special algorithm has been built, and the field scattered for all possible materials mentioned have been analitically described and investigated. The numerical and analytical investigation of the expressions obtained has been made.

ПЕРЕЧЕНЬ СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛОВ, ПЕРЕИЗДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ В ПОЛНОМ ОБЪЕМЕ (Продолжение)

37. Гидролизная и лесохимическая промышленность
38. Гидротехническое строительство
39. Дефектоскопия
40. Дифференциальные уравнения
41. Доклады АН СССР
42. Доклады ВАСХНИЛ
43. Журнал аналитической химии
44. Журнал ВХО им. Менделеева
45. Журнал вычислительной математики и математической физики
46. Журнал неорганической химии
47. Журнал общей химии
48. Журнал органической химии
49. Журнал прикладной механики и технической физики
50. Журнал прикладной спектроскопии
51. Журнал прикладной химии
52. Журнал структурной химии
53. Журнал технической физики
54. Журнал физической химии
55. Журнал эволюционной биохимии и физиологии
56. Журнал экспериментальной и теоретической физики
57. ЖЭТФ. Письма в редакцию
58. Заводская лаборатория
59. Защита металлов
60. Известия АН СССР. Механика жидкостей и газов
61. Известия АН СССР. Неорганические материалы
62. Известия АН СССР. Механика твердого тела
63. Известия АН СССР. Серия биологическая
64. Известия АН СССР. Серия математическая
65. Известия АН СССР. Серия металлы
66. Известия АН СССР. Серия физическая
67. Известия АН СССР. Серия химическая
68. Известия АН СССР. Техническая кибернетика
69. Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана
70. Известия АН СССР. Физика Земли
71. Известия АН СССР. Энергетика и транспорт
72. Известия АН АрмССР. Математика
73. Известия АН АрмССР. Физика
74. Известия ВУЗ. Авиационная техника
75. Известия ВУЗ. Математика
76. Известия ВУЗ. Радиофизика

(Продолжение см. с. 964)

УДК 621.372.08

СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВОЛН В ЭКРАНИРОВАННЫХ НЕОДНОРОДНО ЗАПОЛНЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ

A. B. Гуреев

Рассматриваются особенности применения метода нормальных волн к задаче о возбуждении электромагнитных волн в экранированных неоднородно заполненных волноводах. Доказана полнота системы векторов, по которым строятся нормальные и присоединенные волны. Проанализированы энергетические характеристики волн. Обобщены на присоединенные волны соотношения ортогональности. Приведены формулы для расчета коэффициентов разложения поля по нормальным и присоединенным волнам.

Эффективность метода нормальных волн [1–4], одним из основных преимуществ которого является улучшенная по сравнению с другими методами сходимость разложений полей [1], продемонстрирована на многочисленных примерах решения задач о возбуждении и дифракции электромагнитных волн в волноводах. Нормальные и присоединенные волны, используемые в разложениях полей по этому методу, определяются с помощью собственных значений (С3) и собственных и присоединенных векторов (СПВ) оператора Максвелла, который в случае регулярного волновода из-за неограниченности структуры по одной оси является несамосопряженным. При однородном заполнении волновода удается свести задачу к отысканию С3 и СПВ самосопряженного оператора и доказать полноту системы его СПВ [4, 5]. Для неоднородно заполненных волноводов ключевой для данного метода вопрос о полноте системы векторов, с помощью которых строятся нормальные и присоединенные волны, за исключением частных случаев [6] остается открытым. Этот вопрос, а также важные с точки зрения практических приложений свойства СПВ нормальных и присоединенных волн являются предметом исследования настоящей работы.

Рассматривается обобщенная постановка задачи о возбуждении электромагнитных волн в волноводе (разд. 1), которой отвечают решения с конечной энергией поля в любой ограниченной области волновода. При доказательстве полноты системы нормальных и присоединенных волн (разд. 2) используются результаты из теории операторного квадратичного пучка [7, 8], к анализу которого сведена исходная краевая задача. Причем в отличие от [6], где для неоднородно заполненных волноводов с осевой симметрией применялась аналогичная схема доказательства, операторные коэффициенты квадратичного пучка, построенного в данной работе, имеют четкий физический смысл, который вместе с энергетическими характеристиками волн рассматривается в разд. 3. В разд. 4 известные соотношения ортогональности нормальных волн [3] обобщены на присоединенные волны. Они применяются при решении задачи о возбуждении волн (разд. 6), а также позволяют решить не исследовавшийся в электродинамике вопрос о переносе энергии присоединенными волнами (разд. 4). Кроме того с помощью обобщенных соотношений ортогональности удается найти аналог закона парциальных мощностей для присоединенных волн (разд. 5), который фактически устанавливает

взаимосвязь между локальными характеристиками дисперсионных кривых и свойствами соответствующих типов волн волновода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитного поля в регулярном вдоль оси z волноводе сечения Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ (рис. 1), заполненном изотропной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной восприимчивостью μ .

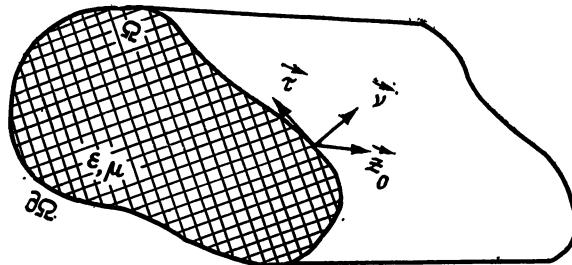


Рис. 1.

Область Ω в общем случае может быть многосвязной. В таких задачах достаточно определить поперечные компоненты поля, а затем по ним рассчитать продольные [9]. Искомый четырехмерный вектор поперечных компонент электрического $E_{\perp} \in C^2$ и магнитного $H_{\perp} \in C^2$ поля будем записывать в нормированном виде $\mathbf{W} = \{\mathcal{V}_{\epsilon} E_{\perp}, \mathcal{V}_{\mu} H_{\perp} \times z_0\}$, который удобен тем, что все компоненты \mathbf{W} имеют одинаковые единицы измерения. Здесь и в дальнейшем z_0 обозначает единичный вектор, направленный вдоль оси волновода, индексы \perp и z используются нами для обозначения поперечных и продольных компонент векторов, индексы τ и v — для обозначения проекций векторов на направления касательной и внешней нормали к контуру $\partial\Omega$ (рис. 1), символы \times и \cdot — для обозначения операций векторного и скалярного произведения векторов в смысле правил векторной алгебры, наличие индекса \perp в векторных дифференциальных операторах указывает на дифференцирование только по поперечным координатам; в операторах, действующих на \mathbf{W} , выделяются блоки, действующие на его электрическую $w_1 = \mathcal{V}_{\epsilon} E_{\perp}$ и магнитную $w_2 = \mathcal{V}_{\mu} H_{\perp} \times z$ части.

Будем считать, что потери в волноводе отсутствуют, ϵ и μ являются действительными строго положительными ограниченными бесконечно дифференцируемыми функциями поперечных координат, а граница $\Gamma = \partial\Omega \times z$ — идеальным металлом.

Исключая из уравнений Максвелла продольные компоненты поля, можно получить следующие две эквивалентные формулировки краевой задачи для \mathbf{W} :

задача A [6, 9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{W} + cJ \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \mathbf{W} + A \mathbf{W} = \mathbf{F}_A, \quad (1)$$

$$w_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{div}_{\perp} (\mu^{-1/2} w_2)|_{\partial\Omega} = 0,$$

задача B:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{W} + c^{-1} J \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \mathbf{W} - B \mathbf{W} = \mathbf{F}_B, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}_{\perp} (\epsilon^{1/2} w_1)|_{\partial\Omega} = 0, \quad w_2|_{\partial\Omega} = 0,$$

где

$$\mathbf{F}_A = \left\{ \mu^{-1/2} \left(\frac{\partial j_{\perp}}{\partial t} + \operatorname{grad}_{\perp} \frac{j_z^m}{\mu} \times z_0 \right), \quad \epsilon^{-1/2} \left(\frac{\partial j_{\perp}}{\partial t} \times z_0 + \operatorname{grad}_{\perp} \frac{j_z^s}{\epsilon} \right) \right\},$$

$$F_B = \left\{ \varepsilon^{1/2} \left(\operatorname{grad}_{\perp} \frac{\rho^3}{\varepsilon} - \frac{\partial J^m_{\perp}}{\partial z} \right), \mu^{1/2} \left(\operatorname{grad} \times_{\perp} \frac{\rho^m}{\mu} z_0 - \frac{\partial J^3_{\perp}}{\partial z} \right) \right\},$$

J^3, J^m — векторы плотности электрического и магнитного стороннего возбуждающего тока, ρ^3 и ρ^m — плотность электрических и магнитных зарядов, $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ — скорость света в безграничной среде с параметрами ε и μ , I — единичный оператор, а операторы J , A и B составлены из блоков

$$J_{11} = J_{22} = 0, \quad J_{12} = J_{21} = I, \quad A_{12} = A_{21} = 0, \quad A_{11} = \varepsilon^{-1/2} \operatorname{rot}_{\perp} \mu^{-1} \operatorname{rot}_{\perp} \varepsilon^{-1/2},$$

$$A_{22} = -\mu^{-1/2} \operatorname{grad}_{\perp} \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_{\perp} \mu^{-1/2}, \quad B_{12} = B_{21} = 0,$$

$$B_{11} = -\varepsilon^{1/2} \operatorname{grad}_{\perp} \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_{\perp} \varepsilon^{1/2}, \quad B_{22} = \mu^{1/2} \operatorname{rot}_{\perp} \mu^{-1} \operatorname{rot}_{\perp} \mu^{1/2}.$$

Задачи A и B будем понимать в обобщенном смысле [10, 11], отличающемся от классической постановки расширением класса рассматриваемых решений, в который в данном случае включаются все поля W с конечной энергией в любой ограниченной области внутри волновода. При этом операторы A и B следует понимать как самосопряженные расширения соответствующих «классических» операторов, определяемые соответственно на множествах функций

$$\tilde{H}_A(C^4, \Omega) = \tilde{H}_{A1}(C^2, \Omega) \otimes \tilde{H}_{A2}(C^2, \Omega)$$

и

$$\tilde{H}_B(C^4, \Omega) = \tilde{H}_{B1}(C^2, \Omega) \otimes \tilde{H}_{B2}(C^2, \Omega)$$

и задаваемые интегральными соотношениями

$$\begin{aligned} (A_{11}w, u) &= \int_{\Omega} \mu^{-1} (\operatorname{rot}_{\perp} \varepsilon^{-1/2} w) \cdot (\operatorname{rot}_{\perp} \varepsilon^{-1/2} u^*) d\Omega \quad \forall w, u \in \tilde{H}_{A1}(C^2, \Omega), \\ (A_{22}w, u) &= \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} (\operatorname{div}_{\perp} \mu^{-1/2} w) \cdot (\operatorname{div}_{\perp} \mu^{-1/2} u^*) d\Omega \quad \forall w, u \in \tilde{H}_{A2}(C^2, \Omega), \\ (B_{11}w, u) &= \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} (\operatorname{div}_{\perp} \varepsilon^{1/2} w) \cdot (\operatorname{div}_{\perp} \varepsilon^{1/2} u^*) d\Omega \quad \forall w, u \in \tilde{H}_{B1}(C^2, \Omega), \\ (B_{22}w, u) &= \int_{\Omega} \mu^{-1} (\operatorname{rot}_{\perp} \mu^{1/2} w) \cdot (\operatorname{rot}_{\perp} \mu^{1/2} u^*) d\Omega \quad \forall w, u \in \tilde{H}_{B2}(C^2, \Omega). \end{aligned} \tag{3}$$

Согласно (3) операторы A и B неотрицательны и определены, соответственно, на плотных в $L_2(C^4, \Omega)$ множествах векторнозначных функций $\tilde{H}_A(C^4, \Omega)$ и $\tilde{H}_B(C^4, \Omega)$, совпадающих с энергетическими пространствами [11] положительно определенных операторов $A+I$ и $B+I$, поскольку

$$a_{\min} \|W\|_1 \leq ((A + I)W, W) \leq a_{\max} \|W\|_1 \quad \forall W \in \tilde{H}_A(C^4, \Omega),$$

$$b_{\min} \|W\|_1 \leq ((B + I)W, W) \leq b_{\max} \|W\|_1 \quad \forall W \in \tilde{H}_B(C^4, \Omega),$$

где через $\|\cdot\|_1$ обозначена норма в пространстве С. Л. Соболева $W_2^1(C^4, \Omega)$, а постоянные $a_{\min} > 0$, $a_{\max} > 0$, $b_{\min} > 0$, $b_{\max} > 0$ зависят от Ω , ε и μ .

Верхняя оценка в этих неравенствах очевидна, нижняя вытекает из второго неравенства Корна [12].

Регулярность волновода вдоль оси z позволяет разложить фурьеобразы функций Грина задач A и B в ряд по распространяющимся вдоль z нормальным и присоединенным волнам [1, 2]

$$G(r_{\perp}, z, r'_{\perp}, z', \omega) = \sum_q \sum_{m=0}^Q \Psi_q^m(r_{\perp}, z - z', \omega) \times$$

$$\times \Phi_q^m(\mathbf{r}'_\perp, \omega) \exp[i\omega t - i\gamma_q(z-z')] ,$$

где $\Psi_q^m = \sum_{l=0}^m V_q^l(\mathbf{r}_\perp, \omega) [i(z'-z)]^{m-l} / (m-l)! — четырехкомпонентный комплексный вектор, называемый формой нормальной ($m=0$) или присоединенной ($m>0$) волны, γ_q и $V_q^l = \{\mathbf{v}_{1q}^l, \mathbf{v}_{2q}^l\}$ — СЗ и отвечающие ему собственный ($l=0$) и присоединенные к нему ($0 < l \leq Q$) векторы оператора $L_A = -\omega^2 I + \omega \gamma C + A$ с областью определения $H_A(C^4, \Omega)$ или оператора $L_B = -\gamma^2 I + \omega \gamma C^{-1} J - B$ с областью определения $\tilde{H}_B(C^4, \Omega)$; четырехкомпонентный комплексный вектор Φ_q^m представляется суперпозицией СПВ сопряженного оператора L_A^+ или L_B^+ , отвечающих СЗ γ_q^* , и совместно с вектором F_A или F_B задает амплитуду волны с формой Ψ_q^m ; число Q , зависящее от индекса q и частоты, называется длиной цепочки СПВ; под $\Psi_q^m \Phi_q^m$ понимается оператор T , действующий на вектор F по правилу $TF = (F, \Phi_q^m) \Psi_q^m$.$

По определению СПВ оператора L_A или L_B удовлетворяют цепочке уравнений

$$L(\gamma_q) V_q^l + \frac{\partial L(\gamma_q)}{\partial \gamma} V_q^{l-1} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L(\gamma_q)}{\partial \gamma^2} V_q^{l-2} + \dots = 0 , \\ V_q^{-1} = 0 , \quad V_q^{-2} = 0 \dots , \quad (5)$$

где под $L(\gamma_q)$ и $\partial^n L(\gamma_q) / \partial \gamma^n$ понимается один из операторов L_A или L_B и его частные производные по параметру γ при $\gamma = \gamma_q$.

Члены ряда (4) удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла и отвечают нормальным ($m=0$) или присоединенным ($m>0$) волнам [1-4]. Нормальными волнами могут быть бегущие (Ип. $\gamma_q=0$), за предельные ($\text{Re } \gamma_q=0$) или комплексные ($\text{Re } \gamma_q \neq 0$, Ип. $\gamma_q \neq 0$) волны. Формы нормальных волн совпадают с соответствующими собственными векторами V_q^0 и не зависят от z . В отличие от них формы присоединенных волн зависят от z : вблизи источника $\Psi_q^m \rightarrow V_q^m$, а при удалении от него они трансформируются, стремясь при $|z-z'| \gg 1$ к соответствующему собственному вектору $\Psi_q^m \rightarrow \text{const} \cdot V_q^0$. При этом полиномиальный рост по z формы присоединенной волны компенсируется экспоненциальным затуханием ее волнового множителя.

2. Система нормальных СПВ (НСПВ) и ее полнота. Переход от уравнений Максвелла к задачам A и B связан с дифференцированием уравнений в одном случае по времени t , в другом — по координате z . Очевидно, что уравнениям Максвелла удовлетворяют только те нормальные и присоединенные волны, которые строятся по СЗ и СПВ, лежащим в пересечении соответствующих множеств операторов L_A и L_B . Такие СЗ и СПВ будем называть нормальными (НСЗ и НСПВ). НСПВ

лежат в плотном в $L_2(C^4, \Omega)$ подпространстве $\tilde{H}_{AB}(C^4, \Omega) = \tilde{H}_A(C^4, \Omega) \cap \tilde{H}_B(C^4, \Omega)$. Если на $\partial\Omega$ равны нулю производные ε и μ по направлению нормали к $\partial\Omega$, то $\tilde{H}_{AB}(C^4, \Omega) = \tilde{H}_0(C^2, \Omega) \otimes H_0(C^2, \Omega)$, где $H_0(C^2, \Omega)$ включает в себя двухкомпонентные векторы, у которых касательная составляющая на $\partial\Omega$ удовлетворяет условию Дирихле, а нормальная составляющая на $\partial\Omega$ — условию Неймана.

Определим на $\tilde{H}_{AB}(C^4, \Omega)$ оператор $L_0 = L_B - c^{-2} L_A = \omega^2 c^{-2} I - \gamma^2 I - (c^{-2} A + B)$, представляющий собой линейную комбинацию операторов L_A и L_B . Входящий в L_0 оператор дифференцирования по поперечным координатам $c^{-2} A + B$ является строго эллиптическим [10, 11], а задача на СЗ и СПВ L_0 из-за диагонального вида его операторных коэффициентов распадается на две независимые задачи для двухкомпонент-

ных векторов \mathbf{v}_{kq}^t на СЗ и СПВ операторов $L_{kk} = \omega^2 c^{-2} I - \gamma^2 I - (c^{-2} A_{kk} + B_{kk})$, $k=1, 2$. С3 операторов L_{11} и L_{22} совпадают и являются НС3, а между СПВ операторов L_{kk} , $k=1, 2$, и НСПВ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Операторы L_{11} и L_{22} допускают те же оценки резольвент, что и оператор, изучавшийся в [7]. Повторение рассуждений из этой работы приводит к следующему утверждению.

Теорема 1. Спектр оператора L_{kk} , $k=1, 2$, дискретный и состоит из С3 конечной кратности; система СПВ оператора L_{kk} двукратно полна в $L_2(C^2, \Omega)$.

Смысл этой теоремы поясняют следующие соображения. Из симметрии уравнений Максвелла относительно времени и координаты z вытекает, что если γ_q есть отвечающее частоте ω НС3 с цепочкой НСПВ V'_q длины Q , то

а) на той же частоте ω число $-\gamma_q$ есть НС3 с цепочкой НСПВ вида $(-1)^l RV'_q$ длины Q ,

б) число γ_q есть НС3 на частоте $-\omega$ с цепочкой НСПВ вида RV'_q длины Q ,

в) на частоте ω^* число γ_q^* есть НС3 с цепочкой НСПВ вида $(V'_q)^*$ длины Q ,

где оператор R состоит из блоков $R_{11} = -R_{22} = I$, $R_{12} = R_{21} = 0$.

Таким образом, на любой частоте ω в системах СПВ операторов L_{11} и L_{22} каждый вектор повторяется как минимум два раза, отвечая С3 с противоположными знаками, чем и обусловлена двукратная полнота этих систем векторов.

Согласно теореме 1 любые две векторнозначные функции из $L_2(C^2, \Omega)$ можно разложить в ряды по половинам систем СПВ операторов L_{11} и L_{22} , в которых опущены повторяющиеся векторы. Любую пару СПВ операторов L_{11} и L_{22} с одинаковыми верхними индексами, отвечающими одному и тому же γ_q , можно представить с помощью двух НСПВ, отвечающих γ_q и $-\gamma_q$, из чего следует

теорема 2. Система НСПВ полна в пространстве четырехкомпонентных векторнозначных функций $L_2(C^4, \Omega)$.

3. Физический смысл операторов A , B и J и законы сохранения энергии и импульса. Из вида соответствующих задачам A и B уравнений следует, что С3 оператора A есть квадраты называемых критическими частот волновода ω_q^2 , на которых одно из НС3 обращается в нуль, С3 оператора $-B$ есть квадраты коэффициентов распространения γ_q на нулевой частоте. Неотрицательность операторов A и B приводит к выводу, что все критические частоты волновода действительны, а коэффициенты распространения на нулевой частоте являются чисто мнимыми.

Смысл оператора J поясняют следующие рассуждения. Пусть $\partial\varepsilon/\partial\nu=0$ и $\partial\mu/\partial\nu=0$ на $\partial\Omega$. Тогда множество $\tilde{H}_{AB}(C^4, \Omega)$, на котором определены НСПВ, разлагается в прямую сумму $\tilde{H}_{AB}(C^4, \Omega) = \tilde{H}^+(C^4, \Omega) \oplus \tilde{H}^-(C^4, \Omega)$, где множествам $\tilde{H}^\pm(C^4, \Omega)$ принадлежат векторы вида $\mathbf{W}^\pm = \{\mathbf{w}^\pm, \pm \mathbf{w}^\pm\}$, т. е. векторы, у которых поперечные компоненты электрического и магнитного полей связаны между собой так же, как и в плоской волне, распространяющейся в положительном или отрицательном направлении оси z в безграничной среде с параметрами ε и μ , $\mathbf{E}_\perp^\pm = \pm \sqrt{\mu/\varepsilon} \mathbf{H}_\perp \times \mathbf{z}_0$. Проецирование $\tilde{H}_{AB}(C^4, \Omega)$ на $\tilde{H}^\pm(C^4, \Omega)$ осуществляется проекторами P^\pm , задаваемыми блоками $P_{11}^\pm = P_{22}^\pm = \pm P_{12}^\pm = \pm P_{21}^\pm = (1/2)I$, причем $J = P^+ - P^-$. Оператор J задает пространство с индефинитной метрикой $(J \mathbf{W}, \mathbf{W})$ [13, 14].

