

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
489	2-я снизу	$i_v(z) = i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_y} E_y(z) - \frac{\omega H}{2ik_0} \dots$	$j_y(z) = i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_y} E_y(z) - \frac{\omega H}{2ik_0} \dots$
490	3-я сверху	которые затем представляем ...	которые затем представляем
491	8-я сверху	... отмечены одним штрихом, а к антисимметричным — двумя.	... отмечены индексом «а», а к антисимметричным — «б».
491	20-я сверху	$-ik_{ex} + \dots = -\left(\frac{\omega H}{2k_0c} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2}\right)^2 \times$	$-ik_{ex} + \dots = -\left(\frac{\omega H}{2k_0c} \frac{k_x \omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2}\right)^2 \times$
491	22-я сверху	$-ik_{ex} \dots = -\left(\frac{\omega H}{2k_0c} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2}\right)^2 \times$	$-ik_{ex} \dots = -\left(\frac{\omega H}{2k_0c} \frac{k_x \omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2}\right)^2 \times$
493	3-я снизу	1) ... $\text{Re}(k_{ey}) \gg \text{Im}(k_{ey})$ , где $\omega_c = \dots \sqrt{1 + \text{ctg}^2(k_x d/2)}$ ...	1) ... $\text{Re}(k_{ey}) \gg \text{Im}(k_{ey}^2)$ , где $\omega_c = \dots \sqrt{1 + \text{ctg}^2(k_x d/2)}$ ...
493	1-я снизу	$\gamma = \sqrt{(1 + \text{th}) \text{th} \frac{k_x d}{2k_0c} \left(\frac{1}{2} k_x k_{ex}\right)^2 \left(k_{ey}^2 + k_z^2 \text{tg} \frac{k_x d}{2}\right)^{-1}}$	$\gamma = \frac{\omega_p}{2} \left(\frac{\omega H}{2k_0c}\right)^2 k_x k_{ey} \sqrt{\left(1 + \text{th} \frac{k_x d}{2}\right) \text{th} \frac{k_x d}{2} \left(k_{ey}^2 + k_z^2 \text{tg} \frac{k_x d}{2}\right)^{-1}}$
494	10-я сверху	2) $\gamma \ll \omega_c$ , $\text{Re}(k_{ey}) \ll \text{Im}(k_{ey})$ .	2) $\gamma \ll \omega_c$ , $\text{Re}(k_{ey}^2) \ll \text{Im}(k_{ey}^2)$ .
494	12-я снизу	$\gamma(k_x) = \gamma_{\max} \left[1 - \left(\frac{A(k_x) \omega_p}{3\gamma_{\max}}\right)^2\right]$	$\gamma(k_x) = \gamma_{\max} \left[1 - \left(\frac{A(k_x)}{3B1/3}\right)^2\right]$
494	3-я снизу	$D(k_x) = \left(\frac{\omega H}{2k_0c}\right)^2 \dots$	$D(k_x) = \left(\frac{\omega H}{2k_0c}\right)^4 \dots$
494	2-я снизу	... при $c = 0$	... при $C = 0$
495	3-я сверху	$\gamma(k_x) \simeq \gamma_{\max} \left[1 - \frac{3}{128} \left(\frac{c(k_x) \omega_p}{\gamma_{\max}}\right)^2\right]$	$\gamma(k_x) \simeq \gamma_{\max} \left[1 - \frac{2}{25} \left(\frac{C(k_x)}{D1/5}\right)^2\right]$

## СОДЕРЖАНИЕ

Бочаров А. А. Восстановление пространственного распределения турбулентной среды по рассеянию импульсов: метод «космической томографии» . . . . .	395
Жилин В. В. Пропускная способность многоканальной радиометрической системы	403
Беляев П. П., Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Линейная теория тонкой структуры излучения альфвеновского мазера с дрейфом частоты . . . . .	408
Белокопытов Г. В., Семенов В. Н., Чистяев В. А. Резонансное стрикционное параметрическое возбуждение при многочастотной накачке . . . . .	417
Пиковский А. С. Пространственно-временное развитие хаоса в неравновесных средах . . . . .	425
Андрушкевич А. В., Кипчатов А. А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде . . . . .	431
Погорелов В. И. Отражение радиоволн от слоя с переменной диэлектрической проницаемостью . . . . .	435
Шишов В. И. Влияние размеров источников на характеристики мерцаний . . . . .	443
Мальцев А. А., Серебряков Г. В. Анализ работы адаптивной антенной решетки с переключаемой субапертурой при действии коррелированных помех . . . . .	453
Листвин В. Н. Поляризационная фильтрация в волоконном кольцевом интерферометре . . . . .	458
Баринаева В. Ф., Павловская Г. В., Раевский С. Б. К вопросу о спектре волн дифрагмированных волноводов . . . . .	466
Трофимов В. А. Численный эксперимент по фокусировке световых пучков сегментными зеркалами . . . . .	471
Кузнецов В. А., Лерер А. М., Шеламаев Г. Н. Дифракция волноводных волн на конечной системе лент в слонстом диэлектрике . . . . .	479
Качалов К. О., Попков Н. Г. Параметрическое возбуждение электромагнитных и поверхностных плазменных волн ленточным электронным пучком в периодическом магнитном поле . . . . .	488
Михайлов Г. Б. Нелинейная электродинамическая теория усилителя бегущей волны на распределенном лавинопролетном диоде . . . . .	497

## Краткие сообщения и письма в редакцию

Гудин В. А., Дейнеко В. Н., Иванов В. Н., Игнатьев Ю. А., Терехов А. С. Экспериментальная диагностика искусственных крупномасштабных возмущений верхней ионосферы методом ВНЗ . . . . .	506
Сазонов С. В. Нелинейный режим электродинамических возмущений экваториальной ионосферы . . . . .	508
Паньков Л. В., Поляков В. М., Семенев Ю. А. О наблюдениях сигналов в частотном диапазоне, значительно превышающем предельную частоту спектра декаметровых волн . . . . .	510
Клейман Е. Б., Ойрингель И. М., Ступко Е. Г. О влиянии поляризационных плазменных эффектов на частоту неупругих атомных переходов . . . . .	514
Гирка В. А., Гирка И. А. Влияние неоднородности плазмы на спектры азимутальных поверхностных волн . . . . .	516
Воробьев С. Н. Взаимное влияние элементов в ограниченной дифракционной решетке . . . . .	517

## Информация

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. И. ГАПОНОВ,  
В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),  
В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРА-  
ТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИ-  
КОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР,  
В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 7.02.90. Подписано к печати 17.04.90. МЦ 05039.  
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 11,2. Усл. кр.-отт. 13,44. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 1210 экз.  
Заказ 2788. Цена 1 р. 80 к.

---

Адрес редакции: 603600, Горький, ул. Лядова, 25, Научно-исследовательский  
радиофизический институт, редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика».  
Телефон 36-01-71.

---

Горьковская областная типография управления издательств, полиграфии и книжной  
торговли, 603116, г. Горький, ул. Гордеевская, 7.

УДК 621.371

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЫ ПО РАССЕЙАНИЮ ИМПУЛЬСОВ: МЕТОД «КОСМИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ»

А. А. Бочаров

Описан томографический метод восстановления пространственного распределения случайно-неоднородной среды по рассеянию импульсных сигналов. Данный метод был развит и использован для исследования распределения турбулентной межзвездной плазмы в Галактике.

Для целого ряда научных и прикладных приложений представляет интерес задача мониторинга больших объемов турбулентной среды. Исследования атмосферы и океана, ионосферы Земли и межпланетной плазмы — далеко не полный перечень подобных приложений. В частности, для радиоастрономии важной задачей является исследование пространственного распределения турбулентной плазмы в Галактике, что, с одной стороны, будет способствовать лучшему пониманию физических процессов в межзвездной среде, а с другой — необходимо для учета и возможной компенсации различных эффектов, связанных с рассеянием радиоволн в межзвездной плазме, при наблюдениях космических радиисточников.

В настоящей работе будет рассмотрен один из подходов к решению подобных задач, названный нами методом «космической томографии» (МКТ) [1, 2], поскольку он был развит применительно к конкретной проблеме исследования пространственного распределения турбулентной межзвездной плазмы по экспериментальным данным о рассеянии радиопульсов пульсаров.

**1. Рассеяние импульсов в случайно-неоднородной среде.** Для перехода к решению обратной задачи, т. е. восстановлению пространственного распределения случайно-неоднородной среды, необходимо прежде всего иметь решение прямой задачи — о рассеянии импульса в среде. С учетом конкретных параметров межзвездной плазмы [3] будем рассматривать случай, когда флуктуации показателя преломления относительно малы, а случайные неоднородности являются крупномасштабными по сравнению с длиной волны, что позволяет при анализе использовать параболическое и марковское приближения [4–6]. Кроме того, будем считать среду статистически квазиоднородной [4] вдоль луча зрения на источник и статистически однородной в поперечном направлении.

При такой постановке прямой задачи в [7] было получено общее аналитическое представление для двухчастотной функции взаимной когерентности поля и связанных с ней характеристик — углового спектра рассеянного излучения и функции рассеяния импульса. Альтернативный подход к нахождению данных характеристик — метод случайных «лучевых» траекторий — был рассмотрен в [8], а в [9] описана реализующая этот метод конкретная программа для ЭВМ, составленная применительно к задаче о рассеянии импульса пульсара в межзвездной среде.

Используя обозначения, принятые в [7, 8], будем описывать среду автокорреляционной функцией (АКФ) неоднородностей показателя преломления

$$R_n(\Delta r, \Delta z, z) = \langle \Delta n(r, z) \Delta n(r + \Delta r, z + \Delta z) \rangle,$$

где  $\Delta n(\mathbf{r}, z)$  — флуктуирующая составляющая показателя преломления, ось  $z$  направлена от источника к приемнику,  $\mathbf{r} = (x, y)$  — поперечная координата (здесь учтена статистическая квазиоднородность среды по  $z$  и однородность по  $\mathbf{r}$ ). Введем «поперечную» АКФ неоднородностей

$$A(\Delta \mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\Delta \mathbf{r}, \Delta z, z) d\Delta z$$

и связанные с ней характеристики — коэффициент рассеяния  $\beta(z)$  и средний квадрат флуктуаций фазы волны  $L(z)$ :

$$\beta(z) = k^2 A(0, z), \quad L(z) = \int_0^z \beta(z) dz,$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число,  $c$  — скорость света,  $\omega$  — частота.

Рассеяние импульсов пульсаров становится практически ощутимым только при  $L \gg 1$  — в режиме сильного или многократного рассеяния. При этом двухчастотная функция взаимной когерентности и связанные с ней характеристики определяются единственным параметром — коэффициентом диффузии

$$D(z) = - \left. \frac{\partial^2 A(\Delta \mathbf{r}, z)}{\partial \Delta \mathbf{r}^2} \right|_{\Delta \mathbf{r} = 0},$$

используемым при диффузионно-лучевом подходе к распространению волн в случайно-неоднородных средах [10], который можно считать частным случаем метода случайных «лучевых» траекторий при  $L \gg 1$  [8]. Коэффициент диффузии имеет физический смысл дисперсии углового рассеяния волны на единице длины, и для разреженной межзвездной плазмы он пропорционален дисперсии флуктуаций электронной концентрации независимо от вида пространственного спектра неоднородностей [11].

В общем случае томографическую реконструкцию можно определить как восстановление локальных параметров среды по значениям некоторых интегральных характеристик прошедшей сквозь нее волны. В МКТ в качестве входных данных выступают экспериментальные значения временного удлинения импульса  $\Delta \tau$  или, что эквивалентно, полосы частотной декорреляции  $\Delta f$  из-за рассеяния (в принципе, можно было бы использовать и значения видимых угловых размеров пульсаров, но на сегодняшний день таких данных очень мало, а их точность невысока). В качестве выходной характеристики целесообразно выбрать пространственное распределение коэффициента диффузии. Прежде всего, нам нужна зависимость длительности рассеянного импульса от распределения коэффициента диффузии вдоль трассы распространения —  $\Delta \tau[D(z)]$ . К сожалению, для общего случая не получено достаточно простого аналитического выражения, пригодного для перехода к решению обратной задачи. Однако при  $L \gg 1$  удлинение импульса и его среднее запаздывание  $T$  из-за рассеяния есть достаточно близкие величины — отношение  $\Delta \tau/T$  лежит в пределах от 0,63 до 1 [12]. Это позволяет перейти к рассмотрению зависимости  $T[D(z)]$ , считая  $\Delta \tau \approx 0,8T$  (ниже будет показано, как можно учесть конкретное соотношение между  $\Delta \tau$  и  $T$  в рамках «гибридной» процедуры восстановления). Выражение для среднего запаздывания из-за рассеяния, справедливое при любом  $L$ , имеет простой вид [12]:

$$T = \frac{1}{2c} \int_0^z (z - z_1) \frac{z_1}{z} D(z_1) dz_1. \quad (1)$$

Данное выражение является основой для дальнейшего рассмотрения. Из (1) следует, кстати, что величина  $T$  не изменится, если поменять

местами источник и приемник. Более того, при такой замене не меняется и профиль рассеянного импульса (в отличие, например, от углового спектра рассеянного излучения) — результат, очевидный с точки зрения метода случайных «лучевых» траекторий [2].

**2. Прямая задача в дискретной формулировке.** Для обеспечения возможности численного решения на ЭВМ обратной задачи необходимо перейти к дискретной формулировке прямой задачи. С этой целью разобьем всю трассу на  $N$  «элементарных» отрезков произвольной длины  $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , в пределах каждого из которых величину  $D(z)$  считаем постоянной и равной  $D_i = D(z'_i)$ ,  $z'_i \in (z_{i-1}, z_i)$ . Соответственно обозначим  $T_i = T(z_i)$  — среднее запаздывание импульса в граничной точке  $z_i$   $i$ -го отрезка. Такой переход вполне допустим, если длина каждого отрезка будет меньше характерного масштаба изменения функции  $D(z)$  на соответствующем участке (подчеркнем, что речь идет не о характерном размере неоднородностей  $a_0$ , а о масштабе, на котором заметно меняются статистические параметры среды и который может превышать  $a_0$  на несколько порядков). Вообще говоря, соответствующим выбором числа «элементарных» отрезков и длины каждого из них всегда можно обеспечить необходимую степень приближения к реальному распределению.

При такой постановке задачи временное запаздывание  $T_k$  можно, согласно (1), представить в виде суммы вкладов от «элементарных» отрезков:

$$T_k = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ki},$$

где  $\Delta t_{ki}$  — вклад  $i$ -го отрезка в общее временное запаздывание импульса в точке  $z_k$ , причем  $\Delta t_{ki} = a_{ki} D_i$ , а коэффициенты  $a_{ki}$  определяются как

$$a_{ki} = \frac{\Delta z_i}{2c} \left[ \frac{\Delta z_i}{2} - \frac{\Delta z_i^2}{z_k} + \frac{(z_i - \Delta z_i)(z_k - z_i)}{z_k} \right] \quad (2)$$

при  $k \geq i$  и  $a_{ki} = 0$  при  $k < i$ . Если вся трасса разбита на  $N$  отрезков, то соответствующие значения  $T_k$  окончательно запишутся как

$$T_k = \sum_{i=1}^k a_{ki} D_i, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

или, учитывая, что  $a_{ki} = 0$  при  $k < i$ ,

$$T_k = \sum_{i=1}^N a_{ki} D_i, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

т. е. формулу (3) можно представить в виде

$$T = [a_{ki}] D, \quad (5)$$

где  $T$  и  $D$  — вектор-столбцы из  $N$  элементов, а  $[a_{ki}]$  — квадратная матрица размером  $N \times N$ , причем нижняя треугольная. Полученные соотношения (3)–(5) дают возможность перейти к решению обратной задачи.

**3. Постановка и пути решения обратной задачи.** Ограничимся пока рассмотрением «линейной» или одномерной обратной задачи, считая, что приемник и ряд источников (или, что полностью эквивалентно, источник и ряд приемников) расположены на одной прямой. Пусть для определенности приемник расположен в точке  $z = 0$ , а источники лежат на полуоси  $z > 0$ . При этом все полученные ранее соотношения остаются неизменными, поскольку средняя форма рассеянного импульса не меняется при перестановке источника и приемника.

Обратную задачу сформулируем следующим образом. Имея  $M$  значений  $T_k$ ,  $k=k_1, k_2, \dots, k_M$ , каждое из которых отвечает соответствующему расстоянию  $z_k$ , получить оценку распределения  $D(z)$  на интервале  $(0, z_N)$ ,  $N \leq k_M$ , т. е. получить набор значений  $D_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ : Задача при этом сводится к решению системы линейных уравнений вида (3)–(5), причем число уравнений равно  $M$ , а число неизвестных —  $N$ . В тривиальном случае, когда  $M=N$  и все  $k_i=i$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , а ошибками во входных данных можно пренебречь, то, учитывая, что матрица  $[a_{ki}]$  — нижняя треугольная, сразу получаем решение

$$D_1 = \frac{T_1}{a_{11}}, \quad D_2 = \left( T_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} T_1 \right) / a_{22}, \dots$$

и т. д.

На практике исходные данные всегда являются в той или иной степени приближенными. Кроме того, например, в «космической томографии» число имеющихся экспериментальных данных не очень велико, поэтому особый интерес представляет случай  $N > M$ , когда число выходных параметров хотелось бы иметь заметно больше, чем входных. Вообще говоря, задачи реконструктивной вычислительной томографии являются типичным примером некорректных задач [13], что затрудняет их практическое решение.

Рассмотрим один из возможных подходов к решению нашей конкретной задачи при  $M \leq N$ . Ищем такую оценку распределения  $\hat{D} = \{\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_N\}$ , которая минимизирует сумму квадратов относительных отклонений значений  $\hat{T}_k$ , соответствующих данной оценке:

$$\hat{T}_k = \hat{T}_k[\hat{D}] = \sum_{i=1}^k a_{ki} \hat{D}_i, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

от имеющихся экспериментальных значений  $T_k$ , т. е. ищем решение задачи

$$F[\hat{D}] = \sum_{k \in K} \frac{(T_k - \hat{T}_k)^2}{T_k^2} = \min, \quad (6)$$

где  $K$  — множество точек  $k=k_1, k_2, \dots, k_M$ , для которых известны экспериментальные значения  $T_k$ . В (6) берется относительное, т. е. нормированное к величине  $T_k$ , отклонение, поскольку на практике, например, в «космической томографии», величины  $T_k$  могут отличаться на несколько порядков.

В принципе, при такой постановке задачи несложно получить аналитическое решение. Условие экстремума имеет вид

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \hat{D}_i} \right|_{\hat{D}=\hat{D}^0} = 0, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

где  $\hat{D}^0 = \{\hat{D}_1^0, \hat{D}_2^0, \dots, \hat{D}_N^0\}$  — оценка, удовлетворяющая (6). Дифференцируя (6) по  $\hat{D}_i$ , получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{D}_i} = 2 \sum_{k \in K} \frac{a_{ki}}{T_k^2} (\hat{T}_k - T_k). \quad (7)$$

Нахождение оценки  $\hat{D}^0$  сводится, следовательно, к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{k \in K} \frac{a_{ki}}{T_k^2} \left( \sum_{j=1}^k a_{kj} \hat{D}_j^0 - T_k \right) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Меняя  $\sum_{j=1}^k$  на  $\sum_{j=1}^N$  при учете  $a_{kj}=0, j>k$ , перепишем систему уравнений в окончательном виде:

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} \hat{D}_j^0 = e_i, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

где

$$b_{ij} = \sum_{k \in K} \frac{a_{ki} a_{kj}}{T_k^2}, \quad e_i = \sum_{k \in K} \frac{a_{ki}}{T_k},$$

откуда исконое решение

$$\hat{D}^0 = [b_{ij}]^{-1} E.$$

Однако решение подобных некорректных, плохо обусловленных задач рассмотренным выше прямым методом обычно не обеспечивает получения удовлетворительных оценок, особенно при  $M \ll N$  и (или) наличии заметных ошибок в исходных данных [14, 15]. В рамки подобного подхода к тому же плохо вписываются и возможности учета различных дополнительных физических условий и ограничений, которые могут положительно сказаться на свойствах получаемых оценок. Поэтому для практического решения нашей задачи следует использовать иные методы.

К настоящему времени разработан целый ряд различных подходов к решению подобных задач (см., например, [14, 16]). Тем не менее, для каждого конкретного случая практически невозможно указать некий оптимальный метод решения. По сути дела выбор того или иного численного метода решения обратной задачи определяется множеством различных соображений начиная со свойств исходных данных и кончая быстродействием имеющейся в наличии ЭВМ. Используемый нами численный метод решения задачи кратко описан ниже.

**4. Численный алгоритм и экспериментальные результаты.** Для практического решения обратной задачи нами был использован следующий простой итерационный алгоритм. Стандартный алгоритм, основанный на методе градиентного спуска для минимизации заданной целевой функции  $F[D]$ , имеет вид [16]

$$\hat{D}_i^{n+1} = \hat{D}_i^n - \alpha \left. \frac{\partial F}{\partial \hat{D}_i} \right|_{\hat{D}_i = \hat{D}_i^n}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — некоторый параметр. Пусть на искомую оценку наложены некоторые априорные ограничения, описываемые оператором ограничений  $P$ :

$$\hat{D} \equiv P[\hat{D}].$$

В рамках рассматриваемого простого итерационного алгоритма учет априорной информации может быть реализован добавлением на каждой итерации к (8) еще и следующей операции:

$$\hat{D}_i^{n+1} = P[\hat{D}_i^{n+1}].$$

В нашем случае естественным физическим ограничением является положительность искомой оценки  $\hat{D}_i$ , следовательно, оператор ограничений можно записать в виде

$$P[\hat{D}_i] = \max \{\hat{D}_i, 0\}.$$

Параметр  $\kappa$  в (8) с учетом выражения (7) для производной целевой функции и исходя из соображений размерности может быть выбран как  $\kappa = \alpha D_0^2$ , где  $\alpha \approx 0,1 \div 1$  — параметр скорости сходимости,  $D_0$  — некоторая разумная (по порядку величины) оценка для значений  $D_i$ . В результате получаем следующую итерационную процедуру:

$$\hat{D}_i^{n+1} = \max \left\{ 0, \hat{D}_i^n + \alpha D_0^2 \sum_{k \in K} \frac{a_{ki}}{T_k^2} [T_k - \hat{T}_k(\hat{D}^n)] \right\}.$$

Подчеркнем, что данный алгоритм является далеко не оптимальным с точки зрения, например, скорости сходимости или устойчивости получаемых оценок. Его основными преимуществами являются большая гибкость при включении различных дополнительных условий и ограничений, а также относительно небольшие затраты машинного времени из-за отсутствия трудоемких операций типа обращения матриц.

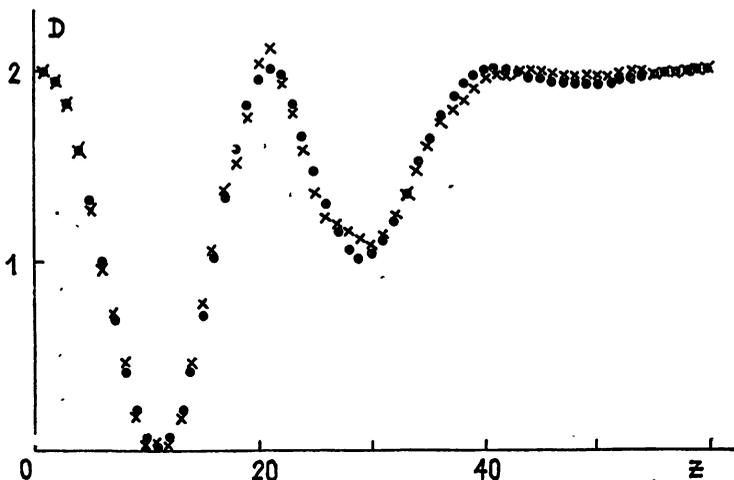


Рис. 1.

Исследование возможностей восстановления с помощью описанного алгоритма проводилось путем численного моделирования. Задавалось некоторое модельное распределение  $D(z)$ , т. е. формировалась последовательность значений  $D_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , и по формуле (3) вычислялись соответствующие значения временного запаздывания  $T_k$ ,  $k=1, 2, \dots, N$ . Затем проводилось «прореживание», т. е. оставались лишь определенные отсчеты  $T_k$ , например, каждый третий или пятый, которые и использовались в качестве входных данных (более подробно детали процедуры восстановления и полученные результаты представлены в [2]). На рис. 1 приведено сравнение результатов восстановления с исходной моделью при сохранении каждого пятого отсчета  $T_k$ , т. е. при отношении числа входных и выходных параметров 1:5 (точки — исходная модель, крестики — результаты восстановления). Видно, что относительная погрешность восстановления лежит в пределах 3—5%, лишь в нескольких точках достигая величины 8—10% (при отношении числа входных и выходных параметров 1:3 относительная ошибка восстановления не превышает 1—2% [2]). Отметим, что в данном случае не использовалась никакая регуляризирующая процедура, что могло бы значительно улучшить качество восстановления.

Рассмотренная выше методика была использована для получения профиля распределения турбулентной плазмы в Галактике на основе имеющихся экспериментальных данных о рассеянии радиоизлучения пульсаров; при этом были получены некоторые новые астрофизические результаты [11, 17]. В этих работах содержатся также и дополнительные сведения о некоторых особенностях алгоритма восстановления, не об-

суждавшихся здесь, в частности, об использовании специальной регулирующей процедуры и точности получаемых в процессе восстановления результатов.

Несколько слов о возможностях дальнейшего развития метода. Поскольку на практике обычно измеряется не относительное временное запаздывание, а длительность рассеянного импульса, то в случае, когда точность измерения данной характеристики достаточно высока, может оказаться целесообразным использование следующей «гибридной» процедуры. Вначале длительность рассеянного импульса переводится во временное запаздывание с помощью приближенного соотношения  $\Delta\tau \approx 0,8T$ . Затем тем или иным способом, например с помощью описанного выше итерационного алгоритма, восстанавливается зависимость  $D(z)$ . Для полученного профиля распределения с помощью описанной в [9] программы вычисляется форма рассеянного импульса в соответствующих точках  $z_k$  и определяются точные значения коэффициентов связи  $c_k$  между  $\Delta\tau_k$  и  $T_k$ , после чего берутся новые, уточненные значения  $T'_k = \Delta\tau_k/c_k$ , на основе которых вновь ищется оценка  $D(z)$ . Подобная процедура повторяется несколько раз.

В принципе, в рамках рассмотренного ранее итерационного алгоритма восстановления на каждой итерации можно было бы вычислять не временное запаздывание по соответствующей формуле, а непосредственно длительность импульса с помощью программы [9], однако при этом даже в одномерном случае к быстрдействию ЭВМ предъявляются очень высокие требования.

Переход от рассмотренного одномерного случая к реальной пространственной задаче практически очевиден. Суть подобного перехода проиллюстрирована на рис. 2, где в точке  $A$  расположен приемник, а в остальных — источники (несложно распространить рассмотрение на случай, когда имеется несколько источников и несколько приемников). В данном случае временное запаздывание импульса от  $k$ -го источника (т.е. расположенного в  $k$ -м элементе объема) можно представить в виде

$$T_k = \sum_{i \in I_k} a'_{ki} D_i, \quad (9)$$

где  $I_k$  — множество элементов объема, дающих вклад в  $T_k$ , т.е. лежащих на луче зрения от приемника к  $k$ -му источнику. Коэффициенты  $a'_{ki}$  в (9) есть модифицированные значения  $a_{hi}$ , вычисляемые по формуле (2), в которой вместо  $\Delta z_i$  подставляются соответствующие значения  $\Delta z_{ik}$ , где  $\Delta z_{ik}$  — длина отрезка, образованного пересечением  $i$ -го элемента объема «лучом» от источника в  $k$ -м элементе. Вообще говоря, здесь мы имеем очень близкую аналогию со стандартной постановкой задачи реконструктивной вычислительной томографии [18].

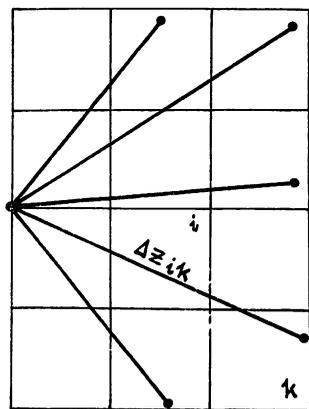


Рис. 2.

В настоящей работе рассмотрен томографический метод восстановления пространственного распределения случайно-неоднородной среды на основе информации о рассеянии проходящих сквозь нее импульсных сигналов. Данный метод первоначально был развит применительно к конкретной задаче, связанной с исследованием распределения в Галактике случайных неоднородностей электронной концентрации межзвездной плазмы, ответственных за рассеяние радиоизлучения пульсаров. Опираясь на полученные ранее результаты в области решения прямой задачи — о рассеянии импульса в случайно-неоднородной среде, удалось добиться определенного продвижения в решении обратной за-

дачи, вплоть до создания конкретной программы для ЭВМ для одномерного случая.

Поскольку исходные уравнения, лежащие в основе рассмотренного метода, в частности малоугловое и марковское приближения, имеют достаточно широкую сферу приложения, то результаты данной работы, вероятно, могут найти применения и для других задач, связанных с мониторингом турбулентных сред. В этом смысле МКТ может рассматриваться как дополнение к другим методам, описанным, например, в [19].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров А. А. // Тезисы докл. XV Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1987. С. 172.
2. Бочаров А. А. Препринт Ин-та космич. исслед. АН СССР Пр-1277. М., 1987.
3. Rickett B. J. // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1977. V. 15. P. 479.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
5. Прохоров А. М. и др. // УФН. 1974. Т. 114. С. 415.
6. Lee L. C., Jokipii J. R. // *Astrophys. J.* 1975. V. 196. P. 695.
7. Бочаров А. А. // *Астрон. журн.* 1987. Т. 64. № 5. С. 1004.
8. Бочаров А. А. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1988. Т. 31. № 10. С. 1151.
9. Бочаров А. А. // *Астрофизика.* 1987. Т. 27. Вып. 3. С. 489.
10. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.
11. Бочаров А. А., Шапировская Н. Я. // *Письма в Астрон. журн.* 1988. Т. 14. № 5. С. 409.
12. Бочаров А. А. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1988. Т. 31. № 11. С. 1407.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987.
14. Фриден Б. В кн.: *Обработка изображений и цифровая фильтрация* / Под ред. Т. Хуанга. — М.: Мир, 1979.
15. Frieden B. R. // *Computer Graphics Image Processing.* 1980. V. 12. P. 40.
16. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986.
17. Бочаров А. А., Шапировская Н. Я. // *Письма в Астрон. журн.* 1988. Т. 14. № 11. С. 963.
18. Ценсор Я. // *ТИИЭР.* 1983. Т. 71. С. 148.
19. Исимацу А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. — М.: Мир, 1981.

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
18 октября 1988 г.

#### THE RESTORATION OF TURBULENT MEDIUM SPATIAL DISTRIBUTION BY PULSE SCATTERING: «SPACE TOMOGRAPHY» METHOD

*A. A. Bocharov*

The tomographic method is presented for restoration of random medium spatial distribution by pulsed signal scattering. The method was developed and used for the investigation of turbulent interstellar plasma distribution in our Galaxy.

---

УДК 535.214.4

## ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ МНОГОКАНАЛЬНОЙ РАДИОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. В. Жилин

Рассматривается многоканальная радиометрическая система параллельного обзора, предназначенная для картографирования подстилающей поверхности с движущегося носителя. Исследуется зависимость ее информативности от плотности установки и взаимной ориентации лучей антенн.

Универсальной количественной мерой оценки качества информационных систем является их пропускная способность. Потенциальная возможность пропускной способности одиночного радиометрического приемника при многократном повторении измерений рассмотрена в работе [1]. Однако воспользоваться этим результатом для оценки информативности многоканальной радиометрической системы не представляется возможным из-за существующих в приемниках системы параллельного обзора корреляций как выходных полезных сигналов, так и помех. Коррелированность выходных полезных сигналов и помех обусловлена пересечением лучей антенн, а также траекторий их движения при измерении неменяющихся во времени пространственных распределений радиояркости.

В настоящей работе рассматривается многоканальная радиометрическая система параллельного обзора, предназначенная для картографирования подстилающей поверхности с движущегося носителя расположенными по фронту движения измерительными приемниками. Теоретически исследуется зависимость пропускной способности от плотности установки, взаимной ориентации и характеристик входящих в систему идентичных приемников, каждый из которых состоит из принимающей излучение антенны и радиометра. Под идентичностью приемников понимаются одинаковые для всех каналов функции направленности их антенн, а также равные преобразующие и шумовые параметры радиометров.

Для оценки пропускной способности многоканальной радиометрической системы воспользуемся известным выражением количества информации по Шеннону, считываемой одиночным приемником с единицы телесного угла функции направленности антенны [2],

$$C = 2S \log_2(P_s/P_n + 1), \quad (1)$$

где  $P_s$ ,  $P_n$  — средние мощности сигнала и помехи на выходе радиометра,  $S$  — двумерная полоса пропускания антенн.

В случае многоканальной системы под двумерной полосой  $S$  будем понимать область пространственных частот распределения радиояркости зондируемой поверхности, фрагмент которой может быть воспроизведен по выходным сигналам без искажений. В качестве  $P_s$  и  $P_n$  будем рассматривать усредненные по каналам системы значения мощностей полезных сигналов и помех.

Оценку пропускной способности радиометрической системы определим при следующих условиях:

во-первых, будем считать, что на входе исследуемой системы присутствует протяженный источник излучения, распределение радиояр-

кости  $T_{\pi}(x, y)$  которого обладает равномерным пространственным спектром, т. е.  $\tilde{T}_{\pi}(u, v) = FT_{\pi}(x, y) = \text{const}$ , где  $u$  и  $v$  — пространственные частоты в двух ортогональных направлениях  $x$  и  $y$ , а  $F$  — символ фурье-преобразования;

во-вторых, пораженность системы помехами отразим наличием в каждом приемнике стационарного теплового шума с температурой  $T_n$  и входного фонового излучения, создаваемого средней составляющей  $T_{\text{лю}}$  распределения. Среднее значение  $T_{\text{лю}}$  не является носителем информации вследствие своей неизменности;

в-третьих, аппроксимируем подстилающую поверхность частью поверхности сферы, в центре которой расположены все антенны системы, ориентированные в телесном секторе  $D = D_x D_y$ , где  $D_x, D_y$  — угловые секторы, соответствующие направлениям  $x, y$ . При этом движение измерительной системы, происходящее в направлении  $x$  со скоростью  $V$ , представляется как ее вращение с угловой скоростью  $V/h$ , где  $h$  — высота полета носителя.

Наблюдаемое распределение мощности в фокальной плоскости антенны  $T_a(x, y)$  определяется уравнением антенного сглаживания, представляющим собой свертку функции  $T_{\pi}(x, y)$  с функцией направленности антенны  $A(x, y)$ , а именно,  $T_a(x, y) = T_{\pi}(x, y) * A(x, y)$ , где символ  $*$  означает операцию свертки. По отношению к распределению  $T_{\pi}(x, y)$  антенна каждого приемника является двумерным простран-

ственным фильтром низких частот с частотной характеристикой  $\tilde{A}(u, v) = FA(x, y)$ , граничные частоты которого определяются линейными размерами апертуры  $d_x, d_y$ , длиной волны  $\lambda$  и равны  $u_{\text{гр}} = d_x/\lambda, v_{\text{гр}} = d_y/\lambda$ .

Ограничение двумерной полосы пропускания пространственных частот  $S$  многоканального приема обусловлено не только конечностью размеров апертуры антенн, но и дискретным их расположением в секторе обзора.