Для поля $\mathbf{W} = \{\bar{V}_\epsilon \mathbf{E}_\perp, \bar{V}_\mu \mathbf{H}_\perp \times \mathbf{z}_0\}$, удовлетворяющего условиям причинности (равно нулю для $t < 0$) и излучения ($|\mathbf{W}| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $t = \text{const}$), квадратичные формы

$$\mathcal{E}_\perp = \frac{1}{2} (\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon |\mathbf{E}_\perp|^2 + \mu |\mathbf{H}_\perp|^2) d\Omega,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z = \frac{1}{2} \left(A \int_0^{t'} \mathbf{W} dt, \int_0^{t'} \mathbf{W} dt \right) &= \frac{1}{2} \left(B \int_{\pm\infty}^{z'} \mathbf{W} dz, \int_{\pm\infty}^{z'} \mathbf{W} dz \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon |\mathbf{E}_z|^2 + \mu |\mathbf{H}_z|^2) d\Omega, \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} (c J \mathbf{W}, \mathbf{W}) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} [\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^*] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega,$$

$$P = \frac{1}{2} (c^{-1} J \mathbf{W}, \mathbf{W}) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \epsilon \mu [\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^*] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega$$

имеют следующий смысл: \mathcal{E}_\perp и \mathcal{E}_z — вклад поперечных и продольных составляющих поля в плотность энергии, S — поток энергии через сечение волновода $z = z'$, P — плотность z -й компоненты импульса поля. Проинтегрировав вне занимаемой источником области, которую будем считать конечной, расположенной между плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, $z_1 < z_2$, уравнение (1) по t от нуля до t' , уравнение (2) по z от $-\infty$ (если $z' < z_1$) или от $+\infty$ (если $z' > z_2$) до z' , и образовав скалярные произведения полученных уравнений с \mathbf{W} , приходим к соотношениям

$$\frac{\partial (\mathcal{E}_\perp + \mathcal{E}_z)}{\partial t} + \frac{dS}{dz} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial (\mathcal{E}_\perp - \mathcal{E}_z)}{\partial z} + \frac{dP}{dt} = 0, \quad (7)$$

которые представляют собой, соответственно, законы сохранения энергии и импульса для мгновенных составляющих электромагнитного поля.

Применимально к нормальным и присоединенным волнам, являющимся характеристиками поля в комплексном пространстве фурье-изображений, при $\omega_q \neq 0$ квадратичные формы

$$\bar{\mathcal{E}}_{\perp q}^\iota = \frac{1}{4} (\Psi_q^\iota, \Psi_q^\iota) \exp(2 \operatorname{Im} \gamma_q z'),$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{zq}^\iota = \frac{1}{4 |\omega_q|^2} (A \Psi_q^\iota, \Psi_q^\iota) \exp(2 \operatorname{Im} \gamma_q z'),$$

$$\bar{S}_q^\iota = \frac{1}{4} (c J \Psi_q^\iota, \Psi_q^\iota) \exp(2 \operatorname{Im} \gamma_q z'),$$

$$\bar{P}_q^\iota = \frac{1}{4} (c^{-1} J \Psi_q^\iota, \Psi_q^\iota) \exp(2 \operatorname{Im} \gamma_q z')$$

имеют смысл соответствующих энергетических характеристик волн

в плоскости $z=z'$, усредненных за период колебания. В случае нормальных волн в отсутствие полиномиальной зависимости от z формы волны при $\gamma_q \neq 0$ их можно дополнить соотношением

$$\bar{\mathcal{E}}_{zq}^0 = \frac{1}{4|\gamma_q|^2} (B\Psi_q^0, \Psi_q^0) \exp(2\operatorname{Im}\gamma_q z') .$$

Образовав скалярные произведения (5) для $L=L_A$ и $L=L_B$ с вектором V_q^l , получаем при $l=0$

$$\begin{aligned} -\omega_q \bar{\mathcal{E}}_{\perp q}^0 + \gamma_q \bar{S}_q^0 + \omega_q^* \bar{\mathcal{E}}_{zq}^0 &= 0, \\ -\gamma_q \bar{\mathcal{E}}_{\perp q}^0 + \omega_q \bar{P}_q^0 - \gamma_q^* \bar{\mathcal{E}}_{zq}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений (8), рассматриваемая как однородная система линейных уравнений относительно неизвестных ω_q и γ_q , имеет нетривиальное решение при условии

$$\bar{S}_q^0 \bar{P}_q^0 = (\bar{\mathcal{E}}_{\perp q}^0)^2 - (\bar{\mathcal{E}}_{zq}^0)^2 ,$$

связывающем между собой средние за период энергетические характеристики нормальной волны.

Аналогичным образом можно найти соотношения между средними за период энергетическими характеристиками присоединенных волн, которые оказываются значительно сложнее (8)—в них входят также характеристики других присоединенных и нормальных волн, отвечающих данному НСЗ.

4. Ортогональность и перенос энергии нормальными и присоединенными волнами. Обозначим через V_q^l цепочку НСПВ длины Q , отвечающую НСЗ γ_q на частоте $\omega=\omega_q$, через V_p^k —цепочку НСПВ длины p , отвечающую НСЗ γ_p на частоте $\omega=\omega_p$, и через U_p^k —цепочку длины p НСПВ сопряженного оператора L^+ , для которой в рассматриваемом случае справедливо $U_p^k = (V_p^k)^*$. Некоторое НСЗ может иметь несколько линейно независимых собственных векторов, каждый из которых, в свою очередь, может иметь цепочку присоединенных векторов. В этом случае удобно, как это и предполагалось выше, считать, что все НСЗ имеют не более одного линейно независимого собственного вектора, и допустить возможность равенства значений двух или более таких НСЗ, которые будем обозначать разными индексами.

В прикладных задачах о возбуждении и дифракции волн в волноводе используется свойство ортогональности двух НСПВ, под которым для электромагнитных волн понимается равенство нулю величины [3]

$$(cJV_q^l, U_p^k) = \int_{\Omega} [\mathbf{E}_{\perp q}^l \times \mathbf{H}_{\perp p}^k + \mathbf{E}_{\perp p}^k \times \mathbf{H}_{\perp q}^l] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega ,$$

где учтено $U_p^k = (V_p^k)^*$.

Справедливость этого свойства доказана [3] для отвечающих одной и той же частоте $\omega_p=\omega_q$ и неодинаковым НСЗ $\gamma_p \neq \gamma_q$ нормальных волн ($l=k=0$). Рассмотрим, выполняется ли это свойство для любых двух НСПВ, отвечающих одной частоте. Для этого воспользуемся следующими, называемыми обобщенными соотношениями ортогональности, интегральными тождествами

$$\begin{aligned} (\omega_q^2 - \omega_p^2)(V_q^l, U_p^k) + (\omega_p \gamma_p - \omega_q \gamma_q)(cJV_q^l, U_p^k) + \\ + \omega_p(cJV_q^l, U_p^{k-1}) - \omega_q(cJV_q^{l-1}, U_p^k) = 0 , \end{aligned}$$

(9)

$$(\omega_q^2 - \omega_p^2)(c^{-1}JV_q^l, U_p^k) + (\gamma_p^2 - \gamma_q^2)(cJV_q^l, U_p^k) + 2\gamma_p(cJV_q^l, U_p^{k-1}) - 2\gamma_q(cJV_q^{l-1}, U_p^k) + (cJV_q^l, U_p^{k-2}) - (cJV_q^{l-2}, U_p^k) = 0,$$

которые можно получить, исходя из соотношения (5), вида операторов L_A и L_B и вытекающих из определения операторов A и B тождеств

$$B = c^{-1}JAJc^{-1}, \quad AB = BA = 0.$$

Полагая в (9) $\omega_p = \omega_q$, приходим к выводу, что

$$(cJV_q^l, U_p^k) = 0 \quad (10)$$

для любых l и k при $\gamma_q \neq \gamma_p$ и для $l+k < \max(Q, P)$ при $\gamma_q = \gamma_p$.

При $\gamma_q = \gamma_p$ имеет место также равенство

$$(cJV_q^l, U_p^{k-1}) = (cJV_q^{l-1}, U_p^k). \quad (11)$$

Соотношения (10), (11) используются ниже при выводе формул для амплитудных коэффициентов волн, возбуждаемых источником (разд. 6). Кроме того, с их помощью удается решить вопрос о переносе энергии нормальными и присоединенными волнами.

Как отмечалось в разд. 2, на действительной частоте для всякого НСЗ γ_p можно указать НСЗ γ_p^* , которое будем обозначать индексом p^* , так что $\gamma_{p^*} = \gamma_p^*$. Причем $V_{p^*}^k = (V_p^k)^* = U_p^k$, и согласно (10), (11) имеем

$$(cJV_q^l, V_p^k) = \delta_{qp^*} N_q^{l+k}, \quad (12)$$

где

$$N_q^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \kappa < Q \\ \int_{\Omega} [E_{\perp q}^0 \times H_{\perp q}^* + E_{\perp q}^* \times H_{\perp q}^0] \cdot z_0 d\Omega \neq 0, & \text{если } \kappa \geq Q \end{cases},$$

δ_{qp^*} — символ Кронекера.

Строго говоря, правая часть (12) может отличаться от нуля не только для $q = p^*$, но и для всех индексов ξ , таких, что $\gamma_\xi^* = \gamma_q$. Однако собственные векторы, отвечающие одинаковым НСЗ, всегда можно выбрать (ортогонализировать) так, чтобы выполнялось (12).

Таким образом, согласно (12) перенос энергии в волноводе может осуществляться отвечающими действительным НСЗ бегущими нормальными и присоединенными волнами ($q^* = q$), у которых верхний индекс $m \geq Q/2$, или парами энергетически неортогональных

а) присоединенных волн, отвечающих одному и тому же действительному НСЗ γ_q при условии, что сумма их верхних индексов не меньше Q ,

б) запредельных волн, одна из которых отвечает НСЗ $i|\gamma_q|$, другая — НСЗ $\gamma_{q^*} = -i|\gamma_q|$, а сумма их верхних индексов не меньше Q ,

в) комплексных волн, одна из которых отвечает НСЗ γ_q , другая — НСЗ $\gamma_{q^*} = \gamma_q^*$, а сумма их верхних индексов не меньше Q .

Принимая во внимание (12), находим что средний за период поток энергии, переносимый суперпозицией нормальных и присоединенных волн $W = \sum_q \sum_{m=0}^Q D_q^m \Psi_q^m \exp\{i\omega t - \gamma_q z\}$ в плоскости $z = z'$, где $\Psi_q^m = V_q^m$, дается соотношением

$$\bar{S} = \frac{1}{4} (cJW, W) = \frac{1}{4} \sum_q \sum_{m=0}^Q \sum_{n=-Q-m}^Q \operatorname{Re}(D_q^m D_{q^*}^n N_q^{m+n}), \quad (13)$$

при выводе которого учтено очевидное соотношение $N_q^* = N_{q^*}^{**}$.

Поскольку рассматриваемая суперпозиция волн удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, то по закону сохранения энергии переносимый ею поток энергии не зависит от z и формула (13) задает его значение в произвольном сечении волновода $z=\text{const}$.

5. Закон парциальных мощностей. Уравнение (5) в явной форме задает называемую дисперсионной зависимость НСЗ γ_q от частоты. Пусть при некотором значении частоты $\omega = \omega_0$ НСЗ равно γ_q^0 и имеет цепочку НСПВ длины Q . Тогда в окрестности γ_q^0 обратная к дисперсионной функция $\omega(\gamma_q)$ является аналитической функцией вида

$$\omega(\gamma_q) = \omega_0 + \sum_{k=Q+1}^{\infty} \xi_k (\gamma_q - \gamma_q^0)^k, \quad \xi_{Q+1} \neq 0,$$

и можно построить аналитически зависящую от γ_q вектор-функцию $\mathbf{V}_q^0(\gamma_q)$, которая для любого γ_q , лежащего в окрестности γ_q^0 , является отвечающим γ_q нормальным собственным вектором, причем

$$\mathbf{V}'_q(\gamma_q^0) = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l \mathbf{V}_q^0(\gamma_q^0)}{\partial \gamma_q^l}.$$

Дифференцируя (9) $Q+1$ раз по γ_q и переходя затем к пределу при $\omega_p \rightarrow \omega_q$, $\gamma_p \rightarrow \gamma_q$, получим выражение для первого ненулевого коэффициента ξ_{Q+1} в разложении функции $\omega(\gamma_q)$:

$$\xi_{Q+1} = \begin{cases} \frac{\gamma_q N_q^Q}{\omega_q (c^{-1} J \mathbf{V}_q^0, \mathbf{U}_q^0)} = \frac{\gamma_q \int_{\Omega} [\mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0 + \mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega}{2\omega_q \int_{\Omega} \epsilon \mu [\mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega}, & \gamma_q \neq 0. \\ \frac{N_q^Q}{2\omega_q (c^{-1} J \mathbf{V}_q^1, \mathbf{U}_q^0)} = \frac{\int_{\Omega} [\mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0 + \mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega}{2\omega_q \int_{\Omega} \epsilon \mu [\mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^1 + \mathbf{E}_{\perp q}^1 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega}, & \gamma_q = 0 \end{cases}$$

Для волн с $Q=0$ это соотношение принимает вид

$$\xi_1 = \frac{d\omega_q}{d\gamma_q} = \frac{\gamma_q \int_{\Omega} [\mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega}{\omega_q \int_{\Omega} \epsilon \mu [\mathbf{E}_{\perp q}^0 \times \mathbf{H}_{\perp q}^0] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega}, \quad \gamma_q \neq 0,$$

справедливый для всех типов нормальных волн: бегущих, в случае которых оно известно как закон парциальных мощностей [15], запредельных и комплексных.

6. Возбуждение нормальных и присоединенных волн. Найдем формулы для векторов Φ_q^m и тем самым полностью определим функцию Грина (4). Сделаем это для задачи A.

Положим в (1) $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_0(r_{\perp}) \exp(i\omega t) \delta(z-z')$ и в соответствии с методом нормальных волн запишем решение задачи A в виде

$$\mathbf{W}_0 = \sum_q \sum_{m=0}^Q D_q^m \Psi_c^m(r_{\perp}, z-z', \omega) \exp(i\omega t - i\gamma_q(z-z')), \quad (14)$$

где D_q^m — постоянные коэффициенты (амплитуды волн), $\delta(z-z')$ — дельта-функция Дирака.

Корректная постановка задачи включает в себя условия излучения, согласно которым [4] возбуждаемое поле \mathbf{W}_0 должно представляться суперпозицией волн, уносящих энергию от источника и экспоненциально затухающих при $|z| \rightarrow \infty$ нормальных и присоединенных волн. Условию излучения не удовлетворяют присоединенные волны, отвечающие дей-

ствительным γ_q , и соответствующие таким γ_q нормальные волны, имеющие нулевой средний за период поток энергии через сечение волновода. В присутствии этих волн в спектре волновода решение (14) может не существовать. То же самое имеет место, например, в теории линейных электрических цепей при попытке возбудить идеальным источником колебательный контур на его резонансной частоте. Не случайно частоты, на которых действительные НСЗ имеют цепочки НСПВ ненулевой длины, называются резонансными [8, 16]. Очевидно, что в указанных случаях следует более точно сформулировать условия некорректно поставленной задачи: учсть реакцию поля на источник [6], потерю в волноводе и т. п.

Условимся волны, используемые в представлении поля при $z > z'$, обозначать положительными индексами q , а при $z < z'$ — отрицательными индексами q . Соответственно суммирование в (4) и (14) при $z > z'$ следует проводить по положительным q , а при $z < z'$ — по отрицательным q . С учетом этого, подставив (14) в (1) и приняв во внимание $\Psi_q^m(r_\perp, z=z', \omega)=V_q^m(r_\perp, \omega)$, получаем

$$i\omega c J \left(\sum_{q>0}^0 \sum_{m=0}^0 D_q^m V_q^m - \sum_{q<0}^0 \sum_{m=0}^0 D_q^m V_q^m \right) = F_0. \quad (15)$$

Образовав скалярные произведения (15) с векторами $U_q^m = (V_q^m)^*$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений, решив которую с помощью (10), (11), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов D_q^m , а отсюда, поскольку согласно (4) $D_q^m = (F_0, \Phi_q^m)$ и для векторов Φ_q^m :

$$\begin{aligned} \Phi_q^Q = & -i \frac{\text{sign}(q)}{\omega N_q^Q} U_q^0, \quad \Phi_q^{Q-m} = -\frac{1}{N_q^Q} \times \\ & \times \left\{ i \frac{\text{sign}(q)}{\omega} U_q^m + \sum_p \sum_{k=0}^{m-1} (cJV_p^{p-k}, U_q^m) \Phi_p^{p-k} \right\}, \quad m=1, 2, \dots, Q. \end{aligned} \quad (16)$$

При выводе (16) считалось, что отвечающие равным НСЗ собственные векторы выбраны так, чтобы выполнялось условие $(cJV_q^Q, U_q^0) = \delta_{qp} N_q^Q$. Индекс p в (16) пробегает все значения, для которых $\gamma_p = \gamma_q$, в том числе и само значение q . Если дополнительно потребовать, чтобы отвечающие равным НСЗ цепочки НСПВ удовлетворяли условию $(cJV_q^l, U_p^k) = \delta_{qp} N_q^{l+k}$, что всегда можно сделать [17], то в (16) исчезает суммирование по p , вместо которого следует просто положить $p=q$. В этом случае нетрудно указать условия, когда ряд (14) состоит только из одного члена — все коэффициенты, кроме D_q^m , равны нулю. Для этого достаточно, чтобы $F_0 = \text{const} \times cJV_q^{Q-m}$.

В отсутствие z -й компоненты постоянного стороннего электрического тока и поперечных компонент постоянного стороннего магнитного тока результат действия оператора (4) на F_A при $\omega \rightarrow 0$ оказывается конечным.

ЛИТЕРАТУРА

- Краснушкин П. Е. // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 5. С. 1014.
- Голичев И. И., Краснушкин П. Е. // ТМФ. 1971. Т. 10. № 3. С. 370.
- Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М: Радио и связь, 1988.
- Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М.: Гос. ун-т, 1983.
- Самарский А. А., Тихонов А. Н. // ЖТФ. 1947. Т. 17. № 11. С. 1283; 1947. Т. 17. № 12. С. 1431; 1948. Т. 18. № 7. С. 971.
- Краснушкин П. Е., Моисеев Е. И. // ДАН СССР. 1982. Т. 264. № 5. С. 1123.

7. Костюченко А. Г., Оразов М. Б. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 6 — М.: Гос. ун-т, 1981. С. 97.
8. Зильберглайт А. С., Колилевич Ю. И. Спектральная теория регулярных волноводов. — Л.: ФТИ, 1983.
9. Фелсен Л., Маркувич Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. Т. 1.
10. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
11. Михлин С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968.
12. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974. С. 77.
13. Функциональный анализ / Под. ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972.
14. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индиффинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
15. Семенов Н. А. // Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8. № 8. С. 1467; 1965. Т. 10. № 8. С. 1533.
16. Зильберглайт А. С. Препринт ФТИ № 990. Л., 1985.
17. Келдыш М. В. // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 15.

Московский институт
электронной техники

Поступила в редакцию
27 декабря 1988 г.

THE NORMAL WAVE PROPERTIES IN A SCREENED INHOMOGENEOUS WAVEGUIDES

A. V. Gureev

The problem of electromagnetic wave excitation in screened inhomogeneous waveguides is considered. The normal wave method is used. The properties of a vector system for the normal and associative wave constructing are investigated

ПЕРЕЧЕНЬ СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛОВ, ПЕРЕИЗДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ В ПОЛНОМ ОБЪЕМЕ (Продолжение)

77. Известия ВУЗ. Радиоэлектроника
78. Известия ВУЗ. Физика
79. Измерительная техника
80. Иммунология
81. Инженерно-физический журнал
82. Квантовая электроника
83. Кибернетика
84. Кибернетика и вычислительная техника
85. Кинетика и физика небесных тел
86. Кинетика и катализ
87. Кокс и химия
88. Коллоидный журнал
89. Координационная химия
90. Космические исследования
91. Краткие сообщения по физике ФИАН им. Лебедева
92. Кристаллография
93. Лесоведение
94. Литовский математический сборник
95. Литовский физический сборник
96. Литология и полезные ископаемые
97. Магнитная гидродинамика
98. Математические заметки
99. Математический сборник
100. Машиноведение
101. Медицинская техника
102. Металловедение и термическая обработка материалов
103. Металлургия
104. Метеорология и гидрология
105. Механика композитных материалов
106. Микробиология
107. Микроэлектроника
108. Молекулярная биология
109. Научно-техническая информация. Серии 1 и 2
110. Нейрофизиология
111. Огнеупоры
112. Океанология
113. Онтогенез

(Продолжение см. с. 969)

ПОДАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ПРОВОДИМОСТИ КОАКСИАЛЬНОГО ИОННОГО ДИОДА ИМПУЛЬСНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ СПИРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

*В. М. Гулько, К. И. Козловский, Н. Ф. Коломиец,
А. М. Кучер, А. С. Цыбин, А. Е. Шиканов*

Показана возможность получения высокого кпд ускорения ионов в коаксиальном диоде с внутренним плазменным анодом и системой подавления электронов магнитным полем, создаваемым при прохождении импульса тока микросекундной длительности по спиральной линии, расположенной между анодом и катодом. При ускоряющем напряжении ~ 200 кВ, токе ускоренных ионов дейтерия ~ 15 А и длительности импульса $\sim 0,5$ мкс достигнут кпд ускорения ионов $\sim 70\%$.

Метод магнитной изоляции электронов в импульсных ионных диодах позволяет достигать значительных кпд ускорения ионов ($\geq 50\%$) [1], а в малогабаритных диодных системах (характерные размеры ≤ 10 см), применяемых для генерации нейтронов, дает возможность получать значительные ионные токи (≥ 100 А) при сравнительно небольшой энергии (~ 10 Дж), запасаемой в емкостных накопителях [2]. Для получения анодной плазмы в таких системах использовались пробой по поверхности диэлектрика [1], а также вакуумно-дуговой разряд [3]. В работах [4, 5] были предложены и исследованы диодные системы коаксиальной геометрии с лазерно-плазменным анодом, оказавшиеся наиболее перспективными для генерации нейтронных полей в импульсно-периодическом режиме с частотой следования импульсов 25 Гц. При этом, как показали экспериментальные исследования [5], можно ожидать, что ресурс диода, определяемый состоянием плазмообразующей дейтеросодержащей мишени, составит $\sim 10^7$ — 10^8 срабатываний.

В работах [2—5] изолирующее магнитное поле являлось стационарным и формировалось с помощью соленоидов или постоянных кольцевых магнитов. При этом в прикатодной области удавалось достигать значений индукции магнитного поля B , близких к критическому, когда параметр $\beta = \sqrt{e/8m_0} \cdot B \cdot R_k / \sqrt{U_0}$ (e — заряд и масса электрона, R_k — радиус катода, U_0 — амплитуда ускоряющего импульса) принимает значение $\beta_{kp} = R_k \cdot R_a / (R_k^2 - R_a^2)$ (R_a — максимальный радиус плазменного анода). Удовлетворение этого условия требует для малогабаритных диодов с $R_k \approx 1,5$ см, $U_0 \approx 150$ кВ использования постоянных кольцевых магнитов с внешним диаметром ~ 10 см или соленоидов, питаемых от накопителей энергии большой мощности, обеспечивающих получение магнитных полей с индукцией $\approx 0,5$ Тл и длительностью ~ 1 мс. Такая длительность импульса требуется для обеспечения проникновения магнитного поля соленоида внутрь цилиндрического катодного электрода, являющегося, как правило, стенками вакуумной камеры, однако приводит к большим затратам энергии, неприемлемым для малогабаритных диодов, например, для запаянных ускорительных трубок [2], работающих в частотном режиме повторений импульсов.

В настоящей работе исследуется возможность использования для подавления электронной проводимости коаксиальной диодной системы магнитного поля, созданного между внутренним плазменным анодом

1 и катодом 2 с помощью спиральной линии 3 (рис. 1). Оценки показали, что при длительности импульса тока ~ 1 мкс, радиусе спирали $R_c \approx 2,5$ см и шаге спирали $\sim 0,5$ см ее магнитное поле является квазистационарным.

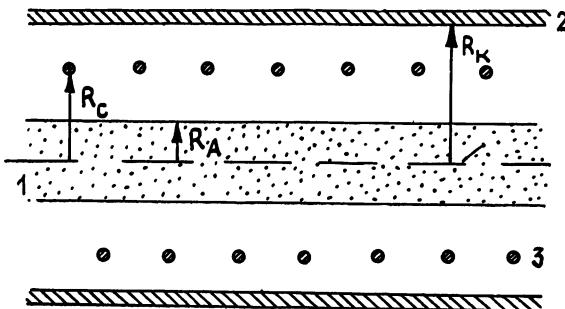


Рис. 1.

Согласно принципу суперпозиции вектор-потенциал $A(\mathbf{r}, t)$ магнитного поля в рассматриваемой диодной системе со спиралью, по которой протекает ток $I(t)$ (t — время), с учетом экранировки катодом, определяется суммой

$$A(\mathbf{r}, t) = A_s(\mathbf{r}, t) + A_0(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

вектор-потенциалов магнитного поля спирали в отсутствие экрана — A_0 и поля, создаваемого токами, протекающими по катоду, — A_s .

При этом

$$A_s(\mathbf{r}, t) = \frac{w\mu_0 r e_\varphi}{2} \left(\frac{R_c}{R_k} \right)^2 \int_0^t d\xi \frac{dI}{d\xi} \exp \left\{ \frac{2(\xi - t)}{R_k V_p / \mu_0 \tau_n} \right\}, \quad (2)$$

e_φ, r — азимутальный орт и радиус в цилиндрической системе координат, w — число витков спирали на единицу длины, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, ρ — удельное сопротивление материала катода, τ_n — характерное время нарастания импульса тока.

Анализ на ЭВМ, выполненный с учетом (1), (2), показал, что в области, прилегающей к катоду, структура поля соответствует «магнитному конденсатору», когда поля от тока спирали и от индукционного тока, наведенного на катоде, складываются. В результате, в области $r < R_c$ магнитное поле монотонно спадает к оси диода примерно в два раза. Такая же степень спада магнитного поля (в два раза) была получена экспериментально, путем измерений с помощью индукционных датчиков, для используемых в последующих опытах катода и спирали, выполненной из вольфрамовой проволоки диаметром $d = 1$ мм, имеющей 12 витков, диаметр $2R_c = 5$ см и длину $l = 6$ см. Радиус катода составлял $R_k = 3,2$ см. С помощью автономного источника тока по спирали пропускался импульс тока амплитудой до 3,5 кА.

Следует отметить, что наличие спада магнитного поля к оси диода благоприятствует процессу поперечного разлета плазмы и вытягивания из нее дейtronов, поскольку взаимодействие диамагнитного тока электронов в плазме с магнитным полем препятствует расширению плазменного облака, а в случае сильного поля возможно и замагничивание плазмы по ионному компоненту. За счет краевого эффекта и частичного сдвига по фазе между максимумами полей, создаваемых токами спирали и катода, поле на оси всегда отлично от нуля и имеет в области, прилегающей к анодному электроду, значение, достаточное для эффективного формирования плазменной струи [6].

Наличие магнитной изоляции электронов в области ($R_c < r < R_k$

$0 < z < l$), где электрическое поле диода экранируется спиралью, соответствует условию

$$\min_{z \in [0, l]} \left| A_\varphi(R_k) - \frac{R_c}{R_k} A_\varphi(R_c) \right| \geq \frac{m_0 c}{e}, \quad (3)$$

следующему из теоремы Буша [1], в котором z — текущая координата вдоль оси, отрезок $[0, l]$ ограничивает апертуру ускоряемого ионного потока, c — скорость света в вакууме.

В исследуемой диодной системе источником электронной проводимости при больших напряженностях ускоряющего поля становится и сама спираль. Поэтому при выборе величины тока I , протекающего по спирали, наряду с (3) должно учитываться и условие на магнитную изоляцию вблизи проводника спирали. Оценку сверху для тока I можно получить из условия

$$I > \frac{I_0 \sqrt{2eU_0/m_0c^2}}{\ln 2(R_c - R_a)/d}, \quad (4)$$

в котором $I_0 = 4\pi\epsilon_0 m_0 c^3/e = 17$ кА, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Это условие следует из теоремы Буша, для электрона, движущегося в поле проводника диаметром d с током I , при удовлетворении требования равенства нулю поперечного импульса электрона вблизи анодной поверхности [1]. Расчеты показали, что условие (4) более сильное, чем условие (3). При проведении этих расчетов максимальное значение R_a оценивалось путем решения дифференциального уравнения, описывающего движение границы плазменного анода—диода, так же как в работе [7] для сферического диода с лазерно-плазменным анодом.

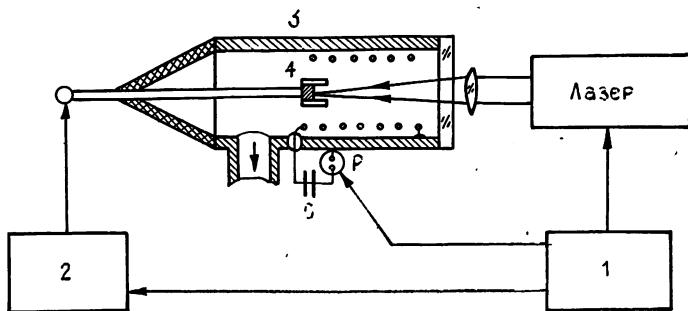


Рис. 2.

Схема экспериментальной установки:

1 — блок управления; 2 — источник ускоряющего напряжения; 3 — вакуумная камера; 4 — анод с лазерной мишенью.

На рис. 2 показана схема эксперимента по подавлению электронной проводимости в рассматриваемом диоде посредством пропускания импульса тока микросекундной длительности через спиральную линию. Параметры экспериментальной установки следующие: энергия лазерного импульса ~ 30 мДж, его длительность на полувысоте ~ 12 нс, диаметр пятна фокусировки излучения на лазерной мишени из TiD равен $\sim 0,4$ мм, емкость $C = 3$ мкФ, зарядное напряжение составляло 0,5—3,5 кВ. За счет экранировки катодом индуктивность спирали снижалась примерно в 1,5—2 раза. Период колебаний тока в спирали составил 15 мкс.

Эксперимент показал, что эффективная изоляция электронного компонента в диоде достигается при токе по спирали $\sim 1,5$ —2,0 кА. Работа диода практически не изменялась при достижении этих значений тока на фронте или спаде импульса.

На рис. 3 приведены характерные осциллограммы импульса уско-

ряющего напряжения при различных режимах диода. Амплитуда импульса ускоряющего напряжения (осциллограмма 1) составляет без наличия лазерной плазмы как при пропускании тока по спирали, так и без него ~ 160 кВ. При наличии плазмы и изолирующего магнитного поля спиралей амплитуда импульса ускоряющего напряжения снижалась до ~ 120 кВ (осциллограмма 2). С плазмой, но без тока в спиралях амплитуда ускоряющего напряжения в момент подхода границы лазерной плазмы к виткам спиралей, отмечаемого максимумом тока в диоде, снижалась до ~ 40 кВ (осциллограмма 3).

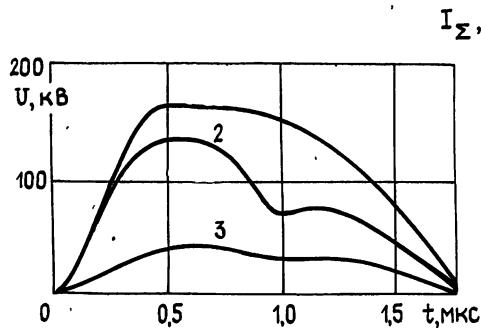


Рис. 3.

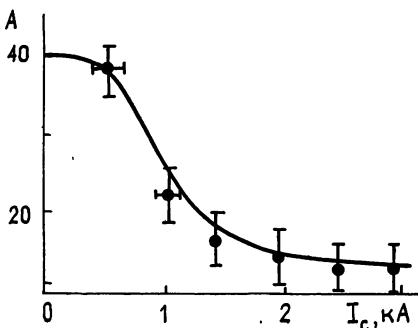


Рис. 4.

На рис. 4 приведена зависимость полного тока диода I_{Σ} от тока в спиральной линии I_c , показывающая динамику подавления тока электронов с катода и со спиралью. Оценка кпд исследуемого диода $\eta = -I_i/(I_i + I_c)$ основывалась на том, что коэффициент вторичной электронной эмиссии в нашем случае приблизительно равен четырем [8], при этом уменьшение полного тока I_{Σ} с 40 А до 10—12 А предполагает уменьшение электронной составляющей полного тока в пределах от 8 до 16 раз, поскольку ток ионов практически не уменьшается. Последнее заключение основывается на том, что выход нейтронов за импульс на реакции $D+D$ (полоски из дейтерированного полиэтилена размещались на катоде) не уменьшался. Поэтому кпд диода лежит в пределах 0,65—0,80 и может быть принят равным 0,70. Малый расход энергии на формирование требуемого изолирующего магнитного поля и высокий кпд диода позволили без особых затруднений добиться работы диода с частотой следования импульсов 12,5 Гц.

Таким образом, предлагаемая диодная система с «внутренней» магнитной изоляцией электронного компонента представляется существенно более эффективной применительно к малогабаритным коаксиальным диодам с плазменным анодом. Полученные результаты позволяют рассчитывать на использование ускоряющего напряжения с амплитудой до ~ 1 МВ в рассматриваемых малогабаритных ускорительных системах. Кроме того, использование микросекундной магнитной изоляции позволяет уменьшить энергозатраты как на омические потери, так и на потери из-за рассеяния магнитного поля, что также немаловажно при создании малогабаритных ускорителей ионов или для достижения высокой частоты следования импульсов.

В заключение авторы благодарят Зубкова Н. В. и Зражевского В. А. за помощь при подготовке и проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

- Быстрицкий В. М., Диденко А. Н. Мощные ионные пучки. — М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 62.
- Цыбин А. С., Шиканов А. Е. // Изв. вузов. Физика. 1985. Т. 28. № 8. С. 3.
- Давыдов А. Г., Дубинский В. А., Завада Н. И. и др. — Авторское свидетельство СССР № 244520, Б. И. 1969. № 18 С. 72.
- Беспалов Д. Ф., Козловский К. И. и др. — Авторское свидетельство СССР № 766048, Б. И. 1980. № 35. С. 340.
- Быковский Ю. А., Козловский К. И., Козырев Ю. П. и др. // Физика плазмы. 1981. Т. 7. Вып. 5. С. 1024.

6. Козловский К. И., Козырев Ю. П., Щебин А. С. // Физика плазмы. 1980 Т. 6. Вып. 1. С. 69.
 7. Шиканов А. Е. // Изв. вузов. Физика. 1988. Т. 31. № 2. С. 67.
 8. Арифов У. А. Взаимодействие атомных частиц с поверхностью твердого тела.— М.: Наука, 1968.

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
4 сентября 1989 г.

THE ISOLATION OF THE ELECTRON CONDUCTIVITY OF COAXIAL
ION DIODE BY THE PULSED MAGNETIC FIELD OF A SPIRAL LINE

V. M. Gul'ko, K. I. Kozlovskij, N. F. Kolomiets,
A. M. Kucher, A. S. Tsybin, A. E. Shikanov

The possibility is demonstrated of obtaining a high efficiency of ion accelerating in a coaxial diode with an internal plasma anode and a magnetic electron isolation system produced as a microsecond current pulse passes through the spiral line located between the anode and the cathode. At the accelerating voltage of ~200 kV, at the current of accelerated deuterium ions of ~15A, at the pulse duration of 0,5 ms, the ion acceleration efficiency of ~70% is achieved.

ПЕРЕЧЕНЬ СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛОВ,
ПЕРЕИЗДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ В ПОЛНОМ ОБЪЕМЕ
(Продолжение)

114. Оптика и спектроскопия
115. Оптико-механическая промышленность
116. Основания, фундаменты и механика грунтов
117. Палеонтологический журнал
118. Письма в «Астрономический журнал»
119. Письма в «Журнал технической физики»
120. Порошковая металлургия
121. Приборы и техника эксперимента
122. Прикладная биохимия и микробиология
123. Прикладная механика
124. Прикладная математика и механика
125. Проблемы освоения пустынь
126. Проблемы передачи информации
127. Проблемы прочности
128. Программирование
129. Радиотехника
130. Радиотехника и электроника
131. Радиохимия
132. Сварочное производство
133. Сверхтвёрдые материалы
134. Сибирский математический журнал
135. Станки и инструмент
136. Стекло и керамика
137. Теоретическая и математическая физика
138. Теоретическая и экспериментальная химия
139. Теоретические основы химической технологии
140. Теория вероятности и ее применение
141. Теория вероятности и математическая статистика
142. Теплофизика высоких температур
143. Теплоэнергетика
144. Трение и износ
145. Труды МИАН им. Стеклова
146. Труды Московского математического общества
147. Украинский математический журнал
148. Украинский химический журнал
149. Успехи математических наук
150. Успехи физических наук
151. Успехи химии
152. Физика горения и взрыва
153. Физика и техника полупроводников
154. Физика и химия стекла
155. Физика металлов и металловедение
156. Физика низких температур

(Окончание см. с. 1002)

УДК 621.372.8

К ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНОЙ ТУННЕЛЬНОЙ СВЯЗИ ПОГЛОЩАЮЩИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

П. В. Адамсон

Исследовано резонансное взаимодействие двух направляемых мод в пятислойном диэлектрическом волноводе с туннельным центральным слоем. Обсуждаются возможные применения связанных поглощающих волноводов.

Резонансная туннельная связь диэлектрических волноводов [1, 2] в настоящее время широко применяется в интегральной оптике для выполнения множества прикладных функций, включая модуляцию, переключение и частотную селекцию [3]. Физической основой таких устройств является эффект пространственного биения потока электромагнитной энергии в связанных волноводах. С точки зрения этого эффекта поглощение выступает как нежелательное явление. Поэтому в основном изучены лишь общие закономерности влияния поглощения на процесс обмена мощности между связанными волноводами [1, 4-6].

Однако последние результаты указывают на более богатый спектр физически интересных и практически полезных резонансных явлений в многослойных волноводах с поглощающими элементами. Например, в [7] показана возможность осциллирования коэффициента затухания направляемых мод (НМ) диэлектрического волновода с полупроводниковым покрытием благодаря резонансному взаимодействию НМ диэлектрического волновода с затухающими НМ полупроводниковой пленки.

В данной работе исследована резонансная связь НМ в плоских пятислойных поглощающих диэлектрических структурах, представляющих собой систему из двух связанных волноводов. Существенным различием по сравнению с ранними работами является то, что анализируется случай, когда коэффициент связи значительно меньше модуля комплексной расстройки НМ.

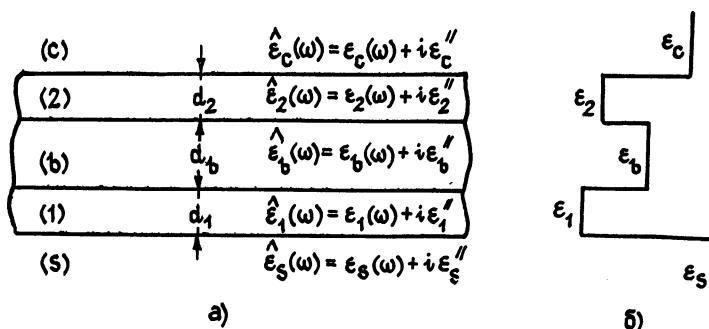


Рис. 1. Поперечный разрез системы связанных волноводов (а) и распределение действительных частей диэлектрических проницаемостей (б).

Рассмотрим плоскую пятислойную структуру, поперечный разрез которой изображен на рис. 1а. Все слои характеризуются комплексными диэлектрическими проницаемостями $\hat{\epsilon}_j(\omega)$ ($j=c, 1, b, 2, s$). Распределение

ние действительных частей $\varepsilon_j(\omega)$ (рис. 1б) такое, что в пятислойной системе образуются два волновода с толщинами волноведущих слоев d_1 , d_2 и буферного слоя d_b . Зависимость мнимых частей ε_j'' от частоты ω не учитываем. Ограничимся случаем малых потерь ($|\varepsilon_j''| \ll \varepsilon_j$). Относительные магнитные проницаемости во всех слоях считаются равными единице.

Для исследования связи между волноводами 1 и 2 решим сначала задачу о НМ объединенной пятислойной структуры. Характеристическое уравнение пятислойного волновода можно представить в виде

$$\tan \hat{k}_1 d_1 = \left[\frac{\hat{\gamma}_s}{\hat{k}_1} + \varepsilon^{(1s)} \frac{\hat{\gamma}_b}{\hat{k}_1} \left(\frac{1 - \hat{C}}{1 + \hat{C}} \right) \right] \left[1 - \varepsilon^{(1s)} \varepsilon^{(1b)} \frac{\hat{\gamma}_s \hat{\gamma}_b}{\hat{k}_1^2} \left(\frac{1 - \hat{C}}{1 + \hat{C}} \right) \right]^{-1}; \quad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{[\hat{k}_2 (\varepsilon^{(2b)} \hat{\gamma}_b - \varepsilon^{(2c)} \hat{\gamma}_c) + (\hat{k}_2^2 + \varepsilon^{(2b)} \varepsilon^{(2c)} \hat{\gamma}_b \hat{\gamma}_c) \tan \hat{k}_2 d_2] e^{-2\hat{\gamma}_b d_b}}{\hat{k}_2 (\varepsilon^{(2b)} \hat{\gamma}_b + \varepsilon^{(2c)} \hat{\gamma}_c) - (\hat{k}_2^2 - \varepsilon^{(2b)} \varepsilon^{(2c)} \hat{\gamma}_b \hat{\gamma}_c) \tan \hat{k}_2 d_2}; \quad (2)$$

$$\hat{k}_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{\varepsilon}_{1,2}(\omega) - \hat{n}^2(\omega))^{1/2}; \quad (3)$$

$$\hat{\gamma}_{s,b,c} = \frac{2\pi}{\lambda} (n^2(\omega) - \hat{\varepsilon}_{s,b,c}(\omega))^{1/2}, \quad (4)$$

$\varepsilon^{(jl)}$ — 1 для ТЕ-поляризации и $\varepsilon^{(jl)} = \hat{\varepsilon}_j(\omega) \hat{\varepsilon}_l^{-1}(\omega)$ — для ТМ-поляризации, $\hat{k}_{1,2}$ и $\hat{\gamma}_{s,b,c}$ — комплексные поперечные волновые числа, λ — длина волны в вакууме, $\hat{n}(\omega) = n(\omega) + i n''(\omega)$ — комплексный показатель преломления НМ. Коэффициент затухания НМ $\kappa(\omega)$ связан с $n''(\omega)$ соотношением $\kappa(\omega) = 4\pi\lambda^{-1}n''(\omega)$.

Если волноводы 1 и 2 не связаны ($d_b \rightarrow \infty$), то уравнение (1) получает вид хорошо известного характеристического уравнения трехслойного волновода [8], решения которого для волноводов 1 и 2 обозначим через $\hat{n}_{1,2}(\omega) = n_{1,2}(\omega) + i n''_{1,2}(\omega)$, где

$$n''_1 \simeq Q_s \hat{\varepsilon}_s'' / 2\hat{\varepsilon}_s^{1/2} + Q_1 \hat{\varepsilon}_1'' / 2\hat{\varepsilon}_1^{1/2} + Q_{1b} \hat{\varepsilon}_b'' / 2\hat{\varepsilon}_b^{1/2}; \quad (5)$$

$$n''_2 \simeq Q_c \hat{\varepsilon}_c'' / 2\hat{\varepsilon}_c^{1/2} + Q_2 \hat{\varepsilon}_2'' / 2\hat{\varepsilon}_2^{1/2} + Q_{2b} \hat{\varepsilon}_b'' / 2\hat{\varepsilon}_b^{1/2}. \quad (6)$$

$Q_{s,1,1b}$ и $Q_{c,2,2b}$ — структурные факторы затухания НМ в соответствующих слоях [8].

Связь между волноводами возникает в спектральной области, где $n_1 \simeq n_2$. Резонансная частота ω_R есть решение уравнения $\Delta(\omega) = n_1 - n_2 = 0$. Ограничимся рассмотрением случая слабой связи

$$|\hat{C}| \ll 1, \quad (7)$$

когда $\hat{n} \simeq \hat{n}_1 \simeq \hat{n}_2$. Разложим все величины в (1) в ряд по малому параметру $|\hat{n} - \hat{n}_1|$. Тогда в первом порядке теории возмущений получим

$$\hat{n}(\omega) = \frac{1}{2} [\hat{n}_1(\omega) + \hat{n}_2(\omega)] \pm \frac{1}{2} [\hat{n}_1(\omega) - \hat{n}_2(\omega)] \left\{ 1 + \frac{4c_1(\omega_R) c_2(\omega_R)}{[\hat{n}_1(\omega) - \hat{n}_2(\omega)]^2} \right\}^{1/2}; \quad (8)$$

$$c_1(\omega_R) = c_2(\omega_R) = 2\Gamma_{1b}^{1/2}(\omega_R) \Gamma_{2b}^{1/2}(\omega_R) \frac{[n^2(\omega_R) - \varepsilon_b]}{n(\omega_R)} \exp[-\gamma_b(\omega_R) d_b]. \quad (9)$$

Здесь c_1, c_2 — коэффициенты связи НМ в параллельных волноводах [9], а Γ_{1b} и Γ_{2b} — относительные доли продольных потоков полной мощности НМ волноводов 1 и 2 в буферном слое [8].