В направлении движения граничная частота системы определяется избирательными свойствами антенн отдельных приемников и равна  $d_x/\lambda$ . В направлении, перпендикулярном направлению движения, ограниченное число приемников  $N$  в ограниченном секторе обзора  $D_y$  определяет максимальную частоту пространственных вариаций радиояркости, воспроизводимых системой без искажений. Для равноотстоящих по  $y$  антенн эта частота равна  $N/2D_y$  и при увеличении плотности размещения  $\rho_y = N/D_y$  не превысит граничной частоты отдельной антенны  $d_y/\lambda$ . В этом случае прием излучения разнесенными в направлении  $y$  антеннами представляет собой пространственную дискретизацию с шагом  $\Delta y = 1/\rho_y$  сечения  $T_{\pi}(y)$  распределения  $T_{\pi}(x, y)$ , прошедшего

через антенный фильтр низких частот с характеристикой  $\tilde{A}(v)$ . Следовательно, двумерная полоса частот связана с плотностью размещения приемников и размерами апертуры антенн соотношением

$$S = \nu d_x d_y / \lambda^2, \quad (2)$$

где  $\nu = \min(\rho_y / 2v_{\text{гр}}; 1)$ . Значение  $\rho'_y = 2v_{\text{гр}}$  соответствует производимой пространственной дискретизации по Котельникову.

При малой плотности  $\rho_y < \rho'_y$  полезный входной сигнал в полосе пространственных частот  $0 \leq v \leq v_{\text{гр}}$  селекционируется антеннами отдельных приемников. Однако недостаточно частая его дискретизация делает невозможным синтез изображения пространственной картины радиояркости с частотами  $\nu v_{\text{гр}} < v \leq v_{\text{гр}}$ . Сигналы в этой части  $uv$ -плоскости воспринимаются системой как помеха, ограничивая тем самым полосу пропускания полезного сигнала.

При большой плотности  $\rho_y \geq \rho'_y$ , характеризуемой сильным пересечением траекторий движения лучей антенн, система имеет максимально возможную для конкретных размеров антенн полосу пропускания.

Формула (1) справедлива для равномерных спектров независимых между собой сигналов и помех, имеющих гауссовы распределения. Если тепловые шумы радиометров и фоновое излучение в анализируемой выходной полосе имеют равномерные спектры, то спектр полезного выходного сигнала в каждом приемнике при равномерном спектре входного сигнала определяется формулой частотной характеристики антенны  $\tilde{A}(u)$ . Это обстоятельство не позволяет в нашем случае непосредственно использовать формулу (1).

Для расчета информативности системы с неравномерным спектром полезного сигнала разобьем ее полосу пропускания  $S$  на элементарные ячейки с площадью  $\Delta S = \Delta u \Delta v$ , в которых энергетические спектры сигнала можно считать равномерными, и определим информативность как предел суммы [3]

$$C = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta S_i \log_2 (\Delta P_{si} / \Delta P_{ni} + 1), \quad (3)$$

где  $\Delta P_{si}$ ,  $\Delta P_{ni}$  — усредненные по каналам мощности сигналов и помех в полосе  $\Delta S_i$ .

Определим эти мощности по соответствующим спектрам. Энергетический пространственный спектр изображения, сглаженного антенной, равен  $|\tilde{A}(u, v) \tilde{T}_\pi|^2$  и в движущемся в направлении  $x$  приемнике принимает временной характер. В каждом из каналов форма временного спектра полезного сигнала является результатом однократного интегрирования ограниченного антенной спектра по переменной  $v$

$$|\tilde{T}_s(u)|^2 = \int_0^{v_{rp}} |\tilde{A}(u, v) \tilde{T}_\pi|^2 dv = |\tilde{T}_\pi \tilde{A}(u)|^2 v_\alpha, \quad (4)$$

где  $v_\alpha = \int_0^{v_{rp}} |\tilde{A}(v)|^2 dv$  — эффективная энергетическая полоса антенны, соответствующая направлению  $y$ .

Одна часть этого спектра  $|\tilde{T}_\pi \tilde{A}(u)|^2 v_\alpha \alpha$ , где  $\alpha = \int_0^{v_{rp}} |\tilde{A}(v)|^2 dv \times \times (\int_0^{v_{rp}} |\tilde{A}(v)|^2 dv)^{-1}$ , принадлежит сигналам, неискаженное воспроизведение которых обеспечено фактической дискретизацией. Другая часть спектра  $|\tilde{T}_\pi \tilde{A}(u)|^2 v_\alpha (1 - \alpha)$  принадлежит сигналам, по своему действию являющимся помехой, поскольку их частоты не входят в полосу пропускания неискаженного синтеза.

Значение усредненной по каналам мощности полезных сигналов в элементарной полосе пространственных частот  $\Delta u$ , в которой функция  $\tilde{A}(u)$  равномерна, можно записать следующим образом:

$$\Delta P_{si} = |\tilde{T}_\pi \tilde{A}(u)|^2 v_\alpha \gamma_s \Delta u, \quad (5)$$

где  $\gamma_s$  — коэффициент, учитывающий изменение результата усреднения мощностей зависимых между собой выходных полезных сигналов приемников. Для группы идентичных и равноотстоящих на расстоянии  $\Delta y$  по траекториям приемников он определяется выражением

$$\gamma_s = 1 + 2 \sum_{j>k} r_{kj} (|k-j| \Delta y), \quad (6)$$

где  $r_{kj}(z)$  — коэффициент взаимной корреляции полезных сигналов, формируемых  $k$ -м и  $j$ -м приемниками системы,

$$r_{kj}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z') A(z'+z) dz' \Big| \int_{-\infty}^{\infty} [A(z')]^2 dz'. \quad (7)$$

Вторая часть спектра, принадлежащая невозстанавливаемому сигналу, имеет усредненную по каналам в полосе  $\Delta u$  мощность

$$\Delta P_{ni}^{(1)} = |\tilde{T}_n \tilde{A}(u)|^2 v_0 (1-\alpha) \gamma_s \Delta u. \quad (8)$$

Усредненная по каналам мощность независимых тепловых шумов приемников и преобразованного фонового излучения в элементарной выходной полосе фильтра низких частот радиометра  $\Delta F$  равна

$$\Delta P_{ni}^{(2)} = T_0^2 (1+\beta\gamma_n) \Delta F, \quad (9)$$

где  $\beta = T_{\alpha 0}^2 / T_n^2$ ,  $T_0$  — флуктуационная чувствительность радиометра при полосе выходного фильтра, равной 1 Гц, а  $\gamma_n$  — коэффициент, учитывающий результат усреднения мощностей зависимых между собой помех. В отличие от  $\gamma_s$  коэффициент  $\gamma_n$  зависит от пересечений не траекторий, а самих лучей антенн. Значение  $\gamma_n$  можно получить с помощью (6), где коэффициент взаимной корреляции между фоновыми помехами в каналах определяется произведением  $r_{kj}(|k-j|\Delta x) \times \times r_{kj}(|k-j|\Delta y)$ , сомножители которого вычисляются по формуле (7). Здесь величина  $|k-j|\Delta x$  есть угловое расстояние между лучами по координате  $x$ .

Подставляя усредненные мощности полезных сигналов  $\Delta P_{si}$  и помех  $\Delta P_{ni} = \Delta P_{ni}^{(1)} + \Delta P_{ni}^{(2)}$  в формулу (1), можно определить значение информативности системы в элементарной полосе. Суммируя величины информативности для этих элементарных полос и переходя от суммы (3) к интегралу, получаем окончательное выражение пропускной способности радиометрической системы на единицу телесного угла с произвольной пространственной частотной характеристикой ее антенн:

$$C = \frac{2d_x d_y v}{\lambda^2} \int_0^1 \log_2 \left[ \left( \frac{1+\beta\gamma_n}{\xi |\tilde{A}(u_0)|^2 \gamma_s} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1} + 1 \right] du_0, \quad (10)$$

где  $u_0 = u/u_{\text{гр}}$ , а  $\xi = |\tilde{T}_n|^2 h v_0 \alpha / T_0^2 V$  — отношение мощности входного тестового сигнала к мощности собственных шумов приемника в полосе его фильтра низких частот, согласованного с антенной. Величина  $\gamma_s / (1+\beta\gamma_n)$  характеризует существующее соотношение между корреляционными связями выходных полезных сигналов и помех. В ограниченном секторе визирования  $D$  существует ориентация антенн, при которой информативность системы максимальна. Такая ориентация соответствует максимальному значению величины  $\gamma_s / (1+\beta\gamma_n)$ . На рис. 1 приводятся сечения смещенных функций направленности вида  $(\sin z/z)^2$  подстилающей поверхностью по первому нулевому уровню при оптимальной ориентации антенн для  $N=2, 3, 4$ .

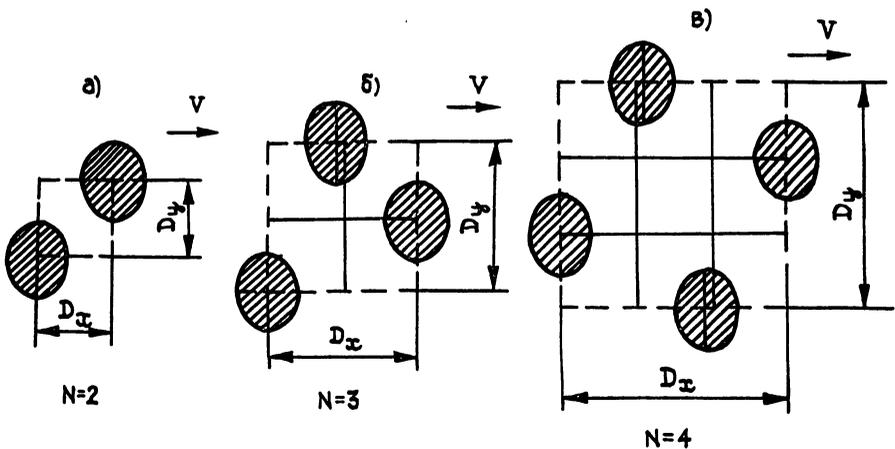


Рис. 1.

Угловые размеры сектора визирований ограничены здесь центрами лучей антенн.

Оптимальная ориентация антенн увеличивает отношение усредненных по каналам мощностей  $P_s/P_n$  в  $(1+\beta\gamma_n)_{\max}/(1+\beta\gamma_n)_{\min}$  раз в сравнении с самым неоптимальным случаем, которым является ориентация лучей с одинаковыми  $\chi$ . Увеличение произведения  $D_x d_x$  повышает эффективность оптимальной ориентации (рис. 2).

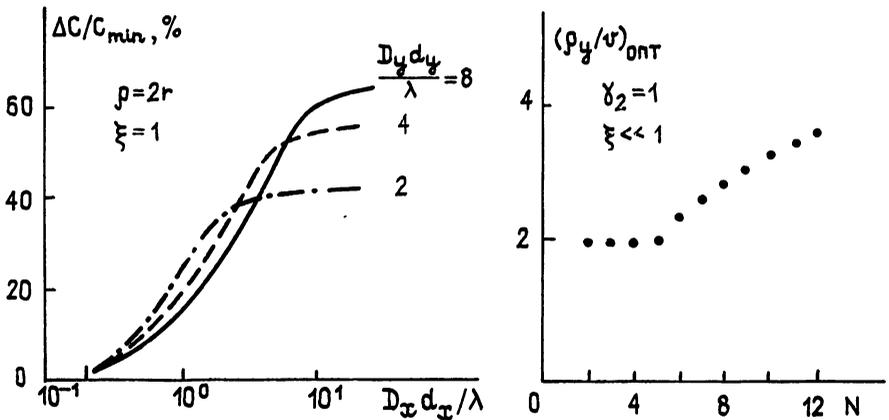


Рис. 2, 3.

С точки зрения рационального использования аппаратных средств целесообразно выбрать такую плотность размещения приемников на ширине  $D_y$ , при которой удельная информативность, т. е. информативность, приходящаяся на один приемник, достигает максимального значения. Анализ выражения (10) показывает, что максимум удельной информативности не обязательно достигается при частоте пространственной дискретизации по Котельникову ( $\rho'_y = 2v_{\text{гр}}$ ). Количество приемников системы и взаимное смещение лучей их антенн определяют оптимальную частоту пространственной дискретизации на ширине полосы зондирования (рис. 3).

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Пропускная способность многоканальной радиометрической системы тем больше, чем меньше корреляция помех в выходных сигналах входящих в нее приемников.
2. Коррелированность выходных помех уменьшается, если лучи антенн приемников разносить в пространстве. При этом в ограниченном секторе зондирования существует оптимальная их ориентация для максимальной информативности движущейся системы.
3. Эффективность оптимальной ориентации возрастает с увеличением в направлении движения размеров антенн и размера сектора зондирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. — М.: Наука, 1973.
2. Шеннон К. Теория информации и ее приложения / Под ред. А. А. Харкевича. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Солодов А. В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию  
25 ноября 1988 г.

#### TRANSMISSION EFFICIENCY OF MULTICHANNEL RADIOMETER SYSTEM

V. V. Zhilin

Multi-channel radiometer of parallel survey to map under-lying surface from moving platform is discussed. Transmission efficiency dependence on setup density and mutual antenna beams orientation is analysed.

УДК 550.383

## ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ АЛЬФВЕНОВСКОГО МАЗЕРА С ДРЕЙФОМ ЧАСТОТЫ

П. П. Беляев, С. В. Поляков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц

На основе уравнений для моментов спектральной плотности энергии волн разработан метод описания и построена линейная теория импульсных режимов генерации магнитосферного альфвеновского мазера с дрейфом частоты. Рассмотрен неадиабатический случай, когда характерное время процессов сравнимо с временем пробега альфвеновских волн между сопряженными полушариями. Учтены эффекты циклотронного взаимодействия волн и частиц в магнитосфере, приводящие к высыпаниям энергичных частиц в ионосферу, а также вариации коэффициента отражения альфвеновских волн от ионосферы при высыпаниях частиц. Показано, что основным видом собственных колебаний альфвеновского мазера является так называемая антисимметричная энергетическая мода, характерные динамические спектры которой близки наблюдаемым динамическим спектрам геомагнитных пульсаций типа «жемчужины».

1. В настоящее время общепризнано, что низкочастотные электромагнитные шумы диапазона  $Pc\ 1$  ( $0,2 \div 5$ ) Гц возбуждаются за счет циклотронной неустойчивости протонных радиационных поясов [4, 5]. Однако адекватные теории генерации сложных динамических режимов короткопериодных геомагнитных пульсаций в настоящее время практически отсутствуют. В работах [1-3] предложен и развит подход к описанию динамики альфвеновских волн и частиц (протоны) в радиационных поясах как к мазерной системе и обращено внимание на следующие качественно новые обстоятельства:

— для адекватного описания процессов в альфвеновском мазере (АМ) необходим самосогласованный учет влияния резонатора и процессов взаимодействия волн и частиц;

— коэффициент отражения альфвеновских волн от ионосферы имеет резонансную структуру, и генерация волн должна происходить вблизи одного из максимумов  $R(\omega)$ , где максимален инкремент циклотронной неустойчивости  $\Gamma(\omega)$ ;

— величина и положение (по частоте) максимумов коэффициента отражения  $R(\omega)$  зависят от потока высыпающихся частиц.

В работах [1-3] развита теория нестационарных режимов генерации АМ в адиабатическом ( $T \gg \tau_g$ ) и неадиабатическом случае для симметричного и несимметричного резонатора ( $T$  — характерное время процессов,  $\tau_g$  — время группового пробега волн между сопряженными ионосферами,  $\tau_g \sim 1$  мин). В частности показано, что при неизменном  $R(\omega)$  среди ряда нестационарных движений системы вблизи состояния равновесия, соответствующего стационарной генерации, существует антисимметричная мода, которой соответствует волна огибающей энергии волн. Эта мода в пространстве имеет узел на экваторе и обладает для симметричного резонатора безразличным состоянием равновесия. Учет самосогласованного изменения  $R(\omega)$  может приводить к нарастанию возмущений, причем наибольшим инкрементом обладает режим с  $T = 2\tau_g$ . Отсюда следует, что «антисимметричная» мода является перспективной моделью генерации «жемчужин» или  $Pc\ 1$  (см. [4, 5]). Помимо дискретности сигналов с  $T = 2\tau_g$  характерной особенностью «жемчужин» является дрейф частоты внутри импульсов, что не нашло адекватного описания в [2, 3].

Целью настоящей работы является разработка методов описания и исследования импульсных режимов генерации АМ со свипированием частоты в неадиабатическом случае.

2. При условии  $\omega \ll \Omega_B$  ( $\omega$  — частота генерируемых волн,  $\Omega_B$  — ионная гирочастота на экваторе) процессы циклотронного взаимодействия альфвеновских волн и энергичных протонов радиационных поясов с характерными временами  $T \gg \tau_0$  ( $\tau_0$  — период баунс-осцилляций) описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial f(x, V)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^{+l} dz dk \varepsilon_\omega D \frac{\partial f(x, V)}{\partial x} + I(x, V); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\omega^\pm}{\partial t} \pm V_{g\omega} \frac{\partial \varepsilon_\omega^\pm}{\partial z} = \gamma_\omega \varepsilon_\omega^\pm + a_\omega. \quad (2)$$

Граничные условия для уравнений (1), (2) имеют вид

$$f|_{x=x_c} = 0, \quad D \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-l} = 0; \quad (3)$$

$$\varepsilon_\omega^+(-l) = R \varepsilon_\omega^-(-l), \quad \varepsilon_\omega^-(l) = R \varepsilon_\omega^+(l). \quad (4)$$

Явные выражения для коэффициента диффузии  $D = D(x, V, \omega, z)$  и инкремента циклотронной неустойчивости  $\gamma_\omega = \gamma_\omega(\omega, z, \varepsilon_\omega)$  приведены в работе [2]. В дальнейшем изложении нам эти выражения не понадобятся. В формулах (1)–(4)  $R$  — коэффициент отражения по энергии волн ( $R > 0$ ), т. е.  $R = |r|^2$ , где  $r$  — коэффициент отражения по полю,  $f$  — функция распределения частиц в переменных модуля скорости  $V$  и синуса пич-угла  $x$  в экваториальном сечении радиационного пояса,  $x_c$  — граница конуса потерь,  $I$  — источник частиц,  $\varepsilon_\omega$  — спектральная плотность энергии альфвеновских волн,  $z$  — координата вдоль силовой линии магнитного поля, знаки « $\pm$ » относятся к волне бегущей соответственно в  $\pm z$ -направлениях,  $a_\omega^-$  — излучательная способность среды,  $V_{g\omega}$  — групповая скорость волн (рассматривается случай с учетом групповой дисперсии  $V_{g\omega} = V_g(\omega)$ ),  $z = \pm l$  — координаты сопряженных ионосфер.

Для учета изменения  $R(\omega)$  под действием потоков высыпающихся частиц дополним систему (1), (2) уравнением баланса ионизации

$$\frac{dn^\pm}{dt} = J + \eta S^\pm - \alpha (n^\pm)^2. \quad (5)$$

Здесь  $n^\pm$  — электронная концентрация в  $E$ -слое северной и южной ионосферы,  $n^\pm = n^\pm(t)$ , член  $\eta S^\pm$  соответствует дополнительной ионизации, связанной с высыпаниями энергичных частиц,  $S$  — поток высыпающихся в ионосферу частиц,  $J$  — фоновый источник ионизации,  $\alpha$  — коэффициент рекомбинации.

Для описания движений системы (1)–(5) с дрейфом частоты введем новые динамические переменные — моменты спектральной плотности энергии волн:

$$\varepsilon^\pm = \int \varepsilon_\omega^\pm d\omega, \quad \bar{\omega}^\pm = \left( \int \omega \varepsilon_\omega^\pm d\omega \right) / \varepsilon^\pm, \quad (6)$$

$$\overline{(\Delta\omega^\pm)^n} = \left[ \int (\omega - \bar{\omega}^\pm)^n \varepsilon_\omega^\pm d\omega \right] / \varepsilon^\pm, \quad n \geq 2.$$

Рассмотрим случай, когда характерная ширина спектра возбуждаемого шума  $\bar{\Delta\omega}^\pm$  мала по сравнению с шириной всех частотных фильтров системы:  $\bar{\Delta\omega}^\pm \ll \Delta\omega_R, \Delta\omega_\gamma, \Delta\omega_V$ . Здесь  $\Delta\omega_R, \gamma, V$  — характер-

ные частотные масштабы изменения  $R, \gamma_\omega, V_{g\omega}$ . Для «жемчужин»  $\Delta F = (\Delta\omega/2\pi) \sim 0,1$  Гц [4, 5],  $\Delta F_R \gg (0,3 \div 0,5)$  Гц,  $\Delta F_\nu, \Delta F_V$  порядка нескольких герц ( $\omega \ll \Omega_B$ ). Используя неравенство  $\Delta\omega_R \ll \Delta\omega_\nu, \nu$ , воспользуемся следующей аналитической аппроксимацией частотной зависимости  $R, \gamma_\omega, V_{g\omega}$  вблизи линии генерации:

$$R = R_0 \left[ 1 - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega_R^2} \right]; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\gamma_\omega}{V_{g\omega}} \right) = \text{const}(\omega), \quad \frac{\partial}{\partial \omega} (V_{g\omega}^{-1}) = \text{const}(\omega). \quad (8)$$

Используя уравнения (2), определения (6), а также (7), (8), можно записать бесконечную систему зацепляющихся уравнений и граничных условий для моментов спектральной плотности энергии волн. В дальнейшем анализе, используя неравенство  $\overline{\Delta\omega^\pm} \ll \Delta\omega_{R, \nu, V}$ , ограничимся учетом конечной ширины спектра в первом исчезающем приближении, т. е. пренебрегаем моментами  $(\overline{\Delta\omega})^n$  для  $n \geq 3$ . При этом положим  $(\overline{\Delta\omega^+})^2 = (\overline{\Delta\omega^-})^2 = (\overline{\Delta\omega})^2 = \text{const}(z, t)$ . Пренебрежем также для нестационарных движений спонтанной излучательной способностью среды  $a_\omega = 0$ . В этих приближениях система исходных уравнений и граничных условий запишется в виде

$$(V_{g\omega}^{-1})^\pm \frac{\partial \varepsilon^\pm}{\partial t} \pm \frac{\partial \varepsilon^\pm}{\partial z} + \frac{\partial (V_{g\omega}^{-1})}{\partial \omega} \varepsilon^\pm \frac{\partial \bar{\omega}^\pm}{\partial t} = \left( \frac{\gamma}{V_g} \right)^\pm \varepsilon^\pm; \quad (9)$$

$$(V_{g\omega}^{-1})^\pm \frac{\partial \bar{\omega}^\pm}{\partial t} \pm \frac{\partial \bar{\omega}^\pm}{\partial z} + \frac{\partial (V_{g\omega}^{-1})}{\partial \omega} \frac{(\overline{\Delta\omega})^2}{\varepsilon^\pm} \frac{\partial \varepsilon^\pm}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\gamma_\omega}{V_{g\omega}} \right) (\Delta\omega)^2; \quad (10)$$

$$\varepsilon^\pm(\mp l) = R' \Big|_{\omega^\mp(\mp l)} \varepsilon^\mp(\mp l); \quad (11)$$

$$[\bar{\omega}^\pm(\mp l) - \bar{\omega}^\mp(\mp l)] R' \Big|_{\omega^\mp(\mp l)} = \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_{\omega^\mp(\mp l)} (\overline{\Delta\omega})^2. \quad (12)$$

Здесь  $\left( \frac{\gamma}{V_g} \right)^\pm$  и  $(V_{g\omega}^{-1})^\pm$  — функции координаты  $z$  и линейные функции средней частоты излучения  $\bar{\omega}^\pm(z, t)$ ,  $R' = R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} (\overline{\Delta\omega})^2$ .

Аналогично, используя уравнение (1), определения (6) и полагая коэффициент диффузии  $D$  плавной функцией частоты  $\left( \frac{\partial D}{\partial \omega} = \text{const}(\omega) \right)$ , для функции распределения получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^{+l} dz (D \Big|_{\omega^+} \varepsilon^+ + D \Big|_{\omega^-} \varepsilon^-) \frac{\partial f}{\partial x} + l(x, V). \quad (13)$$

3. Рассмотрим динамику волн и частиц в альфвеновском мазере при малых отклонениях от стационарного решения. Для получения обзримых результатов в качестве первого шага рассмотрим случай без групповой дисперсии. Положим  $V_{g\omega} = V_{g\omega} = \text{const}(\omega)$ . Групповая дисперсия будет учтена ниже для случаев, наиболее интересных с точки зрения приложения.

Линеаризуем уравнения (9), (10), (13) вблизи состояния равновесия и воспользуемся преобразованием Лапласа по времени. При этом положим  $\varepsilon^\pm = \varepsilon_0^\pm + e^\pm$ ,  $\bar{\omega}^\pm = \bar{\omega}_0^\pm + \omega^\pm$ ,  $f = f_0 + f_{\sim}$ , где  $e = \int \exp(\lambda t) e_\lambda d\lambda$  и аналогично для  $\omega^\pm, f_{\sim}$ . В результате получаем

$$\lambda e_{\lambda}^{\pm} \pm V_{g0} \frac{de_{\lambda}^{\pm}}{dz} = \gamma[z, \bar{\omega}_0^{\pm}(z)] e_{\lambda}^{\pm} + \gamma_{\lambda} \epsilon_0^{\pm}(z) + \frac{\partial \gamma_{\omega}}{\partial \omega} \epsilon_0^{\pm}(z) \omega_{\lambda}^{\pm}; \quad (14)$$

$$\lambda \omega_{\lambda}^{\pm} \pm V_{g0} \frac{d\omega_{\lambda}^{\pm}}{dz} = (\overline{\Delta\omega})^2 \gamma_{\lambda 0} \frac{\partial g_2}{\partial \omega}; \quad (15)$$

$$(\lambda + p_0^2) f_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^{+l} dz \frac{\partial f_0}{\partial x} \left\{ D \Big|_{\omega_0^+} e_{\lambda}^+ + D \Big|_{\omega_0^-} e_{\lambda}^- + \right. \\ \left. + \frac{\partial D}{\partial \omega} [\epsilon_0^+(z) \omega_{\lambda}^+ + \epsilon_0^-(z) \omega_{\lambda}^-] \right\}; \quad (16)$$

$$\lambda n_{\lambda}^{\pm} = \eta S_{\lambda}^{\pm} - n_{\lambda}^{\pm} / \tau_p. \quad (17)$$

Здесь  $\omega_0^{\pm}, \epsilon_0^{\pm}$  — средняя частота и плотность энергии стационарного шума. Явное выражение для  $\gamma_{\lambda}$  приведено в работе [2],  $\gamma_{\lambda} = g_2 \gamma_{\lambda 0}$  ( $g_2$  — множитель, учитывающий частотную и пространственную зависимость возмущений инкремента  $\gamma_{\lambda}$ ),  $n_{\lambda}^{\pm} = n_{\lambda}(\pm l)$ ,  $\tau_p = (2\alpha n_0)^{-1}$ ,  $n_0$  — фоновая электронная концентрация в  $E$ -слое ионосферы. При записи (16) использовано одномодовое приближение (см. [2]). Аналогично [2] для  $S_{\lambda}^{\pm}$  запишем

$$S_{\lambda}^{\pm} = \frac{\lambda}{\lambda + p_0^2} \left[ \int_{-l}^{+l} dz g_1 e_{\lambda}^{\mp} + \int_{-l}^{+l} dz \frac{\partial g_1}{\partial \omega} \epsilon_0^{\mp} \omega_{\lambda}^{\mp} \right]. \quad (18)$$

Явное выражение для  $g_1 = g_1(z, \omega^{\mp}(z))$  приведено в [2]. Здесь, в отличие от [2], присутствует дополнительный член, обусловленный сдвигом частоты. Система линеаризованных граничных условий (11), (12) имеет вид

$$e_{\lambda}^{\pm}(\pm l) R' - e_{\lambda}^{\mp}(\pm l) + \epsilon_0^{\pm}(\pm l) \frac{\partial R}{\partial \omega} \omega_{\lambda}^{\pm}(\pm l) + \\ + \epsilon_0^{\pm}(\pm l) \frac{\partial R'}{\partial n} n_{\lambda}^{\pm} = 0; \quad (19)$$

$$\omega_{\lambda}^{\pm}(\pm l) \left( R' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} (\overline{\Delta\omega})^2 \right) - \omega_{\lambda}^{\mp}(\pm l) R' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} (\overline{\Delta\omega})^2 n_{\lambda}^{\pm} = 0. \quad (20)$$

Здесь  $\frac{\partial R'}{\partial n} = \frac{\partial R'}{\partial R_0} \frac{\partial R_0}{\partial n} + \frac{\partial R'}{\partial \omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} + \frac{\partial R'}{\partial (\Delta\omega_R)} \frac{\partial (\Delta\omega_R)}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{\partial R}{\partial \omega} + 2R' \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega}$ , значения  $R, R', \frac{\partial R}{\partial \omega}, \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2}$  берутся в точке  $\omega = \omega_0^+(l) = \omega_0^-(-l)$ .

Запишем решение уравнений (14), (15):

$$e_{\lambda}^{\pm}(z) = \exp\left(\pm \int_0^z \frac{\gamma^{\pm} - \lambda}{V_{g0}} d\tau\right) \left[ e_{\lambda}^{\pm}(0) \pm \right. \\ \left. \pm \int_0^z \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \epsilon_0^{\pm} \omega_{\lambda}^{\pm} + \gamma_{\lambda} \epsilon_0^{\pm} \right) \exp\left(\mp \int_0^{z'} \frac{\gamma^{\pm} - \lambda}{V_{g0}} d\tau\right) dz' \right]; \quad (21)$$

$$\omega_{\lambda}^{\pm}(z) = \exp\left(\mp \int_0^z \frac{\lambda d\zeta}{V_{g0}}\right) \left[ \omega_{\lambda}^{\pm}(0) \pm \int_0^z \frac{\partial g_2}{\partial \omega} (\Delta\omega)^2 \gamma_{\lambda 0} \exp\left(\pm \int_0^{\zeta} \frac{\lambda d\zeta'}{V_{g0}}\right) d\zeta' \right]. \quad (22)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением модели среды с узкой областью взаимодействия. Положим  $g_{1,2} = \text{const}(z)$  при  $|z| \leq d$ ,  $g_{1,2} = 0$  при  $|z| > d$ , причем  $d \ll l$ . Это допущение с учетом слабого усиления  $\Gamma \ll 1$  позволит при интегрировании в уравнениях (16), (18), (21), (22) выносить функции  $\omega_{\lambda}^{\pm}(z)$  и  $e_{\lambda}^{\pm}(z)$  из-под интегралов со значением соответственно  $\omega_{\lambda}^{\pm}(0)$  и  $e_{\lambda}^{\pm}(0)$ .

Используя соотношения (21), (22), можно записать систему алгебраических уравнений для  $e_{\lambda 0}^{\pm}$ ,  $\omega_{\lambda 0}^{\pm}$ ,  $\gamma_{\lambda 0}$ , эквивалентную системе (14)–(20). Эта система в общем случае имеет очень громоздкий вид, и мы ее здесь не приводим. Отметим только, что она распадается на две подсистемы, для одной из которых  $e_{\lambda 0}^+ + e_{\lambda 0}^- = \omega_{\lambda 0}^+ + \omega_{\lambda 0}^- = 0$  («антисимметричная» мода), для другой  $e_{\lambda 0}^+ - e_{\lambda 0}^- = \omega_{\lambda 0}^+ - \omega_{\lambda 0}^- = 0$  («симметричная» мода). Тот факт, что в «антисимметричной» моде  $\gamma_{\lambda 0} = 0$ , означает, что суммарный поток частиц, высыпаящихся в северную и южную ионосферы, остается неизменным. В процессе колебаний происходит периодическое перераспределение высыпаний между северной и южной ионосферами. В «симметричной» моде  $\gamma_{\lambda 0} \neq 0$ , что приводит (при отсутствии положительной обратной связи) к затуханию возмущений (см. [2]). На этом основании в дальнейшем мы подробно рассмотрим свойства только «антисимметричной» моды, обладающей наименьшим порогом возбуждения. Заметим, что линеаризованное уравнение для функции распределения (16) получено в предположении узкой области взаимодействия и слабого усиления ( $\Gamma \ll 1$ ). Однако, используя свойства стационарного шума в симметричном резонаторе  $e_0^+(z) = e_0^-(z)$ ,  $\omega_0^+(z) = \omega_0^-(z)$ , можно показать, что для «антисимметричной» моды  $\gamma_{\lambda 0} = 0$  в общем случае при произвольных значениях  $d$  и  $\gamma_0$ .

4. Дисперсионное уравнение «антисимметричной» моды имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[ e^{\Lambda} + e^{-\Lambda} - \varepsilon_0(0) Q \beta \frac{\partial \ln R'}{\partial n} \right] \left[ R'(e^{\Lambda} + e^{-\Lambda}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 e^{-\Lambda} - \right. \\ & \left. - \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} (\Delta\omega)^2 \frac{\partial Q}{\partial \omega} \varepsilon_0(0) \right] - \beta Q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} (\Delta\omega)^2 \varepsilon_0(0) \times \\ & \times \left[ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega} (e^{\Lambda} + e^{-\Lambda}) + \beta \varepsilon_0(0) \frac{\partial Q}{\partial \omega} \frac{\partial \ln R'}{\partial n} \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$Q = \int_{-l}^l g_1 dz, \quad \Lambda = \frac{\lambda l}{V_{g0}}, \quad \beta = \frac{\eta \lambda}{(\lambda + p_0^2)(\lambda + \tau_p^{-1})}.$$

Используя (19)–(22), запишем соотношения, определяющие «поляризацию» антисимметричной моды (отношение  $i_{\lambda}^+(0)/\omega_{\lambda}^+(0)$ ):

$$\begin{aligned} & e^+(0) \left[ e^{\Lambda} + e^{-\Lambda} - \varepsilon_0(0) Q \beta \frac{\partial \ln R'}{\partial n} \right] - \\ & - \omega_{\lambda}^+(0) \varepsilon_0(0) \left[ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega} (e^{\Lambda} + e^{-\Lambda}) + \beta \varepsilon_0(0) \frac{\partial Q}{\partial \omega} \frac{\partial \ln R'}{\partial n} \right] = 0; \\ & - e_{\lambda}^+(0) \beta Q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} (\Delta\omega)^2 + \omega_{\lambda}^+(0) \left[ \left( R' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 \right) e^{-\Lambda} + \right. \end{aligned} \quad (24)$$

$$+ R'e^\Lambda - \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} \overline{(\Delta \omega)^2} \frac{\partial Q}{\partial \omega} \varepsilon_0(0) \Big] = 0.$$

В отсутствие обратной связи ( $\partial R/\partial n=0$ ) дисперсионное уравнение «антисимметричной» моды переписывается в виде

$$D_1 D_2 = (e^\Lambda + e^{-\Lambda}) \left( e^\Lambda + e^{-\Lambda} + \frac{1}{R'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} (\Delta \omega)^2 e^{-\Lambda} \right) = 0, \quad (26)$$

причем, согласно (24), (25), в «антисимметричной» энергетической моде ( $D_1=0$ )  $\omega_\lambda^\pm = 0$ ,  $e_\lambda^\pm \neq 0$ . Этот тип движений без учета дрейфа частоты исследовался в работе [2]. В «антисимметричной» частотной моде ( $D_2=0$ )

$$e_\lambda^+(0)/\omega_\lambda^+(0) = \varepsilon_0^+(0) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega}. \quad (27)$$

Используя (21), (22), (27), можно записать соотношение возмущений энергии и частоты на стенке резонатора:  $e_\lambda^+(l)/\omega_\lambda^+(l) = 2\varepsilon_0(0) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega}$ . За-

пишем решение дисперсионных уравнений (26). Антисимметричная энергетическая мода:  $\Lambda = \Lambda_0 = \pi[n + (1/2)]i$ , антисимметричная частотная мода:  $\Lambda = \Lambda_0 + \delta$ ; затухание  $\delta = -(\Delta \omega)^2/(\Delta \omega_R)^2$ . Полагая  $\frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega} \sim \frac{\Gamma_0}{\delta \omega}$ ,

получаем  $\frac{e_\lambda^+(0)\omega}{\omega_\lambda^+ \varepsilon_0^+(0)} \approx \Gamma_0 \ll 1$ , т. е. в рассматриваемом приближении в «антисимметричной» частотной моде присутствуют в основном возмущения частоты.