Далее предположим, что

$$P \equiv c_1(\omega_R) c_2(\omega_R) \ll |\Delta(\omega)|^2/4, \quad (10)$$

Δ — комплексная расстройка НМ ($\Delta = \Delta + i(n''_1 - n''_2)$), и рассмотрим только одно из двух решений уравнения (8), например НМ волновода 1 с малой примесью НМ волновода 2. Условие (10) выполняется, если толщина буферного слоя удовлетворяет соотношению

$$\exp[-2\gamma_b(\omega_R)d_b] \ll \frac{n^2(\omega_R)[n''_1 - n''_2]^2}{16\Gamma_{1b}(\omega_R)\Gamma_{2b}(\omega_R)[n^2(\omega_R) - \epsilon_b]^2}. \quad (11)$$

Тогда для мнимой части показателя преломления НМ получим

$$n'' \simeq n''_1 + P \operatorname{Im} \Delta^{-1}. \quad (12)$$

Поскольку последний член в (12) играет существенную роль только около резонансной частоты ω_R , для вещественной волновой расстройки можно применять линейное приближение по величине $\omega - \omega_R$:

$$|\Delta| \simeq S(\omega - \omega_R); \quad (13)$$

$$S \equiv \left. \frac{d(n_1 - n_2)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} = S_{1w}(\omega_R) - S_{2w}(\omega_R) + S_d(\omega_R); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_d = Q_1 \frac{d}{d\omega} \epsilon_1^{1/2}(\omega) - Q_2 \frac{d}{d\omega} \epsilon_2^{1/2}(\omega) + Q_s \frac{d}{d\omega} \epsilon_s^{1/2}(\omega) - \\ - Q_c \frac{d}{d\omega} \epsilon_c^{1/2}(\omega) + (Q_{1b} - Q_{2b}) \frac{d}{d\omega} \epsilon_b^{1/2}(\omega), \end{aligned} \quad (15)$$

S_{1w}, S_{2w} — волноводные дисперсии НМ волноводов 1 и 2 [10], S_d характеризует влияние материальной дисперсии.

Теперь второй (резонансный) член в (12), который описывает влияние взаимодействия НМ на их затухание, представим в виде

$$P \operatorname{Im} \Delta^{-1} = \frac{P \delta_R^2}{(n''_2 - n''_1)[(\omega - \omega_R)^2 + \delta_R^2]}; \quad (16)$$

$$\delta_R = |n''_2 - n''_1| S^{-1}. \quad (17)$$

Таким образом, при условии $n''_1 \rightarrow 0$ резонансная связь НМ приводит к резкому возрастанию затухания НМ первого волновода около резонансной частоты ω_R , причем спектр затухания приближенно аппроксимируется лорензианом с полушириной δ_R (рис. 2). Если НМ первого волновода затухает сильнее, чем НМ второго волновода ($n''_1 > n''_2$), то (16) имеет отрицательный знак и в спектре затухания НМ первого волновода при $\omega \simeq \omega_R$ возникает провал. Однако, согласно условию (10), его глубина всегда существенно меньше, чем n''_1 . Поэтому, с точки зрения практических применений, более актуальным является случай $n''_2 \gg n''_1$.

При точном комплексном синхронизме ($\omega = \omega_R, n''_1 = n''_2$) формула (16) неприменима, поскольку условие (10) не выполнено. В этом случае возникает пространственное биение НМ, т. е. осцилляционный обмен мощностью между волноводами [5].

Отметим еще, что в общем нельзя пренебречь дисперсией члена $\exp[-\gamma_b(\omega)d_b]$ потому, что $\gamma_b(\omega)d_b \gg 1$. Анализ показывает, что такое пренебрежение можно сделать в резонансной области ($\exp[-\gamma_b(\omega)d_b] \simeq \exp[-\gamma_b(\omega_R)d_b]$), если

$$d_b \ll \gamma_b^{-1}(\omega_R) T^{-1}(\omega_R) (2\delta_R)^{-1} \omega_R; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T(\omega) = & \frac{k_1^2}{\gamma_b^2} \frac{d_1}{L_1} + 1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{n_1(\omega)}{\gamma_b^2} \times \\ & \times \left[Q_1 \frac{d}{d\omega} \varepsilon_1^{1/2} + Q_s \frac{d}{d\omega} \varepsilon_s^{1/2} + (Q_{1b} - \varepsilon_b^{1/2} n_1^{-1}) \frac{d}{d\omega} \varepsilon_b^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

L_1 — эффективная толщина трехслойного волновода 1 [11].

Связанные диэлектрические волноводы с поглощающими элементами могут быть применены как поляризационные фильтры или селекторы TE- и TM-мод [12]. Для эффективной селекции ортогональных НМ их резонансы должны быть хорошо разделены ($|\omega_R^{TE} - \omega_R^{TM}| \gg \delta_R$). Предположим, что волноводы слабонаправляющие [5] и в резонансе находятся TE-моды, т. е. при заданных параметрах слоев характеристические уравнения TE-мод двух трехслойных волноводов 1 и 2 имеют при определенной частоте ω_R^{TE} одинаковые решения: $n_1^{TE} = n_2^{TE}$. Тогда, решая систему характеристических уравнений TM-мод методом возмущений без учета материальной дисперсии в первом порядке по относительным скачкам $\alpha_{s,1b} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{s,b}) \varepsilon_1^{-1} \ll 1$ и $\alpha_{c,2b} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_{c,b}) \varepsilon_2^{-1} \ll 1$, получим

$$\frac{\omega_R^{TE} - \omega_R^{TM}}{\omega_R^{TM}} \approx \frac{\Gamma_s \gamma_s^2 \alpha_s - \Gamma_c \gamma_c^2 \alpha_c + \Gamma_{1b} \gamma_{1b}^2 \alpha_{1b} - \Gamma_{2b} \gamma_{2b}^2 \alpha_{2b}}{n \omega_R (S_{2w} - S_{1w})}. \quad (20)$$

Конкретные значения величин Γ_j , γ_j , S_{2w} и S_{1w} в (20) могут принадлежать НМ с любой поляризацией*, так как в слабонаправляющих волноводах различие в характеристиках TE- и TM-мод порядка $\alpha_{s,1b,2b,c}$ [13].

Далее из (17) и (20) следует, что

$$|\Gamma_s \gamma_s^2 \alpha_s - \Gamma_c \gamma_c^2 \alpha_c + \Gamma_{1b} \gamma_{1b}^2 \alpha_{1b} - \Gamma_{2b} \gamma_{2b}^2 \alpha_{2b}| \gg |\Gamma_2 \varepsilon_2'' + \Gamma_c \varepsilon_c''|. \quad (21)$$

Например, если относительные скачки диэлектрических проницаемостей порядка 10^{-1} — 10^{-2} , то при создании селекторов НМ на основе таких волноводов надо оперировать мнимыми частями диэлектрических проницаемостей порядка 10^{-3} — 10^{-4} . Дальнейшее уменьшение мнимых частей нежелательно, поскольку на основе условия (10) коэффициенты связи в этом случае должны быть очень малыми величинами, что в свою очередь приводит к малым коэффициентам затухания резонансной НМ, как следует из (12). При больших значениях мнимых частей надо подбирать волноводы таким образом, что одна из связанных НМ оказывается предельной ($\Gamma_j \gamma_j^2 \rightarrow 0$).

Уровень селекции определяется отношением коэффициентов затухания резонансной и нерезонансной НМ F , т. е. $F = \kappa^{TE}/\kappa^{TM}$, если в резонансе находятся TE-моды, и $F = \kappa^{TM}/\kappa^{TE}$ в обратном случае.

Если волноводы являются слабопоглощающими, то коэффициент затухания нерезонансной НМ пятислойного волновода при большой толщине буферного слоя можно найти методом возмущений [13].

* Такой же результат получается, конечно, и тогда, когда предполагается, что в резонансе находятся TM-моды. Только при одинаковых волноводах ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_s = \varepsilon_c$, $d_1 = d_2$) формула (20) не имеет смысла (дает неопределенность типа 0/0) потому, что в этом случае TE- и TM-моды всегда в резонансе одновременно.

Для мнимой части показателя преломления НМ получим

$$n'' = n_1'' + 2\Gamma_{1b} \frac{(n_1^2 - \epsilon_b)^2}{n_1} (\beta_2 \epsilon_2'' + \beta_c \epsilon_c'') p(\omega); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \epsilon^{(2b)} [d_2(1 + \operatorname{tg}^2 k_2 d_2)(k_2^2 + (\epsilon^{(2c)})^2 \gamma_c^2) + (\operatorname{tg} k_2 d_2(k_2^2 - (\epsilon^{(2c)})^2 \gamma_c^2) + \\ & + 2\epsilon^{(2c)} k_2 \gamma_c \operatorname{tg}^2 k_2 d_2) (1 - 2\epsilon(\epsilon_2 - n_1^2) \epsilon_3^{-1})] \times \end{aligned} \quad (23)$$

$$\times [\gamma_2(\epsilon^{(2b)} \gamma_b + \epsilon^{(2c)} \gamma_c) + (\epsilon^{(2c)} \epsilon^{(2b)} \gamma_c \gamma_b - k_2^2) \operatorname{tg} k_2 d_2]^2]^{-1};$$

$$\beta_c = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \epsilon^{(2b)} \epsilon^{(2c)} \frac{k_2^2}{\gamma_b \gamma_c} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 k_2 d_2) (1 + 2\epsilon(n_1^2 - \epsilon_c) \epsilon_c^{-1})}{[k_2(\epsilon^{(2b)} \gamma_b + \epsilon^{(2c)} \gamma_c) + (\epsilon^{(2c)} \epsilon^{(2b)} \gamma_c \gamma_b - k_2^2) \operatorname{tg} k_2 d_2]^2}. \quad (24)$$

Здесь $\epsilon = 1$ для ТМ-мод и $\epsilon = 0$ для ТЕ-мод, $p(\omega) = \exp(-2\gamma_b(\omega) d_b)$ — единственный параметр в (22) — (24), у которого надо учитывать дисперсию, остальные величины можно принять равными их значениям при резонансной частоте ω_R . Формула (22) правильна при любых скачках диэлектрических проницаемостей и поэтому зависит от поляризации НМ. Только в случае слабонаправляющих волноводов $(n'')_{TE} \approx (n'')_{TM}$.

Для величины F при условии, что отличающимися от нуля являются мнимые части только слоев 2 и с, а волноводы при этом слабонаправляющие, получим

$$F(\omega) \approx \frac{4\Gamma_{2b} p_s(\omega_R) \delta_R^2}{(\epsilon_2'' \Gamma_2 + \epsilon_c'' \Gamma_c)(\beta_2 \epsilon_2'' + \beta_c \epsilon_c'')[(\omega - \omega_R)^2 + \delta_R^2]}, \quad (25)$$

где $p_s(\omega_R) = p_{TE}(\omega_R)/p_{TM}(\omega_R)$, если в резонансе находятся ТЕ-моды, и $p_s(\omega_R) = p_{TM}(\omega_R)/p_{TE}(\omega_R)$, если в резонансе находятся ТМ-моды.

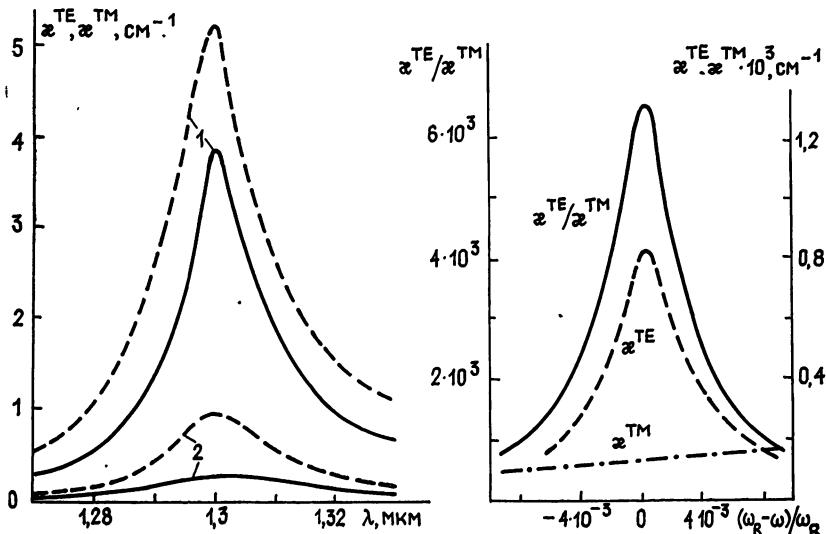


Рис. 2. Спектральные зависимости коэффициентов затухания резонансных нулевых ТЕ-мод (сплошные кривые) и ТМ-мод (штриховые кривые).

$$\lambda_R = 1,3 \text{ мкм}; \quad \epsilon_s^{1/2}(\omega_R) = \epsilon_c^{1/2}(\omega_R) = 1,4; \quad \epsilon_1^{1/2}(\omega_R) = 1,5; \quad \epsilon_b^{1/2}(\omega_R) = 1,45;$$

$$\epsilon_2^{1/2}(\omega_R) = 1,6 - i5 \cdot 10^{-4}; \quad d_1 = 0,862 \text{ мкм}.$$

$$\text{Кривые } 1-p_{TE}(\omega_R) = p_{TM}(\omega_R) = 10^{-5}; \quad 2-p_{TE}(\omega_R) = p_{TM}(\omega_R) = 10^{-6}.$$

Рис. 3. Спектральные зависимости коэффициентов затухания резонансной нулевой ТЕ-моды и нерезонансной нулевой ТМ-моды и их отношения α_{TE}/α_{TM} .

$$\epsilon^{1/2}(\omega_R) = 1,6 - i2 \cdot 10^{-4}; \quad p_{TE}(\omega_R) = 10^{-6}. \quad \text{Остальные параметры те же, что на рис. 2.}$$

Дисперсию параметра p_s учитывать не надо в резонансной области ввиду того, что разность $\gamma_b^{\text{TE}}(\omega) - \gamma_b^{\text{TE}}(\omega_R) - (\gamma_b^{\text{TM}}(\omega) - \gamma_b^{\text{TM}}(\omega_R)) \sim \delta_R \omega_R^{-1} \alpha_s$, т.е. (пропорционально произведению двух малых параметров) и спектральная полуширина величины F определяется также величиной δ_R . Кроме того, разность $\gamma_b^{\text{TE}}(\omega_R) - \gamma_b^{\text{TM}}(\omega_R) \simeq (\epsilon_1 - n^2)(\gamma_b + \gamma_c)(\gamma_b \epsilon_1 L_1)^{-1}$, следовательно, при условии

$$d_b \ll \frac{\epsilon_1 L_1}{2(\epsilon_1 - n^2)} \left(\frac{\gamma_b}{\gamma_b + \gamma_c} \right) \quad (26)$$

имеем $p_s(\omega_R) \simeq 1$.

Итак, максимум величины F имеет обратную квадратичную зависимость от мнимых частей диэлектрических проницаемостей слоев 2 или 3 и может достигнуть достаточно высоких значений, если поглощение в первом волноводе можно не учитывать. Такую ситуацию легко осуществить в волноводах на основе высокочистых кварцевых стекол в актуальной для оптической связи ближней инфракрасной области (рис. 3), где материальные потери порядка 1 дБ/км и менее [14]. Заметим, что графики на рис. 2 и 3 рассчитаны не с помощью приближенных аналитических выражений, полученных для коэффициентов затухания, а независимо, с прямым численным решением исходного уравнения (1) на ЭВМ. При выполнении условия (11) согласие приближенных и точных значений $\chi(\omega)$ весьма хорошее.

В заключение обратим внимание на то, что полученные выше результаты можно также непосредственно использовать для практических целей диагностики тонкопленочных систем [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.
2. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980.
3. Alferness R. C. // IEEE J. Quantum Electron. 1981. V. 17. № 6. P. 946.
4. Иогансен Л. В., Малов В. В. // ЖТФ. 1978. Т. 48. № 5. С. 997.
5. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь. 1987.
6. Youngquist R. C., Stokes L. F., Shaw H. J. // IEEE J. Quantum Electron. 1983. V. 19. № 12. P. 1888.
7. Mc Wright G. M., Batchman T. E., Stanziano M. S. // IEEE J. Quantum Electron. 1982. V. 18. № 10. P. 1765.
8. Взятышев В. Ф. Диэлектрические волноводы. — М.: Сов. радио, 1970.
9. Wilson L. O., Reinhart F. K. // BSTJ. 1974. V. 53. № 4. P. 717.
10. Bennett G. A., Chen C. L. // Appl. Opt. 1980. V. 19. № 12. P. 1990.
11. Золотов Е. М., Киселев В. А., Сычугов В. А. // УФН. 1974. Т. 112. № 2. С. 231.
12. А. с. 1343466 СССР / П. В. Адамсон. — Опубл. в Б. И. 1987. № 37.
13. Адамсон П. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 1. С. 35.
14. Olshansky R. // Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. № 2. P. 341.
15. Адамсон П. В. Препринт F-39 АН Эст. ССР, 1987.

Институт физики АН ЭССР

Поступила в редакцию
20 февраля 1989 г.

TO THE THEORY OF RESONANCE TUNNEL COUPLING OF LOSSY DIELECTRIC WAVEGUIDES

P. V. Adamson

The resonance interaction of two guided modes in a five-layer dielectric waveguide with a tunnel central layer has been investigated. The potential use of the coupled lossy waveguides is discussed.

УДК 621.378.3

ТЕОРИЯ МАЗЕРА НА ЦИКЛОТРОННОМ АВТОРЕЗОНАНСЕ С ОТКРЫТОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В. Л. Братман, Г. Г. Денисов, Д. А. Луковников

В дипольном приближении исследовано резонансное взаимодействие винтового электронного потока с полем квазиоптического волнового пучка с учетом переменности амплитуды и фазовой скорости синхронной волны на траектории частиц. Подробно рассмотрен пример МЦАР с резонатором, образованным двумя кольцевыми сфероидальными зеркалами, для которого найдены моды с наименьшими стартовыми токами и исследован нелинейный режим генерации.

Мазеры на циклотронном авторезонансе (МЦАР) [1-4] представляют собой одну из наиболее перспективных разновидностей мазеров на свободных электронах (МСЭ). Как и в других МСЭ, в МЦАР поток электронов-осцилляторов, перемещающихся с релятивистской поступательной скоростью, индуцированно излучает в направлении, близком к направлению движения частиц. Соответственно вследствие эффекта Доплера частота излучения существенно превышает частоту колебаний (циклотронную частоту) электронов. Для реализации такого коротковолнового режима излучения электродинамическая система МЦАР должна обеспечить возбуждение моды, содержащей в своем поле волны, распространяющиеся вдоль поступательной скорости частиц с фазовой скоростью, близкой к скорости света. В миллиметровом диапазоне волн вплоть до $\lambda \geq 1-2$ мм проблема может быть решена при использовании резонаторов с селективными отражателями в виде отрезков цилиндрического волновода с гофрированной боковой поверхностью (брэгговские резонаторы) [6, 7, 3-5]. Однако на более коротких волнах приходится использовать столь сверхразмерные системы, что в ряде случаев селективные свойства брэгговских резонаторов оказываются недостаточными и более предпочтительны открытые квазиоптические системы [4, 8].

В данной статье построена теория МЦАР с высокодобротной открытой электродинамической системой. По сравнению с работой [8], посвященной этой же теме, в статье развит общий подход, применимый к широкому классу открытых систем. Этот подход позволяет исследовать возбуждение высших мод и учесть обусловленное дифракцией изменение фазовой скорости волны вдоль траектории электронов.

1. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МЦАР. ТРЕБОВАНИЯ К ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИБОРА

В МЦАР электроны, вращающиеся (осциллирующие) с циклотронной частотой $\omega_n = eH_0/mc\gamma$ и перемещающиеся с поступательной скоростью $v_{||}$ в однородном магнитостатическом поле $H_0 z_0$, взаимодействуют с попутной им электромагнитной волной $\exp[i(k_{||}z - \omega t)]$ в условиях циклотронного резонанса

$$\omega - k_{||} v_{||} \approx \omega_n. \quad (1)$$

(В выражении для ω_n e , m и $\gamma = e/mc^2$ — заряд, масса покоя и безразмерная энергия электрона, c — скорость света.) Согласно (1) при релятивистских энергиях частиц отношение частоты волны к циклотронной частоте $\Gamma = \omega/\omega_n$ (доплеровское преобразование частоты колеба-

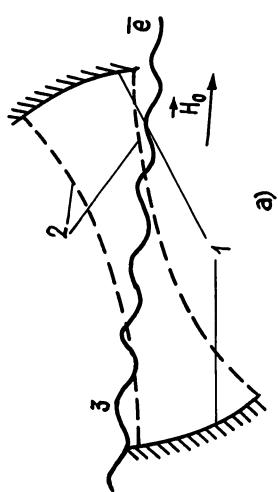
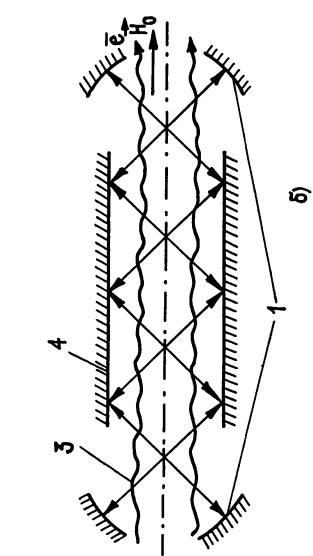
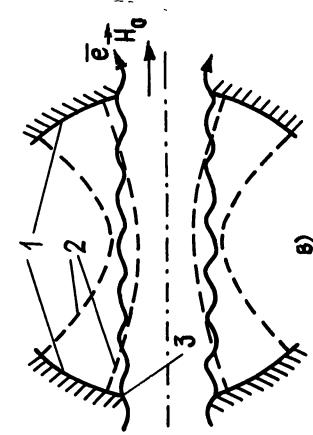


Рис. 1. МЦАР с открытыми резонаторами:
1 — зеркала, 2 — каустики, 3 — цилиндрический волновод,
4 — цилиндрический пучок, 5 — электронный пучок, 6 — магнитное поле H_0 ,
7 — электрическое поле E .

ний) может быть большой величиной порядка $\gamma^2 \gg 1$, если вращательная скорость частиц не слишком велика:

$$\beta_{\perp} \leq \gamma^{-1}, \quad (2)$$

а фазовая скорость волны достаточно близка к скорости света:

$$1 - \beta_{\phi}^{-2} \leq \gamma^{-2}. \quad (3)$$

В соотношениях (2), (3) $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ и $\beta_{\phi} = \omega/c k_{\parallel}$ — нормированные на скорость света вращательная скорость электронов и фазовая скорость волны.

При условиях (2), (3), обеспечивающих высокое доплеровское преобразование частоты колебаний, согласно нелинейной теории [2, 3, 8], в МЦАР с высокочастотными полями простейшей структуры и оптимальной протяженности достигим электронный КПД в десятки процентов (разумеется, при достаточно малом скоростном разбросе частиц). Как показывают расчеты для полей простейшей структуры, оптимальная протяженность области резонансного взаимодействия электронов с синхронной волной, как правило, такова, что на ней электроны совершают большое число циклотронных вращений (обычно $N \geq 10$). Чем меньше N , тем менее жесткими являются требования к разбросу скоростей частиц, но тем больше рабочие токи приборов и шире полоса циклотронного резонанса.

В простейших волноводных (в частности, брэгговских) резонаторах существенную опасность возбуждению моды с высоким доплеровским преобразованием частоты представляет возбуждение низкочастотных квазикритических (гиrottронных) и встречных (механизм МЦР—ЛОВ) волн. В то же время в открытых системах (рис. 1) в ряде случаев опасность этих «паразитных» волн невелика. Кроме того, при использовании таких систем появляется возможность более сильной, чем в цилиндрических резонаторах, фокусировки волны на электронном пучке (рис. 1в), позволяющей снизить нагрузку на стенки. Последнее весьма существенно для приборов, рассчитанных на большую среднюю или импульсную мощность излучения.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ПОЛЕ ПАРАКСИАЛЬНОГО КВАЗИОПТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА

Во всех открытых электродинамических системах МЦАР (рис. 1) электроны взаимодействуют с полем параксиального волнового пучка, распространяющегося под малым углом $\psi \leq \gamma^{-1}$ к направлению магнитного поля $H_0 z_0$. При этом

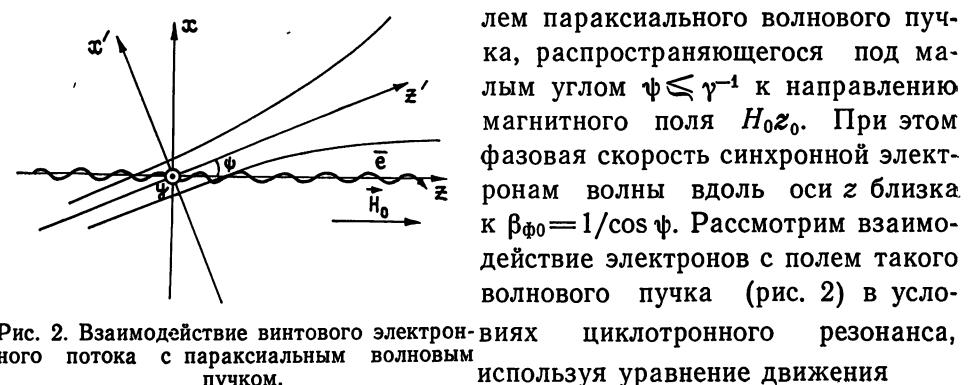


Рис. 2. Взаимодействие винтового электронного потока с параксиальным волновым пучком.

используя уравнение движения

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{e}{c} [v, H_0 z_0] - eE - \frac{e}{c} [v, H] \quad (4)$$

и уравнение для изменения энергии электрона

$$dE/dt = -e(vE), \quad (5)$$

Здесь E, H — поле волнового пучка, которое будем выражать через одну из его поперечных компонент (рис. 2), например через $E_{x'} = A(x, y, z) \exp(i \int k_{\parallel} dz)$:

$$E_x = \left(\cos \phi + \frac{i}{k} \sin \phi \frac{\partial}{\partial z} \right) E_{x'}, \quad H_x = \left(\frac{\cos^2 \phi}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\sin \phi}{ik} \right) E_{x'},$$

$$(6)$$

$$E_y = 0, \quad H_y = \left(\frac{1}{ik} \cos \phi \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E_{x'},$$

$$E_z = \left(\frac{i}{k} \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \phi \right) E_{x'}, \quad H_z = \frac{i}{k} \cos \phi \frac{\partial E_{x'}}{\partial y},$$

$$\text{где } \frac{\partial}{\partial z} E_{x'} = \left(\frac{\partial A}{\partial z} + i h A \right) \exp [i \int h(x, y, z) dz].$$

При достаточно малой амплитуде волнового пучка решение уравнений движения будем, как обычно, искать в виде [10-12]

$$x = X + r_H \cos \vartheta, \quad y = Y + r_H \sin \vartheta, \quad z = \int^t v_{\parallel} dt,$$

где X, Y — медленно меняющиеся координаты ведущего центра, $r_H = v_{\perp}/\omega_H$ и v_{\parallel} — медленно меняющиеся гирорадиус и поступательная скорость, $\vartheta = \int^t \omega_H dt + \chi$ — фаза циклотронного вращения электрона.

Считая выполненным условие применимости дипольного приближения

$$k_{\perp} r_H \ll 1, \quad (7)$$

ограничимся в правых частях уравнений для импульса p и энергии \mathcal{E} электрона членами первого порядка по гирорадиусу r_H . Кроме того, так же как и в [2], пренебрежем малосущественными изменениями координат ведущего центра и перейдем от уравнений (4) и (5) к уравнениям для безразмерной энергии частицы $u = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{\beta_{\phi 0}} \right) \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \right)$, фазы электрона относительно волны $\theta = (\omega t - \int k_{\parallel} dz - \int \omega_H dt - \chi)$ и безразмерной переменной

$$K = \frac{4 \beta_{\parallel 0} (1 - \beta_{\parallel 0}/\beta_{\phi 0})}{\beta_{\perp 0}^4 (1 - \beta_{\phi 0}^{-2})} \left(\frac{p - p_{\parallel 0}}{mc\gamma_0} - \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{mc^2 \gamma_0 \beta_{\phi 0}} \right),$$

пропорциональной изменению величины $\mathcal{E} - v_{\phi} p_{\parallel}$, сохраняющейся при постоянной амплитуде и фазовой скорости волны,

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{\sqrt{1-u}}{1-bu} \operatorname{Im} F e^{i\theta},$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{1}{1-bu} \left(\Delta - u - bK - \frac{\operatorname{Re} F e^{i\theta}}{2\sqrt{1-u}} \right) + g,$$

$$(8)$$

$$\frac{dK}{d\zeta} = - \frac{\sqrt{1-u}}{1-bu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} + igF \right) e^{i\theta}.$$

Здесь $\zeta = \frac{\beta_{\perp 0}^2 (1 - \beta_{\phi 0}^{-2})}{2\beta_{\parallel 0} (1 - \beta_{\parallel 0}/\beta_{\phi 0})} \frac{\omega z}{c}$ — безразмерная продольная координата, $b = (\beta_{\perp 0}^2) [2\beta_{\parallel 0} \beta_{\phi 0} (1 - \beta_{\parallel 0}/\beta_{\phi 0})]^{-1}$ — параметр, характеризующий изменение продольного импульса электрона, $g(\zeta) = \Delta k_{\parallel}(\zeta) (dz/d\zeta)$ — функция, описывающая изменение продольного волнового числа,

$$\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{\beta_{\phi 0}} - \frac{\omega_{H0}}{\omega} \right) \left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{\beta_{\phi 0}} \right) (1 - \beta_{\phi 0}^{-2})^{-1}$$

— расстройка синхронизма электронов с волной, $F = \frac{4(1 - \beta_{\parallel 0}/\beta_{\phi 0})^2}{\beta_{\perp 0}^3(1 - \beta_{\phi 0}^{-2})} \times$

$\times \frac{eE_0}{2mc\gamma_0\omega} f(z)$ — безразмерная амплитуда волны, $f(z)$ — нормированная на единицу функция, описывающая продольную структуру поля на траектории электронов.

Проведенное рассмотрение относилось к « x »-поляризации волнового пучка, когда $E_y = 0$. Для « y »-поляризации ($E_x = 0$) уравнения (8) имеют тот же вид, а $F_y = iF$. Тот же вид имеют и усредненные уравнения движения в поле циркулярно поляризованного волнового пучка с направлением вращения, совпадающим с направлением вращения электрона, когда $E_x = -iE_y$. В этом случае $F_+ = 2F$.

Для противоположного направления вращения волны, когда $E_x = -iE_y$, в дипольном приближении (7) правая часть усредненного уравнения для энергии обращается в нуль и взаимодействие отсутствует.

По сравнению с уравнениями, выведенными в [2, 8], в (8) содержатся слагаемые, пропорциональные $g(\zeta)$ и учитывающие переменность фазовой скорости синхронной волны.

Границные условия к уравнениям (8), соответствующие предварительно немодулированному пучку электронов с одинаковыми начальными скоростями, имеют вид

$$u(\zeta_{\text{вх}}) = 0, \quad \theta(\zeta_{\text{вх}}) = \theta_0, \quad K(\zeta_{\text{вх}}) = 0, \quad (9)$$

где $\zeta_{\text{вх}}$ — координата входа электрона в высокочастотное поле, θ_0 — начальные фазы частиц, равномерно распределенные в интервале $[0, 2\pi]$. Электронный КПД взаимодействия

$$\eta = \beta_{\perp 0}^2 \left[2 \left(1 - \frac{\beta_{\parallel 0}}{\beta_{\phi 0}} \right) (1 - \gamma_0^{-1}) \right]^{-1} \eta_{\perp} \quad (10)$$

определяется произведением «одночастичного» КПД на показатель группировки частиц («поперечный» КПД):

$$\eta_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta_0, \zeta_{\text{вых}}) d\theta_0. \quad (11)$$

Проинтегрировав усредненные уравнения движения электронов (8) в приближении малого сигнала $F \ll 1$, получим выражение для «линейного» КПД (эта величина пропорциональна линейной проводимости, вносимой электронным пучком в резонатор):

$$\eta_{\perp \text{л}} = (1/4) |F|^2 \mu^3 \bar{\chi}(\bar{\theta}), \quad (12)$$

$$\bar{\chi}(\bar{\theta}) = \frac{2b - 1}{\mu} \varphi(\bar{\theta}) + (1 - 2b\Delta) \varphi'(\bar{\theta}),$$

где

$$\mu = \frac{\beta_{\perp 0}^2 (1 - \beta_{\phi 0}^{-2}) kL}{2\beta_{\perp 0} (1 - \beta_{\parallel 0}/\beta_{\phi 0})} \quad (13)$$

— параметр инерционной группировки частиц, L — эффективная длина взаимодействия электронов с волной,

$$\varphi(\bar{\theta}) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\tau) \exp [i\bar{\theta}\tau + i\mu \int_0^{\tau} g(\tau') d\tau'] \right|^2 \quad (14)$$

— спектр эффективной силы, действующей на электрон, $\theta = \mu \Delta$ — угол пролета электронов относительно волны, $\tau = \zeta / \mu$. При постоянной фазовой скорости волны ($g \equiv 0$) выражение (12) переходит в формулу (16) работы [8].

3. МЦАР СО СФЕРОИДАЛЬНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

Используем уравнения в форме (8) для построения теории МЦАР с электродинамической системой в виде исследованного в работах Вайнштейна [9] двухзеркального сфероидального резонатора с зеркалами кольцевой формы (рис. 1в). Особой привлекательностью для МЦАР обладают [5] моды такого резонатора с большими азимутальными индексами, близкие по свойствам модам шепчущей галереи цилиндрических и бочкообразных резонаторов. Эти моды образованы лучами, распространяющимися от зеркала к зеркалу под малыми углами к оси симметрии. Поле моды ограничено двумя каустическими поверхностями в виде однополостных гиперболоидов вращения: внешней, обусловленной вогнутостью зеркал, и внутренней, обусловленной азимутальной несимметрией волнового поля. При использовании таких мод в качестве рабочих в МЦАР с сильноточным электронным пучком легко обеспечить транспортировку частиц в области резонатора, помещая в его осевую часть, где поле моды пренебрежимо мало, металлический электрод, уменьшающий провисание потенциала пучка.

3.1. Структура волн сфероидального резонатора. Следуя [9], рассмотрим открытый резонатор, образованный двумя одинаковыми соосными сферическими зеркалами круговой формы, радиусы кривизны которых R превышают половину расстояния между ними l . Поверхности зеркал можно приближенно представить частью сплюснутого сфероида, для которого межфокусное расстояние определяется соотношением $2d = 2\sqrt{l(R-l)}$. Собственные колебания такого резонатора наиболее просто описываются в сфероидальных координатах ρ, ϕ, ξ , связанных с цилиндрическими соотношениями

$$r = d \sin \rho \cosh \xi, \quad \varphi = \varphi, \quad z = d \cos \rho \sinh \xi. \quad (15)$$

Координатная поверхность $\xi = \pm \text{const}$ представляет собой сплюснутый сфероид, а $\rho = \text{const}$ — однополостный гиперболоид, стремящийся при $\xi \rightarrow \pm \infty$ к конусу с углом ρ между образующей и осью z .

Поле резонатора можно выразить через электрический вектор Герца Π^e , удовлетворяющий волновому уравнению $\Delta \Pi^e + k^2 \Pi^e = 0$ и граничному условию $\Pi^e_\zeta = 0$ на зеркалах ($k = \omega/c$). Для МЦАР представляют интерес моды квазиоптического ($kd \gg 1$) резонатора, образованные параксиальными ($\rho^2 \ll 1$) лучами. Эти условия позволяют перейти от волнового уравнения к скалярному параболическому уравнению [9], решения которого представляют собой стоячие волны с частотами, определяемыми при малых дифракционных потерях соотношениями

$$2kl = \pi q + 2(m+2n+1) \arcsin \sqrt{l/R}. \quad (16)$$

Здесь $q, m, (n+1)$ — числа вариаций поля по координатам ξ, ϕ, ρ соответственно.

Расстояние между каустиками, ограничивающими поля колебаний, быстро растет с увеличением индекса n , поэтому можно так ограничить размеры зеркал, что лишь моды с $n=0$ будут иметь небольшие дифракционные потери. Пространственная структура этих мод описывается суперпозицией прямых и встречных волн:

$$\Phi = \Phi_1 - (-1)^q \Phi_2,$$

где Φ — одна из компонент или линейная комбинация компонент вектора Герца,

$$\Phi_{1,2} = A \frac{\Phi_0}{\operatorname{ch} \zeta} \rho^m \exp \left(-\frac{\alpha \rho^2}{2} + i \Psi_{1,2} \right), \quad (17)$$

$$\Psi_{1,2} = \pm \alpha \operatorname{sh} \zeta \mp (m+1) \arcsin \operatorname{th} \zeta \pm m\varphi - \omega t,$$

$A = (e\alpha/m)^{m/2}$ — безразмерный нормировочный множитель, $\alpha = kd$, Φ_0 — размерная константа.

В дальнейшем при изучении движения электронов в поле резонатора удобно использовать выражения в цилиндрических координатах

$$\Phi_{1,2} = A \Phi_0 \frac{dr^m}{(d^2 + z^2)^{(m+1)/2}} \exp \left[-\frac{\alpha r^2}{2(d^2 + z^2)} + i \Psi_{1,2} \right], \quad (18)$$

$$\Psi_{1,2} = \mp kz \left(1 + \frac{r^2}{2(d^2 + z^2)} \right) \pm (m+1) \arcsin \frac{z}{\sqrt{d^2 + z^2}} \pm m\varphi + \omega t.$$

Вдоль цилиндрической поверхности $r = \text{const}$ потенциалы $\Phi_{1,2}$ представляют собой волны с переменной амплитудой, распространяющиеся

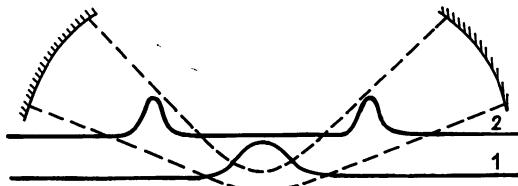


Рис. 3. Продольная структура волны на траекториях электронов, движущихся между каустиками (1) и выходящих за внешнюю каустику (2).

в положительном (1) и отрицательном (2) направлениях оси z с переменной фазовой скоростью. Продольная структура этих волн имеет одну вариацию на цилиндрических поверхностях, пересекающих плоскость симметрии $z=0$ между каустиками, и две вариации, разделенные областью слабого поля, — для поверхностей, проходящих за внешней каустикой (рис. 3). Максимум амплитуды достигается при $z=0$, $r_{\max} = \sqrt{md/k}$. Поперечные компоненты электрического и магнитного полей ведут себя аналогично Φ с точностью до членов порядка ρ^2 .

Фазовая скорость волны

Рис. 4. Зависимость фазовой скорости волны от $\beta_\Phi = \omega / (d\Psi_1/dz)$ в параксиальном z на траекториях электронов, движущихся между каустиками (1) и выходящих за внешнюю каустику (2).

приближении описывается соотношением

$$\beta_\Phi(r, z) = \beta_{\Phi 0} + \Delta \beta_\Phi(r, z), \quad (19)$$

где $\beta_{\Phi 0} = 1 + (m^2/2k^2r_{\max}^2)$ соответствует значению фазовой скорости волны в максимуме поля,

$$\Delta \beta_\Phi = \frac{r^2 z^2 (3d^2 + z^2)}{2d^2 (d^2 + z^2)^2} - \frac{(m+1)z^2}{kd (d^2 + z^2)}. \quad (20)$$

За внешней каустикой фазовая скорость волны меньше скорости света (рис. 4). Фазовая скорость волн, для которых распределение поля при данном радиусе имеет две вариации, изменяется вдоль z быстрее, чем фазовая скорость мод с одной вариацией.

3.2. Возбуждение колебаний сфероидального резонатора винтовым электронным пучком. Используя условие циклотронного резонанса (1), пренебрежем несинхронной компонентой поля резонатора, соответствующей встречной волне, и ограничимся лишь учетом взаимодействия электронов с синхронной им попутной волной, которая выражается через потенциал Φ_1 . В соответствии с результатами разд. 3 рассмотрим циркулярно-поляризованную волну с вращением, попутным вращению электрона. Такой волне соответствует вектор Герца $\Pi^e = \rho_0 \Pi_\rho + \varphi_0 \Pi_\varphi$, где $\Pi_\rho = -i\Pi_\varphi = \Phi_1$. При этом поля $E = k^2 \Pi^e + \nabla \operatorname{div} \Pi^e$, $H = -ik \operatorname{rot} \Pi^e$ описываются выражениями ($m \gg 1$)

$$\begin{aligned} E_r &= \left(k^2 - \frac{mkd}{d^2+z^2} - \frac{k^2r^2d(d-iz)}{(d^2+r^2)^2} \right) \Phi_1, \\ E_\varphi &= i \left(k^2 - \frac{mkd}{(d^2+z^2)^2} \right) \Phi_1, \quad E_z = -\frac{ik^2dr}{d^2+z^2} \Phi_1, \\ H_r &= - \left(k \frac{\partial}{\partial z} + \frac{mkz}{d^2+z^2} \right) \Phi_1, \\ H_\varphi &= -i \left(k + \frac{\partial}{\partial z} \frac{ik^2r^2z(d-iz)}{(d^2+z^2)^2} - \frac{imkz}{d^2+z^2} \right) \Phi_1, \\ H_z &= \left(-\frac{2mk}{r} + \frac{k^2r}{d+iz} \right) \Phi_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Усреднение уравнений движения электронов в поле (21) приводит к уравнениям (8), а «линейный» КПД определяется формулой (12). Как и следовало ожидать, при переменной фазовой скорости волны (и постоянном магнитостатическом поле) КПД меньше, чем при постоянной фазовой скорости (рис. 5). Этот эффект сравнительно слабо выражен для мод, имеющих одну продольную вариацию на траектории электрона («монотронные» моды), и более существен для мод с двумя вариациями («клистронные» моды).

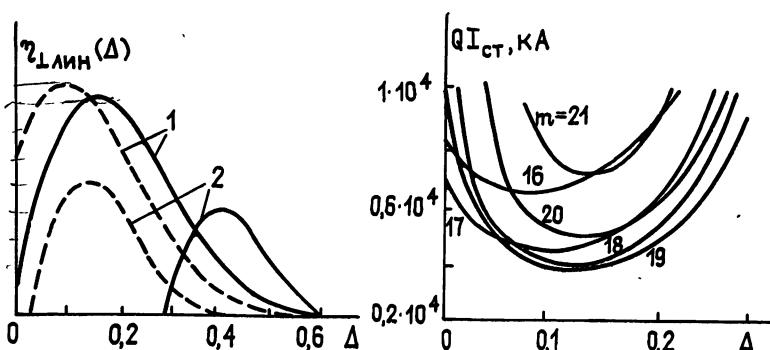


Рис. 5.

Рис. 5. Зависимость «линейного» КПД от расстройки синхронизма при постоянной (пунктир) и переменной (сплошная линия) фазовой скорости волны: 1 — для «монотронной» моды ($m=20$), 2 — для «клистронной» моды ($m=15$).

Рис. 6. Зоны самовозбуждения мод с различными азимутальными индексами.

Уравнения (8) для МЦАР со сфероидальным резонатором получе-

ны в приближении заданного поля, т. е. добротность резонатора Q считалась достаточно большой, чтобы можно было пренебречь искажениями высокочастотного поля в присутствии электронного пучка. В этом приближении, зная кпд, можно из уравнения баланса мощности

$$IU\eta = (\omega/Q)W \quad (22)$$

найти электронный ток. Здесь

$$U = \frac{mc^2}{e}(\gamma_0 - 1), \quad (23)$$

$$W = \frac{1}{16\pi} \int (|E|^2 + |H|^2)dv \simeq \left(\frac{e}{m}\right)^m m! \frac{ld}{2k} |E_+|^2$$

— энергия, запасенная в резонаторе. Подставляя в (22) выражение для «линейного» кпд, находим стартовый ток генератора:

$$I_{ct} = \frac{mc^3}{e} \frac{\gamma_0 \beta_{\perp 0}^3}{\beta_{\perp 0}^2} \frac{4d^2(2l/L)}{L^2 Q(1 - \beta_{\phi 0}^{-2}) G \chi(\bar{\theta})}. \quad (24)$$

Здесь $G = kds^m e^{-s}/m!$ — эффективный импеданс m -й моды, $s = kr_n^2/d$, r_n — радиус электронного пучка. Если траектории электронов проходят через максимум поля моды с индексом $m_0 \gg 1$, то $s = m_0$, и, соответственно, используя формулу Стирлинга для гамма-функции, получаем

$$G_{m0} = kd(1/\sqrt{2\pi m_0}). \quad (25)$$

Эффективную длину поля для такой моды естественно определить как расстояние между точками пересечения траектории электрона с внутренней каустикой:

$$L_m \approx 2d(2/m)^{1/4}. \quad (26)$$

Выражение (24) представлено в виде, аналогичном формуле (3.19) работы [3] для стартового тока МЦАР с цилиндрическим резонатором:

$$I_{ct} = \frac{mc^3}{e} \frac{\gamma_0 \beta_{\perp 0}^3}{\beta_{\perp 0}^2} \frac{2R^2}{L^2 Q(1 - \beta_{\phi 0}^{-2}) G \chi(\bar{\theta})}, \quad (27)$$

где R — радиус резонатора, $G = \frac{J_{m-1}^2(k_\perp r_n)}{(1 - m^2/v_{m,p}^2) J_m^2(v_{m,p})}$ — эффектив-

ный импеданс моды $H_{m,p,q}$, J_m — функция Бесселя, $v_{m,p}$ — p -й положительный корень уравнения $J'_m(v) = 0$. При одинаковой добротности Q и встрече пучка вблизи каустики ($k_\perp r_n \simeq m_0$) стартовый ток МЦАР со сфероидальным резонатором близок к стартовому току для моды шепчущей галереи цилиндрического резонатора. В отличие от МЦАР с цилиндрическим резонатором в МЦАР со сфероидальным резонатором эффективный импеданс и фазовая скорость синхронной волны, а также длина взаимодействия и продольная структура поля существенно зависят от азимутального индекса m .