Из полученных результатов ясно, что наименьшим порогом обладает антисимметричная энергетическая мода, имеющая безразличное состояние равновесия. С учетом обратной связи из (23) несложно получить выражение для инкремента неустойчивости антисимметричной энергетической моды:

$$\operatorname{Re} \Lambda = \frac{1}{2} (-1)^n \operatorname{Im} \beta (\Lambda_0) \varepsilon_0(0) Q \frac{\partial \ln R'}{\partial n}. \quad (28)$$

Здесь  $\Lambda = i\pi[n + (1/2)]$ ,  $\beta$  и  $Q$  определены выше (см. (23)). При подстановке явных выражений для  $\Lambda_0$ ,  $\beta$  и  $Q$  формула (28) совпадает с инкрементом, полученным в работе [2]. Для возбуждения основной моды колебаний ( $n=0$ ,  $\Lambda = i(\pi/2)$ , период  $T = 2\tau_g$ ) необходимо  $\partial R/\partial n < 0$ , причем для основной моды инкремент максимален.

Важно отметить, что в энергетической моде колебаний при учете обратной связи появляются возмущения частоты. В первом порядке по малому параметру  $\partial R/\partial n$  согласно (25)

$$\frac{\omega_\lambda^+(0)}{e_\lambda^+(0)} = \beta Q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right)^{-1} e^\Lambda. \quad (29)$$

Для полного описания эффектов свипирования частоты необходимо учесть влияние групповой дисперсии. Для наиболее интересной с точки зрения приложения антисимметричной энергетической моды учет дисперсии должен привести к качественно новым результатам, поскольку в обсуждаемой моде  $\omega_\lambda = 0$  (при  $\partial R/\partial n = 0$ ). Допустим, что при учете дисперсии в антисимметричной моде по-прежнему  $\gamma_\lambda = 0$ . С учетом этого обстоятельства линеаризуем уравнение (10) для средней частоты шума и воспользуемся преобразованием Лапласа по времени. В итоге получаем

$$\frac{\partial \omega_{\lambda}^{\pm}}{\partial z} \pm (V_{g\omega}^{-1})^{\pm} \lambda \omega_{\lambda}^{\pm} = \mp \frac{\partial V_{g\omega}^{-1}}{\partial \omega} (\Delta \omega)^2 \lambda \frac{e_{\lambda}^{\pm}}{\varepsilon_0^{\pm}}. \quad (30)$$

В случае  $\partial R/\partial n=0$  для антисимметричной энергетической моды в нулевом приближении  $\omega_{\lambda}=0$ , и мы можем в уравнении (30) пренебречь членом  $\partial V_{g\omega}^{-1}/\partial \omega$  в факторе  $(V_{g\omega}^{-1})^{\pm}$ . В этом случае можно положить  $(V_{g\omega}^{-1})^{\pm}=V_{g0}^{-1}=\text{const}(z)$ , тогда решение уравнения (30) запишется:

$$\omega_{\lambda}^{\pm}(\pm l) = \exp\left(-\frac{\lambda l}{V_{g0}}\right) \left[ \omega_{\lambda}^{\pm}(0) - \frac{e_{\lambda}^{\pm}(0)}{\varepsilon_0^{\pm}(0)} \frac{\partial V_{g\omega}^{-1}}{\partial \omega} (\Delta \omega)^2 \lambda d \right]; \quad (31)$$

$$\omega_{\lambda}^{\mp}(\pm l) = \exp\left(\frac{\lambda l}{V_{g0}}\right) \left[ \omega_{\lambda}^{\mp}(0) + \frac{e_{\lambda}^{\mp}(0)}{\varepsilon_0^{\mp}(0)} \frac{\partial V_{g\omega}^{-1}}{\partial \omega} (\Delta \omega)^2 \lambda d \right]. \quad (32)$$

При выводе (31), (32) учтено, что в нулевом приближении

$$e^{\pm}(z)/\varepsilon_0^{\pm}(z) = [e^{\pm}(0)/\varepsilon_0^{\pm}(0)] \exp(\mp \lambda z/V_{g0}). \quad (33)$$

Очевидно, что соотношения (31), (32) справедливы и при учете  $\partial R/\partial n$  по крайней мере для случая, когда вариации частоты за счет нестационарности ионосферы ( $\partial R/\partial n \neq 0$ ) одного порядка с вариациями частоты за счет дисперсии.

Далее, используя (31), (32) и граничные условия (20), получаем отношение амплитуд колебаний средней частоты и плотности энергии альфвеновских волн в антисимметричной моде:

$$\frac{\omega_{\lambda}^{\pm}(0)}{e_{\lambda}^{\pm}(0)} = \left( 2R \frac{\partial V_{g\omega}^{-1}}{\partial \omega} \frac{\lambda d}{\varepsilon_0(0)} + \beta Q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} e^{\Lambda} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right)^{-1}. \quad (34)$$

Используя (31)–(33) и (16), можно показать, что для полученного решения, как и предполагалось,  $\gamma_{\Lambda} = 0$ . При записи (34) отброшены малые поправки порядка  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} (\Delta \omega)^2$ . С этой же степенью точности соотношение (34) справедливо и на стенках резонатора  $z = \pm l$ . Уже из общего вида (34) видно, что динамический спектр излучения альфвеновского мазера формируется самосогласованным влиянием среды распространения (магнитосфера) и грани (ионосфера).

Положим  $|\alpha_1| < \Lambda$ , поскольку  $\alpha_1 = \rho_0^2 l/V_{g0}$  определяет временные масштабы движений в адиабатическом режиме. Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \simeq \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} = -\frac{2R_0}{(\Delta \omega_R)^2}, \quad V_{g\omega} = V_A \left( 1 - \frac{\omega}{\Omega_B} \right),$$

$$\Lambda = \frac{\lambda l}{V_g} = i\pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad e^{\Lambda} = i(-1)^n, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} \simeq \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \omega} \frac{\partial R_0}{\partial n} + \frac{2R_0}{(\Delta \omega_R)^2} \frac{\partial \omega_n}{\partial n}.$$

Используя (28), запишем:

$$\beta Q \varepsilon_0(0) = 2(-1)^n \text{Re} \Lambda \left( \frac{\partial \ln R'}{\partial n} \right)^{-1} \left( i - \frac{\alpha_2}{\Omega_n} \right). \quad (36)$$

Здесь  $\text{Re} \Lambda$  — инкремент неустойчивости, нормированный на время  $\tau_g/2$ ,  $\Omega_n = \pi [n + (1/2)]$ ,  $\alpha_2 = \tau_g/2\tau_p$ ,  $\tau_p$  — время жизни электрона в  $E$ -слое ионосферы,  $\tau_p \sim 10 \div 10^3$  с в зависимости от состояния ионосферы.

Используя (35), (36), соотношение (34) можно переписать в более удобном для оценок виде:

$$\frac{\omega_{\lambda}^{\pm}(0)}{e_{\lambda}^{\pm}(0)} = \frac{(\Delta\omega_R)^2}{\varepsilon_0(0)} e^{-i(\pi,2)} \left[ \frac{\Omega_n}{\Omega_B} \frac{d}{l} + (\operatorname{Re} \Lambda) \frac{\partial^2 \varphi / \partial \omega \partial n}{\partial \ln R' / \partial n} \left( i - \frac{\tau_g}{2\tau_p \Omega_n} \right) \right]. \quad (37)$$

Вначале рассмотрим случай стационарной ионосферы ( $\operatorname{Re} \Lambda = 0$ , свободные колебания). В этом случае, как следует из (37), колебания средней частоты шума отстают по фазе от колебания плотности энергии на  $\pi/2$ . Это означает, что амплитуда шума максимальна в моменты наиболее быстрого нарастания частоты. Согласно (37) для основной моды ( $n=0$ , период колебаний  $T=2\tau_g$ ) полная девиация частоты дается формулой

$$\Delta\omega \simeq 2\omega_{\lambda}^+(0) = \pi \frac{d}{l} \frac{e_{\lambda}^+(0)}{\varepsilon_0(0)} \frac{(\Delta\omega_R)^2}{\Omega_B}. \quad (38)$$

Полагая  $e_{\lambda}^{\pm}(0) \simeq \varepsilon_0(0)$ ,  $d \simeq l$ ,  $\Omega_B = 30$  рад/с,  $\Delta\omega_R = 3$  рад/с ( $\Delta f_R = 0,5$  Гц), получаем  $\Delta\omega \sim 1$  рад/с, что соответствует типичным значениям девиации частоты для «жемчужины» [4, 5].

Далее учтем самосогласованное изменение коэффициента отражения альфвеновских волн от ионосферы при высыпаниях энергичных частиц. В случае неустойчивости  $\operatorname{Re} \Lambda > 0$ ,  $\frac{\partial R}{\partial n} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega \partial n} < 0$  (см. выше), т. е. фактор при мнимой единице в квадратных скобках в формуле (37) положителен. Это означает, что фазовое запаздывание колебаний средней частоты уменьшается по сравнению со случаем, рассмотренным выше. Оценим относительный вклад дисперсии и нестационарности ионосферы в эффекты дрейфа частоты.

Согласно работе [2], безразмерный инкремент  $\operatorname{Re} \Lambda$  можно оценить по формуле

$$\operatorname{Re} \Lambda = - \frac{\eta \tau_g S_0}{2(\Omega_n^2 + \alpha_2^2)} \frac{\partial R}{\partial n}. \quad (39)$$

Здесь  $S_0$  — стационарный поток высыпающихся частиц,  $\eta S$  — источник ионизации в ионосфере за счет высыпающихся частиц. Положим  $S_0 = 10^4$  см<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>,  $\eta = 10^{-2}$  см<sup>-1</sup> (энергии протонов  $W \sim 100$  кэВ),  $\alpha_2 \ll \Omega_n$ ,  $d \simeq l$ ,  $\Omega_B = 30$  рад·с<sup>-1</sup>,  $\frac{\partial \omega_0}{\partial n} \simeq -2 \cdot 10^{-5}$  рад·см<sup>3</sup>/с [1],  $\tau_g = 10^2$  с,  $\Delta\omega_R = 3$  рад·с<sup>-1</sup>, тогда отношение амплитуды девиации частоты за счет нестационарности ионосферы и дисперсии имеет величину  $\left| \frac{3}{\pi^2} \frac{\eta S_0 \tau_g \Omega_B}{(\Delta\omega_R)^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \right| \sim 0,2$ .

Таким образом, для  $L$ -оболочек с  $L \simeq 4$  ( $\Omega_B \simeq 30$  рад/с) основным фактором, определяющим эффекты дрейфа частоты нестационарных режимов генерации, является дисперсия среды, помимо этого, значительный вклад в девиацию частоты могут давать самосогласованные вариации коэффициента отражения.

Выше мы анализируем случай с узкой областью взаимодействия. Однако антисимметричная энергетическая мода в основном содержит колебания энергии волн (относительные колебания частоты малы). Инкремент нарастания возмущений (28), полученный с учетом возможности дрейфа частоты, совпадает с результатом работы [2]. Сказанное означает, что для оценок влияния широкой области взаимодействия на динамику антисимметричной энергетической моды можно использовать результаты работы [2].

6. Основной результат, полученный в данной работе, состоит в следующем. Показано, что простейшим и основным видом собственных ко-

лебаний плотности энергии волн в альфвеновском мазере является так называемая антисимметричная энергетическая мода, характерные динамические спектры которой близки наблюдаемым динамическим спектрам «жемчужин». Эти типы колебаний являются простейшими и основными в том смысле, что они должны реализоваться при достаточно малой положительной обратной связи. При увеличении обратной связи картина должна усложниться. В литературе (см. [4, 5]) при попытках объяснения динамических спектров «жемчужин» значительные усилия были направлены на поиск механизмов формирования особых начальных условий, приводящих к генерации «жемчужин» при развитии циклотронной неустойчивости. Из представлений, развитых в [1-3] и в настоящей работе, следует, что никаких особых начальных условий не требуется, поскольку движения, имеющие динамические спектры типа «жемчужин», являются собственными колебаниями альфвеновского мазера.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 2. С. 371.
2. Беляев П. П., Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Геомагнетизм и аэрономия. 1984. Т. 24. Вып. 2. С. 242.
3. Беляев П. П., Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Геомагнетизм и аэрономия. 1985. Т. 25. Вып. 4. С. 603.
4. Гульельми А. В., Троицкая В. А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. — М.: Наука, 1973. — 108 с.
5. Гульельми А. В. МГД-волны в околоземной плазме. — М.: Наука, 1979. — 139 с.
6. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Вопросы теории плазмы. / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1980. Вып. 10. С. 88.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
13 октября 1988 г.

#### LINEAR THEORY OF A FINE STRUCTURE OF ALFVEN MASER RADIATION WITH A FREQUENCY DRIFT

*P. P. Belyaev, S. V. Polyakov, V. O. Rapoport, V. Yu. Trakhtengerts*

Based on equations for the moments of the spectral density of the wave energy a description method has been developed and the linear theory has been built for pulse generation regimes of magnetospheric Alfvén maser with the frequency drift. A non-adiabatic event is considered when the characteristic time of processes is comparable with the time of Alfvén wave transit between the conjugated semi-spheres. The effects of the cyclotron interaction between waves and particles in the magnetosphere leading to the precipitation of energetic particles into the ionosphere are taken into account as well as variations of the reflection coefficient of Alfvén waves by the ionosphere at the particle precipitation. It is shown that the basic form of the eigen oscillations of the Alfvén maser is so called antisymmetric energetic mode the characteristic dynamic spectra of which are close to the observed dynamic spectra of geomagnetic pulsation of the type of «pearl».

---

## РЕЗОНАНСНОЕ СТРИКЦИОННОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРИ МНОГОЧАСТОТНОЙ НАКАЧКЕ

Г. В. Белокопытов, В. Н. Семененко, В. А. Чистяев

Теоретически и экспериментально исследована динамика обусловленной электрострикцией совместной параметрической генерации электромагнитных и акустических колебаний в диэлектрических резонаторах в случае многочастотной СВЧ накачки. Показано, что отклик колебательной системы на многочастотную накачку можно представить как линейную комбинацию откликов на одночастотные компоненты со специально подобранным отношением амплитуд (свойство «ограниченной суперпозиции»). Впервые экспериментально осуществлена стрикционная параметрическая генерация во второй зоне возбуждения, а также в необычном режиме, когда частота накачки ниже собственной частоты резонатора.

Исследование эффекта стрикционного параметрического возбуждения ультразвуковых колебаний СВЧ накачкой в диэлектрических резонаторах (ДР) показало широкое разнообразие возможных режимов параметрической генерации в зависимости от уровня накачки, настройки колебательной системы и способа установления колебаний [1-4]. Отчасти это разнообразие обусловлено многомодовостью ДР, поскольку условиям эффективного электроакустического взаимодействия могут удовлетворять различные сочетания типов колебаний, возбуждаемых в одном резонаторе. Однако теория предсказывает существование нескольких режимов колебаний при фиксированных условиях накачки и настройки даже в тех случаях, когда в параметрическом взаимодействии участвуют лишь две моды (одна электромагнитная и одна акустическая) [5]. С другой стороны, для реализации предсказанных в [5] многообразных режимов параметрической генерации требуются либо весьма большие мощности накачки, либо дополнительное независимое возбуждение в ДР акустических колебаний, что сильно затрудняет эксперимент. Были предприняты попытки обойти указанные ограничения, используя в качестве накачки немонаохроматические колебания. В связи с этим в настоящей работе проведен теоретический анализ и экспериментальное исследование особенностей возбуждения стрикционной параметрической генерации в ДР под действием многочастотной накачки.

**1. Теория стрикционного параметрического возбуждения при многочастотной накачке.** Уравнения колебаний, возбуждаемых на электромагнитной и акустической модах ДР, которые нелинейно связаны благодаря электрострикции, получены в [2]. При надлежащей нормировке [3] их можно представить в виде

$$\ddot{a}_l + \omega_l Q_l^{-1} \dot{a}_l + \omega_l^2 (1 + 2Q_l^{-1} b_s) a_l = - \frac{\omega_l^2}{Q_l} \sum_p E_p \cos \omega_p t; \quad (1)$$

$$\ddot{b}_s + \Omega_s Q_s^{-1} \dot{b}_s + \Omega_s^2 b_s = -2 \frac{\Omega_s^2}{Q_s} a_l^2, \quad (2)$$

где  $a_l$  и  $b_s$  — обобщенные координаты электромагнитных и акустических колебаний,  $\omega_l$ ,  $\Omega_s$  и  $Q_l$ ,  $Q_s$  — собственные частоты и добротности

соответствующих мод,  $\omega_p$  и  $E_p$  — частоты и приведенные амплитуды спектральных компонент накачки. При достаточной интенсивности накачки в колебательной системе вследствие параметрической регенерации возбуждаются колебания на частоте, близкой к одной из собственных акустических частот:

$$b_s = z \cos(\Omega_a t + \varphi_a) \quad (\Omega_a \approx \Omega_s). \quad (3)$$

Благодаря электрострикционному взаимодействию спектр электромагнитных колебаний содержит совокупность компонент с частотами:

$$\omega_{pk} = \omega_p + k\Omega_a, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Поскольку в электроакустических резонаторах  $\Omega_s \ll \omega_l$ , а частоты  $\omega_p$  выбирают близкими к резонансной  $\omega_l$ , то спектральные компоненты  $\omega_{pk}$  находятся в относительной близости от резонанса. Поэтому при решении (1), (2) следует учитывать всю совокупность комбинационных  $\omega_{pk}$  и полагать

$$a_l = \sum_{p, k} Y_{pk} \cos(\omega_{pk} t + \varphi_{pk}). \quad (5)$$

Подставив (3) и (5) в (1), получим цепочку уравнений для амплитуд  $Y_{pk}$  и фаз  $\alpha_{pk} = \varphi_a + \varphi_{p, k-1} - \varphi_{pk}$ :

$$Y_{pk} = z(Y_{p, k-1} \sin \alpha_{pk} - Y_{p, k+1} \sin \alpha_{p, k+1}) + E_p \delta_{0p} \sin \varphi_{p0}; \quad (6)$$

$$\zeta_{pk} Y_{pk} = z(Y_{p, k-1} \cos \alpha_{pk} + Y_{p, k+1} \cos \alpha_{p, k+1}) + E_p \delta_{0p} \cos \varphi_{p0}, \quad (7)$$

где

$$\zeta_{pk} = Q_l(1 - \omega_l^2/\omega_{pk}^2) \simeq \zeta_{p0} + k\Delta, \quad \Delta = 2\Omega_a Q_l/\omega_l, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

При фиксированном  $p$  цепочка уравнений (6), (7) совпадает с уравнениями для случая одночастотной накачки, который был детально проанализирован в [1, 3]. В указанных работах описан эффективный алгоритм нахождения относительных интенсивностей гармонических составляющих (т. е. отношений  $\gamma_{pm}^* = Y_{pm}^2/Y_{p0}^2$ ) при заданных величинах  $z$ ,  $\zeta_{p0}$  и  $\Delta$ . Кроме того, установлена функциональная зависимость между нормированной мощностью накачки ( $E_p^2$ ) и амплитудой  $Y_{p0}$ :

$$E_p^2 = Y_{p0}^2 \bar{E}_p^2, \quad \text{где } \bar{E}_p^2 = \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{pm}^* \right)^2 + \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \zeta_{pm} \gamma_{pm}^* \right)^2. \quad (9)$$

При многочастотной накачке спектр параметрической генерации представляет собой линейную комбинацию откликов системы на воздействие каждой из компонент спектра накачки, соответствующих одной и той же амплитуде акустических колебаний  $z$ . Это прямое следствие линейности уравнения (1) относительно переменной  $a_l$ . Следует однако выяснить, какой именно будет амплитуда  $z$ . С этой целью подставим (3) и (5) в уравнение (2), откуда получим

$$z = \sum_{p, k} Y_{pk} Y_{p, k+1} \sin \alpha_{p, k+1}; \quad (10)$$

$$\nu z = \sum_{p, k} Y_{pk} Y_{p, k+1} \cos \alpha_{p, k+1}, \quad (11)$$

где  $\nu = Q_s(1 - \Omega_s^2/\Omega_a^2)$  — расстройка частоты акустических колебаний. Из (10) с учетом (6) и (9) можем получить (аналогично [3]) следующие соотношения:

$$z^2 = \sum_p Y_{p0}^2 \sum_m m \gamma_{pm}^*, \quad (12)$$

или

$$z^2 = \sum_p \frac{E_p^2}{\bar{E}_p^2} \sum_m m \gamma_{pm}^*. \quad (13)$$

В частности, при одночастотной накачке имеем

$$\tilde{E}_p^2 = z^2 \bar{E}_p^2 / \sum_m m \gamma_{pm}^* \quad (14)$$

(тильдой отмечаем величины, относящиеся к одночастотному случаю).

Последняя формула показывает, что  $\tilde{E}_p^2$  можно рассматривать как однозначную функцию переменных ( $z, \zeta_{p0}$  и  $\Delta$ ). Если величины  $\tilde{Y}_{pk}$  и  $\tilde{E}_p^2$  известны как функции  $z, \zeta_{p0}, \Delta$ , то, переходя к многочастотному случаю, можно представить уравнение (13) для нахождения амплитуды акустических колебаний в следующем виде:

$$\sum_p E_p^2 / [\tilde{E}_p^2(z, \zeta_{p0}, \Delta)] = 1. \quad (15)$$

Итак, нахождение отклика колебательной системы на многочастотную накачку состоит из следующих этапов: 1) Определение отклика системы на воздействие каждой из спектральных компонент накачки  $E_p \cos \omega_p t$  как функций  $\gamma_{pk}^*$  и  $\tilde{E}_p^2$  переменных  $z, \zeta_{p0}$  и  $\Delta$ . Эта задача решается в соответствии с алгоритмом [1, 3]. 2) Нахождение амплитуды акустических колебаний  $z$  при заданных нормированных мощностях накачки  $E_p^2$ , т. е. решение уравнения (15). 3) Нахождение амплитуд  $Y_{p0}$ , т. е. нормировка в соответствии с условием (9), после чего, зная  $\gamma_{pk}^*$ , легко найти амплитуды всех спектральных компонент параметрической генерации.

Необходимо сделать оговорку, что переход от (1), (2) к цепочке уравнений (6), (7), (10) и (11) имеет смысл лишь тогда, когда среди частот  $\omega_{pk}$  нет совпадающих; в противном случае следует дополнительно принимать во внимание эффекты синхронизации, иначе амплитуды  $Y_{pk}$  не могут быть определены однозначно.

Обратим внимание на одну особенность рассматриваемой колебательной задачи. Общеизвестно, что в параметрических генераторах, которые представляют собой нелинейные колебательные системы, принцип суперпозиции не действует. Тем более интересно, что при стрикционном параметрическом возбуждении спектр параметрической генерации можно рассматривать как линейную комбинацию откликов системы на различные одночастотные компоненты накачки. Правда, в отличие от принципа суперпозиции в линейных системах, отношение амплитуд соответствующих откликов не произвольно, а задается условиями (15) и (9), так что указанное свойство можно называть свойством ограниченной суперпозиции. Ограниченная суперпозиция — это свойство лишь спектров колебаний и при рассмотрении сигналов во временной области не имеет места.

**2. Параметрическая генерация при двухчастотной накачке. Возможность возбуждения в высших зонах.** Рассмотрим более детально случай, когда параметрическая генерация возбуждается под действием двухчастотной накачки. Включение дополнительного генератора в цепь накачки приводит к изменению порога стрикционной параметрической неустойчивости по сравнению со случаем монохроматической накачки. В зависимости от настройки генераторов возможно как понижение, так и рост пороговой мощности. Действительно, при  $p=2$  из (15) имеем

$$\frac{dz}{dE_2^2} = \tilde{E}_2^{-2}(z) / (E_1^2 q_1 + E_2^2 q_2), \quad (16)$$

где  $q_i = d/dz (\ln \tilde{E}_i^2(z))$ . Рассмотрим возможные варианты настройки генераторов накачки. Пусть настройка такова, что при  $z \rightarrow 0$   $q_1 > 0$ ,

$q_2 > 0$ . Это значит, что накачка и с частотой  $\omega_1$  и с  $\omega_2$  приводит к мягкому возбуждению параметрической генерации [4]. Тогда  $dz/dE_2^2 > 0$ , откуда следует, что пороговая мощность  $E_2^2$  будет снижаться при включении источника  $E_1^2$ . В противоположном случае настройки обоих генераторов в области жесткого возбуждения ( $q_1 < 0, q_2 < 0$  при  $z \rightarrow 0$ ) пороговая мощность при включении дополнительного генератора будет возрастать. В смешанном случае (знаки  $q_1$  и  $q_2$  противоположны) в зависимости от настройки возможны как рост, так и уменьшение пороговой мощности параметрической генерации.

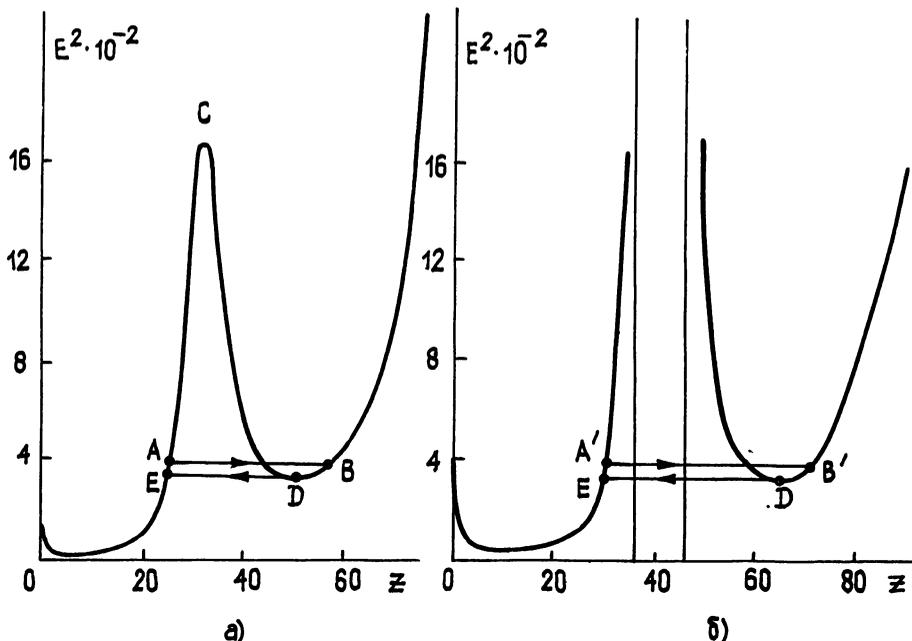


Рис. 1. Расчетные зависимости мощности накачки от амплитуды акустических колебаний при  $\Delta=2,2, \zeta=4,4$  (а) и  $\zeta=5,5$  (б).

В режиме двухчастотной накачки изменяется не только порог, но и характер зависимости амплитуды ультразвуковых колебаний от мощности накачки. При одночастотной накачке зависимости  $E^2(z)$  однозначны (рис. 1), тогда как в случае двухчастотной накачки зависимости  $E_2^2(z)$  при фиксированном  $E_1^2$  ( $E_1^2 \neq 0$ ) однозначностью могут не обладать (рис. 2). При одночастотной накачке зависимость  $E_2^2(z)$  может либо состоять из отдельных ветвей (рис. 1б), либо содержать чередующиеся участки, соответствующие устойчивым и неустойчивым режимам генерации (рис. 1а) (неустойчивость имеет место при  $dE^2/dz < 0$  [5]). В случае же двухчастотной накачки различные ветви  $E^2(z)$  перестают быть изолированными, что также иллюстрирует рис. 2.

В работе [5] интервалы амплитуд акустических колебаний, в которых имеет место устойчивая параметрическая генерация, были названы зонами возбуждения. Можно усмотреть некоторое сходство таких зон возбуждения с зонами неустойчивости, для уравнения Матье, поскольку для него также известно [6], что одному и тому же значению расстройки соответствует целая последовательность зон неустойчивости со своими интервалами коэффициента модуляции  $m$ . Дополнительным мотивом для такого сопоставления является то, что уравнение (1) с учетом (3) сводится к неоднородному уравнению Матье. Тем не менее эта аналогия весьма ограничена, в частности для уравнения Матье интервалы  $m$ , соответствующие высшим зонам неустойчивости, лежат в нефизической области ( $m > 1$ ). В то же время параметрическая генерация в системе (1), (2) возникает, когда коэффициент модуляции (равный  $z/Q_1$ ) невелик. В предыдущих экспериментах наблюдались колебания,

соответствующие лишь первой зоне. Если зависимость  $E^2(z)$  состоит из изолированных ветвей (как на рис. 1б), то переход из первой в высшие зоны возбуждения невозможен. Такой переход становится тогда возможным, когда зависимость  $E^2(z)$  имеет вид непрерывной кривой (рис. 1а). Однако требуемая для перехода мощность накачки оказывается весьма большой, при этом наблюдению стрикционной параметрической генерации мешают нелинейные расстроочные эффекты в ДР.

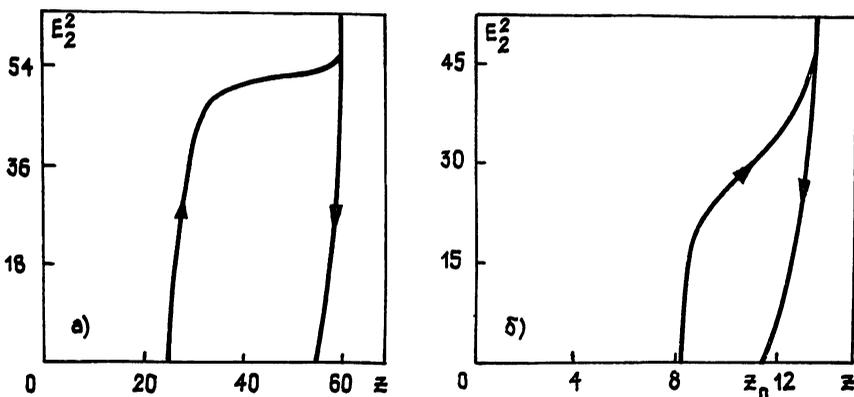


Рис. 2. Зависимости  $E_2^2(z)$  в режиме двухчастотной накачки при фиксированной мощности первой накачки:

а)  $E_1^2 = 350$ ,  $\zeta_1 = 4,4$ ,  $\zeta_2 = 8,8$ ; б)  $E_1^2 = 170$ ,  $\zeta_1 = -1,1$ ,  $\zeta_2 = 2,2$ ;  $\Delta = 2,2$ .

Переход к двухчастотной накачке позволяет существенно облегчить возбуждение стрикционной параметрической генерации во второй зоне. Это, в частности, демонстрируют результаты расчетов, представленные на рис. 1 и 2. Зададим мощность накачки  $E_1^2 = 350$ , т. е. на уровне, лишь немного превышающем минимальную мощность накачки для колебаний во второй зоне (точка А, рис. 1,  $E_1^2 = 350$ ). Включив дополнительный генератор, можно при  $E_2^2 = 54$  (см. рис. 2а) достигнуть точки ветвления режимов параметрической генерации. Уменьшая далее мощность второго генератора до нуля, мы приведем колебательную систему в состояние, соответствующее второй зоне возбуждения (точка В, рис. 1). Альтернативный путь возбуждения параметрической генерации во второй зоне — одночастотной накачкой — можно реализовать только при существенно большей мощности генератора накачки. Так, для случая, изображенного на рис. 1, требуется превышение почти в пять раз ( $E^2 = 1660$ , точка С, рис. 1а).

**3. Эксперимент.** Проверка изложенных выше выводов проводилась в опытах с ДР из танталата калия при температуре 4,2 К, где условия реализации стрикционного параметрического возбуждения наиболее благоприятны. Методика эксперимента в основном соответствовала [4], отличие состояло лишь в усложнении блока источника накачки. Двухчастотную накачку с независимой перестройкой частот обеспечивало сочетание генераторной секции на диоде Ганна (максимальная выходная мощность более 100 мВт), клистронного генератора (с выходной мощностью до 20 мВт) и элементов развязки.

При наблюдении отраженного от ДР сигнала на экране анализатора спектра С4-27 отчетливо проявлялись особенности, вытекающие из свойства ограниченной суперпозиции. В режиме параметрической генерации при двухчастотной накачке спектр сигнала состоял из двух эквидистантных гребенек. При перестройке частоты одного из генераторов накачки (например  $\omega_{2a}$ ) амплитуды комбинационных частот  $\omega_{2k}$  изменялись в соответствии с закономерностями, установленными для одночастотной накачки [3]. В частности, наблюдались немонотонные осцилляционные изменения интенсивности спектральных компонент с  $k < 0$

при перестройке  $\omega_{20}$ , причем расстояние между соседними максимумами или минимумами составляло примерно  $\Omega_a$ . В то же время, при достаточном превышении мощностью накачки порога параметрического возбуждения, изменения частоты накачки на величину  $\approx \Omega_a$  не сопровождались значительным изменением амплитуды акустических колебаний  $z$ , соответственно вид гребенки частот  $\omega_{1k}$  оставался практически неизменным.

Эффекты синхронизации могли иметь место лишь в узких частотных интервалах, и при наблюдении с помощью спектр-анализатора не проявились. Эксперименты проводились в условиях, когда синхронизация заведомо отсутствовала. Соответственно, расчетные зависимости (рис. 2—4) также были получены без учета синхронизации.

В качестве примера здесь представлены результаты экспериментов с цилиндрическим ДР из  $\text{KTaO}_3$ , имевшим диаметр 1,2 мм и высоту 0,38 мм. Возбуждение электро-

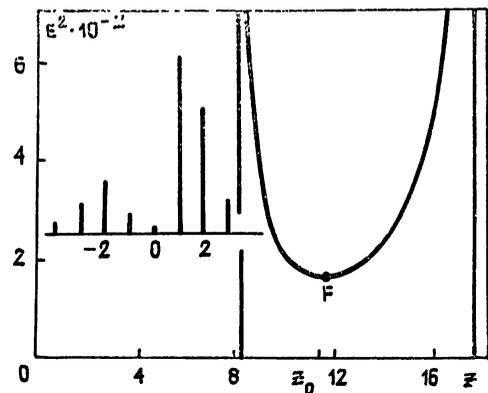


Рис. 3. Зависимость  $E^2(z)$  при отрицательной расстройке накачки ( $\Delta=2,2$ ;  $\zeta=-1,1$ ) и спектр комбинационных частот в режиме, соответствующем точке  $F$ .

магнитных колебаний производилось на моде  $H_{126}$  (собственная частота 8,98 ГГц, нагруженная добротность  $Q_H=2,1 \cdot 10^3$ ). Акустические колебания возбуждались на частоте  $\Omega_a=2\pi \cdot 4,62$  МГц (изгибная мода с тремя узловыми диаметрами). Таким образом, в эксперименте было  $\Delta=2,2$ , т. е. представленные выше результаты расчета подвергались прямой экспериментальной проверке. При работе в жидком гелии пороговая мощность стрикционного параметрического возбуждения составляла около 1 мВт, что соответствовало нормированной величине  $E^2=5$  при  $\zeta_0 \approx \Delta$  (накачка одночастотная).