Рассмотрим стартовый режим для конкретного примера МЦАР со сфероидальным резонатором. Пусть энергия электронов $\mathcal{E} = 1$ МэВ ($\gamma_0 \simeq 3$). В соответствии с соображениями, изложенными в разд. 2, выберем поперечную скорость электронов $\beta_{\perp 0} = \gamma_0^{-1}$ и фазовую скорость волны $\beta_{\phi 0} = 1 + 1/2v_0^2$. При этих значениях коэффициент доплеровского преобразования частоты $\Gamma = 5,9$ и $b = 0,35$. Выберем длину взаимодействия сравнительно небольшой: $\mu = 10$. Этому соответствует при ука-

занных параметрах $N=6$ колебаний частиц. Будем ориентироваться на моду, для которой электроны проходят через максимум поля. Тогда радиус электронного пучка и азимутальный индекс моды определяются соотношениями $r_p=10\lambda$, $m_0=20$. Межфокусное расстояние сфероидального зеркала равно $2d=2\gamma_0 r_p \approx 60\lambda$. Длину резонатора выберем достаточно большой, чтобы электронный пучок не задевал зеркал: $2l=120\lambda$.

Как показывает расчет (рис. 6), минимальными значениями произведения стартового тока на добротность в резонаторе с указанными параметрами обладают моды с азимутальными индексами $m=18$ и $m=19$, у которых внутренние каустики расположены ближе к оси, чем у моды с индексом $m_0=20$, и потому у них больше эффективная длина поля. При дальнейшем уменьшении азимутального индекса стартовый ток возрастает вследствие приближения фазовой скорости волны к скорости света и уменьшения импеданса моды. Для возбуждения «рабочей» моды с индексом $m_0=20$ необходимо предпринимать меры по дискриминации (уменьшению добротности) мод с индексами $m=17 \div 19$. Следует иметь в виду, что при фиксированном значении азимутального индекса в полосу циклотронного резонанса попадает порядка $2\gamma_0^2(2l/L)$ продольных мод резонатора.

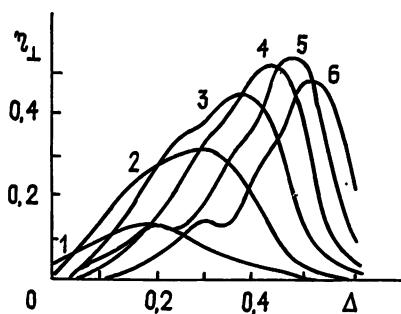


Рис. 7.

Рис. 7. Зависимость орбитального КПД с $m=20$ в режиме большого сигнала от расстройки синхронизма при различных амплитудах поля: кривая 1— $F=0,05$, 2— $F=0,1$, 3— $F=0,15$, 4— $F=0,2$, 5— $F=0,25$, 6— $F=0,3$.

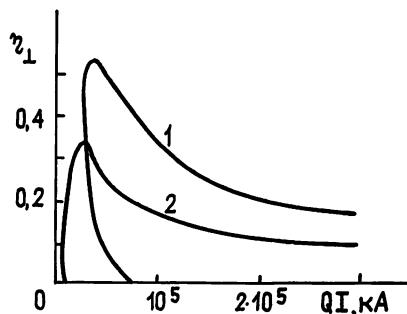


Рис. 8.

Рис. 8. Зависимость орбитального КПД от тока:
1 — жесткий режим самовозбуждения колебаний ($\Delta=0,475$), 2 — граница мягкого и жесткого режимов ($\Delta=0,25$).

Исследование нелинейного режима генератора производится путем численного решения системы уравнений (8). На рис. 7 приведены графики зависимости орбитального КПД от расстройки синхронизма Δ при различных значениях амплитуды поля F . Вследствие близости продольной структуры поля «рабочей» моды к гауссовой структуре (рис. 3) нелинейные характеристики генератора близки к рассчитанным в работе [8]. Максимальное значение орбитального КПД $\eta_{\perp \max}=0,53$, близкое к соответствующему значению для гауссовой структуры поля, достигается при значении безразмерной амплитуды поля $F=0,23$ и расстройке синхронизма $\Delta=0,48$. Полный электронный КПД в этом режиме $\eta=26\%$. На рис. 8 изображены кривые возбуждения рабочей моды, построенные по определенным из уравнения баланса мощности значениям $I \cdot Q$, соответствующим данным F и Δ . Из рисунка видно, что режим высокого КПД, как и в гиротроне [13], характеризуется «жестким» возбуждением автоколебаний. Граница «мягкого» и «жесткого» режимов соответствует $\Delta=0,25$. При оптимальной расстройке $\Delta=\Delta_{opt}=0,48$ стартовый ток больше рабочего. Тем не менее, как и в гиротроне [14], существует возможность при включении анодного напряжения попасть в область высокого КПД. Эта возможность основана на том, что расстройка синхронизма Δ падает с ростом анодного напряжения. Поэтому кривая возбуждения и положение рабочей точки на этой кривой

адиабатически меняются во времени. Подбрав режим включений напряжения, можно попасть в режим устойчивой генерации, соответствующей максимуму кпд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 6. С. 902.
2. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С. и др. // Сб. Релятивистская высокочастотная электроника.—Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 157.
3. Bratman V. L., Denisov G. G., Ginzburg N. S., Petelin M. I. // IEEE J. Quantum Electron. 1983. V. QE-19. P. 282.
4. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Офицеров М. М. // Сб. Релятивистская высокочастотная электроника.—Горький: ИПФ АН СССР, 1983. Вып. 3. С. 127.
5. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Коровин С. Д. и др. // Сб. Релятивистская высокочастотная электроника.—Горький: ИПФ АН СССР, 1984. Вып. 4. С. 119.
6. А. с. 720591 СССР. Резонатор / Ковалев Н. Ф., Петелин М. И., Резников М. Г.—Опубл. в Б. И. 1980. № 9. С. 243.
7. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Денисов Г. Г. // Сб. Релятивистская высокочастотная электроника.—Горький: ИПФ АН СССР, 1981. Вып. 2. С. 237.
8. Братман В. Л., Новожилова Ю. В., Сергеев А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С. 1261.
9. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы.—М.: Сов. радио. 1966. С. 115.
10. Антаков И. И., Гапонов А. В., Юллатов В. К. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1965. № 12. С. 33.
11. Юллатов В. К. // Сб. Гиротрон.—Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 26.
12. Жураховский В. А. Нелинейные колебания электронов в магнитонаправляющих потоках.—Киев: Наукова думка, 1972.
13. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1972. № 8. С. 55.
14. Нусинович Г. С. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974. № 3. С. 44.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
1 июня 1989 г.

THEORY OF CARM WITH OPEN ELEKTRODYNAMICAL SYSTEM

V. L. Bratman, G. G. Denisov, D. A. Lukovnikov

A resonant interaction of a helical electron beam with the field of quasi-optical wave beam has been studied in dipole approach, taking into account the amplitude and phase-velocity variability of the synchronous wave at the particle trajectory. CARM with a resonator, consisting of two ring-shaped spheroidal mirrors is studied in detail. Modes with the minimal starting current for such a resonator are found and the non-linear generation regime is investigated.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 535.416.3

НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВСТРЕЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

В. А. Трофимов

Как известно, инварианты (интегралы) нелинейного взаимодействия световых пучков и импульсов играют важную роль как при его анализе, так и для контроля результатов, получаемых при его численном моделировании. В литературе приведены инварианты самовоздействия оптического излучения в керровской среде [1, 2], в среде с тепловым механизмом нелинейности [2], при трехчастотном [3, 4] и четырехчастотном попутном [5] взаимодействии, а также резонансного взаимодействия N волн [6]. Инварианты же встречного взаимодействия, которое реализуется во многих прикладных задачах [7, 8], изучены значительно хуже. Так, известны интегралы движения при распространении световых пучков в среде с керровским или тепловым механизмом нелинейности [9–11]. В настоящей работе в отличие от [9–11] получены ранее неизвестные инварианты нестационарного встречного взаимодействия световых импульсов.

Нестационарное встречное взаимодействие дифрагирующих световых пучков одинаковой частоты и поляризации описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_+}{\partial t} + \frac{\partial A_+}{\partial z} + iLA_+ &= i\alpha\epsilon_{\text{нл}}' A_+ - \delta A_+, \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} - \frac{\partial A_-}{\partial z} + iLA_- &= i\alpha\epsilon_{\text{нл}}'' A_- - \delta A_-, \\ L = D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + D_\omega \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_+(z, t, x, y)$, $A_-(z, t, x, y)$ — нормированные комплексные амплитуды встречных волн, t — безразмерное время, z — нормированная продольная координата, вдоль которой происходит распространение оптического излучения, коэффициенты D и D_ω характеризуют дифракционные и дисперсионные эффекты, α — коэффициент нелинейной связи, $\epsilon_{\text{нл}}$, $\epsilon_{\text{нл}}''$ — нелинейные добавки к диэлектрической проницаемости для взаимодействующих волн, δ — безразмерный коэффициент линейного поглощения, x , y — поперечные координаты, нормированные на начальную ширину пучка. Систему уравнений (1) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями, заданными на разных концах интервала по z , и начальными условиями, в частности, обращающимися в нуль амплитудами полей на границах временного интервала:

$$A_+(z, 0, x, y) = A_+(z, T_{\text{и}}, x, y) = A_-(z, 0, x, y) = A_-(z, T_{\text{и}}, x, y) = 0, \quad (2)$$

$T_{\text{и}}$ — безразмерная максимальная длительность взаимодействующих импульсов.

Для наглядности рассмотрим сначала случай $D = D_\omega = \delta = 0$ и $\epsilon_{\text{нл}} = \epsilon_{\text{нл}}'' = \epsilon_{\text{нл}}$ (например, $\epsilon_{\text{нл}} = |A_+|^2 + |A_-|^2$). Тогда, умножив первое уравнение на A_- , второе на A_+ и вычитя из первого второе уравнение, получим

$$A_- \frac{\partial A_+}{\partial t} - A_+ \frac{\partial A_-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A_+ A_-) = 0. \quad (3)$$

Заметим, если одна из амплитуд обращается в нуль в точках (x, y) (считаем, что A_+ , A_- равны нулю одновременно), то соотношение (3) автоматически удовлетворяется. Поэтому рассмотрим точки (z, t, x, y) , в которых A_+ и A_- не равны нулю. В этом случае, разделив все слагаемые на $A_+ A_-$, вместо (3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{A_+}{A_-} + \frac{\partial}{\partial z} \ln A_+ A_- = 0. \quad (4)$$

Затем, проинтегрировав (4) по переменным t , x , y , в которых A_+ и A_- не равны нулю (обозначим эту область через Ω), получим

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \iiint_{\Omega} \ln |A_+ A_-| dt dx dy = - \iint_{\Omega} \ln (A_+|_{t=t_1} A_-|_{t=t_1}) (A_+|_{t=t_1} A_-|_{t=t_2})^{-1} dt dx dy, \quad (5)$$

где t_1 , t_2 — границы интервала времени, в пределах которого комплексные амплитуды не равны нулю. Следовательно, если выражение под логарифмом равно единице (нетрудно проверить, что это выполняется для многих практических задач, например, когда амплитуды волн равны в моменты времени t_1 и t_2 и малы), то I_1 сохраняется в процессе распространения.

Важно подчеркнуть, что (5) справедливо как для среды с линейным поглощением, так и для взаимодействия с нелинейным поглощением, если нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости, описывающая поглощение, входит симметрично в уравнения (1). Таким образом, I_1 следует называть квазинвариантом: сохраняется при определенных начальных условиях на амплитуды взаимодействующих волн.

Существуют еще инварианты для системы (1). Получим один из них, предположив сначала, что отсутствуют дисперсионные и дифракционные эффекты, а также поглощение среды. Для этого умножим уравнения системы (1) соответственно на $\partial A_+^*/\partial t$ и $\partial A_-^*/\partial t$, а сопряженные к (1) уравнения на $\partial A_+/\partial t$ и $\partial A_-/\partial t$. Затем, сложив попарно уравнения относительно A_+ , A_- и A_+^* , A_-^* , вычтя их друг из друга и проинтегрировав результат, получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \iiint \left\{ A_+ \frac{\partial A_+^*}{\partial t} - A_- \frac{\partial A_-^*}{\partial t} \right\} dt dx dy + i\alpha \iiint \epsilon_{\text{нл}} \frac{\partial}{\partial t} (|A_+|^2 + |A_-|^2) dt dx dy = 0. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, если $\epsilon_{\text{нл}}$ зависит от суммы квадратов интенсивности, то при выполнении (2) получим следующий инвариант — сохраняющуюся величину

$$\frac{\partial I_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \iiint \left\{ A_+ \frac{\partial A_+^*}{\partial t} - A_- \frac{\partial A_-^*}{\partial t} \right\} dt dx dy = 0 \quad (7)$$

Существенно, что (7) справедливо, даже если $\epsilon'_{\text{нл}} \neq \epsilon''_{\text{нл}}$. Например, в случае встречного взаимодействия пучков в керровской среде, для которого все наведенные оптическим излучением решетки диэлектрической проницаемости равноправны, имеем

$$\epsilon'_{\text{нл}} = |A_+|^2 + |A_-|^2 2, \quad \epsilon''_{\text{нл}} = |A_-|^2 + 2|A_+|^2. \quad (8)$$

Тогда выражение, стоящее под вторым интегралом в (6), можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (|A_+|^2 + |A_-|^2)^2 + \frac{\partial}{\partial t} (|A_+|^2 |A_-|^2), \quad (9)$$

и, следовательно, инвариант I_2 будет справедлив.

Нетрудно убедиться, что соотношение (7) имеет место при распространении дифрагирующих пучков и при учете дисперсионных эффектов второго порядка ($D_\omega \neq 0$) при выполнении условий

$$\frac{\partial A_+}{\partial t} \Big|_{0, T_u} = \frac{\partial A_-}{\partial t} \Big|_{0, T_u} = \frac{\partial A_+}{\partial x} \Big|_{x=0, L_x} = \frac{\partial A_-}{\partial x} \Big|_{x=0, L_x} = \frac{\partial A_+}{\partial y} \Big|_{y=0, L_y} = \frac{\partial A_-}{\partial y} \Big|_{y=0, L_y} = 0, \quad (10)$$

которые являются необременительными при численном моделировании и обычно ставятся [3-6] при нахождении соответствующего инварианта для попутных волн, L_x , L_y — размеры области соответственно по x и y . При этом равенства дисперсионных и дифракционных коэффициентов для A_+ и A_- , вообще говоря, не требуется.

Система (1) обладает еще одним инвариантом. Пусть $\delta = 0$. Тогда, произведя аналогичные выше описанным операции домножения, сложения и вычитания, но с производными $\partial A_+^*/\partial z$, $\partial A_-^*/\partial z$, нетрудно получить, что в процессе распространения сохраняется величина

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \iiint \left\{ A_+ \frac{\partial A_+^*}{\partial t} + A_- \frac{\partial A_-^*}{\partial t} + \frac{i\alpha}{2} (|A_-|^2 + |A_+|^2)^2 + i|\nabla A_+|^2 + i|\nabla A_-|^2 \right\} \times \\ \times dx dy dt = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\nabla = \left\{ D^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial}{\partial y}, D_\omega^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ и для краткости I_3 записан для случая равенства

нелинейных добавок диэлектрической проницаемости. Отмечу, что при отсутствии дисперсионных эффектов второго порядка ($D_\omega = 0$) в среде с линейным поглощением сохраняется величина

$$\frac{\partial I_4}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \iiint \left\{ A_+ \frac{\partial A_+^*}{\partial t} + A_- \frac{\partial A_-^*}{\partial t} + \frac{i\alpha}{2} (|A_+|^2 + |A_-|^2)^2 + \right. \\ \left. + \delta (|A_+|^2 + |A_-|^2) + i |\nabla A_+|^2 + i |\nabla A_-|^2 \right\} e^{2\delta t} dt dx dy = 0. \quad (12)$$

Здесь $\nabla = D^{1/2}(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, и для краткости считается $\epsilon'_{\text{нл}} = \epsilon''_{\text{нл}}$. Получить (12) не-трудно, сделав сначала в (1) замену $A_+ = \bar{A}_+ e^{-\delta t}$, $A_- = \bar{A}_- e^{-\delta t}$, проведя те же операции, что и при записи I_3 , а затем вернувшись к комплексным амплитудам A_+ и A_- .

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. и др. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
2. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Чернега П. И. Препринт ИПМ АН СССР № 52. М., 1979.
3. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. Вып. 3. С. 834.
4. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филиппчик Т. С. // Вестник Московского ун-та. Сер. физика и астрономия. 1978. Т. 19. № 4. С. 91.
5. Гринь Ю. Г., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. № 3. С. 700.
6. Карамзин Ю. Н. и др. // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 3. С. 564.
7. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах. / Под ред. В. И. Беспалова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1982.
8. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
9. Литвак А. Г., Фрайман Г. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 9. С. 1341.
10. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 1. С. 12.
11. Трофимов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 9. С. 1146.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 октября 1988 г.,
в окончательном варианте
25 декабря 1989 г.

УДК 537.876.23

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В АНТИВОЛНОВОДЕ

A. С. Старков

Рассмотрим задачу о нахождении поля точечного источника в неограниченной среде, показатель преломления которой зависит лишь от вертикальной координаты

$$n^2(z) = 1 + z^2/L^2. \quad (1)$$

Параметр L характеризует вертикальный масштаб изменения свойств среды.

Показатель преломления (1) моделирует существенные стороны антиволноводного распространения коротких радиоволн в ионосфере [1, 2]. Поле точечного источника находится так же, как и в [3], и имеет вид

$$u(r, z) = \frac{-e^{i\pi/4}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \sqrt{\frac{k}{L}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[\frac{i k L}{2} \Phi(p, R, z)\right] \frac{dp}{p \sqrt{\sinh p}}, \quad (2)$$

$$\Phi(p, R, z) = p + \frac{R^2}{p} + (Z_1^2 + Z_2^2) \coth p - \frac{2Z_1 Z_2}{\sinh p}.$$

Здесь k — волновое число, z_1, z_2 — вертикальные координаты источника и приемника, r — расстояние между источником и приемником по горизонтали, а $Z_1 = z_1/L$, $Z_2 = z_2/L$, $R = r/L$ — соответствующие безразмерные величины.

Основное достоинство интегрального представления (2) — это отсутствие специальных функций, что позволяет эффективно использовать численные и асимптотические методы.

Исследуем асимптотику интеграла (2) при $kL \rightarrow \infty$, т. е. в том случае, когда характерный вертикальный масштаб изменения свойств среды много больше длины волны. В этом случае в показателе экспоненты имеется большой параметр и интеграл (2) может быть вычислен по методу перевала [4]. Уравнение для определения стационарной точки имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 1 - \frac{R^2}{p^2} - \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1 Z_2 \operatorname{ch} p}{\operatorname{sh}^2 p} = 0 \quad (3)$$

и явного аналитического решения не имеет, но легко может быть исследовано численно. При $Z_1 \cdot Z_2 < 0$, т. е. когда источник и точка наблюдения лежат по разные стороны от оси анти волновода, решение уравнения (3) единственno. В противоположном случае уравнение (3) может иметь кратные корни при условии, что координаты R, Z_1, Z_2 связаны соотношением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} = 2 \left[\frac{R^2}{p^3} + \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - Z_1 Z_2 (\operatorname{ch}_p^2 + 1)}{\operatorname{sh}^3 p} \right] = 0. \quad (4)$$

Известно, что в данной задаче лучи, выходящие из источника под различными углами, имеют огибающую — каустику, состоящую из двух ветвей. Каустика отделяет область, в которую приходят три луча, от области, в которую приходит один луч. Для нахождения каустики необходимо решить систему уравнений (3), (4).

Вдали от каустики в однолучевой зоне асимптотика поля, полученная по методу перевала, имеет вид

$$u(r, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{\exp[(ikL/2)\Phi(p_1)]}{p_1 \sqrt{\Phi''(p_1) \operatorname{sh} p_1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{kL}\right) \right], \quad (5)$$

где p_1 — единственный корень уравнения (3). В трехлучевой области следует просуммировать три подобных слагаемых. В непосредственной близости каустики имеет смысл использовать интегральное представление (2) или выражать асимптотику интеграла (2) через эталонные интегралы Эйри и Пирси [4, 6].

Важном с практической точки зрения случае, когда источник и точка наблюдения расположены не очень далеко от оси анти волновода $\sqrt{k/L}z_1, \sqrt{k/L}z_2 = O(1)$, формула (5) упрощается. Асимптотика интеграла (2) при малых Z_1 и Z_2 имеет вид

$$u(r, z) = \frac{\exp[ik[r + (z_1^2 + z_2^2)(\operatorname{cth} R/2L - z_1 z_2/L \operatorname{sh} R)]]}{4\pi \sqrt{rL \operatorname{sh} R}}. \quad (6)$$

Из приведенной формулы вытекает известный закон убывания поля при увеличении расстояния между источником и точкой наблюдения. [6]

$$|u(r, z)| \sim r^{-1/2} \exp(-r/2L),$$

т. е. поле отлично от нуля на расстояниях $r \leq L$.

Недостатком рассмотренной модели является то, что скорость распространения волн при $z \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Непрерывный спектр, а следовательно, боковая волна, для среды с показателем преломления (1) отсутствуют. Поэтому рассмотрим задачу о точечном источнике колебаний в среде с одним минимумом показателя преломления при условии, что при $z \rightarrow \infty$ показатель преломления достаточно быстро стремится к конечному значению $n_0 > 1$. Будем по-прежнему предполагать, что характерный вертикальный масштаб изменения свойств среды много больше длины волны, т. е. показатель преломления зависит от растянутой координаты $z = n(Z)$.

Как показано в [7], полное поле есть сумма боковой волны u_1 и слагаемого u_2 , отвечающего лучам с малыми углами скольжения. При выполнении условия $kL \gg 1$ боковая волна легко находится методом ВКБ и имеет вид

$$u_1(r, z) = \frac{\operatorname{const}}{r^2 \sqrt{n_0^2 - n^2(Z)}} \exp \left[-kL \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{n_0^2 - n^2(Z)} dZ - kL \int_{Z_1}^{Z_2} \sqrt{n_0^2 - n^2(Z)} dZ + ikn_0 r \right] \left[1 + O\left(\frac{r}{L}\right) + O\left(\frac{1}{kL}\right) \right]. \quad (7)$$

Для малых углов скольжения и малых Z_1 и Z_2 можно считать показатель преломления зависящим от Z по закону (1), и обобщение формул (2), (5) может быть получено также по методу ВКБ простой заменой $Z_{1,2} \rightarrow \xi_{1,2}$, $\xi_{1,2} = \xi(Z_{1,2})$, $\xi(Z) = \left(\int_0^Z p(Z) dZ \right)^{1/2}$, $p(Z) = \sqrt{n^2(Z) - 1}$. В результате вычислений получаем

$$u^2(r, z) = \sqrt{\frac{2\zeta_1 \zeta_2}{p(Z_1)p(Z_2)}} \frac{\exp\{ikL[r/L + (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(\coth R/2L - \zeta_1 \zeta_2/\sinh R)]\}}{\sqrt{rL \sinh R}}. \quad (8)$$

Полное поле есть сумма лучевого слагаемого (8), экспоненциально убывающего с расстоянием, и боковой волны (7), убывающей по закону r^{-2} . Лучевое слагаемое является основным вплоть до расстояний

$$r \sim 2kL^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{n_0^2 - n^2(Z)} dZ.$$

Таким образом, в настоящей работе получены формулы для описания поля точечного источника в достаточно произвольном антиволноводе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Budden K. G. Radio Waves in the Ionosphere. — Cambridge: Univ. Press, 1961.
2. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
3. Старков А. С. // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 368.
4. Федорук М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.
5. Орлов Ю. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 11. С. 1669.
6. Кравцов Ю. Ф., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1981.
7. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 262 с.

Ленинградский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила в редакцию
22 мая 1989 г.

УДК 621.372.822.001

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАЛОРИМЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА ОСНОВЕ ИЗЛОМА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА В *H*-ПЛОСКОСТИ

А. Ч. Ким, В. П. Моргаловский, И. И. Постников, В. М. Темнов

Расчету калориметрических нагрузок, преобразующих энергию электромагнитного поля в тепловую, посвящено относительно небольшое число работ, что объясняется трудностью теоретического анализа структур, составляющих основу таких нагрузок, которые представляют собой, как правило, сложные некоординатные соединения [1–5].

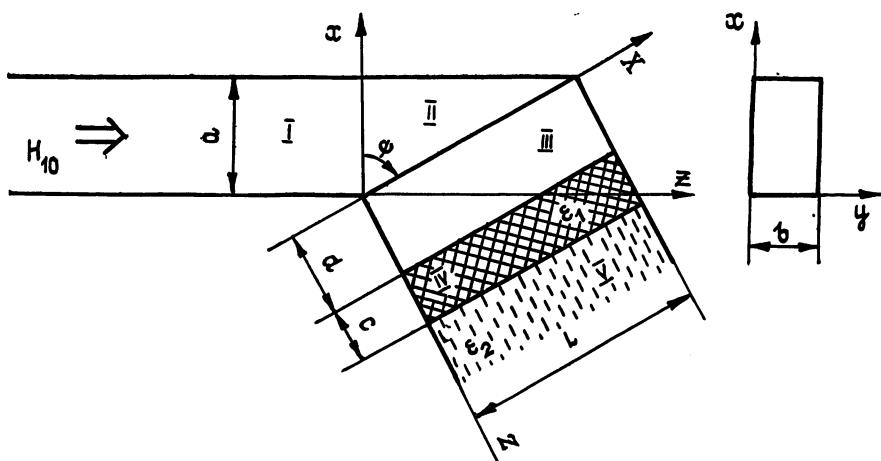


Рис. 1.

В работе [6] в строгой электродинамической постановке была рассмотрена возможность решения задачи дифракции *H*-волны на изломе прямоугольного волновода, содержащем координатные диэлектрические включения с омическими потерями (рис. 1).

Предложенный в [6] метод решения данной задачи, представляющий собой один из вариантов метода частичных областей [7], позволяет не только определять коэффициенты преобразования волны на изломе волновода, которые можно также определять и методом полуобращения, рассмотренного в [6], но и, в отличие от [8], предоставляет возможность рассчитывать электромагнитное поле внутри излома волновода практически без ограничений на параметры задачи. Было отмечено, что кривые частотных зависимостей модуля коэффициента отражения, рассчитанные по рассмотренному алгоритму, полностью совпадали с соответствующими кривыми работы [3], полученными методом полуобращения. Ниже приводится алгоритм решения поставленной задачи, удобный для его реализации на ЭВМ, а также сравнение результатов натурного и численного экспериментов.

Поскольку области III, IV и V являются координатными (рис. 1), их влияние может быть учтено заданием компонент поля в плоскости $Z=0$ в следующем виде:

$$E_y = \sum_{m=1}^{\infty(N_1)} q_m \sin \frac{\pi m X}{L}, \quad H_x = \sum_{m=1}^{\infty(N_1)} \gamma_m q_m \sin \frac{\pi m X}{L}, \quad (1)$$

где q_m — коэффициенты, подлежащие определению,

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \beta_{m3} \frac{1 + v_1 v - x_\beta}{1 + v_1 v + x_\beta}, \quad x_\beta = (v_1 + v) \exp(2i\beta_{m3}d) \\ v_1 &= (\beta_{m3} - \beta_{m4}) / (\beta_{m3} + \beta_{m4}), \quad v_2 = (\beta_{m4} - \beta_{m5}) / (\beta_{m4} + \beta_{m5}), \\ \beta_{mi} &= \sqrt{K^2 \xi_i - (\pi m/L)^2}, \quad i=3, 4, 5, \quad \xi_3=1, \quad \xi_4=\varepsilon_1, \quad \xi_5=\varepsilon_2, \end{aligned}$$

$K = 2\pi/\lambda$ — волновое число свободного пространства (λ — длина волны в вакууме).

Выражения (1) получены при использовании условий непрерывности касательных составляющих поля на границах областей III, IV, V и условия излучения в области V. Представления для полей в треугольной области II подробно описаны в [7]. Применив процедуру проекционного сшивания касательных составляющих полей в плоскости $Z=0$, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов q_i :

$$\frac{1}{2} q_k + \sum_{m=1}^{\infty(N)} A_{km} q_m = B_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2)$$

через которые с помощью пересчетных формул находятся все требуемые электрические характеристики рассматриваемой структуры. Выражения для определения A_{km} и B_k вынесены в Приложение.

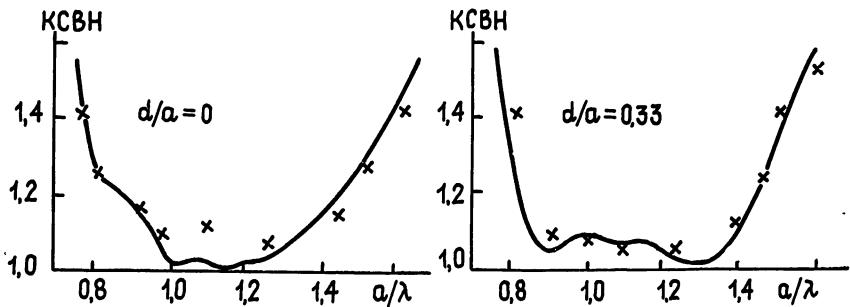


Рис. 2.

Для проведения экспериментальных исследований был изготовлен макет на сечении волновода $23 \times 10 \text{ mm}^2$. Проверка параметров на сечениях $16 \times 8 \text{ mm}^2$; $11 \times 5,5 \text{ mm}^2$; $7,2 \times 3,4 \text{ mm}^2$ проводилась с помощью переходов. В качестве диэлектрической перегородки IV брался слюдоситалл с $\varepsilon_1 = 5,6(1+i \cdot 10^{-3})$, а преобразователем электромагнитной энергии V являлась техническая вода с $\varepsilon_2 = 49(1+i \cdot 0,54)$. Приведенные на рис. 2 расчетные (сплошная линия) и экспериментальные (х х) зависимости КСВН для двух значений нормированного расстояния d/a при $\Psi = 68^\circ$ также подтверждают хорошее совпадение расчета и эксперимента. В результате вычислительных экспери-

ментов было установлено, что для получения достаточной для практики точности значений КСВН при $\Psi < 75^\circ$ возможно ограничиться порядком СЛАУ (2), равным 12–14.

Изложенный выше алгоритм является надежной основой для моделирования нагрузок подобного класса и позволяет решать задачу синтеза рассмотренных структур с учетом одновременного влияния геометрических параметров нагрузки и диэлектрических характеристик материалов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$A_{km} = \gamma_m \sum_{n=1}^{\infty N_1} S_{mn} Q_{kn} (1+M) (1-\chi_a) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty N_1} C_{mn} Q_{kn} (1-M) (1+\chi_a) - \sum_{j=1}^2 (\gamma_m I_{mk}^j + J_{mk}^j) ,$$

$$M = (-1)^{m+k}, \quad \chi_a = (-1)^{m+n} \exp(i\alpha_n \bar{S}), \quad \bar{S} = \sin \psi,$$

$$Q_{kn} = -2\Phi k, \quad S_{mn} = 2\Phi m \bar{K}/\bar{C}, \quad C_{mn} = -\Phi m (\alpha_n^2 + \alpha_m \bar{C})/\bar{C},$$

$$\Phi = \frac{i\pi^2 n \bar{S}}{\Gamma_{kn}^+ \cdot \Gamma_{kn}^-}, \quad \bar{S} = \sin \psi, \quad \bar{C} = \cos \psi, \quad \bar{K} = KL, \quad \alpha_n = \beta_n L, \quad \beta_n = \sqrt{K^2 - (\pi n/a)^2},$$

$$\Gamma_{m, n}^+ = \pi^2 (m \pm n)^2 - \alpha_n^2 \bar{S}^2;$$

$$I_{mk}^j = \begin{cases} \frac{(-1)^{j+1} i \bar{K}}{4\pi \sqrt{\eta^2 - m^2}} \left[\frac{\pi(t_{jm} + k) - M \alpha_{tjm} \bar{S}}{\Gamma_{ktjm}^+} - \frac{\pi(t_{jm} - k) - M \alpha_{tjm} \bar{S}}{\Gamma_{ktjm}^-} \right], & k \neq m \\ \frac{(-1)^{j+1} ik}{8\pi \sqrt{\eta^2 - m^2}} [(-1)^j \operatorname{ctg} \pi t_{jm} - m/(t_{jm} \alpha_{tjm} \bar{S})], & k = m \end{cases},$$

$$J_{mk}^j = \begin{cases} \frac{(-1)^j \pi (\alpha_{tjm}^2 + \alpha_m^2 \bar{C}^2) \operatorname{ctg} t_{jm} \operatorname{tg} \psi (1 - M)}{2\sqrt{\eta^2 - m^2} \Gamma_{ktjm}^+ \Gamma_{ktjm}^-}, & k \neq m \\ \frac{\alpha_{tjm}^2 + \alpha_m^2 \bar{C}^2}{16\pi \alpha_{tjm} \bar{C} \sqrt{\eta^2 - m^2}}, & k = m \end{cases},$$

$$\eta = 2L/\lambda, \quad t_{jm} = (-1)^{j+1} m \bar{C}^2 + \bar{C} \cdot \bar{S} \sqrt{\eta^2 - m^2},$$

$$\alpha_{tjm} = \pi [(-1)^j i \bar{S} + \bar{C} \sqrt{\eta^2 - m^2}], \quad j = 1, 2,$$

$$B_k = Q_{k1} [1 - (-1)^{k+1} \exp(i\alpha_k \bar{S})].$$

ЛИТЕРАТУРА

- Ким А. Ч., Нефедов Е. И., Попов Е. И. // Сб. Радиотехника. — Харьков: Гос. ун-т. 1972. Вып. 21. С. 170.
- Веселов Г. И., Ильинская О. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 8. С. 1157.
- Ильинская О. К. Диссертация, М., МИЭТ, 1977.
- Ильинская О. К., Кириленко А. А., Рудь Л. А. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 1. С. 41.
- Нефедов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. — М.: Наука, 1979. — 272 с.
- Темнов В. М., Постников И. И., Ким А. Ч. // Радиотехника. 1989. № 2. С. 65.
- Веселов Г. И., Темнов В. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 7. С. 919.
- Кириленко А. А., Рудь Л. А., Шестопалов В. И. // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 4. С. 687.

Поступила в редакцию
12 июня 1989 г.

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ТОЛСТОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ЭКРАНЕ С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

В. П. Чумаченко

В последнее время опубликован ряд работ, посвященных исследованию электродинамических свойств незамкнутых проводящих экранов [1-7]. В частности, построена полная строгая теория дифракции волн на цилиндре с продольной щелью, имеющим круговое поперечное сечение, и установлен ряд закономерностей, характерных для таких структур, независимо от конфигурации контура поверхности. К особенностям электродинамических характеристик незамкнутых экранов в первую очередь следует отнести наличие резонансных эффектов, наиболее четко проявляющихся при дифракции волн H -поляризации. До настоящего времени в теории рассматривались, как правило, бесконечно тонкие гладкие поверхности. Представляет интерес исследование влияния на характеристики рассеяния экрана его конечной толщины, а также наличие на его контуре геометрических сингулярностей — ребер.

В настоящей работе обсуждаются результаты численного исследования электродинамических характеристик прямоугольного экрана с продольной щелью, показанного на рис. 1, при дифракции на нем волн E - и H -поляризации. Решение соответствующих краевых задач выполнено при помощи алгоритмов, описанных в [8, 9] с использованием представлений рассеянного поля u_p в виде рядов по четным функциям Маттье. Основное внимание уделяется изучению квазистатического резонансного рассеяния, проявляющегося при возбуждении структуры волной H -поляризации. В качестве характеристик рассеяния экрана будем рассматривать поперечники полного σ_s и обратного σ_B рассеяния [10]:

$$\sigma_s = -\frac{4}{k} \operatorname{Re} [e^{-i(\pi/4)} F(\alpha + \pi)] , \quad \sigma_B = \frac{4}{k} |F(\alpha)|^2 . \quad (1)$$

Здесь $k=2\pi/\lambda$, λ — длина волны, α — угол падения плоской волны (см. рис. 1). При условии падения волны единичной амплитуды диаграмма направленности $F(\beta)$ определяется формулой

$$F(\beta) = \lim_{p \rightarrow \infty} u_p / (\sqrt{2/\pi k p} e^{-ikp}) , \quad (2)$$

где (ρ, β) — полярная система координат с полюсом, совпадающим с началом отсчета некоторой базисной системы, в которой описывается геометрия объекта. Вычисление значений $F(\beta)$ выполнено с погрешностью, не превышающей одного процента от $\max |F(\beta)|$.

На рис. 1а представлены рассчитанные частотные зависимости поперечника полного рассеяния при дифракции на экране волн E -типа (1) и H -типа (2). Щель занимает центральное положение, толщина экрана $\delta=0,1 a$, ширина щели $d=0,1 a$. Точками нанесены данные, отвечающие замкнутому экрану с контуром поперечного сечения в виде квадрата со стороной $a+2d$. Как видно из рисунка, при падении E -волны наличие узкой щели практически не сказывается на характеристиках рассеяния цилиндра. Рассечение волн H -поляризации носит резонансный характер. Резкое увеличение поперечника рассеяния в низкочастотной области, как известно [7], связано с возбуждением квазистатического собственного колебания. Резонансный пик в окрестности точки $a/\lambda=0,5$ обусловлен возбуждением собственных колебаний типа H_{10} (H_{01}). При движении в область высоких частот вблизи критических частот колебаний H_{mn} также наблюдаются резонансные изменения значения σ_s , которые носят затухающий характер и несколько сдвигнуты по отношению к точным значениям a/λ_{kr} замкнутого экрана в сторону более коротких длин волн. В промежуточных областях поперечник полного рассеяния близок к случаю замкнутого экрана.

На рис. 1б приведены графики функций $\sigma_B(\alpha)$ (непрерывные линии) и $\sigma_s(\alpha)$ (штрихи) в случае H -волн для значений $c=0$, $\delta=0,1 a$, $d=0,1 a$: $1-a/\lambda=0,07$; $2-a/\lambda=0,09$; $3-a/\lambda=0,11$. Видно, что в окрестности резонансной точки характер рассеяния полностью изменяется. Появляется два четко выраженных максимума, отвечающих направлениям $\alpha=\pm 90^\circ$, и поперечники рассеяния резко возрастают.

На рис. 1в представлены данные, иллюстрирующие влияние геометрии щели на характеристики рассеяния в области низкочастотного резонанса. Кривые 1, 2, 3 отвечают различным значениям ширины щели: $1-d=0,05 a$; $2-d=0,2 a$; $3-d=0,4 a$ ($\alpha=0$, $c=0$, $\delta=0,1 a$). Видно, что с увеличением d резонансный пик смещается в сторону более высоких частот и его добротность падает. Кривые 4-6 позволяют проследить, как сказывается на частотной характеристике резонансного режима толщина экрана ($\alpha=0$, $c=0$, $d=0,1 a$; $4-\delta=0,1 a$; $5-\delta=0,2 a$; $6-\delta=0,3 a$). Как следует из графиков, увеличение δ приводит к смещению резонансного пика в сторону больших длин волн. В [7] для кругового цилиндра со щелью в длинноволновом диапазоне предложена модель в виде параллельного колебательного контура с сосредоточенными параметрами L , C и резонансной частотой $\omega_0=(LC)^{-1/2}$. Роль емкостного элемента C играют края щели, а индуктивного L — стенки цилиндра. Результаты, представленные

на рис. 1в, подтверждают справедливость этой модели и в рассматриваемом случае. В самом деле как при увеличении толщины стенок, так и при уменьшении зазора емкость C увеличивается, что приводит к смещению резонансного значения ω_0 в область более низких частот. Из такой модели также следует, что при фиксированных a и d значение ω_0 должно определяться в основном шириной щели и не зависит от ее положения на контуре цилиндра. Индикаторы рассеяния 7 ($\alpha=0$, $d=0,1 a$, $\delta=0,1 a$).

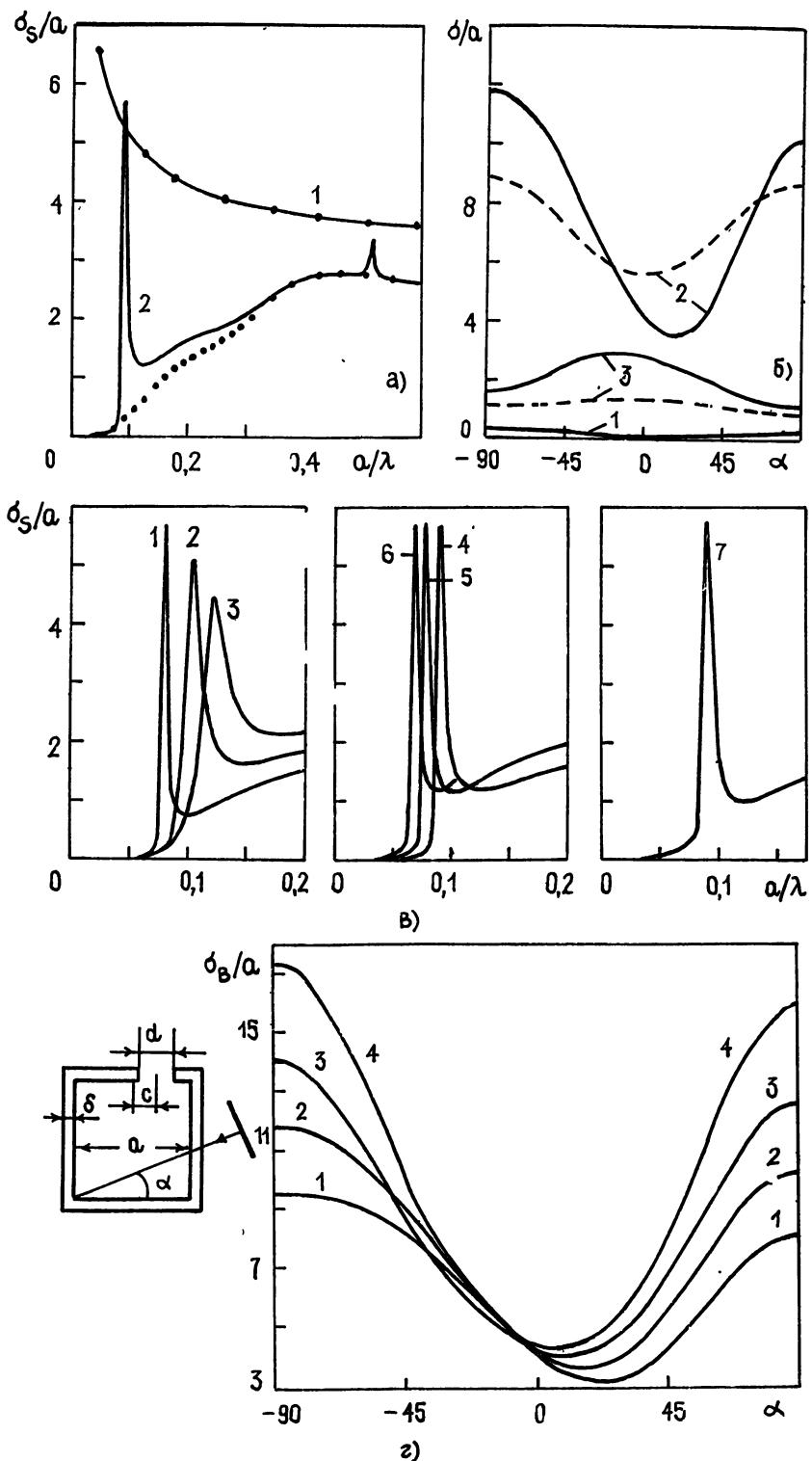


Рис. 1.

$c = 0,3 a$), отвечающая смещенному положению щели, подтверждает такое предположение. Как видно, положение резонансного пика практически совпадает со случаем $c=0$.

Для кругового цилиндра поперечники рассеяния в области низкочастотного резонанса характеризуются для узких щелей изотропными угловыми зависимостями. На рис. 1г приведены индикаторы рассеяния для частот, близких к резонансным, отвечающие различным значениям ширины щели: $1-d=0,2 a$, $a/\lambda=0,105$; $2-d=0,1 a$, $a/\lambda=0,09$; $3-d=0,05 a$, $a/\lambda=0,08$; $4-d=0,03 a$, $a/\lambda=0,0686$ (во всех случаях $c=0$, $\delta=0,1 a$). Видно, что при уменьшении параметра d в резонансных точках происходит общее увеличение поперечников рассеяния, однако их значения по-прежнему заметным образом зависят от угла α . В отличие от кругового цилиндра тенденции к сглаживанию этих зависимостей не наблюдается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошпаренок В. Н., Шестопалов В. П. // ЖВММФ. 1971. Т. 11. № 3. С. 719.
2. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 12. С. 2458.
3. Фельд Я. Н. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 1. С. 28.
4. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22 № 4. С. 678.
5. Носич А. И. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 8. С. 1733.
6. Кошпаренок В. Н., Мележики П. Н., Шестопалов В. П. // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24. № 2 С. 228.
7. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. — Киев: Наукова думка. 1983.
8. Чумаченко В. П. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 8. С. 1600.
9. Засовенко В. Г., Чумаченко В. П. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 744-В88. Деп. от 27 января 1988 г.
10. Кинг Р., У Тай-Цзунь. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. — М.: ИЛ, 1962.