В соответствии с расчетом (см. рис. 1 и 2) для реализации параметрического возбуждения во второй зоне была использована двухчастотная накачка с следующими параметрами:  $\zeta_{10}=4,4$ ,  $E_1^2=350$  (70 мВт в абсолютных единицах),  $\zeta_{20}=8,8$ ,  $E_2^2=60$  (10 мВт). Включение второго генератора накачки действительно приводило к значительному изменению спектра параметрической генерации, которое сохранялось и после выключения второго генератора (переход  $AB$ , рис. 1а). После этого, плавно перестраивая частоту первого генератора накачки, можно было получить параметрическую генерацию во второй зоне даже для тех случаев, когда ее прямое возбуждение невозможно (например, переход из состояния  $A'$  к состоянию  $B'$ , рис. 1б). Небольшое уменьшение мощности накачки приводило к срыву генерации во второй зоне и возврату колебательной системы к состоянию в первой зоне параметрической генерации (переход  $DE$ , рис. 1). Соответствующую скачкообразную перестройку спектра комбинационных частот иллюстрирует рис. 4.

Во всех предшествующих экспериментах возбуждение стрикционной параметрической генерации происходило в условиях, когда частоты накачки  $\omega_p$  превышали собственную частоту электромагнитной моды  $\omega_f$ . В противном случае ( $\omega_p < \omega_f$  или  $\zeta_0 < 0$ ) на начальном этапе установления генерации невозможно добиться, чтобы передача энергии в акустические колебания за счет процессов распада квантов накачки ( $\omega_{p,0} \rightarrow \omega_{p,-1} + \Omega_a$ ) превышала отбор энергии на образование квантов суммарной комбинационной частоты ( $\omega_{p,0} + \Omega_a \rightarrow \omega_{p,1}$ ) [2]. Тем не менее стрикционная параметрическая регенерация при  $\zeta_0 < 0$  возможна, если в ДР предварительно имелись акустические ко-

лебания достаточно большой амплитуды [5] (см. рис. 3). В настоящей работе режим возбуждения с  $\xi_0 < 0$  был реализован с помощью двухчастотной накачки. На начальном этапе на ДР подавалась накачка с частотой  $\omega_{10}$ , такой, что  $\xi_{10} > 0$ , мощность которой обеспечивала параметрическое возбуждение в мягком режиме акустических колебаний с

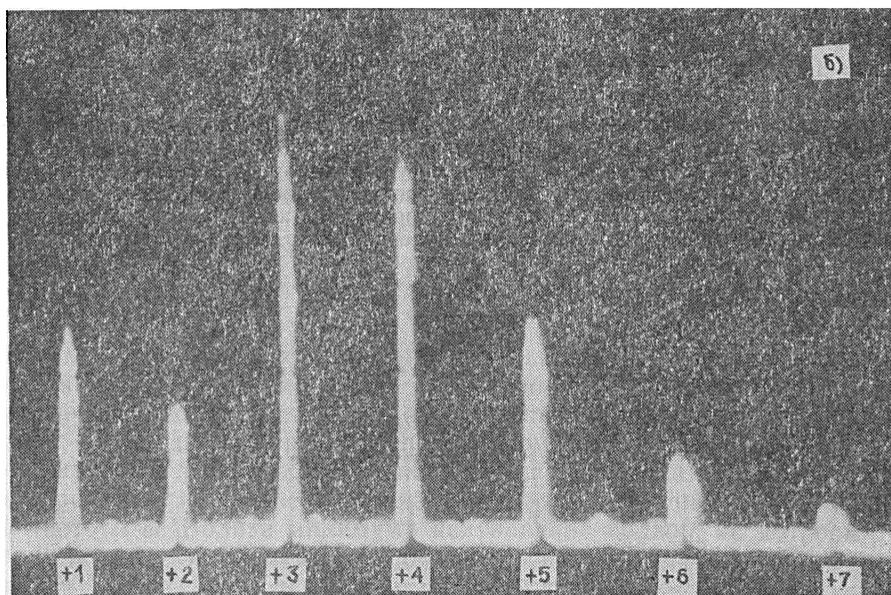
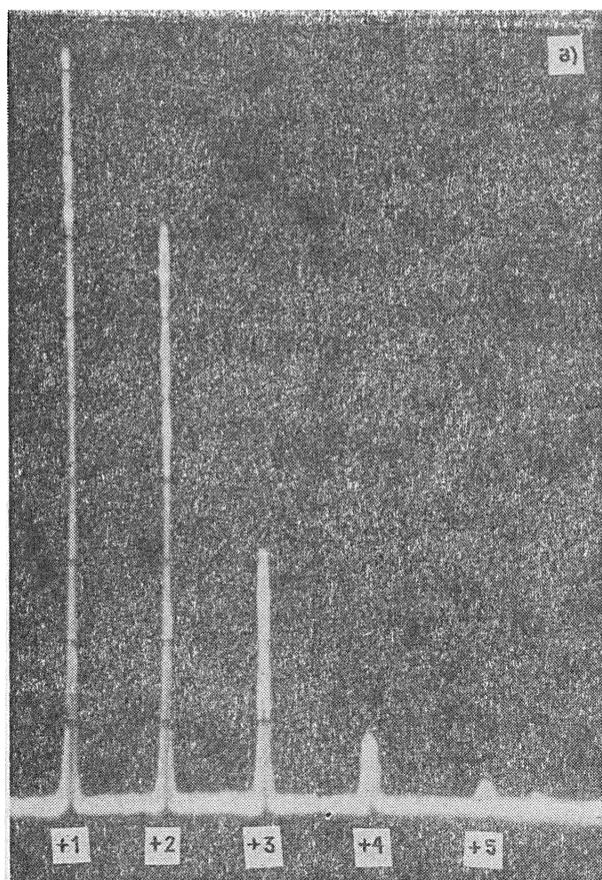


Рис. 4. Спектры комбинационных частот ( $k > 0$ ) — расчетные и экспериментальные результаты:  
 а) первая зона возбуждения (точка  $A'$ , рис. 16); б) вторая зона (точка  $B'$ )  
 $E^2 = 350$ ,  $\Delta = 2,2$ ,  $\xi = 5,5$ .

амплитудой  $z_0$  (рис. 3). Последующее включение второго генератора с частотой  $\omega_{20}$  ( $\xi_{20} < 0$ ,  $|\xi_{20}| \approx \Delta/2$ ) сопровождалось увеличением  $z$ , в согласии с (16) и рис. 3. Если мощность генератора частоты  $\omega_{20}$  была достаточно большой ( $E_2^2 > 170$ ), состояние параметрического возбуждения сохранялось и при уменьшении мощности первого генератора до нуля. На рис. 2б приведена расчетная зависимость  $E_2^2(z)$  для указанного режима, который был также реализован в эксперименте описанным выше способом при мощности первого генератора накачки 40 мВт и второго — 10 мВт. Спектр наблюдавшейся генерации соответствует расчетному (рис. 3).

Проведенное исследование может оказаться полезным в двух отношениях. Во-первых, показана перспективность применения многочастотной накачки для реализации многообразных режимов стрикционной параметрической генерации в диэлектрических электроакустических резонаторах. Во-вторых, выполненная работа дает стимул для постановки в новом плане вопроса отыскания в нелинейных колебательных системах свойств, аналогичных свойству суперпозиции колебаний в линейных системах.

Авторы выражают благодарность И. В. Иванову за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Решетников М. Е., Чистяев В. А. // Изв. АН СССР. Сер. физич. 1987. Т. 51. № 12. С. 2208.
2. Белокопытов Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С. 1121.
3. Чистяев В. А., Белокопытов Г. В. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 7225 — В86. Деп. от 3 ноября 1986 г.
4. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Чистяев В. А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 7. С. 1381.
5. Белокопытов Г. В., Семененко В. Н., Чистяев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 8. С. 957.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
1 ноября 1988 г.

#### RESONANCE STRICTION PARAMETRIC EXCITATION UNDER MULTIFREQUENCY PUMP

*G. V. Belokopytov, V. N. Semenenko, V. A. Chistyayev*

The parametric oscillation of coupled electromagnetic and acoustic waves caused by electrostriction in microwave dielectric resonators is studied theoretically and experimentally for the case of multifrequency pump. It is shown that the response of the oscillatory system considered on the multifrequency pump may be presented as a linear combination of the responses on one harmonic pump components with a specially chosen relation of amplitudes. The striction parametric excitation in unusual regimes («zones») is realized in experiments with two frequency pump.

УДК 530.18:519

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ХАОСА В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

А. С. Пиковский

С учетом пространственно-временной аналогии рассматривается временное развитие пространственного хаоса в безграничной среде и пространственное развитие временного хаоса в полуограниченной среде. В рамках уравнения Гинзбурга—Ландау описывается вторичная неустойчивость периодических по одной координате полей. Прослеживается хаотизация квазипериодических режимов. Показано, что рост комбинационных частот приводит к плотному спектру, практически неотличимому от сплошного; в фазовом пространстве этому соответствует образование складок на двумерном торе.

1. В последнее время большой интерес вызывает исследование стохастичности в распределенных системах. Здесь возможны режимы, близкие к наблюдающимся в сосредоточенных системах. Например, поле в резонаторе можно представить как набор дискретных мод, эволюция которых во времени описывается странным аттрактором. Ситуация меняется, если рассматривать бесконечные в пространстве среды. В этом случае пространственный спектр может быть сплошным, и возникает задача о развитии пространственного хаоса. Вообще, в распределенных системах имеется большое разнообразие в постановках задач, связанное с наложением начальных и граничных условий. В данной работе мы рассмотрим ситуацию, когда задается зависимость поля от одной переменной и прослеживается эволюция по другой переменной. С учетом пространственно-временной аналогии сюда относятся задачи двух типов: 1) в безграничной среде в начальный момент времени задано распределение поля по координате. Прослеживается эволюция этого поля во времени, в частности, зарождение и развитие во времени пространственного хаоса; 2) в полуограниченной среде на границе задана зависимость поля от времени. Прослеживается зарождение и развитие в пространстве временного хаоса. Отметим, что некоторые режимы пространственного развития хаоса обсуждались в [1-3].

2. Задачу о развитии временного хаоса в пространстве будем рассматривать на примере комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау

$$\frac{\partial a}{\partial x} = a + (1 + ic_1) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + (-1 + ic_2) |a|^2 a. \quad (1)$$

Это уравнение является основным модельным уравнением, описывающим квазигармонические волны в неравновесной среде с конвективной неустойчивостью. Действительно, пусть линейные волны вида  $\exp(ikx - i\omega t)$  удовлетворяют дисперсионному соотношению  $D(\omega, k; r) = 0$  ( $r$  — параметр, отвечающий степени неравновесности). Это соотношение определяет комплексное волновое число  $k$  как функцию действительной частоты  $\omega$ . Вблизи минимума нейтральной кривой, на которой пространственный инкремент  $\text{Im } k$  обращается в нуль (точка  $k_c, \omega_c, r_c$ ), имеем

$$k = k_c + \frac{\partial k}{\partial \omega} (\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_c)^2 + \frac{\partial k}{\partial r} (r - r_c) + \dots$$

Этому представлению дисперсионного соотношения отвечает слабонелинейное уравнение в частных производных для медленно меняющейся комплексной амплитуды  $A(x, t)$

$$i \frac{\partial A}{\partial x} = i \frac{\partial k}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial r} (r - r_c) A + d |A|^2 A. \quad (2)$$

Отметим, что величины  $\partial^2 k / \partial \omega^2$  и  $d$  комплексны. С помощью замены переменных (2) можно привести к виду (1).

Для уравнения (1) мы имеем следующую постановку задачи: при  $x=0$  задано поле на границе среды  $a(0, t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , требуется найти поле при  $x > 0$ . Подчеркнем, что эта постановка задачи существенно отличается от обычной для теории динамических систем постановки задачи о хаосе (см., например, [2]). Обычно задают начальные условия и смотрят, как они будут эволюционировать во времени. В среде с конвективной неустойчивостью начальное возмущение «убегает», поэтому наблюдать нетривиальный режим можно, только если в какой-то области или точке есть постоянно действующие возмущения. Таким образом, мы приходим к задаче о преобразовании заданных на границе возмущений. При этом о хаотизации имеет смысл говорить, если возмущения на границе регулярны, т. е. периодические или квазипериодические. Если же на границе возмущения носят шумовой, флуктуационный характер, то мы приходим к относительно тривиальной задаче о преобразовании шума.

Рассмотрим случай периодического возмущения на границе  $a(0, t) = a(0, t+T)$ . Тогда, в силу инвариантности уравнения (1) относительно сдвигов по  $t$ , получим  $a(x, t) = a(x, t+T)$ , и, следовательно, во всех точках пространства будет наблюдаться периодический во времени режим. При этом изменение поля по координате может носить хаотический характер (в частности, такие режимы были численно получены в [4-6]). Рассмотрим устойчивость такого периодического по  $t$  режима  $a(x, t)$ .

Для малого возмущения  $b(x, t)$ , линеаризуя (1), будем иметь

$$\frac{\partial b}{\partial x} = b + (1 + iC_1) \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + (-1 + iC_2) (a^2 b^* + 2|a|^2 b). \quad (3)$$

В линейном уравнении (3) коэффициенты  $a^2$  и  $|a|^2$  есть периодические функции  $t$  с периодом  $T$ , а их изменение по  $x$  может носить хаотический характер. Поскольку временной период вторичного возмущения  $b(x, t)$  не обязательно равен  $T$ , будем искать элементарные решения (3) в виде

$$b(x, t) = \exp(i\nu t) u_1(x, t) + \exp(-i\nu t) u_2(x, t), \quad (4)$$

где  $u_{1,2}(x, t) = u_{1,2}(x, t+T)$  — периодические функции  $t$ , параметр  $\nu$  — «квазичастота» вторичного возмущения. Отметим, что подстановка (4) аналогична блоховской подстановке при нахождении собственных функций периодического потенциала. В результате для  $u_{1,2}$  получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} = u_{1,2} + (1 + iC_1) \left( \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} \pm 2i\nu \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} - \nu^2 u_{1,2} \right) + \\ + (-1 + iC_2) (a^2 u_{2,1}^* + 2|a|^2 u_{1,2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Решения системы (5) при больших  $x$  ведут себя как  $\exp(\lambda x)$ . Показатель  $\lambda(\nu)$ , определяющий устойчивость вторичного возмущения, будем называть квазилюпуновским, так как он зависит от квазичастоты  $\nu$ , а при  $\nu=0$  переходит в обычный люпуновский показатель. Для периодического по  $t$  режима  $\lambda(0) = 0$ , а для хаотического  $\lambda(0) > 0$ .

Вычислять квазиляпуновский показатель можно точно тем же способом, что и обычный ляпуновский показатель [7]. На рис. 1 приведены результаты расчетов устойчивости эволюции периодического по  $t$  поля на границе для случая  $C_1=3$ ,  $C_2=5$  и различных значений периода  $T$ . При  $T=1$  в (1) устанавливается режим постоянной по  $x$  амплитуды, при  $T=7$  амплитуда возмущения периодически меняется по  $x$ , а при  $T=10$  — хаотически. Во всех этих режимах имеет место вторичная неустойчивость, означающая нарастание по  $x$  вторичных возмущений с периодами, не совпадающими с  $T$ . Таким образом, хотя периодическое на границе возмущение остается во всех точках пространства периодическим, может развиваться вторичная неустойчивость, нарушающая эту периодичность. Детальный характер процесса зависит от

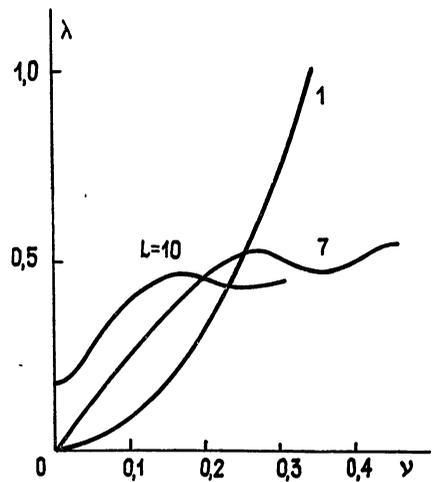


Рис. 1.

конкретного вида вторичных возмущений. Если вторичные возмущения флуктуационные, то может наблюдаться рост в пространстве шумовой компоненты, переходящей при больших  $x$  в пространственно-временную турбулентность. Более сложная картина может возникнуть, если вторичные возмущения периодические, но период их несоизмерим с  $T$ . Пусть поле на границе имеет вид  $a(0, t) = a_0(t) + \varepsilon a_1(t)$ , где  $a_0$  — периодическая функция периода  $T_0$ , а  $a_1$  имеет период  $T_1$ , причем частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  и  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  несоизмеримы,  $\varepsilon \ll 1$ . Качественно развитие процесса в пространстве может происходить следующим образом. При малых  $x$  развивается хаотический по  $x$  режим, имеющий временной период  $T$ . Затем в силу описанной вторичной неустойчивости начинает нарастать возмущение  $a_1(x, t)$ . В процессе его развития из-за нелинейности возникают всевозможные комбинационные частоты  $n\omega_0 + m\omega_1$ , которые также попадают в область вторичной неустойчивости и нарастают. В результате при больших  $x$  спектр приближается к сплошному, оставаясь в строгом смысле дискретным. Этот процесс моделировался нами численно. Уравнение (1) решалось методом сеток по неявной разностной схеме. Поскольку решать уравнения в бесконечной по  $t$  области не представляется возможным, были использованы периодические условия по  $t$ . При этом несоизмеримые частоты становятся соизмеримыми:  $\omega_0/\omega_1 = p/q$ , но при больших  $p$  и  $q$  можно добиться хорошей аппроксимации иррационального числа и промодулировать процессы, происходящие при квазипериодических возмущениях на границе. В частности, иррациональное число  $(\sqrt{5} - 1)/2$  аппроксимировалось отношением  $p/q = 377/610$ . Развитие по  $x$  временного спектра возмущений, имеющих частоты  $\omega_0 = \pi/10$ ,  $\omega_1 = \omega_0 \cdot 377/610$ , показано на рис. 2. Видно, что с ростом  $T$  происходит заполнение спектра, что можно интерпретировать как турбулизацию процесса. Здесь возникает парадокс: процесс, строго говоря, является регулярным (квазипериодическим), но спектр его выглядит как сплошной. Чтобы этот парадокс разрешить, рассмотрим эволюцию квазипериодического режима не с точки зрения спектра, а с точки зрения фазового пространства. Эффективное фазовое пространство построим следующим образом: образуем последовательность действительных чисел  $u_l = |a(x, lT_0)|^2$ ,  $l=0, 1, 2, \dots$  и нанесем их на фазовую плоскость  $(u_l, u_{l+1})$ . При  $0 < l < \infty$  такие точки заполняют замкнутую линию, являющуюся сечением данной плоскостью квазипериодической обмотки двумерного тора. В наших численных расчетах получался набор из  $q$  точек, аппроксимирующий эту линию. На рис. 2

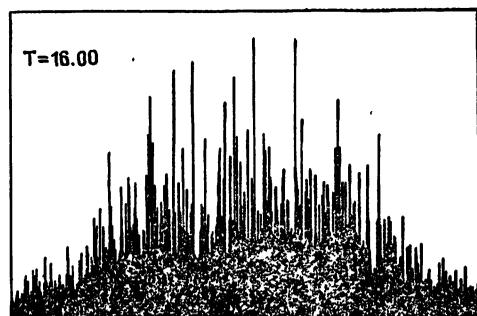
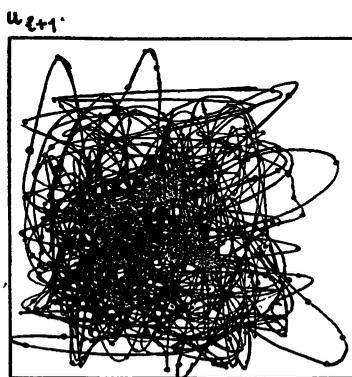
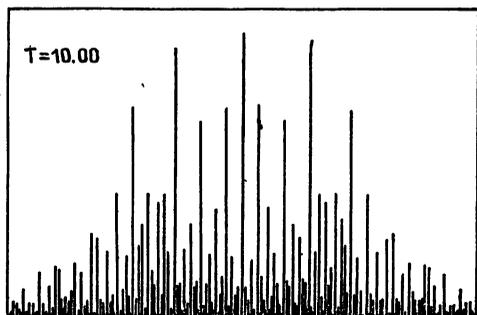
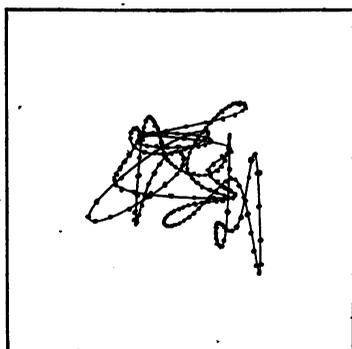
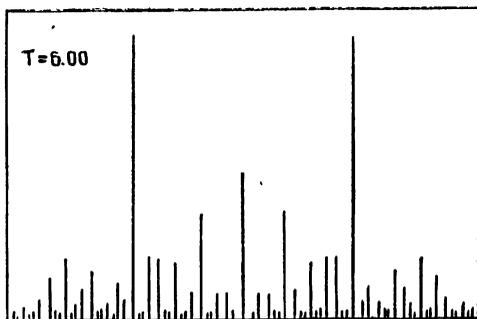
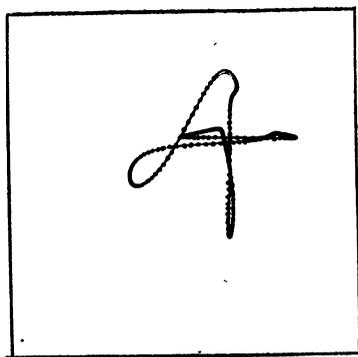


Рис. 2.

представлены результаты такой обработки для разных  $x$ . Видно, что с ростом  $x$  тор становится складчатым, а длина его сечения растет, причем этот рост, как следует из рис. 3, — экспоненциальный. При больших  $x$  запутанную, переплетающуюся линию практически невозможно отличить от проекции многомерного аттрактора на плоскость. Таким образом, в фазовом пространстве, как и в спектре, мы имеем строго говоря регулярный объект — складчатый тор, который при больших  $x$  выглядит как странный аттрактор. В такой эволюции тора и состоит пространственное развитие временного хаоса в системе (1).

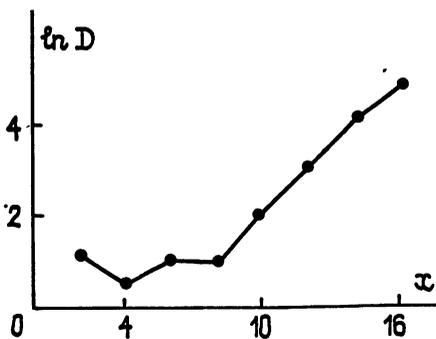


Рис. 3.

3. Описанная выше задача может быть сформулирована как развитие в пространстве временного хаоса. Используя пространственно-временную аналогию, можно развитый подход применить к описанию изменения во времени пространственной структуры поля. Фактически, для описания этого процесса можно непосредственно использовать результаты п.2. Например, для квазигармонических волн можно, аналогично тому, как это сделано выше, но с заменой  $x \leftrightarrow t$ ,  $\omega \leftrightarrow k$ , получить уравнение

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a + (1 + i\bar{C}_1) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + (-1 + i\bar{C}_2) |a|^2 a, \quad (6)$$

описывающее эволюцию во времени начального поля  $a(x, 0)$ . Начальное периодическое поле остается периодическим, но может иметь место вторичная неустойчивость к возбуждению возмущений с другими волновыми числами. Квазипериодическое начальное поле хаотизируется точно таким же путем, который описан в п. 2, пространственный спектр приближается к сплошному, а в эффективном фазовом пространстве образуется складчатый тор. Подчеркнем, что о хаотизации пространственного распределения можно говорить только в безграничной среде, поскольку при наличии границ пространственный спектр всегда дискретен.

Описанное явление развития пространственно-временного хаоса наблюдается не только в уравнении Гинзбурга—Ландау, но и в ряде других систем. Например, одномерные волны на стекающей тонкой пленке жидкости описываются уравнением Курамо—Сивашинского [8–10]

$$\frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \quad (7)$$

Для этого уравнения можно поставить задачу о развитии временного хаоса в пространстве. При квазипериодическом возбуждении волн на границе  $x=0$  наблюдается заполнение спектра, аналогичное рис. 2.

Выше мы рассматривали только системы, непрерывные в пространстве и во времени. Развитый подход можно распространить и на дискретные (по одной или двум переменным) модели. Например, развитие во времени пространственного хаоса можно наблюдать в консервативной цепочке

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} - (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - u_i + u_i^3 = 0, \quad -\infty < i < \infty. \quad (8)$$

Здесь квазипериодическое начальное условие задается, например, функцией  $u_i = \varepsilon \cos(2\pi\rho i)$ , где  $\rho$  — иррациональное число, и в процессе эволюции такое распределение хаотизируется. Отметим, что для цепочек, подобных (8), эффект вторичной неустойчивости наблюдался еще в ранних численных экспериментах [11]. В этих экспериментах исследовались периодические цепочки  $1 < i < N$ , а начальное поле имело период  $N/2$ , в результате эволюции вследствие вторичной неустойчивости происходило «спонтанное» нарушение периода  $N/2$ .

Другой дискретной моделью, в которой можно наблюдать развитие временного хаоса в пространстве, является цепочка нелинейных усилителей [12]. В простейшем случае она описывается системой уравнений

$$\frac{du_i}{dt} + u_i = f(u_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3 \dots, \quad (9)$$

где  $f(u)$  — нелинейная характеристика усилителя. Задав сигнал на входе  $u_0(t)$  в виде квазипериодической функции, мы получим его хаотизацию вдоль «пространственной координаты»  $i$ . Отметим, что в данной ситуации складчатый тор возникает в естественном фазовом про-

странстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9). Автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пиковский А. С. // Письма в ЖЭТФ, 1984. Т. 40. № 6. С. 217.
2. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. № 12. С. 561.
3. Пиковский А. С. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. № 11. С. 672.
4. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. — Springer; Berlin, 1984. — 156 p.
5. Moon H. T., Huerre P., Redekopp L. G. // Physica D. 1983. V. 7. № 1—3. P. 135.
6. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. И., Малнецкий Г. Г., Самарский А. А. // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1091.
7. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
8. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. — Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1983.—238 с.
9. Sivashinsky G. I., Michelson D. M. // Prog. Theor. Phys. 1980. V. 63. № 6. P. 2112.
10. Romeau Y., Pumir A., Pelce P. // J. Stat. Phys. 1984. V. 37. № 1/2. P. 39.
11. Израйлев Ф. М., Хисамутдинов А. И., Чириков Б. В. Препринт ИЯФ № 252. М., 1968.
12. Пиковский А. С. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 32. № 3. С. 305.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
25 марта 1987 г.,  
после переработки  
15 апреля 1988 г.

#### SPATIAL-TEMPORAL DEVELOPMENT OF CHAOS IN THE NONEQUILIBRIUM MEDIA

*A. S. Pikovskij*

Temporal development of spatial chaos in the infinite medium and spatial development of temporal chaos in the semiinfinite medium are considered simultaneously on the basis of space-time analogy. For the complex Ginzburg—Landau equation the secondary instability of periodic fields is described. Chaotization of quasiperiodic fields is considered. It is shown, that the growth of combined frequencies leads to dense, practically continuous spectrum; in the phase space this is manifested as the folding of two-dimensional torus.

#### ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Шкритек П. Справочное руководство по звуковой схмотехнике: Пер. с нем. — М.: Мир, 1990 (III кв.). — 27 л.

В книге изложен обширный материал по схмотехнике и электронным компонентам для звуковой аппаратуры. Анализируются характеристики звуковых систем, методы снижения уровня искажений и шумов. Большое внимание уделяется традиционной аналоговой схмотехнике. В то же время значительная часть книги посвящена цифровым методам, применяемым в звуковой технике. Рассматриваются цифровые методы управления, цифровая передача звука, техника записи и воспроизведения на компакт-дисках. В приложении приведены программы на Бейсике для расчета цепей, трансформаторов, выпрямителей, а также шумов и нелинейных искажений.

Для разработчиков промышленной звуковой аппаратуры, а также квалифицированных радиолюбителей.

Шур М. Современные приборы на основе арсенида галлия. Пер. с англ. — М.: Мир, 1990 (IV кв.). — 52 л.

Настоящее издание автора из США представляет собой фундаментальную монографию, в которой последовательно, с единой методологической позиции изложены физические принципы, технология и проектирование современных приборов на основе арсенида галлия—сверхскоростных сверхбольших интегральных схем (ССБИС) и СВЧ-полупроводниковых устройств.

Для специалистов в области полупроводниковой техники, а также преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

УДК 621.317.765.8

## ХАОС И ПЕРИОДИЧНОСТЬ В ГЕНЕРАТОРЕ НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

А. В. Андрушкевич, А. А. Кипчатов

Экспериментально получена карта динамических режимов генератора на туннельном диоде на плоскости управляющих параметров: инкремент затухания — параметр нелинейности  $\varepsilon$ . Диаграмма режимов работы генератора представляет собой набор повторяющихся, инвариантных зон периодических и хаотических колебаний. Эти зоны разделены линиями добавления периода и при увеличении  $\varepsilon$  сходятся в окрестности некой критической точки. В этой области поведение генератора становится неоднозначным.

1. Генератор на туннельном диоде [1] является одной из простейших автономных радиотехнических систем, демонстрирующих сложное периодическое и хаотическое поведение. Эквивалентная схема генератора представлена на рис. 1 и может быть описана системой уравнений [2]:

$$\dot{x} = 2\delta x + y - gz, \quad \dot{y} = x - y/2\lambda, \quad \varepsilon \dot{z} = x - f(z),$$

где  $x = I/I_m$ ,  $z = V/V_m$ ,  $y = U\sqrt{C}/I_m\sqrt{L}$  — безразмерные переменные ( $V$  — напряжение на туннельном диоде,  $U$  — напряжение на емкости контура,  $I$  — ток через индуктивность,  $I_m$  и  $V_m$  — характерные нормирующие величины тока и напряжения для диода),  $g = V_m\sqrt{C}/I_m\sqrt{L}$  — параметр, определяющий степени влияния туннельного диода на процессы в контуре,  $\varepsilon = gC_1/C$  — малый параметр, пропорциональный паразитной емкости туннельного диода  $C_1$ ,  $f(z) = I_{т.д}(V_m z)/I_m$  — нормированная характеристика диода,  $\delta = -r\sqrt{C}/2\sqrt{L}$ ,  $\lambda = -R\sqrt{C}/2\sqrt{L}$  — параметры, определяющие инкремент нарастания колебаний в контуре в отсутствие диода.

Простейший случай  $\varepsilon = 0$  допускает аналитическое решение, при этом в фазовом пространстве системы уравнений имеется странный аттрактор [2]. В работах [1–3] экспериментально и численным моделированием было показано, что при малом  $\varepsilon$  стохастичность в системе сохраняется.

2. В настоящей работе экспериментально исследовано поведение генератора при больших  $\varepsilon$ . Для этого реализована схема генератора, приведенная на рис. 1. В качестве источника энергии в генераторе применено активное отрицательное сопротивление  $-R$  с падающим линейным участком вольт-амперной характеристики. Величина сопротивления  $r$  является основным параметром контура — параметром диссипации. Подбором элементов схемы генератора были приняты меры, чтобы амплитуда колебаний в контуре ограничивалась нелинейной вольт-амперной характеристикой туннельного диода и не выходила за линейный участок вольт-амперной характеристики отрицательного сопротивления,

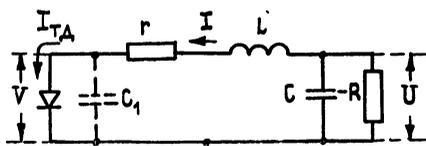


Рис. 1.

Так как параметр  $\epsilon$ , присутствующий в модельных уравнениях, пропорционален паразитной емкости диода  $C_1$ , то его изменение может быть осуществлено введением дополнительной емкости, шунтирующей туннельный диод. Введение дополнительной емкости  $C_{\text{шунт}}$  также дает возможность более полно изучить режимы работы генератора, представив его поведение на двухпараметрической плоскости: инкремент затухания — параметр  $\epsilon$ .

Исследование режимов генерации проводилось по наблюдаемым на осциллографе проекциям фазового портрета системы на плоскость  $U-V$ , временным реализациям и спектрам в диапазоне от нуля до резонансной частоты контура  $f_0 = 31,5$  кГц.

В фазовом пространстве поведению генератора соответствует спираль, раскручивающаяся на плоскости: ток диода  $I_{\text{тд}}(V)$  — напряжение на емкости контура  $U(t)$ . Переключениям диода соответствует срыв изображающей точки с плоскости и ее возвращение к началу спирали. В зависимости от величины диссипации в контуре генератора фазовый портрет имеет несколько витков срыва траектории в пространство (сложный периодический режим), либо странный аттрактор с «размазанными» траекториями (хаотический режим).

3. Диаграмма режимов работы генератора, представленная на плоскости параметров: инкремент затухания — шунтирующая емкость (рис. 2), разделена на характерные зоны колебаний  $A, B, C, \dots, I$ . Каждая зона содержит области периодического и показанные штриховкой области хаотического поведения. Периодические режимы обозначены здесь отношением двух чисел ( $n:m$ ), соответствующих отношению числа витков траектории фазового портрета, оставшихся в плоскости, к числу витков траектории, выходящих в пространство (рис. 3ж). Сумма этих двух чисел ( $n+m$ ) дает полное число оборотов траектории в фазовом пространстве, а следовательно, однозначно определяет число субгармоник в спектре, равное  $(n+m-1)$ .

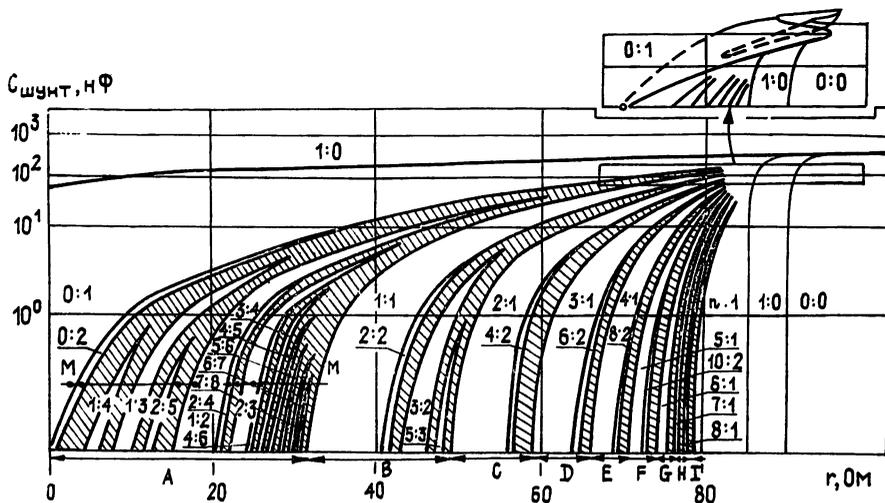


Рис. 2.

Рассмотрим зону А. При движении по плоскости параметров вдоль линии  $MM$  (рис. 2) мы видим чередующиеся области хаоса и периодичности. При малых потерях в контуре наблюдается режим  $(0:1)$ , и в спектре сигнала содержится одна спектральная компонента на частоте  $f_0$  (рис. 3а). При увеличении параметра  $r$  происходит бифуркация удвоения периода, область  $(0:1)$  переходит в область  $(0:2)$ , соответственно в спектре появляется субгармоника частоты  $f_0/2$  (рис. 3б). С возрастанием величины диссипации генератор демонстрирует переход из области  $(0:2)$  через область хаоса, характеризующуюся сплошным спек-

ром (рис. 3в) и содержащую окна устойчивости высоких порядков (1:4, 1:3, 2:5), в область периодичности (1:2), где фазовый портрет имеет уже один виток траектории в плоскости медленных движений и два витка траектории, выходящих в пространство (рис. 3г). Двигаясь далее вправо вдоль линии  $MM$  из области (1:2) через область удвоения периода (2:4) и область хаоса (рис. 3д, е) мы попадаем в область периодических колебаний (2:3), которая характеризуется фазовым портретом и спектром, показанными на рис. 3ж. Дальнейшее увеличение сопротивления  $r$  приводит соответственно к бифуркации удвоения периода (рис. 3з). Таким образом, в зоне  $A$  при увеличении параметра диссипации каждый периодический режим переходит в хаотический режим через единственное удвоение периода. Переход от хаотических колебаний к периодическим происходит с добавлением периода на два, при этом в фазовом портрете добавляется один виток траектории в плоскости и один виток траектории, выходящий в пространство.