Запорожский машиностроительный
институт

Поступила в редакцию
25 мая 1989 г.

УДК 621.372.823

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННОГО СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

И. В. Коцаревская

В работе анализируются собственные поля периодического (с периодом l) кольцевого экранированного металлоизолированных волновода с осесимметричными диэлектрическими слоями, когда длина волны (λ_0) больше периода, (рис. 1). По сравнению с длинноволновым [1] в этом диапазоне появляются дополнительные функциональные возможности системы передачи, например, разделение на автономные каналы для разных типов волн, изменение связи между ними по пространственным гармоникам, организация по ним соответствующих встречных потоков мощности.

Собственные режимы указанной структуры описываются бесконечной связанный системой линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов поля [1]:

$$X_m - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s \chi_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{m\sigma}^s(-u) + 2 \sum_{s=-j}^{-1} X_s \tilde{W}_{m\sigma}^s(-u) = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_s \frac{G_s}{\eta+s} \tilde{W}_{m\sigma}^s(-u), \\ Y_m - \sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_s \mu_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{m\sigma}^s(u) + 2 \sum_{s=-j}^{-1} Y_s \tilde{W}_{m\sigma}^s(u) = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s X_s \frac{G'_s}{\eta+s} \tilde{W}_{m\sigma}^s(u). \quad (1)$$

Система (1) определяет нормальные волны в произвольном частотном диапазоне при любых сочетаниях материальных и геометрических параметров структуры и для любого поляризационного состава поля. Однако ее решение требует большой затраты машинного времени особенно при $\kappa=l/\lambda_0 \geqslant 1$ и исключает наглядный физический ана-

лиз, а следовательно, выявление динамики свойств структуры при вариации ее параметров*.

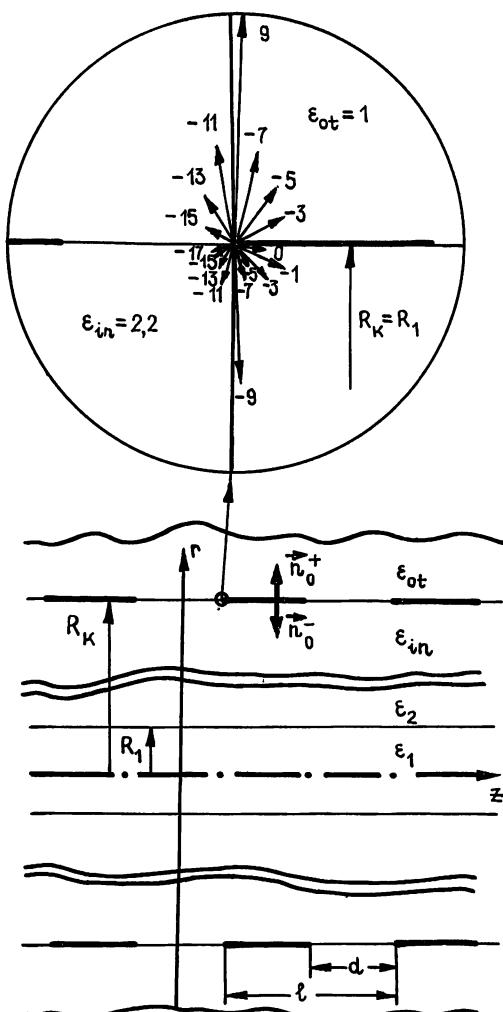


Рис. 1.

Предлагается простая методика исследования пространственного спектра полей произвольной периодической структуры, когда применим метод Римана—Гильберта [2] и параметр заполнения равен нулю ($u=0$). Ее реализация иллюстрируется на решении системы (1).

Исходя из определения функции $\tilde{W}_{ms}^s(u)$ [2] при $u=0$ ее можно представить следующим образом:

$$\tilde{W}_{ms}^s(0) = \begin{cases} 0, & m=2q-1 \text{ или } m=-2q \text{ и } s=2k-1 \text{ или } s=-2k, \\ c_s \cdot d_m & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

где $q, k \in N$ и $q, k \neq 0$. А поскольку система (1) имеет вырожденное ядро, она значительно упрощается:

$$X_m = \frac{d_m}{A(\chi_s)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{Y_s}{\eta + s} G_s c_s,$$

* В длинноволновом диапазоне ($\chi=l/\lambda_0 \ll 1$) система (1) имеет аналитическое решение, так как сильное затухание высших дифракционных гармоник позволяет ограничиться нулевым приближением. В резонансном диапазоне ($\chi \gtrsim 1$) аналитическое решение возможно лишь в частном случае $d=0.5l$, когда система (1) имеет вырожденное ядро.

$$Y_m = \frac{d_m}{B(\mu_s)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{X_s}{\eta + s} G'_s c_s,$$

где

$$A(\chi_s) = 1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \chi_s \frac{|\eta + s|}{\eta + s} \tilde{W}_{s\sigma}^s + 2 \sum_{s=-j}^{-1} \tilde{W}_{s\sigma}^s,$$

$$\dot{B}(\mu_s) = 1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_s \frac{|\eta + s|}{\eta + s} \tilde{W}_{s\sigma}^s + 2 \sum_{s=-j}^{-1} \tilde{W}_{s\sigma}^s.$$

Требование совместимости системы (2) приводит к трансцендентному уравнению относительно фазовых постоянных h_0 для собственных волн структуры. Оно содержит только диагональные элементы исходной матрицы (1), причем, из-за особого поведения функции $\tilde{W}_{s\sigma}^s(0)$ элементы с индексами $m=2k-1$ и $m=-2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) обращаются в нуль. Поэтому полное поле волны можно представить как суперпозицию основной гармоники поля ($m=0$) и совокупности четных положительных ($m=2k$) и нечетных отрицательных ($m=-2k+1$) пространственных гармоник.

Пронормируем решения системы (2) так, чтобы некоторая амплитуда X_m равна 1. Тогда при известной фазовой постоянной

$$X_m = \frac{m_s + \eta}{m + \eta} \frac{P_m(0)}{P_{m_s}(0)}, \quad Y_m = K_p \cdot X_m, \quad (3)$$

где

$$K_p = \text{const}(m) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{G'_s}{\eta + s} \tilde{W}_{s\sigma}^s (B(\mu_s))^{-1},$$

— поляризационный множитель, не зависящий от индекса дифракционной гармоники, и $\eta = h_0 l / 2\pi$.

При $|m| \rightarrow \infty$ амплитудные коэффициенты X_m ведут себя как

$$\frac{(-1)^m X_m}{|\eta + m|} \sim \frac{(-1)^{3m/2} (m+1)!!}{2^m (m/2)! (\eta + m)^3},$$

что обеспечивает хорошую сходимость решений системы (2) и позволяет при исследовании собственных режимов учитывать только распространяющиеся и две поверхности гармоники с максимальным и минимальным индексами N^+ и N^- соответственно.

Для определения порядка редукции системы, т. е. индексов N^+ и N^- , а также с целью наглядного представления результатов воспользуемся концепцией волн Бриллюэна и введем углы отражения и прохождения для кольцевой решетки. Пусть n_0^- и n_0^+ — внутренняя и внешняя нормаль к периодической поверхности. Тогда под углом падения основной волны ($m=0$) будем понимать

$$\alpha_0^\theta = -\arcsin \left[\frac{h_0}{k \sqrt{\epsilon_{in}}} \right]_{n_0^-}, \quad (4)$$

где ϵ_{in} — диэлектрическая проницаемость ограниченной кольцами области волновода и α_0^θ отсчитывается от n_0^- по часовой стрелке. А углы отражения парциальных волн α_m^- во внутреннюю область и прохождения β_m^+ через кольцевую решетку запишем в виде

$$\alpha_m^- = \arcsin \left[-\sin \alpha_0^\theta + \frac{m}{\lambda \sqrt{\epsilon_{in}}} \right]_{n_0^-}; \quad (5)$$

$$\beta_m^+ = \arcsin \left[\frac{h_0}{k \sqrt{\epsilon_{ot}}} + \frac{m}{\lambda \sqrt{\epsilon_{ot}}} \right]_{n_0^+}, \quad (6)$$

где ϵ_{ot} — проницаемость среды во внешней по отношению к кольцевой поверхности области.

Углы α_m^- и β_m^+ изменяются в пределах $-\pi/2 < \alpha_m^-$, $\beta_m^+ < \pi/2$ для распространяющихся волн, причем точки $\pm\pi/2$ соответствуют углам скольжения дифракционных

гармоник, а равенство $\alpha_m^- = \beta_m^+ = 0$ определяет частоту отсечки m -й гармоники. Отсюда легко установить порядок редукции системы (2):

$$N^\pm = 1 + \text{int} \left[\pm \sqrt{\epsilon_{\max}} \mp \pm \frac{h_0}{k} \right], \quad (7)$$

где $\epsilon_{\max} = \max(\epsilon_{in}, \epsilon_{ot})$. Отметим, что $N^+ = N^-$ только вблизи критической частоты основной волны ($h_0 \approx 0$). При произвольных значениях фазовой постоянной в дифракционном спектре волновода преобладают отрицательные гармоники. Если в этом случае считать основной гармоникой с индексом m_s , удовлетворяющим соотношению $-\eta = m_s + v$, где $|v| < 0,5$, то углы $\alpha_{m_s}^-$ и $\beta_{m_s}^+$ близки к нулю. Тогда, вводя новую индексацию относительно m_s , получим симметричный дифракционный спектр. Отсюда вполне логично нормировать решения (3) на амплитуду $X_{m_s} = 1$ и максимальную по модулю.

Для иллюстрации возможностей предложенного алгоритма рассчитаем дифракционный спектр открытого кольцевого волновода радиуса R_1 с периодом $l = 6,67 R_1$, заполненного однородным диэлектриком ($\epsilon_{in} = 2,2$, $\epsilon_{ot} = 1$). В качестве падающего поля выберем НЕ₁₁-волну на частоте $kR_1 = 1,85\pi$ ($h_0 = 1,463 k$). Тогда $m_s = -9$ и внутри волновода распространяются основная волна и отрицательные пространственные гармоники от -1-й до -17-й включительно. Результаты представлены в виде диаграммы, где каждая гармоника обозначена вектором с модулем, равным модулю ее амплитуды, и направлением, совпадающим с направлением распространения соответствующей волны Бриллюэна (рис. 1).

Под амплитудами будем понимать комплексные коэффициенты A_{m1} , A_{m2} при электрическом ($\Pi_{z_m}^9$) или A'_{m1} , A'_{m2} при магнитном ($\Pi_{z_m}^M$) потенциалах во внутренней и внешней областях волновода соответственно. Так как коэффициент поляризации $k_m^r = \Pi_{z_m}^M / \Pi_{z_m}^9$ практически не зависит от индекса гармоники, для гибридной волны безразлично, каким набором амплитуд описывать спектр. Отметим, что k_m^r рассчитывается по прямой формуле для произвольной точки дисперсионной кривой, а его модуль позволяет определить тип гибридной волны (НЕ_{пр} или ЕН_{пр}), что особенно ценно, когда нельзя воспользоваться косвенными методами. В нашем примере $|k_m^r| = 2,76 > 1$, что характерно для волны типа НЕ с доминирующими E -поляризованными относительно направляющих колец компонентами поля. Значения амплитуд A'_{m1} , A'_{m2} и углов α_m^- , β_m^+ сведены в табл. 1.

Таблица 1

m	A'_{m1}	α_m^-	A'_{m2}	β_m^+
0	$-2,30 \cdot 10^{-3} + 2,59 \cdot 10^{-5} i$	$80^\circ 52'$	—	—
-1	$-8,04 \cdot 10^{-2} + 4,26 \cdot 10^{-5} i$	$61^\circ 29'$	—	—
-3	$7,13 \cdot 10^{-2} - 3,78 \cdot 10^{-5} i$	$41^\circ 18'$	$-9,40 \cdot 10^{-2} + 4,67 \cdot 10^{-3} i$	$77^\circ 56'$
-5	$-1,20 \cdot 10^{-2} + 6,35 \cdot 10^{-5} i$	$26^\circ 09'$	$0,158 - 7,85 \cdot 10^{-3} i$	$40^\circ 71'$
-7	$3,95 \cdot 10^{-2} - 2,10 \cdot 10^{-4} i$	$12^\circ 77'$	$-0,521 + 2,59 \cdot 10^{-2} i$	$19^\circ 14'$
-9	$-2,97 \cdot 10^{-2} + 1,57 i$	$0^\circ 14'$	$3,91 \cdot 10^3 - 1,94 \cdot 10^2 i$	$0^\circ 20'$

Таким образом, для периодических структур с половинным заполнением решение задач дифракции и распространения, получаемых методом Римана—Гильберта, можно существенно упростить до аналитических выражений амплитуд пространственных гармоник в произвольном частотном диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

- Казанский В. Б., Коцаревская И. В. Препринт РИ АН УССР № 15. Харьков, 1988.

УДК 621.374.4:621.391.822.3

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКИ ТРИГГЕРОВ НА РАБОТУ ЦДЧ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПЕРЕНОСОМ

А. В. Иконников, А. В. Якимов

Цифровые делители частоты (ЦДЧ) в настоящее время находят широкое применение в синтезаторах частоты и для синхронизации генераторов [1]. Для повышения быстродействия и стабильности периода выходной импульсной последовательности ЦДЧ в таких устройствах применяются асинхронные делители частоты с параллельным переносом импульса [2]. Однако и в таких устройствах наличие флюктуаций параметров системы (главным образом, временной задержки триггеров) приводит к флюктуациям параметров выходной последовательности и к сбоям в работе ЦДЧ. В данной работе рассмотрена простейшая схема асинхронного деления частоты с параллельным переносом. Рассчитана вероятность отказа устройства и предложена методика оценивания среднеквадратического значения флюктуаций временной задержки.

1. Отличительной чертой асинхронных делителей частоты с параллельным переносом является уменьшение временных задержек выходного сигнала, по сравнению с входным, за счет включения дополнительных логических схем. На рис. 1 приводится простейший вариант такого включения, позволяющий уменьшить задержку до величины, равной времени срабатывания логической схемы «и». Функция выходного сигнала Y такого ЦДЧ описывается следующим алгебраическим логическим соотношением:

$$Y = X \cdot X_1. \quad (1)$$

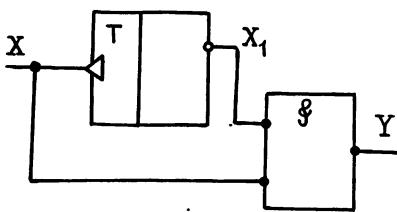
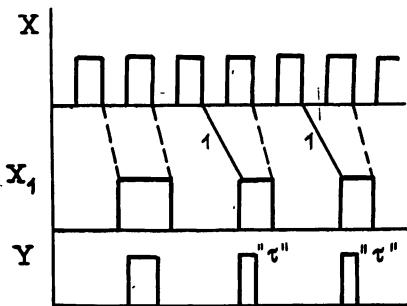


Рис. 1.

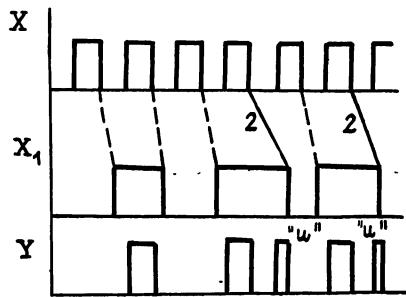
Здесь X — входной сигнал ЦДЧ ($X=0; 1$), X_1 — сигнал на выходе триггера. Коэффициент деления устройства равен 2.

В случае нормальной работы ЦДЧ период выходной последовательности есть $T=2T_0$, длительность импульсов $\tau=t_0$, где T_0 и t_0 — период и длительность импульсов последовательности на входе.

Как видно из (1), условием нормальной работы делителя является совпадение во времени логических единиц (в случае положительной логики) на выходе триггера и на выходе системы. Флюктуации временной задержки триггера могут привести к появлению флюктуаций длительности выходных импульсов и прохождению «лишних» импульсов на выход системы.



а)



б)

Рис. 2.

На рис. 2 иллюстрируются ситуации, вызванные флюктуациями ε_1 , ε_2 — задержек переднего и заднего фронтов. Штриховыми линиями указано соответствие фронтов при невозмущенных значениях задержек (при $\varepsilon_1=\bar{\varepsilon}_1$ и $\varepsilon_2=\bar{\varepsilon}_2$). Отрезки «1» на рис. 2а 1000

показывают эффект от увеличения задержки переднего фронта импульса X_1 , вызываю щего укорочение импульса выходной последовательности (ситуация «т»). Отрезки «2» на рис. 2б — увеличение задержки заднего фронта (могут появиться «лишние» импульсы «и», приводящие к прекращению деления частоты). Отметим, что уменьшение задержек ε_1 и ε_2 не приводит к нарушению нормальной работы делителя вследствие выполнения принципа причинности.

Определим вероятности появления «лишних» импульсов P_n и укорочения для тельности импульса P_τ :

$$P_{n,\tau} = P\{\varepsilon_{1,2} > T_0 - \tau_0\}.$$

Для простоты предположим, что T_0 и τ_0 детерминированы, а флуктуации задержек ε_1 и ε_2 распределены нормально, причем средние значения и дисперсии этих величин удовлетворяют условиям

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}, \quad D_1 = D_2 = D.$$

С учетом этого вероятности P_n и P_τ равны

$$P_n = P_\tau = 1 - \operatorname{erf}\left((T_0 - \tau_0 - \bar{\varepsilon}) / \sqrt{D}\right), \quad (2)$$

$$\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

В предельном случае флуктуации задержки ε_1 ведут к отсутствию выходных импульсов ($\varepsilon_1 > T_0$). С учетом сделанных предположений о статистике временных задержек вероятность этого события равна

$$P_0 = 1 - \operatorname{erf}\left((T_0 - \bar{\varepsilon}) / \sqrt{D}\right).$$

Полагая среднеквадратическое значение флуктуаций задержки малым, $\sqrt{D} \ll T_0$, получим $P_n \gg P_0$, вероятность отказа делителя определяется, в основном, вероятностью $P_n = P$.

2. Определим связь вероятности отказа P с величиной частоты $f_{bx} = 1/T_0$ входной последовательности. Максимальная частота следования входных импульсов ЦДЧ f_{bx}^{\max} зависит от времен нарастания и спада фронтов импульсов на входе триггера. Используя приближение бесконечной крутизны фронтов импульсов, пересчитаем эти времена во времена задержек, что дает

$$f_{bx}^{\max} = 1/(2\bar{\varepsilon}).$$

Введем безразмерную входную частоту $v = f_{bx}/f_{bx}^{\max}$. Учитывая (2) и считая для простоты $2\tau_0 = T_0$, представим выражение для P в виде

$$P = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad (3)$$

где $x = (v^{-1} - 1)/\alpha$, $\alpha = \sqrt{D}/\bar{\varepsilon}$ — среднеквадратическое значение относительных флуктуаций временной задержки. Зависимость $P(x)$ представлена в полулогарифмическом масштабе на рис. 3.

Зная диапазон входных частот устройства и среднеквадратическое значение относительных флуктуаций временной задержки, с помощью соотношения (3) не сложно определить вероятность отказа делителя. Например, при входных частотах $v < 0.9$ ($x > 0.11/\alpha$) вероятность отказа $P < 10^{-16}$, при $\alpha < 0.018$.

С другой стороны, измерение вероятности отказа делителя позволяет существенно упростить оценку среднеквадратического значения флуктуаций временной задержки. Традиционный способ оценки (см. [1]) по измеренной плотности фазового шума первой гармоники выходной последовательности в некоторых случаях затруднителен из-за малости флуктуаций временной задержки и, как следствие, малости фазовых флуктуаций. Преодолеть это затруднение можно, проводя измерения вероятности $P(v)$ при v , достаточно близком к единице.

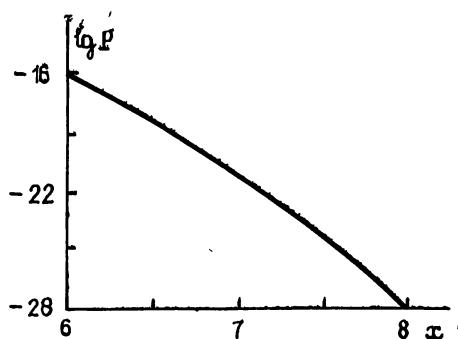


Рис. 3.

По измеренным значениям P и v , используя соотношение (3), несложно оценить значение a и, соответственно, величину \bar{D} .

Рассмотрена простейшая схема асинхронного деления частоты с параллельным переносом. Показано, что флуктуации временной задержки устройства могут привести к прохождению на выход ЦДЧ «лишних» импульсов и появлению флуктуаций длительности импульса. Рассчитана вероятность отказа делителя в предположении гауссовой статистики флуктуаций задержки.

Предложена методика оценки среднеквадратического значения флуктуаций временной задержки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agarwal K. K., Thompson W. J., Asbeck R. M. // Electr. Lett., 1985. V. 21. № 22. P. 1005—1006.
2. Лейнов М. Л., Качалуба В. С., Рыжков А. В. Цифровые делители частоты на логических элементах. — М.: Энергия, 1975.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 апреля 1989 г.

ПЕРЕЧЕНЬ СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛОВ, ПЕРЕИЗДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ В ПОЛНОМ ОБЪЕМЕ (Окончание)

157. Физика плазмы
158. Физика твердого тела
159. Физика элементарных частиц и атомного ядра
160. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых
161. Физико-химическая механика материалов
162. Физиология растений
163. Физиология человека
164. Функциональный анализ и его приложения
165. Химико-фармацевтический журнал
166. Химическая промышленность
167. Химические волокна
168. Химическое и нефтяное машиностроение
169. Химия высоких энергий
170. Химия гетероциклических соединений
171. Химия и технология воды
172. Химия и технология топлив и масел
173. Химия природных соединений
174. Химия твердого топлива
175. Цветные металлы
176. Цитология и генетика
177. Экология
178. Электронная обработка материалов
179. Электросвязь
180. Электротехника
181. Электрохимия
182. Энергомашиностроение
183. Энтомологическое обозрение
184. Ядерная физика

Справки-заявления направлять почтой по адресу: 103670, Москва, К-104
Б. Бронная, 6а, ВААП; либо в отдел расчетов по журналам — Москва, Малая Брон-
ная, д. 19, ком. 306. Тел. 203-59-53

Всесоюзное агентство по авторским правам напоминает, что срок обращения авторов в Агентство по гонорарам за переиздание журналов 1986 г. истекает 1 ноября 1990 г., по журналам 1987 г. — 1 ноября 1991 г. и т. д. Пропуск авторами сроков направлений в ВААП справок-заявлений влечет за собой перечисление невостребованых сумм в доход государства и утрату авторами права на их получение.

Расчет и выплата гонорара производится в течение года, в который в ВААП поступила справка-заявление.