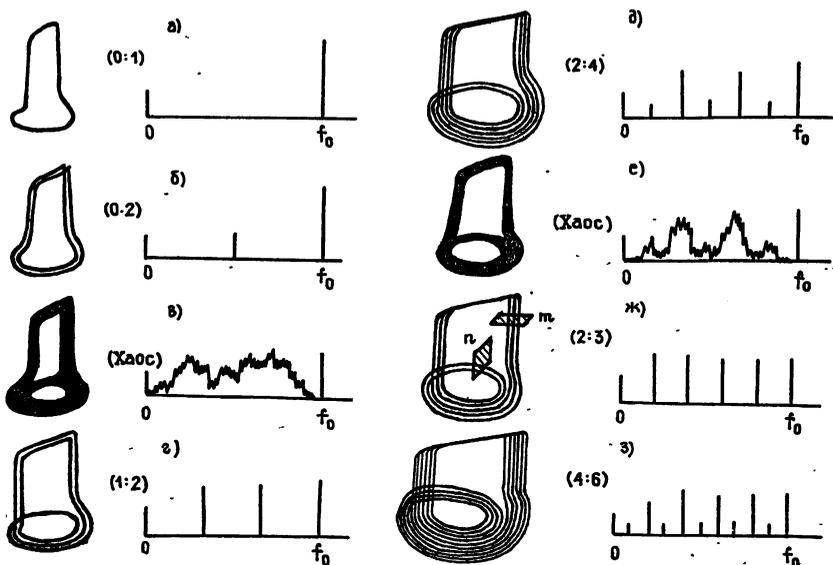


Рис. 3.

Рассматривая, как изменяется поведение генератора при движении по всей плоскости параметров с увеличением сопротивления  $r_x$ , можно выявить следующие закономерности. Зоны диаграммы  $A, B, C, \dots, I$  повторяют друг друга в своем строении, с тем отличием, что при переходе от одной зоны к другой каждый виток траектории фазового портрета приобретает дополнительный оборот траектории в плоскости медленных движений (система с большими диссипациями дольше раскачивается до установления порогового значения тока  $I_m$  через дном). Так, например, в зоне диаграммы  $A$  области периодичности (0:1), (0:2), (1:2), (2:3) аналогичны соответствующим областям (1:1), (2:2), (3:2), (5:3) зоны  $B$ . То есть при переходе от зоны к зоне происходит добавление периода и эквидистантный спектр субгармоник сменяется другим эквидистантным спектром с большим числом спектральных компонент.

Таким образом, поведение генератора на плоскости параметров разбивается на повторяющиеся зоны колебаний  $A, B, C, \dots, I$ , рожденные на основе  $n$ -тактных циклов. Эти зоны разграничены линиями добавления периода, пересечение которых приводит к изменению базового периода зоны на единицу.

4. Из диаграммы отчетливо видны скейлинговые свойства этих зон колебаний. Коэффициент масштабной инвариантности  $\alpha = \Delta_i / \Delta_{i+1}$  (где  $\Delta_i$  — ширина зоны,  $i$  — номер зоны, возрастающей с увеличением пара-

метра  $r$ ) составил величину  $1,35 \pm 0,1$ . Линия накопления, к которой сходятся линии добавления периода, соответствует качественному изменению аттрактора, реализующегося в системе: режимы  $(n:1)$  характеризуются переключениями туннельного диода с одной ветви своей вольт-амперной характеристики на другую ветвь, а режим  $(1:0)$  является однотоктным предельным циклом без переключений диода. Внутри самих зон колебаний также имеется ярко выраженный скейлинг добавлений периода на два. Для зоны  $A$  коэффициент масштабной инвариантности  $\alpha_A = 1,7 \pm 0,15$ .

5. Увеличение шунтирующей емкости приводит к постепенному сближению зон колебаний и смещению их в сторону больших значений инкремента затухания. При величине шунтирующей емкости, соответствующей  $\epsilon = 12$ , зоны колебаний сходятся в окрестности некой критической точки, лежащей на линии накопления  $(n:1) \rightarrow (1:0)$ . При этом на плоскости параметров образуются складки, показанные на вставке рис. 2. Из-за невозможности плавного изменения емкости большой величины подробная структура этой области не получена. Выше этой области в контуре реализуется простой предельный цикл  $(1:0)$ , не зависящий существенно от величины параметра диссипации. Увеличение  $\epsilon$  приводит к постепенному распрямлению функции  $f(z)$ , и линия перехода  $(1:0) \rightarrow (0:1)$  соответствует исчезновению экстремумов  $f(z)$ . Поэтому выше этой линии реализуется однотоктный предельный цикл.

6. Двупараметрическое исследование поведения генератора на туннельном диоде позволило выявить инвариантные зоны колебаний, рожденные на базе  $n$ -тактных циклов ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) и разграниченные линиями добавления периода. Внутри зон реализуются сложнопериодические режимы, сменяющие друг друга через хаотическое поведение и имеющие свою скейлинговую структуру добавлений периода на два. Увеличение параметра  $\epsilon$  приводит к сближению всех зон сложного поведения в окрестности некой критической точки, выше которой существует только однотоктный цикл.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. С. 336.
2. Рабинович М. И. // УФН. 1978. Т. 125. С. 123.
3. Пиковский А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 7. С. 883.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
19 июля 1988 г.,  
после доработки  
20 июня 1989 г.

#### CHAOS AND PERIODICITY IN THE TUNNEL DIODE OSCILLATOR

*A. V. Andrushkevich, A. A. Kipchatov*

The map of dynamical regime of the tunnel diode oscillator on the plane of control parameters, namely the damping increment and the parameter of nonlinearity  $\epsilon$  has been experimentally obtained. The diagram is a set of repeating invariant zones of periodic and chaotic oscillations. These zones are separated by the period adding lines and are converted above some critical point when  $\epsilon$  increases. In that region the behavior of the oscillator becomes multivariant.

УДК 621.371

## ОТРАЖЕНИЕ РАДИОВОЛН ОТ СЛОЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

В. И. Погорелов

Получены обобщенные выражения для коэффициентов отражения и пропускания электромагнитных волн от слоя среды произвольного профиля, диэлектрическая проницаемость которого имеет как регулярную, так и флуктуационную составляющие. Это позволяет создать единый метод расчета данных коэффициентов для слоев различного вида. Возможности соответствующего алгоритма иллюстрируются на примерах.

Расчет или оценка коэффициентов отражения ( $R$ ) и пропускания ( $D$ ) радиоволн от слоя неоднородности среды является проблемой, возникающей наиболее часто при исследованиях ионосферы Земли радиофизическими методами начиная от классических задач дешифровки ионограмм и кончая различными исследованиями локальных ионосферных образований (например, исследование ионосферы методом частичных отражений [1], исследование неоднородностей, возникающих при нагреве ионосферы мощным радиоизлучением [2] или при искусственных инъекциях плазмы). В последнее время практика радиозондирования ионосферы с ИСЗ тоже ставит аналогичную проблему, особенно в части расчета энергетических потерь радиосигнала на частотах, близких к критической частоте слоя  $F_2$  [3]. Аналогичные в математическом смысле задачи возникают также при решении многих других физических и технических проблем, связанных с прохождением волн в плоско-слоистой среде [4]. Отсутствие эффективной и достаточно универсальной методики расчета  $R$  и  $D$  обычно заставляет в каждом конкретном случае или искать независимый способ их определения, или же — в оценочном варианте подхода к проблеме — приближенно пользоваться некоторыми известными аналитическими решениями задач по распространению волн в среде с «похожими» характеристиками. Но набор таких решений мал, и, кроме того, замена реального слоя на «похожий» не гарантирует достоверности оценки, поскольку даже слабые изменения среды могут существенно исказить дифракционную картину поля и значительно изменить  $R$  и  $D$ . Понятно, что возможность использования формул для  $R$  и  $D$ , применимых в широком диапазоне условий и пригодных для конкретных численных расчетов, имела бы значительный интерес.

**1. Постановка задачи.** Пусть слой неоднородности среды, имеющий и регулярную и флуктуационную составляющие тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ik}(x, y, z, t)$ , располагается так, что средние по времени компоненты  $\varepsilon_{ik}$  тензора  $\varepsilon_{ik}$  зависят лишь от координаты  $z$ . Следовательно,  $\varepsilon_{ik}$  можно представить как  $\varepsilon_{ik}(x, y, z, t) = \varepsilon_{ik}(z) + \delta\varepsilon_{ik}(x, y, z, t)$ , где в общем случае  $\delta\varepsilon_{ik} \neq 0$ , но среднее от  $\delta\varepsilon_{ik}$  по  $x$  и  $y$ , равнозначное усреднению по ансамблю, равно нулю. Пусть также  $(d/dz)\varepsilon_{ik}$  отлично от нуля только в пределах области  $z_1 < z < z_2$  (т. е. слой неоднородности располагается ортогонально оси  $z$  и лежит между значениями  $z_1$  и  $z_2$  координаты  $z$ ). Магнитную проницаемость среды считаем равной единице.

Решаем задачу расчета  $R$  и  $D$ , полагая сначала, что первичное монохроматическое электромагнитное излучение с циклической частотой

$\omega$  падает нормально к слою со стороны меньших значений  $z$ . Основные результаты решения выражаются формулами (11) и их модификациями, которые позволяют, в частности, создать простые алгоритмы численного расчета коэффициентов  $R$  и  $D$  для произвольных слоев, не прибегая в каждом конкретном случае к каким-либо дополнительным выкладкам или графическим построениям. Далее указывается на обобщения результатов в случаях наклонного падения и импульсного излучения волн.

**2. Принцип локальной независимости величин  $E_h$ ,  $\varepsilon_{ih}$  и уравнения для средних компонент поля.** Составляющие электрического поля в рассматриваемой среде подчиняются уравнению [5]

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{C^2} \left( D - \frac{4\pi i}{\omega} j \right) - \text{grad div } E = 0, \quad (1)$$

в котором  $D_i - (4\pi i/\omega)j_i = \sum_k \varepsilon_{ikh} E_k$ . Будем считать, что множитель  $\exp(i\omega t)$  здесь опущен, а под  $E_h$  понимаются комплексные амплитуды компонент поля. Уравнение (1) включает в себя случайные величины  $\varepsilon_{ih}$  и  $E_h$ , природа флуктуаций которых различна. Флуктуации функций  $\varepsilon_{ih}(x, y, z, t)$  обусловлены только изменением свойств среды в рассматриваемых точках. Флуктуации поля являются вторичным эффектом, причем любое мгновенное значение  $E_h(x, y, z, t)$  обусловлено не реализацией конкретного значения тензора  $\varepsilon_{ih}$  в данной точке в данное время  $t$ , а создается распределением  $\varepsilon_{ih}(x, y, z, t)$  в обширной области, границы которой обычно расположены на значительном удалении от текущих координат  $x, y, z$ . Флуктуации же  $\delta\varepsilon_{ih}$  в различных достаточно удаленных точках независимы между собой. Поэтому и случайные отклонения  $\delta\varepsilon_{ih}$  и  $\delta E_h$  в одной точке в большом разнообразии условий при решении (1) могут с достаточной степенью точности считаться независимыми, в силу чего

$$\overline{\varepsilon_{ih} E_h} = \bar{\varepsilon}_{ih} \bar{E}_h, \quad (2)$$

причем  $\overline{\varepsilon_{ih}}$ , как и  $\bar{E}_h$ , по самой постановке задачи зависят только от координаты  $z$ . Производные от них по  $x$  и  $y$  зануляются, и вытекающая из (1) система уравнений для  $\bar{E}_h$  через  $\bar{\varepsilon}_{ih}$  полностью повторяет аналогичный случай для вертикального падения волн на ионосферу с заданной детерминированной зависимостью компонент диэлектрической проницаемости от высоты. Далее можно использовать известные решения для обыкновенной и необыкновенной волн с выражениями для  $\varepsilon_{ih}$ , например, в квазипродольном приближении. В конечном итоге задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2}{dz^2} E_{\pm} + \frac{\omega^2}{C^2} \varepsilon_{\pm} E_{\pm} = 0, \quad (3)$$

где  $E_+ = \bar{E}_x + i\bar{E}_y$ ,  $E_- = \bar{E}_x - i\bar{E}_y$  — средние амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн, а величина  $\varepsilon_{\pm}$  в отличие от детерминированного варианта подобной задачи включает в себя операцию усреднения. Вводя ее на основе (2), следует отметить, что отличие действительного значения  $\varepsilon_{ih}^{\text{eff}} = \overline{\varepsilon_{ih} E_h} / \bar{E}_h$  от  $\varepsilon_{ih}$  связано с трансформацией части энергии когерентного излучения в некогерентное. Следовательно, здесь, как и в подавляющем большинстве других решений задач такого рода, данный эффект не учитывается.

Таким образом, если статистические характеристики среды зависят только от координаты  $z$ , то использование принципа локальной независимости флуктуационных составляющих  $E_h$  и  $\varepsilon_{ih}$  приводит к значительному облегчению решения уравнения (1), сводя его к (3). При этом погрешности расчетов (т. е. те же  $\delta E_h$ ) получаются наименьшими

для точек вдали от области флуктуации среды, когда радиус корреляции этих флуктуаций становится много меньше первой зоны Френеля. Заметим, что справедливость данного принципа тем выше, чем меньше пространственный радиус корреляции флуктуаций  $\delta\epsilon_{ik}$  и чем меньше они сами (легко убедиться, что в приближении первого порядка малости для уравнений поля относительно  $\delta\epsilon_{ik}$  соотношение (2) выполняется автоматически).

В дальнейшем мы будем опускать в (3) знаки усреднения и обозначения типов волн, считая, что они учитываются в самом виде функции  $\bar{\epsilon}_{\pm}(z) = n^2$ . Поэтому (3) переписывается как

$$\frac{d^2}{dz^2} E + \frac{\omega^2 n^2}{C^2} E = 0, \quad (4)$$

причем здесь  $n$ , вообще говоря, величина комплексная.

**3. Расчет коэффициентов отражения и пропускания волн.** Физические условия постановки задачи разделяют рассматриваемое пространство на три области, различные в смысле характера проходящего в них поля:

— область до слоя  $z < z_1$  ( $n = n_1 = \text{const}$ ), где поле является наложением падающей и отраженной волн, т. е.

$$E = E_{\text{п}} \exp\left(i \frac{\omega n_1}{C} z\right) + E_{\text{отр}} \exp\left(-i \frac{\omega n_1}{C} z\right);$$

— область собственно отражающего слоя  $z_1 < z < z_2$  ( $n \neq \text{const}$ );

— область за слоем  $z > z_2$  ( $n = n_2 = \text{const}_2$ ), где вклад в поле дает только прошедшая сквозь слой волна, т. е.

$$E = E_{\text{пр}} \exp\left(i \frac{\omega n_2}{C} z\right). \quad (5)$$

В (4) удобно произвести замену

$$E = E_{\text{пр}} \exp\left(\frac{i\omega}{C} \int \eta(z) dz\right) = E_{\text{пр}} \exp\left(-\frac{i\omega}{C} \int \eta(\sigma) d\sigma\right), \quad (6)$$

$\sigma = -z + \text{const}$ . Тогда (4) преобразуется в уравнение Риккати

$$\frac{d}{d\sigma} \eta = \frac{i\omega}{C} (\eta^2 - n^2), \quad (7)$$

а область решения будет разделена значениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  параметра  $\sigma$ , причем  $\sigma_1$  соответствует точке  $z_2$ , а  $\sigma_2$  — точке  $z_1$ . Решая (7) со стороны меньших значений  $\sigma$ , мы таким образом решаем физическую задачу «в обратном направлении» относительно распространения прошедшей слой волны с амплитудой  $E_{\text{пр}}$ .

Рассмотрим теперь функцию  $\eta(\sigma)$ , определяемую уравнением (7), по отдельности во введенных нами трех областях изменения аргумента  $\sigma$ . Для  $\sigma < \sigma_1$  (область проходящей волны)  $\eta$  совпадает с  $n_2$ , что видно из сопоставления (6) с известным здесь решением (5). В интервале  $[\sigma_1, \sigma_2]$  значений  $\sigma$  функция  $\eta(\sigma)$  должна рассчитываться в процессе численного или аналитического решения уравнения (7), что приведет к определению параметра  $\eta_0 = \eta(\sigma_2)$ . В свою очередь, последний явится граничным условием для вывода решения  $\eta(\sigma)$  в области  $\sigma > \sigma_2$ . Его можно получить переходя временно от  $\eta(\sigma)$  к функции  $1/(\eta(\sigma) - n)$ . Это приводит к решаемому линейному уравнению и в итоге дает результат

$$\eta(\sigma) = n - 2n \left[ \frac{n + \eta_0}{n - \eta_0} \exp\left(-2i \frac{\omega}{C} \int_{\sigma_2}^{\sigma} n d\sigma\right) + 1 \right]^{-1}, \quad (8)$$

где, вообще говоря,  $\eta_0$  и  $\eta(\sigma)$  — величины комплексные,  $\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} n d\sigma = n(\sigma - \sigma_2)$ .

Поле в области до слоя может быть представлено через  $\eta$  как

$$E(\sigma) = E_{\text{пр}} \exp\left(-\frac{i\omega}{C} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \eta d\sigma\right) = E_{\text{пр}} \exp\left(-\frac{i\omega}{C} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \eta d\sigma\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{i\omega}{C} \int_{\sigma_2}^{\sigma} \eta d\sigma\right).$$

В последнем сомножителе  $\eta$  меняется по закону (8), что позволяет вычислить входящий туда интеграл [6] и соответственно преобразовать данное выражение для  $E(\sigma)$  к виду

$$E(z) = K \frac{n_1 + \eta_0}{2n_1} \exp\left(\frac{i\omega n_1}{C} z\right) + K \frac{n_1 - \eta_0}{2n_1} \exp\left(-\frac{i\omega n_1}{C} z\right), \quad (9)$$

где

$$K = E_{\text{пр}} \exp\left(-\frac{i\omega}{C} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \eta d\sigma\right).$$

В качестве одного из граничных условий задачи в (9) вошла комплексная амплитуда проходящей за слоем волны  $E_{\text{пр}}$ . Ее значение мы до сих пор не конкретизировали, и сейчас имеем право выбрать его по нашему усмотрению. Подчиним данный выбор условию, чтобы амплитуда падающей волны обращалась в единицу. Тогда получим

$$K = \frac{2n_1}{n_1 + \eta_0}, \quad E(z) = \exp\left(\frac{i\omega n_1}{C} z\right) + \frac{n_1 - \eta_0}{n_1 + \eta_0} \exp\left(-\frac{i\omega n_1}{C} z\right), \quad (10)$$

что определяет коэффициенты отражения и пропускания (по полю) как

$$R = \frac{n_1 - \eta_0}{n_1 + \eta_0}, \quad D = \frac{2n_1}{n_1 + \eta_0} \exp\left(\frac{i\omega}{C} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \eta d\sigma\right). \quad (11)$$

Сочетание полученных выражений для  $R$  и  $D$  дает возможность рассчитывать удельную (на единицу площади слоя) мощность поглощаемой энергии

$$\mathcal{E} = (1 - |R|^2) \text{Re } n_1 - |D|^2 \text{Re } n_1. \quad (12)$$

Алгоритм численного расчета  $R$ ,  $D$  и  $\mathcal{E}$  довольно прост и сводится к численному решению (7) с параллельным вычислением интеграла  $\int \eta d\sigma$ , а после — к применению формул (11) и (12). Соответственно организованная ЭВМ-программа позволяет при минимальных ее изменениях рассчитывать указанные величины практически для любых форм слоев с любыми зависимостями  $\varepsilon(z)$ .

Строгие аналитические решения для  $R$  и  $D$  могут быть получены лишь в отдельных частных случаях профилей отражающего слоя, поскольку, как известно, решений общего вида у уравнений (4) и (7) не имеется. Наиболее простым из случаев такого рода является вырождение слоя в излом зависимости  $n(z)$  типа  $n = n_1$  для  $z < z'$ ,  $n = n_2$  для  $z > z'$  (в границу между двумя средами). При этом  $\eta_0 = n_2$ , совпадая с начальным значением  $\eta$ , интеграл в выражении для  $D$  обращается в нуль, а (11) превращается в частный случай формул Френеля при нормальном падении волн на слой.

Если для какого-либо конкретного профиля слоя известно аналитическое решение уравнений (4) или (6), обеспечивающее получение  $\eta(\sigma)$  и  $\eta_0$  (а данному условию удовлетворяют практически все слои, для которых имеются решения <sup>[4,5]</sup> вида  $E(z)$ ), то возможно получение и аналитических решений для бесконечного множества слоев, профили которых близки к первичному. Действительно, подставим в (7)  $\eta_1(\sigma) = \eta(\sigma) + \Phi(\sigma)$  и, считая  $\Phi$  малой величиной (что и является условием «близости» рассматриваемого слоя к первичному), отбросим слагаемые, пропорциональные  $\Phi^2$ . Тогда для  $\Phi$  получим решаемое линейное уравнение, из которого в квадратурах находим новые варианты выражений для  $\eta_0$  и  $\int \eta d\sigma$ . Их подстановка в (11), (12) определяет  $R$ ,  $D$  и  $\mathcal{E}$ . При этом очевидную математическую формализацию получает и само понятие близости слоев. Так, для любого из слоев, используемых обычно при интерпретации экспериментальных данных, можно получить пределы ошибок в описаниях профиля слоя, за которыми подобная интерпретация теряет смысл.

Может оказаться и так, что области близких решений у двух разных профилей перекрывают друг друга, и тогда находится более общее аналитическое решение, включающее в себя прежние как некоторые предельные случаи. Примером такого рода может служить слой из слабых флуктуаций диэлектрической проницаемости, возникающих на фоне резкого изменения среднего значения  $n$ . Соответствующее решение для  $\Phi(z_1)$  с точностью до постоянного множителя оказывается фурье-трансформантой флуктуаций  $\delta n$ , а формулы (11), приводящиеся к виду

$$R = \frac{n_1 - n_2 - \Phi(z_1)}{n_1 + n_2 + \Phi(z_1)}, \quad D = \frac{2n_1}{n_1 + n_2 + \Phi(z_1)} \exp\left(-\frac{i\omega}{C} \int_{z_1}^{z_2} \Phi(z) dz\right)$$

в случае  $n_1 = n_2$ ,  $\Phi(z_1) \ll 2n_1$ , дают решение задачи в борновском приближении однократного рассеяния, а при  $\Phi(z_1) = 0$  реализуется уже упоминавшийся выше случай отражения волн на границе двух сред.

Использование (11), (12) для вывода приближенных аналитических выражений для  $R$ ,  $D$  и  $\mathcal{E}$  в квадратурах приводит к множеству их вариантов, порождаемых различными возможными аппроксимациями решения уравнения Риккати (например известные формулы Лиувилля, Рэля, Джеффри и др. [8]). Одной из аппроксимаций, удобных при плавных изменениях  $n(z)$  в слое, является (8) для  $n \neq \text{const}$ ). Соответствующие модификации формул (11) и (12) получаются легко, и мы их здесь выписывать не будем. Точность каждого приближения всегда можно проверить путем подстановки используемого выражения для  $\eta$  в интегральный аналог уравнения (7):

$$\eta^2(\sigma) = \exp\left(2\frac{i\omega}{C} \int_0^\sigma \eta d\sigma\right) \left[ \eta^2(0) - 2\frac{i\omega}{C} \int_0^\sigma n^2(\sigma) \eta(\sigma) \exp\left(-2\frac{i\omega}{C} \int_0^\sigma \eta(x) dx\right) d\sigma \right].$$

Однако целесообразность применения таких приближенных аналитических решений для численных расчетов снижается тем, что искомые результаты находятся проще с помощью точных вычислений на основе (7) и (11).

Коснемся возможности некоторых обобщений формул (11). Если волна, подчиняющаяся уравнению

$$\Delta E + \frac{\omega^2 n^2}{C^2} E = 0, \quad (13)$$

падает на слой под углом  $\varphi(0)$  в плоскости  $(x, z)$ , то фурье-преобразование (13) по  $x$  сводит задачу к уже рассмотренному случаю, но с заменой реальной зависимости  $n(z)$  на  $n(z) \cos \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  опреде-

лается требованием  $\operatorname{Re} n(z) \sin \varphi(z) = \operatorname{Re} n(0) \sin \varphi(0)$ . Соответственно изменяются и формулы (11).

Допустим теперь, что первичное излучение имеет импульсный характер. Тогда амплитуда принятого сигнала как функция времени получается путем разложения падающего поля в спектр, расчета с помощью (11) амплитуд спектральных компонент сигнала и свертывания этих компонент. Но при понятных нежестких ограничениях относительно пространственного расположения источника и приемника излучения этот метод допускает упрощение. Формулы (11) могут применяться только для несущей частоты излучения с учетом того, что сигнал формируется не слоем в целом, а лишь его срезом толщиной в  $C\tau/2$ , где  $\tau$  — длительность импульса. Входящий в выражение для  $D$  интеграл  $\int \eta d\sigma$  (по ширине этого среза) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ . Такой подход возможен, например, при исследованиях частичных отражений от ионосферных неоднородностей.

Сопоставляя предлагаемый здесь метод расчета  $R$ ,  $D$  и  $\mathcal{E}$  с результатами других работ аналогичного характера, заметим следующее. Если исключить известные строгие решения задачи отражения волн от слоев нескольких определенных видов, то остальные работы можно достаточно четко разделить на две группы. К первой из них относятся разработки различных независимых методик расчета  $R$  (расчет  $D$ , определяющий энергетику проходящего сквозь слой сигнала, в этом плане представляется, по-видимому, гораздо более трудной проблемой). В качестве примеров такого рода, характеризующихся различными подходами и применимых в различных условиях, назовем [4, 5, 7, 8]. Последняя из этих работ содержит вывод совпадающего с (11) выражения для  $R$ , полученного другим путем и с более узкой областью применения.

Вторая группа работ, использующих метод инвариантного погружения, тесно связана между собою единым подходом, изложенным, например, в [9]. Область его применения шире, чем у предлагаемого здесь метода (главным образом, в смысле расчета статистических характеристик волны), но вводятся и дополнительные допущения. Численная реализация метода инвариантного погружения для конкретных задач довольно сложна, о чем свидетельствует само наличие упоминаемых в [9] отдельных работ, посвященных ее осуществлению. Настоящий же метод удобен для быстрых и в достаточной мере универсальных численных расчетов  $R$ ,  $D$  и  $\mathcal{E}$ , не затрагивающих структуры поля в слое и даже (при наличии флуктуаций) вблизи него. Это делает целесообразным разграничение областей практического применения обоих сопоставляемых методов.

**4. Некоторые результаты расчетов  $|R|$  и  $|D|$ .** В соответствии с изложенным была создана ЭВМ-программа расчета  $|R|$  и  $|D|$  для слоев с профилями произвольной формы. Ее проверка осуществлялась применительно к параболическому слою без поглощения, для которого зависимость  $n(z)$  при  $|z| \leq z_m$  дается как  $n^2 = 1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \left(1 - \frac{z^2}{z_m^2}\right)$  (здесь  $f_c$  — критическая частота слоя,  $f$  — частота падающей волны,  $z_m$  — полутолщина слоя). Как известно [5], в этом случае и при условии  $(z_m f_c / C) \gg 1$  величина  $|R|$  подчиняется уравнению

$$\frac{|R|^2}{1 - |R|^2} = \exp \left[ 2\pi^2 \frac{z_m^2 (f_c^2 - f^2)}{C f_c} \right]. \quad (14)$$

Сопоставления результатов численных расчетов  $|R|$  с (14) дали расхождение порядка единиц процентов. Другим методом контроля точности расчетов для слоя любого типа является проверка условия выполнения баланса энергии волн на входе и выходе слоя. Она тоже подтверждает указанный порядок точности расчетов, определяемый степенью совершенства программы.

Созданная программа применялась для определения  $|R|$  и  $|D|$  при слоях различного типа. На рис. 1—5 приводятся некоторые из полученных результатов, выбранных в соответствии с двумя критериями: чтобы форма слоя была близка к физически реализуемой в условиях ионосферы и чтобы результаты вычислений  $|R|$  и  $|D|$  представляли интерес из-за трудностей их расчета другими методами. Частота  $f$  выражена в мегагерцах, расстояние — в километрах, параметр  $f_c$  везде взят равным 3 МГц.

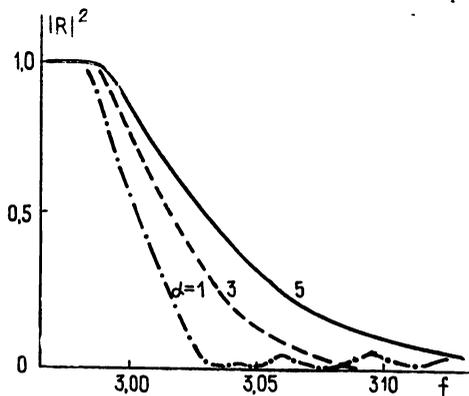


Рис. 1.

На рис. 1 представлено семейство зависимостей  $|R(f, \alpha)|^2$  при  $\alpha=1, 3, 5$  для слоя с изменением  $\varepsilon(z)$  по нормальному закону

$$\varepsilon(z) = 1 - (f_c/f)^2 \exp(-\alpha^2 z^2) W, \quad (15)$$

$\varepsilon(z) = 1$  при  $z > 1$  и  $z < -1$ ;  $W = 1$ .

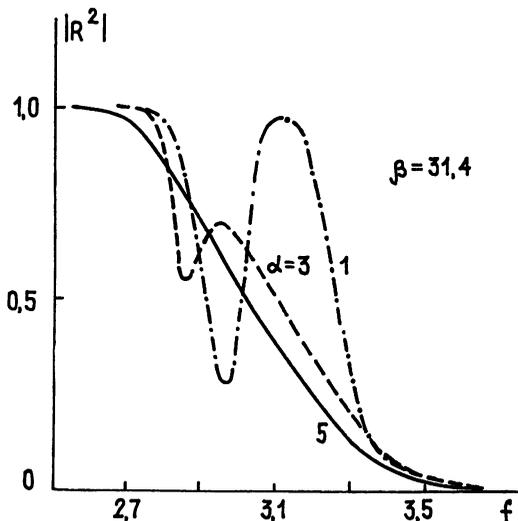


Рис. 2.

На рис. 2 изображено семейство  $|R(f, \alpha, \beta)|^2$  для слоя, представляющего из себя дуг плазменной волны с

$$\varepsilon(z) = 1 - (f_c/f)^2 \sin(\beta z) \exp(-\alpha^2 z^2) W, \quad (16)$$

затухающий в направлении увеличения  $z$  и занимающий интервал расстояний от  $z=0$  до  $z=1$ . Параметр  $\beta$  для рис. 2 взят равным 31,4 (5 волн в дуге),  $W=1$ . Здесь  $f_c$  не является критической частотой, играя просто роль параметра в зависимости  $\varepsilon(z)$ . В случаях, рассмотренных выше, коэффициент пропускания  $|D|$  определяется согласно формуле  $|D|^2 = 1 - |R|^2$ , вытекающей из требования выполнения энергетического баланса (поглощение энергии отсутствует).

На рис. 3 представлены семейства кривых  $|R(f)|^2$  и  $|D(f)|^2$  при изменении  $\varepsilon(z)$  по закону (15) с  $\alpha=3$ ;  $\text{Re } W=1$ ;  $-\text{Im } W$  составляет 0,1, 2% от  $\text{Re } W$ , характеризую интенсивность поглощения волн средой.

Рис. 4 и 5 дают семейства  $|R(f)|^2$  и  $|D(f)|^2$  для слоя с  $\varepsilon(z)$  вида (16) при  $\beta=31,4$  и  $\beta=62,8$  (соответственно 5 и 10 волн в дуге),  $\alpha=3$ ,  $\text{Re } W=1$ . Величины  $-\text{Im } W$  выбирались равными 0, 5 и 10% от  $\text{Re } W$ .

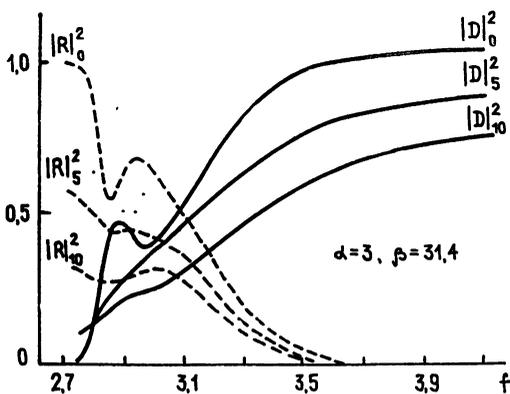


Рис. 3.

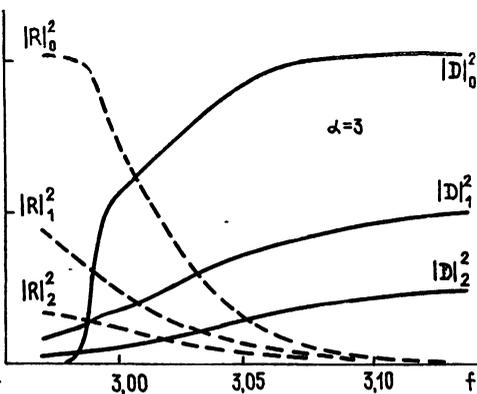


Рис. 4.

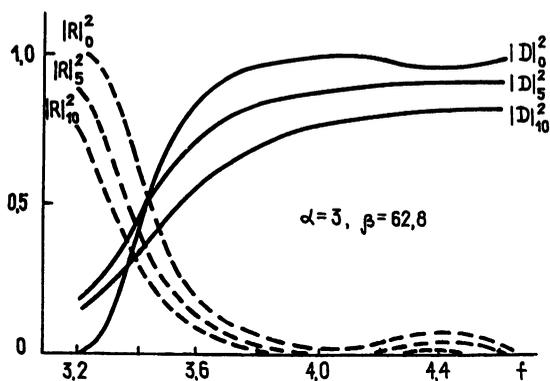


Рис. 5.

Описанный выше метод позволяет определять подробный частотный ход коэффициентов отражения и пропускания волн практически от любого слоя за время порядка нескольких минут.

Автор выражает благодарность [Н. Г. Денисову] и Ю. А. Кравцову за ряд ценных замечаний, а также В. В. Беликовичу за обсуждение работы применительно к экспериментам по частич-

ным отражениям от ионосферных неоднородностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Мареев Е. А., Терина Г. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 5. С. 625.
2. Ерухимов Л. М., Иванов В. А., Митяков Н. А., Урядов В. П., Фролов В. А., Шумаев В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С. 1055.
3. Данилкин Н. П. // Сб.: Ионосферно-магнитная служба. — Л.: Гидрометеоздат, 1987. С. 79.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука. 1973. С. 129, 143.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. С. 30, 392.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. С. 106.
7. Fejer J. A., Vice R. W. // J. Atm. Terr. Phys. 1959. V. 16. № 3/4. P. 307
8. Vaily V. A. // Phys. Rev. 1954. V. 96. № 4. P. 865.
9. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука. 1986. С. 12.

Институт прикладной геофизики

Поступила в редакцию  
31 августа 1988 г.

#### THE REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM AND BY A LAYER WITH THE ARBITRARY DIELECTRIC MEDIUM PENETRABILITY

V. I. Pogorelov

The generalized expressions are obtained for the reflection and transmission coefficients of the electromagnetic waves from any layer with an arbitrary profile. The dielectric medium penetrability in the layer may have the regular and oscillation components. The results of numerical illustrative computations are presented.

УДК 523.164.4

## ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРЦАНИЙ

В. И. Шишов

Проведено аналитическое исследование решения уравнения для четвертого момента поля волны в случайно-неоднородной среде для протяженного некогерентного источника. Получены выражения, определяющие пространственную и временную корреляционные функции флуктуаций интенсивности протяженного источника при произвольном распределении случайно-преломляющей среды между источником и наблюдателем.

**1. Постановка задачи.** Проблема мерцаний источника с конечными размерами неоднократно обсуждалась в литературе. Наиболее полно решена задача влияния размера источника на пространственно-временные корреляционные функции флуктуаций интенсивности применительно к модели фазового экрана [1-3]. Мерцания протяженного источника на неоднородностях протяженной среды изучались, в основном, для случая бесконечно удаленного источника малых угловых размеров, когда слой среды примыкает к наблюдателю [4-6]. Влияние линейных размеров источника, находящегося на конечном расстоянии от наблюдателя, когда среда заполняет все пространство между наблюдателем и источником, рассматривалось в работе [7] на основе приближенного вычисления интегралов по траекториям. В данной работе мы эту же задачу рассмотрим на основе метода моментов.

Итак, пусть исходная апертура источника является плоской и исходная функция когерентности поля может быть представлена в виде

$$\overline{u_0(\rho_0) u_0^*(\rho_0 + \rho)} = I_0(\rho_0) \delta(\rho). \quad (1)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по статистике источника. В конкретных расчетах мы будем использовать представление  $I_0$  в виде

$$I_0(\rho_0) = H_0 \exp[-(\rho_0/a)^2], \quad (2)$$

где  $a$  — характерный размер апертуры.

Ставится задача вычисления первого и второго моментов интенсивности  $I$  на некотором расстоянии  $z$  от источника после прохождения излучения турбулентной случайно-преломляющей среды. Среду мы будем характеризовать трехмерным пространственным спектром флуктуаций показателя преломления  $\mu$ :

$$\Phi_\mu(q) = \langle |(1/2\pi)^3 \int d^3 r \exp[-i(qr)] \mu(r)|^2 \rangle, \quad (3)$$

угловые скобки означают усреднение по статистике среды. В конкретных расчетах мы будем использовать представление в виде

$$\Phi_\mu(q) = C_\mu |q|^{-n}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что рассеяние в среде происходит на малые углы.

**2. Выражение моментов интенсивности через моменты функций Грина.** Представим поле волны на некотором расстоянии от источника в виде суперпозиции полей точечных источников:

$$u(r) = \int d^3 \rho_0 u_0(\rho_0) G(r, r_0), \quad (5)$$

где трехмерный вектор  $\mathbf{r}_0$  пробегает по апертуре источника, трехмерный вектор  $\mathbf{r}$  отмечает положение точки наблюдения. Функция Грина  $G$  соответствует полю точечного источника единичной мощности.

Умножая (5) на комплексно-сопряженное выражение и усредняя по статистике источника, получаем выражение для потока  $I$ :

$$I(\mathbf{r}) = \int d^2 \rho_0 I_0(\rho_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (6)$$

где  $I_0$  определяется соотношением (1). Усредняя (6) по статистике среды и учитывая, что средний поток сферической волны не возмущается турбулентной средой, получаем

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \int d^2 \rho_0 I_0(\rho_0) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}. \quad (7)$$

Используя для  $I_0$  представление (2), получаем при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \gg a$

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \pi H_0 \frac{a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}. \quad (8)$$

Умножая (6) на аналогичное соотношение со смещенной координатой и усредняя по статистике среды, получаем соотношение для второго момента интенсивности:

$$B_I = \langle I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2) \rangle = \int d^2 \rho_{0,1} d^2 \rho_{0,2} I_0(\rho_{0,1}) I_0(\rho_{0,2}) \times \\ \times \langle G(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_{0,1}) G^*(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_{0,1}) G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_{0,2}) G^*(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_{0,2}) \rangle. \quad (9)$$

Введем комплексную амплитуду поля сферической волны соотношением

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = E_{\text{сф}}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0), \quad (10)$$

где  $G_0$  — поле сферической волны при отсутствии случайно-неоднородной среды

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)^{-1} \exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (11)$$

Функция  $B_I$  определяется через четвертый момент функции

$$M_{2,2}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_{0,1}; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_{0,2}; \mathbf{r}'_1; \mathbf{r}'_{0,1}; \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}'_{0,2}) = \langle E_{\text{сф}}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_{0,1}) \times \\ \times E_{\text{сф}}^*(\mathbf{r}'_1; \mathbf{r}'_{0,1}) E_{\text{сф}}(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_{0,2}) E_{\text{сф}}^*(\mathbf{r}'_2; \mathbf{r}'_{0,2}) \rangle \quad (12)$$

интегральным соотношением

$$B_I(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = \int d^2 \rho_{0,1} d^2 \rho_{0,2} I_0(\rho_{0,1}) I_0(\rho_{0,2}) (|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{0,1}|^2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{0,2}|^2)^{-1} \times \\ \times M_{2,2}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_{0,1}; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_{0,2}; \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1; \mathbf{r}'_{0,1} = \mathbf{r}_{0,1}; \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_{0,2} = \mathbf{r}_{0,2}). \quad (13)$$

**3. Вычисление момента  $M_{2,2}$ .** Уравнение для моментов комплексных амплитуд сферических волн с разнесенными центрами получено в работе [8]. Это уравнение удобно записать в декартовой системе координат с осью  $z$ , ориентированной вдоль среднего направления распространения излучения (линии источник — наблюдатель). Пусть источники расположены в плоскости  $z=0$  и их координаты определяются двумерными векторами  $\rho_{0,i} = (x_{0,i}; y_{0,i})$ ,  $\rho'_{0,i} = (x'_{0,i}; y'_{0,i})$ . Точки наблюдения расположены в плоскости  $z=\text{const}$ , и их координаты определяются двумерными векторами  $\rho_i$ ,  $\rho'_i$ . Повторяя процедуры работы [8], мы можем получить следующие уравнения для момента  $M_{2,2}$ :

$$\frac{\partial M_{2,2}}{\partial z} - \frac{1}{z} [(\rho_1 - \rho_{0,1}) \nabla_{\rho_1} + (\rho_2 - \rho_{0,2}) \nabla_{\rho_2} + (\rho'_1 - \rho'_{0,1}) \nabla_{\rho'_1} +$$

$$+(\rho'_2 - \rho_{0,2}) \nabla_{\rho'_2} M_{2,2} - \frac{i}{2k} (\Delta \rho_1 + \Delta \rho_2 - \Delta \rho'_1 - \Delta \rho'_2) M_{2,2} + f M_{2,2} = 0;$$

$$f = (1/2) [D(\rho_1 - \rho'_1) + D(\rho_1 - \rho'_2) + D(\rho_2 - \rho'_2) + D(\rho_2 - \rho'_1) - D(\rho_1 - \rho_2) - D(\rho'_1 - \rho'_2)]; \quad (15)$$

$$D(\rho) = 4\pi k^2 \int d^2 q [1 - \cos(q\rho)] \Phi_\mu(q, q_z = 0), \quad (16)$$

где  $\Phi_\mu$  — трехмерный пространственный спектр флуктуаций показателя преломления, определенный соотношением (3),  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Уравнение (14) можно значительно упростить. Для этого введем новые переменные

$$\rho_+ = (1/4)(\rho_1 + \rho'_1 + \rho_2 + \rho'_2), \quad u = (1/2)(\rho_1 + \rho'_1 - \rho_2 - \rho'_2), \quad (17)$$

$$v = (1/2)(\rho_1 - \rho'_1 - \rho_2 + \rho'_2), \quad \rho_- = (\rho_1 - \rho'_1 + \rho_2 - \rho'_2).$$

Аналогичные преобразования вводятся и для переменных  $\rho_{0,i}$ ,  $\rho'_{0,i}$ . В случае статистически однородной среды функция  $M_{2,2}$  не зависит от переменных  $\rho_+$ ,  $\rho_{0,+}$ , поэтому в уравнении для  $M_{2,2}$  можно положить равными нулю все члены, содержащие производные по  $\rho_+$ . В результате получаем

$$\frac{\partial M_{2,2}}{\partial z} - \frac{2}{z} [(u - u_0) \nabla_u + (v - v_0) \nabla_v + 2(\rho_- - \rho_{0,-}) \nabla_{\rho_-}] M_{2,2} - \quad (18)$$

$$- \frac{i}{k} \nabla_u \nabla_v M_{2,2} + f M_{2,2} = 0,$$

$$f = \frac{1}{2} \left[ D\left(u + \frac{1}{2} \rho_-\right) + D\left(v + \frac{1}{2} \rho_-\right) + D\left(u - \frac{1}{2} \rho_-\right) + D\left(v - \frac{1}{2} \rho_-\right) - D(u + v) - D(u - v) \right].$$

При  $\rho_- = \rho_{0,-}$  член с производной по  $\rho_-$  выпадает и остается только параметрическая зависимость от  $\rho_{0,-}$ . Мы можем положить

$$\rho_- = \rho_{0,-} = 0, \quad v_0 = 0. \quad (19)$$

Дальнейшие упрощения можно получить после введения новых переменных

$$\theta = (u - u_0)/z, \quad \varphi = v/z. \quad (20)$$

В результате получаем

$$\frac{\partial M_{2,2}}{\partial z} - \frac{i}{kz^2} \nabla_\theta \nabla_\varphi M_{2,2} + f M_{2,2} = 0, \quad (21)$$

$$f = D(u_0 + z\theta) + D(z\varphi) - (1/2)D[u_0 + z(\theta + \varphi)] - (1/2)D[u_0 + z(\theta - \varphi)].$$

Уравнение (21) должно быть дополнено граничным условием

$$M_{2,2}|_{z=0} = 1. \quad (22)$$

Решать задачу (21), (22) будем методом, предложенным в [9]. Для этого преобразуем  $M_{2,2}$  по Фурье по  $\theta$ :

$$\tilde{M}_{2,2}(\omega; \varphi; z) = (1/2\pi)^2 \int d^2\theta \exp(-i\omega\theta) M_{2,2}(\theta; \varphi; z). \quad (23)$$

Для  $\tilde{M}_{2,2}$  получаем следующую систему:

$$\frac{\partial \tilde{M}_{2,2}}{\partial z} + \frac{1}{kz^3} (\omega \nabla_{\varphi}) \tilde{M}_{2,2} - D(z\varphi) \tilde{M}_{2,2} = \int d^2 \omega_1 F(\omega - \omega_1) \tilde{M}_{2,2}(\omega_1), \quad (24)$$

$$F(\omega - \omega_1) = (8\pi k^3 / z^2) \exp[i(\omega - \omega_1) u_0 / z] \sin^2[\varphi(\omega - \omega_1) / 2] \Phi_{\mu}[(\omega - \omega_1) / z];$$

$$\tilde{M}_{2,2}|_{z=0} = \delta(\omega). \quad (25)$$

Будем искать решение в виде итерационного ряда по кратности рассеяния:

$$\tilde{M}_{2,2} = \tilde{M}_{2,2}^{(0)} + \tilde{M}_{2,2}^{(1)} + \tilde{M}_{2,2}^{(2)} + \dots \quad (26)$$

Нулевой и первый члены этого ряда имеют вид

$$\tilde{M}_{2,2}^{(0)} = \exp\left[-\int_0^z dz' D(z'\varphi)\right] \delta(\omega); \quad (27)$$

$$\tilde{M}_{2,2}^{(1)} = 8\pi k^3 \int_0^z \frac{dz'}{(z')^3} \exp[i(\omega u_0) / z'] \sin^2\left[\frac{\omega}{2} \left(\varphi - \frac{\omega}{k} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z}\right)\right)\right] \Phi_{\mu}(\omega / z') \times \quad (28)$$

$$\times \exp\left[-\int_0^{z'} dz'' D\left(z''\varphi - \frac{\omega}{k} z'' \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z}\right)\right) - \int_{z'}^z dz'' D\left(z''\varphi - \frac{\omega}{k} z'' \left(\frac{1}{z''} - \frac{1}{z}\right)\right)\right],$$

Член ряда (26)  $n$ -го порядка имеет вид

$$\tilde{M}_{2,2}^{(n)} = \int_0^z dz_1 \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \int d^2 \omega_1 \dots \int d^2 \omega_{n-1} \exp(-L_n) \times \quad (29)$$

$$\times \prod_{l=1}^n F(\omega_l - \omega_{l-1}; \varphi_l; z_l),$$

$$\varphi_l = \varphi - \sum_{m=1}^{l-1} \frac{\omega_m}{k} \left(\frac{1}{z_{m-1}} - \frac{1}{z_m}\right),$$

$$F(\omega_l - \omega_{l-1}; \varphi_l; z_l) = (1/z_l^2) 8\pi k^2 \exp[i(\omega_l - \omega_{l-1}) u_0 / z_l] \times \\ \times \sin^2[\varphi_l(\omega_l - \omega_{l-1}) / 2] \Phi_{\mu}[(\omega_l - \omega_{l-1}) / z_l],$$

$$L_n = \sum_{l=0}^n \int_{z_{l+1}}^{z_l} dz' D\left[z' \varphi_l - \frac{1}{k} \omega_l z' \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z_l}\right)\right],$$

$$\omega_0 = \omega, \quad \omega_n = 0, \quad z_0 = z, \quad z_{n+1} = 0.$$

Члены  $\tilde{M}_{2,2}^{(0)}$  и  $\tilde{M}_{2,2}^{(1)}$  правильно описывают спектры мерцаний в области низких пространственных частот при малых значениях  $\omega$  и  $\varphi$ :

$$|\omega| < \omega^*, \quad \int_0^z dz' D(z' \omega^* / k) = 1,$$

$$|\varphi| < \varphi^*, \quad \int_0^z dz' D(z' \varphi^*) = 1.$$

В области высоких пространственных частот,  $|\omega| \gg \omega^*$ , необходимо учитывать члены ряда (26) более высоких порядков. Однако более эффективным методом вычисления спектра в области больших частот является переход от функции  $\tilde{M}_{2,2}$  к функции

$$\tilde{M}_{2,2}(\theta; \nu; z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d^2 \varphi \exp(-i\nu\varphi) M_{2,2}(\theta; \varphi; z). \quad (31)$$

Уравнение для  $\tilde{M}_{2,2}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}_{2,2}}{\partial z} + \frac{1}{kz^2} (\nu \nabla_{\theta}) \tilde{M}_{2,2} + D(u_0 - z\theta) \tilde{M}_{2,2} &= \int d\nu_1 F_1(\nu - \nu_1) \tilde{M}_{2,2}(\nu_1), \\ F_1(\nu - \nu_1) &= \frac{1}{z^2} 8\pi k^2 \sin^2 \left[ \left( \frac{u_0}{z} + \theta \right) (\nu - \nu_1) / 2 \right] \Phi_{\mu} \left( \frac{\nu - \nu_1}{z} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\tilde{M}_{2,2}|_{z=0} = \delta(\nu).$$

Будем искать решение также в виде итерационного ряда:

$$\tilde{M}_{2,2} = \tilde{M}_{2,2}^{(0)} + \tilde{M}_{2,2}^{(1)} + \tilde{M}_{2,2}^{(2)} + \dots \quad (33)$$

Первые два члена этого ряда имеют вид

$$\tilde{M}_{2,2}^{(0)} = \exp\left[-\int_0^z dz' D(u_0 + z'\theta)\right] \delta(\nu); \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{2,2}^{(1)} &= 8\pi k^2 \int_0^z \frac{dz'}{(z')^2} \Phi_{\mu} \left( \frac{\nu}{z'} \right) \sin^2 \left\{ \left[ \frac{u_0}{z} + \theta - \frac{\nu}{k} \left( \frac{1}{z'} - \frac{1}{z} \right) \right] \nu / 2 \right\} \times \\ &\times \exp\left\{ -\int_0^{z'} dz'' D \left[ u_0 + z''\theta - \frac{\nu}{k} z'' \left( \frac{1}{z'} - \frac{1}{z} \right) \right] - \right. \\ &\left. - \int_{z'}^z dz'' D \left[ u_0 + z''\theta - \frac{\nu}{k} z'' \left( \frac{1}{z''} - \frac{1}{z} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

В зависимости от  $\theta$   $\tilde{M}_{2,2}^{(0)}$  имеет масштаб порядка  $\varphi^*$ .  $\tilde{M}_{2,2}^{(1)}$  также имеет масштаб порядка  $\varphi^*$ . Следующие члены ряда (33) становятся все более гладкими функциями  $\theta$  с ростом индекса  $n$ . Изменения  $\tilde{M}_{2,2}$  в зависимости от изменения  $\theta$  при  $|\theta| < \varphi^*$ , в основном, определяются нулевым и первым членами ряда (33). Поэтому при вычислении функции  $\tilde{M}_{2,2}$  по функции  $\tilde{M}_{2,2}$  при больших значениях  $\omega$  мы можем ограничиться только нулевым и первым членами ряда (33). Итак, преобразуя ряд (33) дважды по Фурье по  $\nu$  и  $\theta$ , получаем разложение  $\tilde{M}_{2,2}$  в ряд области высоких частот:

$$\tilde{M}_{2,2}(\omega; \varphi; z) = \tilde{M}_{2,2}^{(0)\text{вч}} + \tilde{M}_{2,2}^{(1)\text{вч}} + \tilde{M}_{2,2}^{(2)\text{вч}} + \dots \quad (36)$$

Нулевой и первый члены этого ряда имеют вид

$$\tilde{M}_{2,2}^{(0)вч} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d^3\theta \exp\left[-i\omega\theta - \int_0^z dz' D(u_0 + z'\theta)\right]; \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{2,2}^{(1)вч} = & \frac{2k^2}{\pi} \int_0^z \frac{dz'}{(z')^2} \int d^2\nu \int d^2\theta \sin^2\left\{\left[\frac{u_0}{z} + \theta - \frac{\nu}{k}\left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z}\right)\right] \frac{\nu}{2}\right\} \times \\ & \times \exp\left[-i\omega\theta - \int_0^{z'} dz'' D\left[u_0 + z''\theta - \frac{\nu}{k} z''\left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z}\right)\right] - \right. \\ & \left. - \int_{z'}^z dz'' D\left[u_0 + z''\theta - \frac{\nu}{k}\left(\frac{1}{z''} - \frac{1}{z}\right)\right]\right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Эти члены дают главный вклад в  $\tilde{M}_{2,2}$  при  $\omega > \omega^*$ . Следует отметить, что ряды (33) и (36) соответствуют аналогичным рядам, полученным в [7], хотя конкретные выражения для членов рядов в работе [7] и в данной работе отличаются, но они могут быть сведены друг к другу.

**4. Пространственная корреляция мерцаний.** В переменных  $u, \nu, \rho_-$  мы можем переписать соотношение (13) в виде

$$B_I(u) = (1/z^4) \int d^2 u_0 J_0(u_0) M_{2,2}(u; u_0; \nu = \nu_0 = 0; \rho_- = \rho_{0,-} = 0), \quad (39)$$

$$J_0(u_0) = \int d^2 \rho_{0,+} I_0\left(\rho_{0,+} + \frac{1}{2} u_0\right) I_0\left(\rho_{0,+} - \frac{1}{2} u_0\right).$$

Для спектра мерцаний

$$M_I(q) = (1/2\pi)^2 \int d^2 q B_I(u) \exp(-iqu), \quad (40)$$

где  $q$  — пространственная частота, можно получить

$$M_I(q) = (1/z^2) \int d^2 u_0 J_0(u) \tilde{M}_{2,2}(\omega = qz; \nu = \nu_0 = 0; \rho_- = \rho_{0,-} = 0). \quad (41)$$

В режиме слабых мерцаний основная часть пространственного спектра описывается выражением (28). Используя (28) и (41), получаем

$$M_I(q) = \frac{8\pi k^2}{z^2} \int_0^z \frac{dz'}{(z')^2} \sin^2\left[q^2 z \left(\frac{z}{z'} - 1\right) / 2k\right] \Phi_\mu\left(q \frac{z}{z'}\right) \tilde{J}_0\left[q\left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right]; \quad (42)$$

$$\tilde{J}_0(q) = \int d^2 u_0 \exp(iqu_0) J_0(u_0). \quad (43)$$

Индекс мерцаний определяется соотношением

$$m^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = \frac{1}{\langle I \rangle^2} \int d^2 q M_I(q) - 1. \quad (44)$$

В режиме слабых мерцаний он равен

$$m^2 = \frac{8\pi k^2}{\tilde{J}_0(0)} \int_0^z dz' \left(\frac{z}{z'}\right)^2 \int d^2 q \tilde{J}_0\left(q\left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right) \sin^2\left[\frac{q^2 z}{2k}\left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right] \Phi_\mu\left(q \frac{z}{z'}\right). \quad (45)$$

Для случая, когда  $\Phi_\mu$  определяется соотношением (4), а  $I_0$  — соотношением (2), имеем

$$m^2 \simeq \frac{1}{n-2} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) k^2 \int dz' \left(\frac{z'}{z}\right)^{n-2} C_\mu(z') \left\{ \left[\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left[\frac{z}{k}\left(\frac{z}{z'}-1\right)\right]\right]^{(n-2)/4} \cos\left[\frac{n-2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2z}{ka^2}\left(\frac{z}{z'}-1\right)\right)\right] - \left(\frac{a^2}{2}\right)^{(n-2)/2} \right\}. \quad (46)$$

Для точечного источника ( $a=0$ )

$$m^2 \simeq m_0^2 = \frac{1}{n-2} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) \cos\left[\left(\frac{n-2}{4}\right)\pi\right] k^2 \int_0^z dz' \left[\frac{z'(z-z')}{2kz}\right]^{(n-2)/2} C_\mu(z'). \quad (47)$$

Для источника больших размеров ( $a \rightarrow \infty$ ) имеем

$$m_0^2 \simeq \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) \left(\frac{a^2}{2}\right)^{n-4} \int_0^z dz' \left(\frac{z'}{z}\right)^{n-4} (z-z')^2 C_\mu(z'). \quad (48)$$

Условием применимости приближения слабых мерцаний является неравенство

$$m_0^2 < 1. \quad (49)$$

Перейдем к анализу насыщенных мерцаний. В этом режиме спектр мерцаний разделяется на два участка. Низкочастотный участок определяется выражением, обобщающим (42):

$$M_I^{(нч)}(q) = \frac{8\pi k^2}{z^2} \int_0^z \frac{dz'}{(z')^2} \tilde{J}_0\left(q\left(\frac{z}{z'}-1\right)\right) \Phi_\mu\left(\frac{z}{z'} q\right) \operatorname{sn}^2\left[q^2 z \left(\frac{z}{z'}-1\right) / 2k\right] \times \\ \times \exp\left\{-\int_0^{z'} dz'' D\left[\frac{qz''}{k}\left(\frac{z}{z'}-1\right)\right] - \int_{z'}^z dz'' D[q(z-z'')/k]\right\}. \quad (50)$$

Высокочастотный участок в нулевом приближении определяется выражением

$$M_I^{(0)вч}(q) = (1/2\pi)^2 \int d^3 q \exp[-i(q\mathbf{u})] B_I^{(0)вч}(\mathbf{u}), \quad (51)$$

$$B_I^{(0)вч}(\mathbf{u}) = \frac{1}{z^4} \int d^3 u_0 J_0(u_0) \exp\left[-\int_0^z dz' D\left(u_0 \frac{z-z'}{z} + u \frac{z'}{z}\right)\right].$$

Квадрат индекса мерцаний можно представить в виде суммы трех компонент:

$$m^2 \simeq m_{0, вч}^2 + m_{1, вч}^2 + m_{1, нч}^2. \quad (52)$$

Компонента  $m_{0, вч}^2$  определяется компонентой  $M_I^{(0)вч}$  спектра мерцаний:

$$m_{0, вч}^2 = \frac{1}{J_0(0)} \int d^3 u_0 J_0(u_0) \exp\left[-\int_0^z dz' D\left(u_0 \frac{z-z'}{z}\right)\right]. \quad (53)$$

Компонента  $m_{1, \text{нч}}^2$  определяется низкочастотным участком спектра:

$$m_{1, \text{нч}}^2 = \frac{8\pi k^2}{J_0(0)} \int_0^z dz' \left(\frac{z}{z'}\right)^2 \int d^2 q J_0\left(q\left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right) \sin^2\left[q^2 z \left(\frac{z}{z'} - 1\right) / 2k\right] \times \quad (54)$$

$$\times \exp\left\{-\int_0^{z'} dz'' D\left[\frac{qz''}{k}\left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right] - \int_{z'}^z dz'' D[q(z - z'')/k]\right\}.$$

Компонента  $m_{1, \text{вч}}^2$  определяется первой поправкой к высокочастотному участку спектра мерцаний. Для точечного источника  $m_{1, \text{вч}}^2 = m_{1, \text{нч}}^2$  [9]. Для источника больших размеров  $m_{1, \text{вч}}^2 \ll m_{1, \text{нч}}^2$ . При любых размерах источника компонента  $m_{1, \text{вч}}^2 \ll m_{0, \text{вч}}^2$ , поэтому в нулевом приближении ее можно пренебречь.

Приведем некоторые выражения для индекса мерцаний для случая, когда спектр флуктуаций показателя преломления определяется соотношением (3). Для точечного источника  $m_{0, \text{вч}}^2 = 1$ , а

$$m_{1, \text{нч}}^2 = \frac{4\pi^2}{n-2} \Gamma\left(\frac{6-n}{n-2}\right) \int dz' \left(\frac{z}{z'}\right)^{2-n} \left(\frac{z}{z'} - 1\right)^2 C_\mu(z') [f(z, z')]^{-(6-n)/(n-2)}, \quad (55)$$

$$f(z, z') = Ak^{4-n} \left\{ \int_0^{z'} dz'' \left[z'' \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right]^{n-2} C_\mu(z'') + \int_{z'}^z dz'' (z - z'')^{n-2} C_\mu(z'') \right\},$$

$$A(n) = 2^{4-n} \pi \Gamma^2(n/2) \sin(n\pi/2).$$

Для источника больших размеров,

$$a \gg b, \quad \int_0^z dz' D[b(z - z')/z'] = 1, \quad (56)$$

имеем

$$m_{0, \text{вч}}^2 = \frac{J_0(u_0=0)}{\tilde{J}_0(q=0)} \int d^2 u_0 \exp\left\{-\int_0^z dz' D[u_0(z - z')/z']\right\}. \quad (57)$$

Компонента  $m_{1, \text{нч}}^2$  определяется соотношением (55). С увеличением размера источника компонента  $m_{1, \text{нч}}^2$  может превзойти  $m_{0, \text{вч}}^2$ . Для источника очень больших размеров

$$a > z_{\text{эфф}}/\omega^*, \quad (58)$$

где  $z_{\text{эфф}}$  — минимальное из расстояний от наблюдателя или источника до эффективного центра тяжести слоя среды,  $\omega^*$  определяется соотношением (30), компонента  $m_{1, \text{нч}}^2$  определяется соотношением (45), она полностью определяет индекс мерцаний.

Отметим, что индекс мерцаний протяженного источника может быть выражен через пространственную нормированную корреляционную функцию мерцаний точечного источника  $R_{I, \text{сф}}$ :

$$m^2 = (1/\tilde{J}_0(0)) \int d^2 u_0 J_0(u_0) R_{I, \text{сф}}(u_0). \quad (59)$$

Формула (59) основывается на принципе взаимности, она может быть получена также на основе анализа соотношений (25) — (29).

**5. Временная корреляция мерцаний.** Временные флуктуации могут быть вызваны тремя типами движений: наблюдателя, источника и среды. Движение наблюдателя со скоростью  $\mathbf{v}_n$  может быть учтено в выражениях пункта 4 заменой

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v}_n t, \quad (60)$$

где  $t = t_1 - t_2$  — разность времен наблюдений. Движение источника со скоростью  $\mathbf{v}_n$  может быть учтено заменой

$$\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_n t. \quad (61)$$

Движение среды со скоростью  $\mathbf{v}_c$  можно учесть заменой в уравнении (20)  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v}_c t$  или в уравнении (24) заменой

$$F(\omega - \omega_1) \rightarrow F(\omega - \omega_1) \exp[-i(\omega - \omega_1)\mathbf{v}_c t / z]. \quad (62)$$

Итак, используя (60) — (62), для временной корреляционной функции флуктуаций интенсивности в режиме слабых мерцаний получаем

$$b_I(t) = 8\pi k^2 \int_0^z \frac{dz'}{(zz')^2} \int d^2 q \exp\left[iq \frac{z}{z'} \left(\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_n \frac{z'}{z} + \mathbf{v}_n \frac{z - z'}{z}\right) t\right] \times \\ \times \sin^2\left[\frac{q^2 z}{2k} \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right] \Phi_\mu\left(q \frac{z}{z'}\right) \tilde{J}_0\left(q \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right). \quad (63)$$

Временная спектральная функция флуктуаций интенсивности определяется выражением

$$P_I(f) = 8\pi k^2 \int \frac{dz'}{(zz')^2} \delta\left[f - q \left(\mathbf{v}_c \frac{z}{z'} + \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n \frac{z' - z}{z'}\right)\right] \times \\ \times \sin^2\left[\frac{q^2 z}{2k} \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right] \Phi_\mu\left(q \frac{z}{z'}\right) \tilde{J}_0\left(q \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right). \quad (64)$$

В режиме насыщения мерцаний временная корреляционная функция состоит из двух компонент. При больших значениях  $t$  основной вклад дает компонента

$$b_{I,1}^{nc} = \frac{2\pi}{z^2} \int dz' \left(\frac{z}{z'}\right)^2 \left(\frac{z}{z'} - 1\right)^2 \int d^2 q \exp\left[iq \frac{z}{z'} t \left(\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_n \frac{z'}{z} + \mathbf{v}_n \frac{z - z'}{z}\right)\right] q^4 \Phi_\mu\left(q \frac{z}{z'}\right) \tilde{J}_0\left(q \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right) \times \\ \times \exp\left\{-\int_0^{z'} dz'' D\left[q \frac{z''}{k} \left(\frac{z}{z'} - 1\right)\right] - \int_{z'}^z dz'' D[q(z - z'')/k]\right\}. \quad (65)$$

При малых значениях  $t$  основной вклад дает компонента

$$b_{I,0}^{nc} = \frac{1}{z^4} \int d^2 u_0 J_0(u_0) \exp\left\{-\int_0^z dz' D\left[u_0 \frac{z - z'}{z} + \left(\mathbf{v}_n \frac{z - z'}{z} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_n \frac{z'}{z}\right) t\right]\right\}. \quad (66)$$

Следует отметить существенное различие во влиянии на вид временной корреляционной функции  $b_{l,0}^{вч}$ , которое оказывает движение наблюдателя, среды и источника. Так, при  $V_n = 0$  при достаточно больших размерах источника в режиме насыщения вид временной корреляционной функции не зависит от распределения яркости по источнику:

$$b_{l,0}^{вч}(t) \approx \frac{J_0(u_0=0)}{z^4} \int d^2 u_0 \exp \left\{ - \int_0^z dz' D \left[ u_0 \frac{z-z'}{z} + \left( v_c + v_n \frac{z'}{z} \right) t \right] \right\}. \quad (67)$$

При  $v_c = v_n = 0$  имеем

$$b_{l,0}^{вч}(t) = \frac{1}{z^4} \int d^2 u_0 J_0(u_0) \exp \left[ - \int_0^z dz' D \left[ \left( u_0 - v_n t \right) \frac{z-z'}{z} \right] \right]. \quad (68)$$

В этом случае сохраняется информация о распределении яркости по источнику вдоль направления движения источника.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Little L. T., Hewish A. // Month. Not. Roy. Astron. Soc. 1966. V. 134. P. 221.
2. Salpeter E. // Astrophys. J. 1967. V. 147. P. 433.
3. Шишов В. И. // Астрон. журн. 1972. Т. 49. С. 1258.
4. Budden K. G., Uscinski B. J. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1970. V. A316. P. 315.
5. Чашей И. В., Шишов В. И. // Астрон. журн. 1976. Т. 53. С. 26.
6. Шишов В. И., Шишова Т. Д. // Астрон. журн. 1978. Т. 55. С. 411.
7. Frellich R. G. // Radio Sci. 1987. V. 22. P. 481.
8. Гочелашвили К. С., Шишов В. И. // Квантовая электроника. 1981. Т. 8 С. 1953.
9. Гочелашвили К. С., Шишов В. И. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 1237.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
12 сентября 1988 г.

#### THE EFFECTS OF SOURCE SIZES ON SCINTILLATION CHARACTERISTICS

V. I. Shishov

The analytical investigation of the solution for the wave field fourth momentum in randomly inhomogeneous medium is carried out for the extended source. The spatial and temporal intensity fluctuations correlation functions for the extended incoherent source are received in the case when random refractive medium is arbitrary distributed between the source and the observer.

УДК 621.396.67

## АНАЛИЗ РАБОТЫ АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СУБАПЕРТУРОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

*А. А. Мальцев, Г. В. Серебряков*

Проанализированы основные характеристики адаптивных антенных решеток с ограничениями при действии помех, частично коррелированных и сравнимых по мощности с полезным сигналом. Показано, что наличие корреляции приводит к резкому уменьшению выходного отношения сигнал/шум. Для устранения этого эффекта предлагается использовать модифицированную антенную решетку со случайно переключаемой субапертурой.

1. В ряде практических задач, например в задачах локации в средах с многолучевым распространением, наряду с мощными по сравнению с сигналом некоррелированными помехами присутствуют сравнимые с ним по интенсивности коррелированные помехи [1]. В работе [2] изучалось влияние на основные характеристики адаптивных антенных решеток (ААР) помех когерентных (полностью коррелированных) с полезным сигналом. Для повышения эффективности работы в этих условиях предлагалось использовать ААР со случайно двигающейся апертурой. Однако наличие в канале распространения различного рода нестационарностей (например, флуктуаций отражающей поверхности, движущихся неоднородностей и т. п.) приводит к тому, что помехи нельзя считать полностью коррелированными с полезным сигналом. Влияние частично коррелированных помех на характеристики ААР изучается в настоящей работе, кроме того исследуется также один из способов реализации случайного движения апертуры, основанный на переключении подрешетки приемных элементов антенны.

2. Рассмотрим  $N$ -элементную, линейную, эквидистантную ААР с линейными ограничениями, на которую с нормали падает узкополосный полезный сигнал, а под углом  $\theta_1$  по отношению к нормали — помеховый, коррелированный с полезным. Представим комплексную амплитуду помехи  $a_1(t)$  в геометрическом центре антенны в виде

$$a_1(t) = ka_0(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где  $a_0(t)$  — комплексная амплитуда полезного сигнала,  $\xi(t)$  — составляющая, некоррелированная с  $a_0(t)$ ,  $k$  — некоторая комплексная постоянная ( $k = |k|e^{j\varphi_0}$ ). Коэффициент корреляции между  $a_0(t)$  и  $a_1(t)$  можно представить в виде

$$r = |r|e^{j\varphi_0} = k\sigma_0/\sigma_1,$$

где  $|r|$ ,  $\varphi_0$  — модуль и фаза коэффициента корреляции,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  — мощности полезного и помехового сигналов. Заметим, что фаза коэффициента корреляции  $\varphi_0$  для заданной модели сигналов (1) равна постоянному фазовому сдвигу между полезным и помеховым сигналами в геометрическом центре антенны. Пренебрегая запаздыванием комплексных амплитуд на апертуре антенной решетки, запишем вектор принимаемого сигнала

$$X(t) = a_0(t)S_0 + a_1(t)S_1 + \eta(t), \quad (2)$$

где  $\eta(t) = \{\eta_1(t), \dots, \eta_N(t)\}^T$ ,  $\langle |\eta_e(t)|^2 \rangle \equiv \sigma_\eta^2 = \text{const}$  — вектор собственных шумов приемных элементов решетки,  $S_0$ ,  $S_1$  — векторы-фазоры полезного и помехового сигналов. В случае, когда полезный сигнал и помеха представляют из себя плоские волны, векторы-фазоры  $S_0$ ,  $S_1$  будут равны  $S_0 = \{1, \dots, 1\}^T$ ,  $S_1 = \{1, e^{j u_1}, \dots, e^{j(N-1)u_1}\}^T$ , где  $u_1 = (2\pi/\lambda)d \sin \theta_1$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $d$  — межэлементное расстояние. Сигнал на выходе антенны можно записать как

$$y(t) = W^T X(t), \quad (3)$$

где  $W$  — весовой вектор, определяемый в соответствии с некоторым критерием. Известно (см., например, [3]), что оптимальный весовой вектор для ААР с ограничениями, минимизирующий среднеквадратичную ошибку на выходе, находится из соотношения

$$W_{\text{opt}} = R_{xx}^{-1} S_0^* (S_0^T R_{xx}^{-1} S_0^*)^{-1}, \quad (4)$$

где  $R_{xx} = \langle X^*(t) X^T(t) \rangle$  — ковариационная матрица принимаемого сигнала, которая для рассматриваемой модели (1), (2) запишется в виде

$$R_{xx} = \sigma_\eta^2 I + \sigma_0^2 S_0^* S_0^T + \sigma_1^2 S_1^* S_1^T + |r| \sigma_0 \sigma_1 \{ S_0^* S_1^T e^{j\varphi_0} + S_1^* S_0^T e^{-j\varphi_0} \}. \quad (5)$$

Выберем начало координат в геометрическом центре антенны. Тогда, используя результаты работы [4], можно записать явное выражение для обратной ковариационной матрицы

$$\begin{aligned} R_{xx}^{-1} = & \sigma_\eta^{-2} \{ I - [1 + N(v_0 + v_1) + N^2 v_0 v_1 (1 - |r|^2)] (1 - |f(u_1)|^2) + \\ & + 2|r| N \sqrt{v_0 v_1} |f(u_1)| \cos \varphi_0 \}^{-1} [v_0 (1 + N v_1 (1 - |r|^2)) S_0^* S_0^T - \\ & - (N v_0 v_1 (1 - |r|^2) |f(u_1)| - |r| \sqrt{v_0 v_1} e^{j\varphi_0}) S_0^* S_1^T - \\ & - (N v_0 v_1 (1 - |r|^2) |f(u_1)| - |r| \sqrt{v_0 v_1} e^{-j\varphi_0}) S_1^* S_0^T + \\ & + v_1 (1 + N v_0 (1 - |r|^2)) S_1^* S_1^T \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $v_0 = \sigma_0^2 / \sigma_\eta^2$ ,  $v_1 = \sigma_1^2 / \sigma_\eta^2$  — относительные мощности полезного и помехового сигналов,  $|f(u_1)| = N^{-1} S_0^T S_1^* = N^{-1} S_1^T S_0^* = \frac{\sin Nu_1 / 2}{N \sin u_1 / 2}$ .

Определим значения сааптированной на помеху диаграммы направленности (ДН)  $|G(u_1)|^2$  и суммарной мощности на выходе ААР. Используя (4) и (6), найдем значение сааптированной ДН

$$\begin{aligned} |G(u_1)|^2 = & |W_{\text{opt}}^T S_1^*|^2 = | [f(u_1) + 2N|r| \sqrt{v_0 v_1} |f(u_1)| \cos \varphi_0 - \\ & - N|r| \sqrt{v_0 v_1} (e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0} |f(u_1)|^2) ] [1 + N v_1 (1 - |f(u_1)|^2)]^{-1} |^2 \end{aligned} \quad (7)$$

и выходную мощность

$$\begin{aligned} P_0 = & (S_0^T R_{xx}^{-1} S_0^*)^{-1} = (\sigma_\eta^2 / N) [1 + N(v_0 + v_1) + N^2 v_0 v_1 (1 - |r|^2)] \times \\ & \times (1 - |f(u_1)|^2 + 2N|r| |f(u_1)| \sqrt{v_0 v_1} \cos \varphi_0) [1 + N v_1 (1 - |f(u_1)|^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Одной из важных характеристик ААР является отношение сигнал/шум на выходе системы. Подставляя (2) в (3), суммарный выходной сигнал  $y(t)$  представим в виде

$$y(t) = a_0(t) \{1 + kG(u_1)\} + \xi(t) G(u_1) + \sum_{n=1}^N \omega_n \text{opt} \eta_n(t), \quad (9)$$

где  $\omega_{n \text{ opt}}$  — компоненты вектора  $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ . При наличии коррелированной помехи в качестве полезного сигнала  $S(t)$  на выходе ААР целесообразно принять сумму полезного сигнала, приходящего с нормального направления и когерентной с ним составляющей помехового сигнала, приходящего с угла  $\theta_1$ . Нетрудно показать, что  $S(t) = a_0(t) \{1 + kG(u_1)\}$ . Кроме этого учтем, что мощность некоррелированной составляющей равна  $\sigma_{\xi}^2 = (1 - |r|^2) \sigma_1^2$ . Тогда отношение сигнал/шум дается выражением

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{N} \frac{1 + 2|k| \operatorname{Re}(G(u_1) e^{j\varphi_0}) + |k|^2 |G(u_1)|^2}{(1 - |r|^2) v_1 |G(u_1)|^2 + |\mathbf{W}_{\text{opt}}|^2}, \quad (10)$$

где  $\rho_0 = N v_0$  имеет смысл отношения сигнал/шум для антенной решетки в отсутствие внешних помех. В случае, когда мощная помеха ( $N v_1 \gg 1$ ) приходит по боковому лепестку ( $|f(u_1)| \ll 1$ ), выражения (7), (8), (10) несколько упростятся и примут вид

$$|G(u_1)|^2 \approx \frac{N^2 |r|^2 v_0 v_1}{(1 + N v_1)^2} \approx |r|^2 \frac{v_0}{v_1} = |r|^2 q; \quad (11)$$

$$P_0 = (\sigma_1^2 / N) (1 + |r|^2 q + N(1 - |r|^2) v_0); \quad (12)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{(1 - |r|^2)^2}{(1 - |r|^2) |r|^2 N v_0 + (1 + |r|^2 q)}. \quad (13)$$

На рис. 1 приведены зависимости отношения сигнал/шум  $\rho$  от угла прихода помехи  $\theta_1$  ( $N = 12$ ,  $v_0 = v_1 = 10$  дБ,  $\cos \varphi_0 = 1$ , кривая 1 соответствует  $|r| = 0$ , 2 —  $|r| = 0,1$ , 3 —  $|r| = 0,5$ , 4 —  $|r| = 0,9$ ). За нулевой уровень принята величина  $\rho_0$ . Отметим,

что при наличии коррелированной помехи отношение сигнал/шум на выходе системы (ААР) зависит в основном от двух факторов: во-первых, от степени подавления некоррелированной составляющей помехового сигнала (второе слагаемое в (9)), во-вторых, от сложения полезного сигнала и когерентной компоненты помехи (первое слагаемое в (9)). Из рис. 1 видно, что при воздействии помехи по боковому лепестку значения  $\rho$  не зависят от угла прихода помехи  $\theta_1$  и определяются из (13). С увеличением коэффициента корреляции (когерентности) между помехой и полезным сигналом отношение сигнал/шум уменьшается из-за противофазного сложения полезного сигнала с когерентной составляющей помехи. При углах прихода  $\theta_1$ , близких к нулю, помеха попадает в область ограничений и не подавляется. Для малых значений  $|r|$  выходное отношение сигнал/шум при этом уменьшается, поскольку влияние коррелированной добавки (из-за малости  $|r|$ ) незначительно (кривые 1, 2). При увеличении коэффициента корреляции в этом диапазоне углов наблюдается увеличение выходного отношения сигнал/шум из-за синфазного сложения когерентной составляющей помехи с сигналом. Отметим, что для  $|r| \sim 0,5$  первое и второе слагаемые в (9) при уменьшении  $\theta_1$  возрастают примерно одинаково и значение  $\rho$  остается практически постоянным для всех углов прихода помехи.

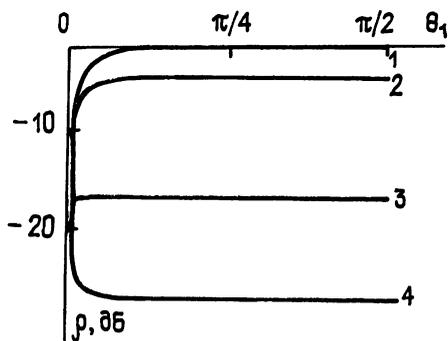


Рис. 1.

3. Один из способов увеличения эффективности ААР в условиях коррелированных помех основан на случайном движении (переключе-

нии)  $M$ -элементной подапертуры вдоль линии апертуры  $N$ -элементной антенны [2, 5]. При этом дополнительные случайные фазовые набег (вызванные таким движением) для сигналов, приходящих с разных направлений, отличных от нормального, будут разными в каждый момент времени. Предположим, как и ранее, что полезный сигнал падает с нормали. Тогда вектор принимаемого сигнала  $M$ -элементной подапертуры запишется в виде

$$X(t) = a_0(t) S_0 + a_1(t) e^{j\Phi(t)} S_1 + \eta(t), \quad (14)$$

где  $\Phi(t)$  — дополнительный случайный фазовый сдвиг, вызванный искусственным переключением  $M$ -элементной подапертуры (на полезный сигнал случайное движение подапертуры не влияет). Заметим, что в отличие от (2) размерность векторов в (14) равна  $M_1$ . Ковариационная матрица принимаемого сигнала (размерности  $M \times M$ ) запишется в виде

$$R_{xx} = \sigma_\eta^2 I + \sigma_0^2 S_0 S_0^+ + \sigma_1^2 S_1 S_1^+ + |r_1 \sigma_0 \sigma_1| \{ S_0 S_1^+ e^{j\varphi_0} \langle e^{j\Phi(t)} \rangle + S_1 S_0^+ e^{-j\varphi_0} \langle e^{-j\Phi(t)} \rangle \}. \quad (15)$$

Предположим, что переключения подапертуры ( $M$  вибраторов из  $N$ ) происходят совершенно случайным образом, причем вероятность принять любое из  $K = N - M + 1$  положений равна  $p_l$  ( $l = 1, \dots, K$ ). Тогда дополнительные фазовые сдвиги  $\Phi(t)$  будут иметь дискретное распределение с соответствующими весами. В этом случае легко найти величины  $\langle e^{j\Phi(t)} \rangle$  и  $\langle e^{-j\Phi(t)} \rangle$ . Подставив эти выражения в (15) и сравнив с (5), видно, что коэффициент корреляции между полезным и помеховым сигналами с учетом случайного переключения подапертуры будет равен

$$r_{cl} = r \sum_{l=1}^K p_l \exp[(l-1)u_1]. \quad (16)$$

При этом полагалось, для простоты, что начало координат совмещено с серединой первой подрешетки ( $l=1$ ). При воздействии мощной помехи ( $Mv_1 \gg 1$ ) по боковому лепестку для ААР с переключаемой субапертурой можно получить выражения для  $|G(u_1)|^2$ ,  $P_0$ ,  $\rho$ , аналогичные (11)—(13). Например, выражение для выходного отношения сигнал/шум примет вид

$$\rho = \rho_0 \frac{M}{N} \frac{(1 - |r_{cl}|^2)^2}{(1 - |r_{cl}|^2) |r_{cl}|^2 M v_0 + (1 + |r_{cl}|^2 q)}.$$

Однако необходимо заметить, что в отличие от (11)—(13) величины  $|G(u_1)|^2$ ,  $P_0$ ,  $\rho$  будут являться функциями угла прихода помехи  $u_1$ .

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Из (16) следует, что вид зависимости  $|r_{cl}|$  от угла прихода помехи  $u_1$  определяется подбором коэффициентов  $p_l$ . В частности, широко известное распределение Дольфа—Чебышева [6], позволяющее обеспечить минимальную ширину главного лепестка функции  $|r_{cl}|$  при заданном уровне боковых, приводит к следующей зависимости  $|r_{cl}|$  от  $u_1$ :

$$|r_{cl}| = |r| \frac{\cos[(K-1) \arccos a]}{\text{ch}[(K-1) \text{Arch } a]}, \quad a = \text{ch} \left[ \frac{1}{K-1} \text{Arch } \frac{1}{g} \right],$$

где  $g$  определяет требуемый уровень боковых лепестков. Для равновероятного распределения ( $p_l = 1/K$ ,  $l = 1, \dots, K$ ) коэффициент корреляции будет иметь минимальную ширину главного лепестка. Для этого случая получим\*

$$|r_{cl}| = |r| \sin K(u_1/2) / K \sin(u_1/2). \quad (17)$$

\* После того как данная статья была принята к печати, авторам стало известно, что в работе [7] получено выражение, аналогичное (17).

Эффективность рассмотренного метода декорреляции помех в случае равномерного распределения  $p_i$  иллюстрируется зависимостями, изображенными на рис. 2 ( $|r|=0,1$ ) и рис. 3 ( $|r|=0,5$ ). Кривые строились при следующих значениях параметров:  $N=12$ ,  $\nu_0=\nu_1=10$  дБ,  $\cos \varphi_0=1$  (кривая 1 соответствует  $M=10$ , 2— $M=6$ , 3— $M=2$ ). Из рис. 2 видно, что при малых  $|r|$  отношение сигнал/шум монотонно увеличивается с ростом размеров подапертуры. Этот эффект объясняется следующим:

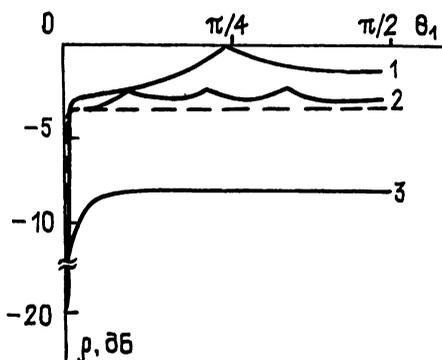


Рис. 2.

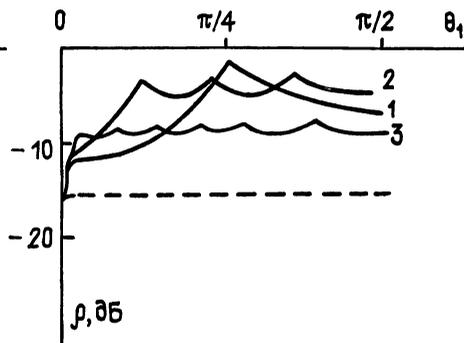


Рис. 3.

при малой подапертуре  $\theta$  из-за большого размаха случайного движения когерентность между полезным и помеховым сигналами практически полностью разрушается, но, вследствие того, что используется мало вибраторов (эффективный размер апертуры мал), величина  $\rho$  мала. Для сравнения на рис. 2 штриховой линией приведено отношение сигнал/шум для неподвижной ААР. Видно, что при  $M=6, 10$  за счет переключений можно достичь большей эффективности, чем у антенной решетки с полной апертурой. При больших значениях корреляции (рис. 3) эффективность ААР с переключениями выше, чем у неподвижной (штриховая линия) практически для любых размеров подапертуры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретические основы радиолокации / Под ред. В. Е. Дулевича. — М.: Сов. радио, 1978, С. 460.
2. Мальцев А. А., Савинов И. В., Серебряков Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 2. С. 193.
3. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. — М.: Радио и связь, 1986. С. 165.
4. Литвинов О. С. // Сб. Антенны. — М.: Радио и связь, 1981. Вып. 29. С. 67.
5. Su Y., Shan T., Widrow B. // IEEE Trans. 1986. V. AP-34. № 3. P. 347.
6. Зелкин Е. Г., Соколов В. Г. Методы синтеза антенн. — М.: Сов. радио, 1980. С. 294.
7. Reddy V. U., Paulraj A., Kailath T. // IEEE Trans. V. ASSP-35. 1987. № 7. P. 927.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 8 декабря 1988 г.

#### THE PERFORMANCE ANALYSIS OF THE ADAPTIVE ANTENNA ARRAY WITH A SWITCHING SUBAPERTURE FOR CORRELATED INTERFERENCE

A. A. Mal'tsev, G. V. Serebryakov

The main characteristics of the adaptive antenna arrays with constraints for interference partially correlated with the signal are analysed. The presence of such correlation is shown to result in essentially decreasing the output signal/noise ratio. To remove this effect we use a modified adaptive antenna with randomly-switching subaperture.

УДК 535.8.666.189.21

## ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ВОЛОКОННОМ КОЛЬЦЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ

*В. Н. Листвин*

Рассмотрено влияние двулучепреломления в волоконно-оптическом поляризационном фильтре, с учетом его неоднородностей, на взаимную фазовую ошибку в волоконном кольцевом интерферометре (ВКИ). Показано, что, когда разность групповых задержек поляризационных мод в поляризаторе превышает время когерентности источника излучения, взаимная фазовая ошибка в ВКИ пропорциональна не амплитудному коэффициенту пропускания поляризатора по оси гашения, как в случае отсутствия в нем двулучепреломления, а коэффициенту пропускания по интенсивности, что значительно снижает требования к коэффициенту экстинкции поляризационного фильтра в ВКИ.

Поляризационная фильтрация осуществляется во взаимной схеме волоконного кольцевого интерферометра (ВКИ), вход и выход которого совмещены так, что поляризатор выделяет одно и то же состояние поляризации для прямой и обратной волны. Несовершенства поляризатора приводят к появлению компоненты в сдвиге нуля интерференционной картины ВКИ, обусловленной поляризационной анизотропией его элементов, что в настоящее время в значительной степени определяет его долговременную стабильность.

В работе Кинтнера [1] рассмотрена простейшая модель несовершенного поляризатора, описываемая диагональной матрицей Джонса, и показано, что взаимная фазовая ошибка в ВКИ пропорциональна амплитудному коэффициенту экстинкции поляризатора  $\epsilon$ . Отсюда, в частности, следует, что для того, чтобы обеспечить необходимую для практических приложений величину сдвига нуля ВКИ  $\sim 10^{-7}$ , необходимы поляризаторы с чрезвычайно большим коэффициентом экстинкции  $\epsilon^2 = 90$  дБ.

В ВКИ в качестве поляризационного фильтра применяются волоконно-оптические поляризаторы — одномодовые волоконные световоды (ОВС), в которых для одной из поляризационных мод выполняется условие отсечки. Волоконно-оптические поляризаторы кроме дихроизма обладают также большим линейным двулучепреломлением, поэтому, когда разность группового запаздывания поляризационных мод в волоконно-оптическом поляризаторе значительно превышает время когерентности источника излучения, взаимная фазовая ошибка в ВКИ может эффективно усредниться. По-видимому, этим эффектом можно объяснить малую величину сдвига нуля в ВКИ  $\sim 10^{-7}$ , достигнутую в [2] при относительно малом коэффициенте экстинкции волоконно-оптического поляризатора  $\epsilon^2 = 60$  дБ [3].

Оценки в [4] показали, что если рассматривать поляризационный фильтр как установленные последовательно линейный поляризатор и фазовую пластинку, то наличие запаздывания поляризационных мод в фазовой пластинке позволяет устранить в первом порядке по  $\epsilon$  взаимную фазовую ошибку в ВКИ. Однако в этой модели нельзя учесть влияние нерегулярностей в волоконно-оптическом поляризаторе, так как в общем случае матрицы дихроичных и двулучепреломляющих элементов не перестановочны, и такой поляризатор нельзя представить в виде комбинации линейного поляризатора и ли-

нейной фазовой пластинки. Неоднородности в поляризаторе приводят к тому, что по всей длине поляризатора осуществляется перекачка мощности из одной поляризационной моды в другую, и поэтому разности фазовых задержек между волнами, прошедшими через разрешенное и запрещенное направления поляризатора, могут значительно отличаться от максимально возможного значения, и, соответственно, сдвиг нуля в ВКИ не будет усредняться столь же эффективно, как в регулярном волоконно-оптическом поляризаторе. На необходимость анализа волоконно-оптического поляризационного фильтра в ВКИ с учетом случайной связи между поляризационными модами указывалось, в частности, и в [4].

Впервые требования к поляризационной фильтрации при качественном (точечная модель) учете нерегулярностей в ОВС были рассмотрены в [5]. Как показано в [6], для количественного описания поляризационных эффектов, возникающих при распространении полихроматического излучения в ОВС со случайными неоднородностями, необходимо рассматривать полную корреляционную структуру излучения совместно со статистическими характеристиками локальных параметров анизотропии ОВС.

В нашей работе рассмотрено влияние дихроизма и двулучепреломления в волоконно-оптическом поляризаторе на невзаимную фазовую ошибку в ВКИ с учетом случайной связи между поляризационными модами. Показано, что в квазимонохроматическом приближении во взаимной схеме ВКИ сдвиг нуля  $\propto |\det \hat{F}|$ , где  $\hat{F}$  — матрица Джонса поляризатора, а величина  $|\det \hat{F}|$  не зависит от величины коэффициента связи поляризационных мод в поляризаторе. Кроме того показано, что для полихроматического источника излучения, когда разность группового запаздывания поляризационных мод в поляризаторе значительно превышает время когерентности источника излучения, несовершенства поляризатора проявляются не в первом, а во втором порядке малости по его амплитудному коэффициенту экстинкции.

**Невзаимная фазовая ошибка в ВКИ.** Будем полагать, что источник излучения стационарный, а ВКИ можно рассматривать как линейную систему с постоянными коэффициентами. В этом приближении матрицу когерентности на выходе ВКИ  $\hat{J} = \int_0^\infty d\omega \hat{C} \hat{g}_0 \hat{C}^+$  можно выразить через матрицу спектральных плотностей на входе в ВКИ  $\hat{g}_0(\omega)$  и матрицу Джонса ВКИ  $\hat{C}(\omega) = \hat{U}(\omega) \exp\left(i \frac{\varphi_n}{2}\right) + \hat{U}^T(\omega) \exp\left(-i \frac{\varphi_n}{2}\right)$  [6, 7], где  $+$  — знак эрмитова сопряжения,  $T$  — знак транспонирования матрицы,  $\varphi_n$  — невзаимный фазовый сдвиг нуля ВКИ, обусловленный эффектом Саньяка.

В линейном базисе в отсутствие магнитного поля матрицы Джонса каждого отдельного элемента ВКИ связаны операцией транспонирования [8]. Во взаимной схеме ВКИ [9, 10] прямая и обратная волны обходят элементы ВКИ в обратном порядке, поэтому для нахождения матрицы  $\hat{C}$  достаточно матрицы  $\hat{U} = \hat{F}^T \hat{B} \hat{F}$ , где  $\hat{B}$  — матрица, описывающая действие всех элементов ВКИ на прямую волну. Учитывая, что для высококачественного поляризатора  $|\det \hat{F}| \ll 1$  и что для антисимметричных матриц второго порядка  $\hat{U}_A = \hat{F}^T \hat{B}_A \hat{F} = (\det \hat{F}) \hat{B}_A$ , выражение для пропускания ВКИ  $\tau = \text{Sp} \hat{J} / \text{Sp} \hat{J}_0$  с точностью до членов второго порядка малости по  $|\det \hat{F}|$  можно представить в виде

$$\tau = M[1 + \cos(\varphi + \varphi_n)], \quad (1)$$

где  $M = (1/I_0) \int_0^\infty d\omega \text{Sp}(\hat{U}_C \hat{g}_0 \hat{U}_C^\dagger)$  — масштабный коэффициент ВКИ,  $I_0$  — интенсивность источника излучения,

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{1}{MI_0} \int_0^\infty d\omega \text{Sp} [i(\hat{U}_C^* \hat{U}_A + \hat{U}_A^* \hat{U}_C) \hat{g}_0] \right\} \quad (2)$$

— невязанная фазовая ошибка ВКИ,  $\hat{U}_C = (1/2)(\hat{U} + \hat{U}^\tau)$ ,  $\hat{U}_A = (1/2)(\hat{U} - \hat{U}^\tau)$  — соответственно симметричная и антисимметричная часть матрицы  $\hat{U}$ ,  $*$  — знак комплексного сопряжения.

Рассмотрим влияние параметров анизотропии элементов поляризационного фильтра на невязанную фазовую ошибку в ВКИ. Существенной особенностью волоконно-оптического поляризатора является то, что в нем одновременно осуществляется поляризационная и пространственная фильтрация излучения. В настоящее время для основной моды ОВС потери составляют доли дБ/км, поэтому в волоконно-оптическом поляризаторе при длинах световода порядка нескольких метров можно пренебречь связью с вытекающими модами световода, т. е. рассматривать его как идеальный пространственный фильтр. В таком ОВС эволюцию комплексных амплитуд поляризационных мод можно описать с помощью матрицы модовых амплитуд  $2 \times 2$ , совпадающей, в приближении плоских волн, с матрицей Джонса  $\hat{F}$ . Квадратная матрица  $\hat{F} = \hat{V}_1 \hat{\Lambda} \hat{V}$  приводится к диагональному виду с помощью унитарных матриц  $\hat{V}$  и  $\hat{V}_1$ . При этом собственные значения  $\Lambda$   $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выражаются через детерминант  $\hat{F}$  и след  $\hat{F}$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [(\text{Sp} \hat{F} \hat{F}^\dagger + 2|\det \hat{F}|)^{1/2} \pm (\text{Sp} \hat{F} \hat{F}^\dagger - 2|\det \hat{F}|)^{1/2}]. \quad (3)$$

Таким образом, из условия, что волоконно-оптический поляризатор описывается матрицей  $2 \times 2$ , следует, что он оптически эквивалентен линейному поляризатору с матрицей  $\hat{\Lambda}$ , помещенному между двумя эллиптическими фазовыми пластинками с матрицами  $\hat{V}$  и  $\hat{V}_1$ . Отсюда, в частности, следует, что состояния поляризации излучения, соответствующие минимальному и максимальному пропусканию поляризатора, ортогональны и, в общем случае, различны на входе и выходе поляризатора. При этом следует отметить, что когда состояния поляризации на входе и выходе поляризатора различаются, то для них нельзя ввести понятие амплитудного коэффициента пропускания, так как разность фаз в излучении можно определить только для одного и того же состояния поляризации излучения. Изменение же интенсивности излучения в силу унитарности матриц  $\hat{V}$  и  $\hat{V}_1$  определяется только матрицей  $\hat{\Lambda}$ , соответственно, с минимальным  $\lambda_2^2 \simeq \frac{|\det \hat{F}|^2}{\text{Sp} \hat{F} \hat{F}^\dagger}$  и максимальным пропусканием по интенсивности  $\lambda_1^2 = \text{Sp} \hat{F} \hat{F}^\dagger$ .

Действие первой фазовой пластинки, описываемой матрицей  $\hat{V}_1$ , приводит к изменению входного состояния поляризации излучения, и его можно учесть, введя новую матрицу спектральных плотностей

$$\hat{g} = \hat{V}_1 \hat{\Lambda} \hat{V}_1^\dagger. \quad (4)$$

Действие второй фазовой пластинки можно учесть, введя новую матрицу ВКИ для прямой волны

$$\hat{N} = \hat{V}^T \hat{B} \hat{V}. \quad (5)$$

Следовательно, задача определения сдвига нуля ВКИ с произвольным поляризатором сводится к соответствующей задаче для ВКИ с линейным поляризатором, действие которого описывается матрицей  $\hat{\Lambda}$ .

Преобразуем выражение для  $\varphi$ , разложив матрицу спектральных плотностей  $\hat{g}$  по спектральным параметрам вектора Стокса  $\hat{g}(\omega) = (1/2) \sum_{i=0}^3 Q_i(\omega) \hat{\sigma}_i$ ,  $\hat{\sigma}_i$  — спиновые матрицы Паули. В результате соответствующих преобразований получаем

$$\varphi = \frac{1}{M I_0} \int_0^\infty d\omega \{ Q_1 |\det \hat{F}|^2 \text{Im} [ (v_{12} + v_{21})^* (v_{12} - v_{21}) ] + \\ + |\det \hat{F}| \text{Im} [ (Q_2 + i Q_3) v_{11}^* (v_{12} - v_{21}) ] \}. \quad (6)$$

В [11] показано, что в отсутствие дихроизма у элементов ВКИ деполяризованная компонента излучения не дает вклада в невзаимную фазовую ошибку. Для взаимной схемы ВКИ, как видно из (6),  $\varphi$  не зависит от  $Q_0$ , т. е. деполяризованная компонента излучения не дает вклада в невзаимную фазовую ошибку и при наличии дихроизма у элементов ВКИ. Сдвиг нуля появляется только для поляризованной компоненты излучения, но ее вклад может быть уменьшен с помощью поляризационной фильтрации. Практически это означает, что в ВКИ целесообразно применять одновременно деполяризованный источник излучения и поляризационный фильтр.

Невзаимная фазовая ошибка зависит от состояния поляризации излучения. Для компоненты  $Q_1$ , поляризованной вдоль разрешенного направления поляризатора, эта ошибка пропорциональна  $|\det \hat{F}|^2$ , а для компонент  $Q_2$  и  $Q_3$  она пропорциональна  $|\det \hat{F}|$ . Для компоненты  $Q_1$  в (6) отсутствуют члены нулевого порядка малости по  $|\det \hat{F}|$ , соответствующие интерференции прямой и обратной волн, прошедших на входе и на выходе ВКИ через разрешенное направление поляризатора — в силу леммы Лоренца фазовые набег для этих волн равны. Поэтому для  $Q_1$  невзаимная фазовая ошибка возникает только во втором порядке по  $|\det \hat{F}|$ , когда интерферируют волны, прошедшие на входе через разрешенное направление поляризатора, а на выходе ВКИ через запрещенное направление. Разность фаз между этими волнами не зависит от двулучепреломления поляризатора.

**Поляризационный фильтр с двулучепреломлением.** Рассмотрим вначале принципиальную возможность исключения, за счет разности запаздывания поляризационных мод в поляризаторе, членов первого порядка малости по  $|\det \hat{F}|$ . В отсутствие случайной связи между поляризационными модами матрица Джонса  $\hat{F}_0$  линейного поляризатора диагональна с диагональными матричными элементами  $\exp(-i\beta_1 l)$  и  $\exp(-i\beta_2 l - \alpha l)$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — постоянные распространения поляризационных мод,  $\alpha$  — коэффициент поглощения,  $l$  — длина поляризатора. Матрицу  $\hat{F}_0$  можно представить также в виде  $\hat{F}_0 = \hat{\Phi} \hat{\Lambda}_0 = \hat{\Lambda}_0 \hat{\Phi}$ , где  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \exp(-\alpha l)$ ,  $\varphi_{11} = \exp(-i\beta_1 l)$ ,  $\varphi_{22} = \exp(-i\beta_2 l)$ . Т. е. в нулевом при-

ближении по коэффициенту связи поляризационных мод волоконно-оптический поляризатор эквивалентен установленным последовательно фазовой пластинке и линейному поляризатору.

Когда фазовая пластинка расположена перед поляризатором, ее можно рассматривать как деполяризатор излучения. В соответствии с ее ориентацией компоненты  $Q_2$  и  $Q_3$  будут эффективно деполяризованы [12]. Ранее было показано, что деполяризованная компонента в излучении не дает вклада в невзаимную фазовую ошибку ВКИ, поэтому эта ошибка будет определяться только поляризованной компонентой, вклад которой пропорционален  $|\det \hat{F}|^2$ .

Однако следует отметить, что понятие степень поляризации для полихроматического излучения, пропущенного через фазовую пластинку, в определенной мере условно, так как энтропия излучения после прохождения фазовой пластинки не меняется [13]. В частности, установив на выходе фазовой пластинки компенсатор, можно, в этом случае, поляризовать излучение без потери энергии. Поэтому рассматривать фазовую пластинку как деполяризатор в полной мере можно только при условии, что в дальнейшем излучение не проходит через компенсатор. Это условие не выполняется для ВКИ с контуром из ОВС с большим двулучепреломлением.

Рассмотрим теперь невзаимную фазовую ошибку в ВКИ с контуром из ОВС с большим двулучепреломлением. Как показано в [14], при развороте осей двулучепреломления поляризатора относительно разрешенного направления поляризатора, в сдвиге нуля ВКИ появляется компонента, которая не усредняется даже при наличии большой разницы в групповом запаздывании поляризационных мод в контуре ВКИ.

Представим матрицу поляризатора в виде  $\hat{F}_0 = \hat{\Lambda}_0 \hat{\Phi}$  и отнесем, в соответствии с (5), фазовую пластинку к контуру ВКИ. Рассмотрим случай, когда разность групповых запаздываний поляризационных мод в волоконно-оптическом поляризаторе много меньше, чем в контуре ВКИ. Тогда двулучепреломление в поляризаторе оказывает влияние только на компоненту в сдвиге нуля ВКИ, слабо зависящую от частоты излучения. Положим для оценки, как и в [14], что матрица делителя и смесителя лучей диагональна, и учтем только разворот осей двулучепреломления на угол  $\alpha$ . При  $L \gg L_D$ , где  $L_D$  — длина деполяризации излучения в ОВС,  $L$  — длина световода в контуре ВКИ, в первом порядке малости по  $|\det \hat{F}|$  получаем при  $S_3 = \int_0^\infty Q_3 d\omega$

$$\varphi = |\det \hat{F}| S_3 \operatorname{tg} 2\alpha |\gamma(l)|. \quad (7)$$

Когда разность групповых запаздываний поляризационных мод в поляризаторе значительно превышает время когерентности источника излу-

чения ( $l \gg L_D$ ),  $\gamma(l) = \frac{1}{I_0} \int_0^\infty d\omega Q_0 \exp [i(\beta_1 - \beta_2)l]$  может составлять пре-

небрежимо малую величину. Так в волоконно-оптическом деполяризаторе [13] при  $l = 38$  см и  $\frac{d(\beta_1 - \beta_2)}{d\omega} = 1$  нс/км для суперлюминесцентно-

го диода ( $\Delta\omega = 20$  рад/пс) величина  $|\gamma(l)|$  составила менее  $10^{-8}$ . В волоконно-оптическом поляризаторе [15] разность групповых запаздываний на единицу длины волокна составляет такую же или еще большую величину и, следовательно, члены первого порядка по  $|\det \hat{F}|$  в выражении для сдвига нуля, обусловленные разворотом осей двулучепреломления ОВС, эффективно усредняются,

**Нерегулярный поляризатор.** Матрица Джонса дихроичного элемента с двулучепреломлением определяется матричным дифференциальным уравнением [16]

$$\frac{d}{dz} \hat{F} = \hat{a} \hat{F}, \quad \hat{F}(0) = \hat{I}, \quad (8)$$

где  $\hat{a}(z) = - \begin{pmatrix} i\beta_1, & -c(z) \\ c^*(z), & i\beta_2 + \alpha \end{pmatrix}$  — матрица коэффициентов связи поляризатора с линейным двулучепреломлением и линейным дихроизмом,  $c(z)$  — коэффициент связи поляризационных мод, зависящий случайным образом от координаты  $z$  вдоль оси световода. Как известно, в общем случае решение матричного дифференциального уравнения невозможно выразить в элементарных функциях и квадратурах. Полагая связь слабой, в первом порядке теории возмущений получаем при  $\Delta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$  и  $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} e^{-i\Delta l}, & k_1 \\ k_2, & e^{i\Delta l - \alpha l} \end{pmatrix} e^{i\beta l}, \quad (9)$$

где

$$k_1 = \exp(-i\Delta l) \int_0^l dt c(t) \exp(-2i\Delta t - \alpha t),$$

$$k_2 = -\exp(i\Delta l - \alpha l) \int_0^l dt c^*(t) \exp(2i\Delta t + \alpha t).$$

Квадраты модулей недиагональных матричных элементов  $|k_1|^2$  и  $|k_2|^2$  соответствуют доли мощности, перекачиваемой в ортогональную поляризационную моду. Полагая случайный процесс  $c(z)$  стационарным с равным нулю средним, из (9) получаем при  $hl \ll 1$  и  $l \gg l_K$ , где  $l_K$  — длина корреляции случайных неоднородностей в поляризаторе,

$$\langle |k_1|^2 \rangle = \langle |k_2|^2 \rangle = \frac{h}{2\alpha} [1 - \exp(-2\alpha l)], \quad (10)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю статистически однородных поляризаторов,  $h = \frac{1}{2} \langle \int_0^l dt c(t) \exp 2i\Delta t \rangle^2$  — параметр сохранения состояния поляризации в ОВС.

Качественно формулу (10) можно объяснить следующим образом: при  $\alpha l \ll 1$   $\langle |k_1|^2 \rangle = \langle |k_2|^2 \rangle = hl$ , т. е. доля перекаченной мощности определяется всеми нерегулярностями поляризатора, и ее среднее значение пропорционально длине поляризатора  $l$ . При  $\alpha l \ll 1$  величина  $\langle |k_1|^2 \rangle = h/2\alpha$  определяет долю мощности, перекаченной неоднородностями, расположенными в начале поляризатора на расстоянии  $z < 1/2\alpha$ , а величина  $\langle |k_2|^2 \rangle = h/2\alpha$ , соответственно, — долю мощности, перекаченную неоднородностями, расположенными в конце поляризатора на расстоянии  $l - z < 1/2\alpha$ . Неоднородности, расположенные в середине поляризатора, не дают вклада в результирующую перекаченную мощность. Так, если на входе в поляризатор возбуждается мода, соответствующая запрещенному направлению поляризатора, то из-за ее затухания мощностью, перекачиваемой в ортогональную поляризационную моду на расстоянии  $z > 1/2\alpha$ , можно пренебречь по сравнению с мощностью, перекаченной в начале поляризатора на расстоянии  $z < 1/2\alpha$ . Если же возбуждается мода, соответствующая разрешенному направлению поляризатора, то можно пренебречь мощностью, перекаченной в сильно затухающую моду на неоднородностях, расположенных на расстоянии  $l - z > 1/2\alpha$ , по сравнению с мощностью, перекаченной в конце поляризатора на расстоянии  $l - z < 1/2\alpha$ . Этим и объясняется,

что при  $\alpha l \gg 1$  среднее значение  $|k_1|^2$  и  $|k_2|^2$  перестает зависеть от длины поляризатора.

Таким образом, если на входе в поляризатор возбудить моду, соответствующую запрещенному направлению поляризатора, часть излучения  $\sim h/2\alpha$  пройдет через поляризатор даже при  $\exp(-\alpha l) \rightarrow 0$ . Т. е. нерегулярности в линейном поляризаторе ухудшают его способность селективировать линейное состояние поляризации. Однако во взаимной схеме ВКИ случайная связь между поляризационными модами не ухудшает общей селективирующей способности поляризационного фильтра. Это следует из тождества Якоби [17]:  $\det \hat{F} = \exp \int_0^l \text{Sp } \hat{a}(z) dz$ . Из

(8) видно, что  $|\det \hat{F}| = \exp(-\alpha l)$  и не зависит от  $c(z)$ . При  $\exp(-\alpha l) \rightarrow 0$  в соответствии с (6) невзаимная фазовая ошибка также обращается в нуль независимо от величины коэффициента связи поляризационных мод в поляризаторе.

Рассмотрим теперь влияние случайной связи между поляризационными модами в двулучепреломляющем поляризаторе на эффективность усреднения сдвига нуля ВКИ. Для этого диагонализуем матрицу (9), воспользовавшись тем, что  $\langle |k_1|^2 \rangle$  и  $\langle |k_2|^2 \rangle$  зависят лишь от нерегулярностей, расположенных на расстоянии  $1/2\alpha$  от начала и конца поляризатора. Поэтому с самого начала не будем учитывать нерегулярности, расположенные в середине поляризатора, считая, таким образом, весь поляризатор регулярным за исключением его концов. Пренебрежем также поглощением излучения на концах поляризатора длиной  $1/2\alpha$ . В этом приближении нерегулярности поляризатора учитываются с помощью фазовых пластинок, расположенных на концах регулярного поляризатора  $\hat{F} = \hat{\Phi}_1 \hat{F}_0 \hat{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_1 \hat{\Lambda}_0 \hat{\Phi}_1$ , где

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} \exp(-i\Delta/2\alpha), & k \\ -k^*, & \exp(i\Delta/2\alpha) \end{pmatrix} \exp(i\beta/2\alpha), \quad (11)$$

$$k = \exp(-i\Delta/2\alpha) \int_0^{1/2\alpha} dt c(t) \exp(-2i\Delta t).$$

Действие первой фазовой пластинки приводит, в соответствии с (4), к изменению входного состояния поляризации излучения  $\hat{g} = \hat{\Phi}_1 \hat{g}_0 \hat{\Phi}_1^+$ . Действие второй фазовой пластинки учтем, введя, в соответствии с (5), новую матрицу для прямой волны в ВКИ  $\hat{N} = \hat{\Phi}_1^+ \hat{\Phi}^+ \hat{B} \hat{\Phi}_1$ . Рассмотрим случай, соответствующий поляризатору с большим коэффициентом экстинкции, когда разность групповых запаздываний поляризационных мод в поляризаторе на длине  $1/2\alpha$  мала по сравнению с временем когерентности источника излучения. Тогда эффектами деполаризации излучения в фазовых пластинках  $\hat{\Phi}_1$  и  $\hat{\Phi}_1^+$  можно пренебречь. Пренебрегая также величиной  $h/2\alpha$  по сравнению с  $|b_{11}|^2$ , получаем, что в рассматриваемом приближении нерегулярности в поляризаторе с двулучепреломлением не ограничивают эффективность усреднения по частоте сдвига нуля в ВКИ в первом порядке по  $|\det \hat{F}|$ . При  $|\gamma(l)| \ll 1$ , как видно из (6), невзаимная фазовая ошибка пропорциональна коэффициенту экстинкции

$$\varphi \simeq \rho |\det \hat{F}|^2 \frac{|b_{12}|^2}{|b_{11}|^2}. \quad (12)$$

Оценим с помощью этого выражения величину дрейфа нуля, полученную экспериментально в [2]. В качестве источника излучения применялся суперлюминесцентный диод, степень поляризации излучения ко-

того составила, согласно [12],  $p=0,2$ . Система стабилизации поляризации поддерживала состояние поляризации на уровне 0,1. Для оценки положим  $\frac{|b_{12}|^2}{|b_{11}|^2} = 0,1$ . Коэффициент экстинкции поляризатора по данным работы [3] составил  $\epsilon^2=60$  дБ. Из (12) получаем  $\varphi=2 \cdot 10^{-8}$ , что согласуется с наблюдаемой в [2] величиной дрейфа нуля в ВКИ.

Резюмируя полученные в работе результаты, можно сделать вывод о перспективности применения в ВКИ волоконно-оптических поляризаторов с большей разностью групповых задержек поляризационных мод. При этом степень селекции состояния поляризации оказывается пропорциональной коэффициенту экстинкции поляризатора, а не амплитудному коэффициенту экстинкции, как в случае, рассмотренном Кинтнером [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kintner E. C. // Opt. Lett. 1981. V. 6. P. 154.
2. Berg R. A., Lefevre H. C., Shaw H. J. // Opt. Lett. 1981. V. 6. P. 502.
3. Berg R. A., Lefevre H. C., Shaw H. J. // Opt. Lett. 1980. V. 5. P. 479.
4. Jones E., Parker J. W. // Electron. Lett. 1986. V. 22. № 1. P. 54.
5. Burns W. et. al. // J. Lightwave Techn. 1984. V. LT-2. № 4. P. 430:
6. Залогин А. Н., Козел С. М., Листвин В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 2. С. 243.
7. Грудинин А. Б., Сулимов В. Б. // Труды ИОФАН. 1987. Т. 7. С. 18.
8. Schiffner G., Leeb W. R., Krammer H. // Appl. Opt. 1979. V. 18. P. 2096.
9. Fredricks R. I., Ulrich R. // Electron. Lett. 1984. V. 20. P. 230.
10. Козел С. М., Колесов Ю. И., Листвин В. Н., Шаталин С. В. // Опт и спектр. 1985. Т. 59. № 1. С. 180.
11. Pavlath G. A., Shaw H. J. // Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 1752.
12. Burns W., Moeller R. // Electron. Lett. 1983. V. 19. № 5. P. 187.
13. О'Нейл Е. Введение в статистическую оптику. — М.: Мир. 1966.
14. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В., Юшкайтис Р. В. // Опт. и спектр. 1986. Т. 61. С. 1295.
15. Noda J. et al. // J. Lightwave Techn. 1986. V. 4. № 8. P. 1071.
16. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 4. С. 505.
17. Белман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука. 1976.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
22 февраля 1988 г.

#### POLARISATION FILTRATION IN FIBER RING INTERFEROMETRE

V. N. Listvin

An influence is considered of birefringent fiber-optic polarisation filters on unreciprocal phase error in fiber ring interferometre (FRI). It is shown, that, when the group delay difference of polarisation mode in polaroid exceeds the coherence time of radiation source, the unreciprocal phase error in FRI is proportional not to the amplitude filtration coefficient, as in the case of birefringence absence but to the intensity coefficient, that considerably reduces the requirement for the extinction coefficient of polarisation filters.

УДК 621.372.823

## К ВОПРОСУ О СПЕКТРЕ ВОЛН ДИАФРАГМИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ

*В. Ф. Барينوва, Г. В. Павловская, С. Б. Раевский*

Рассмотрены вопросы спектра, собственных волн периодически нерегулярных электродинамических структур. Приведены результаты расчета дисперсии волн диафрагмированных волноводов.

Информация о спектрах волн базовых электродинамических структур необходима при решении проекционными методами различных дифракционных задач, связанных с расчетом функциональных СВЧ узлов, выполняемых на основе этих структур. В качестве последних часто используются различные периодически нерегулярные волноведущие системы, в частности, диафрагмированные волноводы, рис. 1. Цель настоящей работы — рассмотреть некоторые особенности дисперсии в таких волноводах и показать возможность существования в них волн с комплексными волновыми числами в отсутствие диссипации энергии.

В общем случае краевая задача для диафрагмированных волноводов задается дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=1}^3 A_i(q_i) \frac{\partial^2 u}{\partial q_i^2} + \sum_{i=1}^3 B_i(q_i) \frac{\partial u}{\partial q_i} + cu = 0, \quad (1)$$

которому удовлетворяют продольные компоненты электрического и магнитного векторов Герца, и  $N$  граничными условиями для каждого из них. В результате получается «спаренная» краевая задача, состоящая из задач Неймана и Дирихле, решения которых связаны граничными условиями.

Краевая задача, сопряженная вышесформулированной, описывается [1] уравнением

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 [\bar{A}_i(q_i)v]}{\partial q_i^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial [\bar{B}_i(q_i)v]}{\partial q_i} + \bar{c}v = 0, \quad (2)$$

решаемым при  $N^*$  граничных условиях, где число  $N^*$  следует определять по формуле

$$N^* = 2nm - N,$$

в которой  $n$  — порядок дифференциального уравнения,  $m$  — число областей разбиения системы [2].

Для того чтобы краевая задача была самосопряженной, необходимо [3] выполнение двух условий: во-первых, дифференциальные выражения (1) и (2) должны тождественно совпадать, во-вторых, должно иметь место равенство  $N^* = N$ .

Если рассчитывать периодически нерегулярную структуру одним из строгих методов, например методом частичных областей (МЧО), для каждого из векторов Герца на границе между областями I и II в общем случае запишется (в явном и неявном виде) по четыре граничных

условия. В результате с учетом ограниченности поля в центре волновода и условий либо Дирихле, либо Неймана на экранирующей поверхности имеем  $N=6$  и  $N^* \neq N$ . Таким образом, в строгой постановке рассматриваемая краевая задача в общем случае является несамосопряженной. Следовательно, спектр диафрагмированных волноводов должен содержать комплексные волны. Заметим, что, поскольку у несамосопряженных краевых задач наиболее общими являются решения с комплексными значениями, решения с действительными собственными значениями, соответствующие в электродинамических структурах распространяющимся без затухания и реактивно затухающим волнам, следует рассматривать как частные случаи.

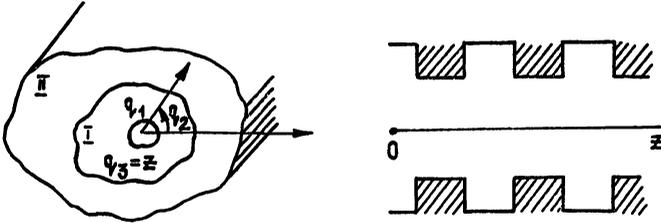


Рис. 1.

Решения уравнения Гельмгольца для направляющей системы, изображенной на рис. 1, записываются в следующем виде [4]:

область I

$$\Pi_{z1}^h = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \psi_1^h(q_1, q_2) e^{-i\beta_m z}, \quad (3)$$

$$\Pi_{z1}^e = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \psi_1^e(q_1, q_2) e^{-i\beta_m z}, \quad \beta_m = \beta_0 + \frac{2\pi m}{D};$$

область II

$$\Pi_{z2}^h = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_2^h(q_1, q_2) \sin \frac{2\pi n}{d} z + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \bar{\psi}_2^h(q_1, q_2) \cos \frac{2n-1}{d} \pi z,$$

$$\Pi_{z2}^e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \psi_2^e(q_1, q_2) \cos \frac{2\pi n}{d} z + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \bar{\psi}_2^e(q_1, q_2) \sin \frac{2n-1}{d} \pi z,$$

$$0 \leq |z - \nu D| \leq \frac{d}{2},$$

$$\Pi_{z2}^h = \Pi_{z2}^e = 0, \quad \frac{d}{2} \leq |z - \nu D| \leq \frac{D}{2}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad D = 2d.$$

Здесь  $q_{1,2}$  — обобщенные координаты,  $d$  — ширина ячеек области II,  $D$  — период системы.

Потенциальные функции в (3) для круглого диафрагмированного волновода (рис. 2а) представляются комбинациями цилиндрических (радиальная зависимость) и тригонометрических (угловая зависимость) функций; для прямоугольного волновода с ламелями (рис. 2б) — комбинациями тригонометрических функций.

Дисперсионное уравнение несимметричных  $HE_{mn}$  ( $EH_{mn}$ )-волн круглого диафрагмированного волновода с помощью стандартной процедуры МЧО [4] получается из граничных условий

$$E_{z1} = E_{z2}|_{r=a}, \quad E_{\varphi 1} = E_{\varphi 2}|_{r=a},$$

$$H_{z1} = H_{z2}|_{r=a}, \quad H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}|_{r=a},$$

соответствующих несамосопряженной краевой задаче. В нулевом приближении, когда полагаем поле практически не меняющимся по продольной координате в пределах ячейки (приближение справедливо при  $D \ll \lambda$ ), оно имеет вид

$$\frac{J'_n(\alpha_{10}a)}{J_n(\alpha_{10}a)} \left[ \frac{J'_n(\alpha_{10}a)}{J_n(\alpha_{10}a)} - \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \frac{\chi'_{1n}(\alpha_{20}a)}{\chi_{1n}(\alpha_{20}a)} \frac{\sin(\beta_0 D/2)}{\sin(\beta_0 d/2)} \right] = \left( \frac{n\beta_0}{\alpha_{10}\alpha_{20}a} \right)^2, \quad (5)$$

где

$$\alpha_{10} = \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta_0^2}, \quad \alpha_{20} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$\chi_{1n}(\alpha_{20}a) = J_n(\alpha_{20}r)N_n(\alpha_{20}b) - N_n(\alpha_{20}r)J_n(\alpha_{20}b),$$

$$\chi'_{1n}(\alpha_{20}a) = J'_n(\alpha_{20}r)N_n(\alpha_{20}b) - N'_n(\alpha_{20}r)J_n(\alpha_{20}b),$$

$J_n(\alpha_{20}r)$ ,  $N_n(\alpha_{20}r)$ ,  $J'_n(\alpha_{20}r)$ ,  $N'_n(\alpha_{20}r)$  — цилиндрические функции 1-го и 2-го рода и их производные.

Дисперсионное уравнение волн прямоугольного волновода с ламелями (рис. 2б) получается из граничных условий

$$E_{z1} = E_{z2}|_{y=c}, \quad E_{x1} = E_{x2}|_{y=c}, \quad (6)$$

$$H_{z1} = H_{z2}|_{y=c}, \quad H_{x1} = H_{x2}|_{y=c},$$

которые в совокупности с граничными условиями на экранирующей поверхности соответствуют несамосопряженной задаче.

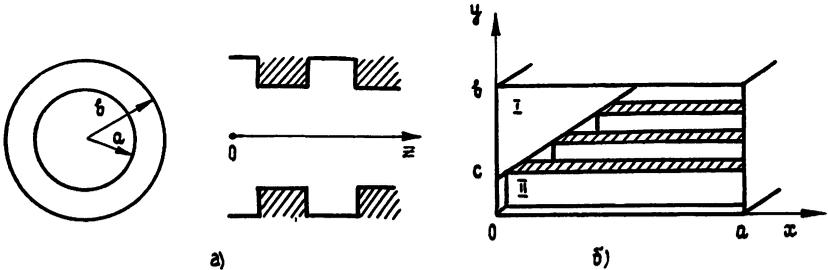


Рис. 2.

В нулевом приближении, когда поле полагается неизменным по продольной координате в пределах ячейки, из граничных условий (6) сохраняются только первые три. Причем третья принимает вид

$$E_{x1} = 0|_{y=c}.$$

В этом приближении дисперсионное уравнение записывается как

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_{2y}c}{\alpha_{2y}} + \operatorname{tg}(b-c)\alpha_{1y} \frac{\alpha_{1y}\alpha_{10}^2}{(\beta_0\pi/a)^2 + (2\pi/\lambda)^2\alpha_{1y}^2} = 0, \quad (7)$$

где

$$\alpha_{1y} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - (\pi/a)^2 - \beta_0^2}, \quad \alpha_{2y} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - (\pi/a)^2},$$

$$\alpha_{10} = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - \beta_0^2}.$$

В первом приближении, когда в области ячеек (II) учитывается три гармоники, дисперсионное уравнение, получающееся с использованием полного комплекта граничных условий (6), представляет собой детерминантное уравнение одиннадцатого порядка. Ввиду громоздкости оно не приводится, хотя результаты его решения ниже будут рассматриваться.

Эквивалентность получаемых в используемой формулировке дисперсионных уравнений исходным крайевым задачам показана в работе [5].

На рис. 3 приведены дисперсионные характеристики волны  $HE_{11}$  в круглом диафрагмированном волноводе, полученные в результате решения уравнения (5) (на рис. 3  $\tilde{\beta} = \beta\lambda/2\pi$ ,  $D/b=0,2$ ,  $d/b=0,1$ ). Как видно из рисунка, при малых отверстиях диафрагм дисперсия имеет аномальный характер. При увеличении отверстий дисперсионные характеристики приобретают двузначные участки, которые, как видно из рисунка, имеют место в достаточно узком диапазоне изменения параметра  $a/b$ . При дальнейшем увеличении относительного размера отверстий  $a/b$  двузначные участки на дисперсионных характеристиках исчезают, и дисперсия становится нормальной.

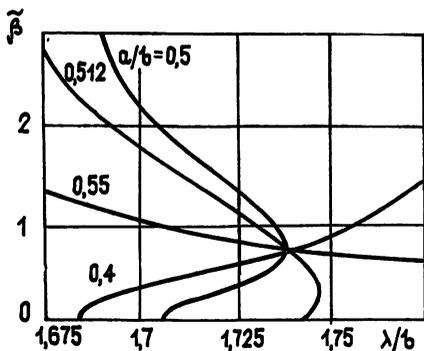


Рис. 3.

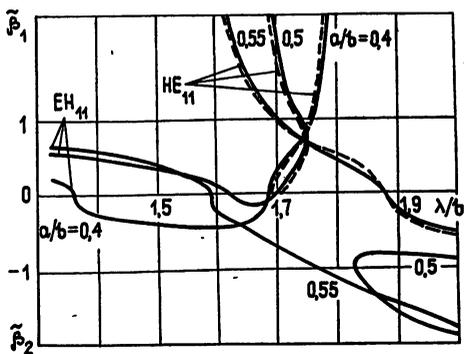


Рис. 4.

На рис. 4 приведены дисперсионные характеристики волн  $HE_{11}$  и  $EH_{11}$  (на рис. 3—6  $\tilde{\beta} = \beta\lambda/2\pi$ ). Как видим, у волны  $EH_{11}$  дисперсия во всем частотном диапазоне нормальная. Характеристика волны  $HE_{11}$  имеет двузначный участок. В области мнимых  $\beta$  характеристики указанных волн соединяются. Аналогичная картина, как известно [6], наблюдается в круглом двухслойном экранированном волноводе. При этом между распространяющимися и реактивно-затухающими волнами возникает область разделения [6], в которой существуют комплексные волны [7]. Таким образом, и у диафрагмированных волноводов имеют место области существования комплексных волн.

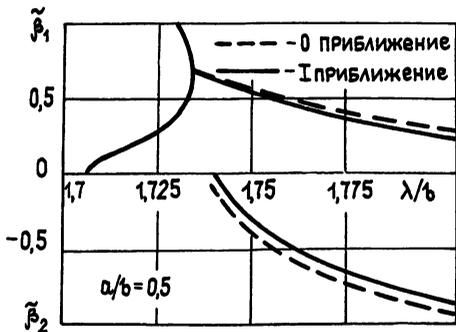


Рис. 5.

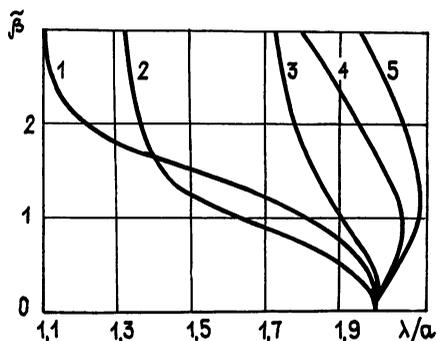


Рис. 6.

На рис. 5 приведены дисперсионные характеристики и характеристики затухания комплексных волн. Здесь же показаны результаты решения дисперсионного уравнения в первом приближении (сплошная кривая). Как видим, они отличаются от полученных в нулевом приближении

жении не более чем на один процент, что говорит о достаточно быстрой сходимости решения краевой задачи по интегральным характеристикам.

В случае симметричных волн из (4) остается лишь одна пара граничных условий: либо первое и четвертое (волны  $E_{0q}$ ), либо второе и третье (волны  $H_{0q}$ ). В результате задача становится самосопряженной и как следствие — отсутствие аномальной дисперсии и комплексных волн.

На рис. 6 представлены результаты решения дисперсионного уравнения для основной волны прямоугольного волновода с ламелями, записанного в первом приближении (кривая 1— $b=0,3$ ,  $c=0,2$ ,  $d=0,1$ ; 2— $b=0,7$ ,  $c=0,3$ ,  $d=0,15$ ; 3— $b=0,9$ ,  $c=0,6$ ,  $d=0,05$ ; 4— $b=0,7$ ,  $c=0,6$ ,  $d=0,05$ ; 5— $b=0,9$ ,  $c=0,8$ ,  $d=0,05$ ). Как видим, дисперсионные кривые, так же как у волны  $HE_{11}$  в круглом диафрагмированном волноводе, при определенных параметрах направляющей системы имеют двузначные участки, также наблюдается аномальная дисперсия и можно предположить существование комплексных волн. Из рис. 6 видно, что критическая частота рассматриваемой волны определяется лишь горизонтальным размером  $a$  поперечного сечения волновода.

Это нетрудно показать и аналитически. В критическом режиме, когда  $\lambda_b \rightarrow \infty$  (длина волны в волноводе), можно пользоваться нулевым приближением дисперсионного уравнения. При  $\beta_0=0$  оно имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha_{2y}^{\text{кр}} c + \operatorname{tg} \alpha_{2y}^{\text{кр}} (b - c) = 0,$$

откуда следует

$$\sin \alpha_{2y}^{\text{кр}} b = 0.$$

В результате  $\alpha_{2y}^{\text{кр}} b = \pi n$  и при  $n=0$  получаем  $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ . В связи с этим основную волну прямоугольного волновода с ламелями можно классифицировать как квази- $HE_{10}$ .

Численное решение уравнения (7) в диапазоне частот показало, что дисперсионные характеристики основной волны, получаемые на его основе, ни при каких параметрах волновода не имеют двузначных участков, аномальная дисперсия отсутствует. Такой результат объясняется неполнотой системы граничных условий, используемых при выводе дисперсионного уравнения в нулевом приближении.

Таким образом, краевые задачи для диафрагмированных волноводов, являясь в общем случае несамосопряженными, включают в спектр собственных волн волны с аномальной дисперсией и комплексные волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
2. Веселов Г. И., Раевский С. Б. // Радиотехника. 1987. Т. 42. № 8. С. 64.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
4. Радионов А. А., Раевский С. Б. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1977. Т. 20. № 9. С. 69.
5. Ильинский А. С., Муталлимов М. М. // ЖВММФ. 1985. Т. 25. № 3. С. 381.
6. Веселов Г. И., Любимов Л. А. // Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8. № 9. С. 1530.
7. Раевский С. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 1. С. 112.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
9 марта 1988 г.

#### ABOUT WAVELENGTH SPECTRUM OF DIAPHRAGMATIC WAVEGUIDES

V. F. Barinova, G. V. Pavlovskaya, S. B. Raevskij

The problems of inherent wavelength spectrum of periodic-unregular electrodynamic structures are discussed. The calculation results of wavelength dispersion in diaphragmatic waveguides are described.

УДК 621.378.325

## ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ФОКУСИРОВКЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ СЕГМЕНТНЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

*В. А. Трофимов*

Анализируется проблема фокусировки оптического излучения с помощью сегментных зеркал. Записан алгоритм расчета наклонов и смещения отдельных сегментов. Обсуждаются особенности численного моделирования оптического излучения при наличии узких провалов в его начальном профиле интенсивности. Приведены результаты формирования сфокусированных пучков сегментными зеркалами.

1. В настоящее время одной из наименее изученных проблем адаптивной оптики является фокусировка световых пучков сегментированными зеркалами, которые целесообразно использовать, например, для фокусировки пучков большого начального радиуса. Как известно [1-3], такие зеркала состоят из отдельных сегментов, перемещающихся и поворачивающихся друг относительно друга. Эффективность применения таких зеркал определяется, во-первых, точностью формирования ими требуемого распределения волнового фронта, во-вторых, влиянием узких провалов в начальном распределении амплитуды пучка (их возникновение связано с наличием зазоров между пластинами зеркала) на характер распространения оптического излучения. Наличие этих провалов представляет серьезную трудность для численного моделирования, так как вблизи границы сегмента комплексная амплитуда пучка изменяется очень быстро по сравнению с ее изменением в пределах пластин [4]. Напомним, что такие задачи, в которых существуют по одной и той же координате два сильно различающихся масштаба изменения функции, принято называть задачами с пограничным слоем. Ситуация осложняется еще тем, что ширина провалов и, вообще говоря, их положение изменяются во времени при адаптивном управлении сегментированным зеркалом.

В настоящее время (насколько известно автору) отсутствуют эффективные численные методы, способные с высокой точностью описывать распространение светового пучка, имеющего в своем профиле узкие провалы интенсивности (под эффективными методами здесь понимаются методы, сравнимые по объему памяти и времени вычислений с методами расчета нелинейных искажений оптического излучения, отраженного от гибкого зеркала). Поэтому цель данной работы заключается, во-первых, в описании (и кратком анализе) различных подходов моделирования профиля сегментированного зеркала, во-вторых, в описании алгоритмов оптимизации сдвигов и наклонов его пластин, в-третьих, в анализе различных подходов к численному моделированию распространения в линейной и керровской средах пучка, отраженного от такого зеркала. Именно эти три проблемы, на наш взгляд, составляют основу для численного моделирования фокусировки оптического излучения сегментными зеркалами.

2. Как известно (см., например, [5]), распространение световых пучков описывается квазиоптическим уравнением, которое в безразмерных переменных для регулярной нелинейной среды имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A + i\alpha_{\text{нл}} A = 0, \quad (1)$$

где  $\dot{A}(z, x, y)$  — нормированная комплексная амплитуда,  $z$  измеряется в дифракционных длинах  $l_{\perp} = 2ka^2$ ,  $k$  — волновое число,  $a$  — начальный радиус пучка,  $x$  и  $y$  — нормированные на  $a$  поперечные координаты,  $\Delta_{\perp}$  — поперечный оператор Лапласа,  $\alpha$  — превышение начальной мощности пучка над мощностью самовоздействия, нелинейная добавка  $\epsilon_{нл}$  к диэлектрической проницаемости описывает отклик среды, которая для кубичной среды равна  $|A|^2$ , а для линейной среды — нулю. Отметим, что выбор для анализа этих двух сред связан с тем обстоятельством, что для них известны инварианты распространения

$$I_1 = \iint |A(z, x, y)|^2 dx dy, \quad I_2 = \text{Im} \iint \left\{ A \frac{\partial A^*}{\partial x} \right\} dx dy, \quad (2)$$

$$I_3 = \iint \left\{ |\nabla A|^2 - \frac{\alpha}{2} |A|^4 \right\} dx dy,$$

постоянство которых необходимо контролировать в численных экспериментах. Тем самым можно проверить достоверность (правильность) получаемых в численных экспериментах результатов и выбрать наиболее приемлемые, с точки зрения сохранения значения инвариантов, различные методы для уравнения квазиоптики.

Уравнение (1) необходимо дополнить граничным условием

$$A(0, x, y) = \bar{f}(x, y) \exp[iS(x, y)], \quad (3)$$

где  $S$  — волновой фронт,  $\bar{f}(x, y)$  — амплитудное распределение оптического излучения после отражения от сегментного зеркала,

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) \sum_{p, q=1}^{M_0} R_{pq}(x, y). \quad (4)$$

Здесь  $f(x, y)$  — первоначальный профиль пучка,  $R_{pq}$  — коэффициент отражения отдельной пластины,  $M_0$  — число сегментов по одной координате; для простоты считаем, что их число по осям  $x$  и  $y$  одинаково. При этом сегментированное зеркало вносит в волновой фронт пучка следующий фазовый сдвиг:

$$S_c(x, y) = \sum_{p, q=1}^{M_0} [\varphi_{xp}(x-x_p) + \varphi_{yq}(y-y_q) + \theta_{pq}] R_{pq}, \quad (5)$$

$\theta_{pq}$  — продольный сдвиг сегмента  $(p, q)$ , а  $\varphi_{xp}$  и  $\varphi_{yq}$  — его наклоны по осям  $x$  и  $y$ ;  $x_p, y_q$  — координаты центра сегмента.

Рассчитать оптимальные значения наклонов и сдвигов можно одним из двух способов. Первый из них состоит в расчете (например, градиентным методом) оптимального волнового фронта  $S_{\text{опт}}$ , при котором реализуется экстремум введенного для оценки эффективности компенсации искажений оптического излучения критерия качества, например, функционала принимаемой в заданную апертуру мощности пучка, а затем выставить сегменты так, чтобы реализовать минимум функционала

$$J_s = \iint (S_{\text{опт}} - S_c)^2 \kappa(x, y) dx dy = \iint [S_{\text{опт}}(x, y) - \sum_{p, q=1}^{M_0} (\varphi_{xp}(x-x_p) + \varphi_{yq}(y-y_q) + \theta_{pq}) R_{pq}]^2 \kappa(x, y) dx dy, \quad (6)$$

где  $\kappa(x, y)$  характеризует передающую апертуру. Функционал  $J_s$  равен среднеквадратичному отклонению формы зеркала от требуемой поверхности. Следует подчеркнуть, что при малых отклонениях  $S_c$  от  $S_{\text{опт}}$

функционал (6) связан со значением пиковой интенсивности на оси пучка (числом Штреля) и широко используется в литературе (см., например, [1-3]) при расчете влияния ошибок формирования зеркалами требуемых поверхностей, а также некомпенсируемых случайных aberrаций и ошибок при реализации оптимальных возмущений приводов в гибких зеркалах. Поэтому на первом этапе исследований для выяснения предельного качества формирования сегментным зеркалом заданного распределения  $S_{\text{опт}}$  целесообразно исследовать зависимости  $J_s$  от соотношения радиуса пучка и размера отдельной пластины, от числа сегментов и их оптимальных параметров. Причем целесообразно сначала провести отдельно оптимизацию наклонов и сдвигов с целью определения их вклада в качество формируемой поверхности. Такой анализ для компенсации случайных искажений оптического излучения в линейной среде при некоторых предположениях выполнен в [6, 7], а в [8] рассчитаны  $J_s$  (и другие функционалы), оптимальные наклоны и сдвиги сегментов при формировании требуемой поверхности сегментированного зеркала с целью фокусировки оптического излучения на приемник, расположенный в регулярной среде.

Второй способ состоит в непосредственной оптимизации наклонов и сдвигов сегментов с целью достижения экстремального значения выбранного для оценки концентрации мощности на приемнике функционала (например,  $J_p$  — функционал принимаемой в заданную апертуру мощности). В частности, при проведении оптимизации градиентным методом [9]

$$(\theta_{lm})_{n+1} = (\theta_{lm})_n - \gamma_{lm} (\partial J / \partial (\theta_{lm})_n), \quad (7)$$

$$(\varphi_{xl})_{n+1} = (\varphi_{xl})_n - \gamma_{xl} (\partial J / \partial (\varphi_{xl})_n), \quad n=0, 1, \dots, \quad 1 \leq l, m \leq M_0,$$

где  $J$  — выбранный критерий качества,  $\gamma$  — константы управления по каждому из каналов. Вычислить производную функционала нетрудно с помощью стандартной техники введения сопряжений к (1), (3) задачи [10] (обозначим решение этой задачи через  $\psi$ ). Тогда получим, что

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_{xp}} = 2 \iint \bar{f}(x, y) (x - x_p) \text{Im}(\psi^* \exp(iS_c)) \times \\ \times \sum_{q=1}^{M_0} R_{pq} dx dy, \quad (8)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_{lm}} = 2 \iint \bar{f}(x, y) R_{lm} \text{Im}(\psi^* \exp(iS_c)) dx dy.$$

Выражение для  $\partial J / \partial \varphi_{yq}$  записывается аналогично  $\partial J / \partial \varphi_{xp}$ . Звездочка означает комплексное сопряжение.

Из (8) следуют важные для практики выводы. Во-первых, производная функционала по  $\theta_{lm}$  вычисляется в пределах одного сегмента, что дает возможность организовать параллельное вычисление их ( $\partial J / \partial \theta_{lm}$ ). Во-вторых, аналогичная ситуация имеет место при вычислении наклонов, например, по оси  $x$  ( $\partial J / \partial \varphi_{xp}$  не зависит от распределений амплитуд  $A$  и  $\psi$  в пределах соседних по этой оси сегментов). Следовательно, при оптимизации наклонов существует возможность организовать одновременную обработку информации в пределах каждой группы сегментов, расположенных параллельно осям координат. В-третьих, важно отметить следующее: если при подходе, основанном на минимизации  $J_s$ , управление сдвигами сегментов, их наклонами в пределах каждой группы сегментов осуществляется независимо (и независимо друг от друга) [8], то при оптимизации профиля зеркала по (7) с целью компенсации нелинейной расходимости все каналы управления взаимосвязаны через комплексную амплитуду сопряженной задачи (или от-

раженного от приемника сигнала в натуральных экспериментах). Вчетвертых, при фокусировке оптического излучения в линейной среде при управлении по (7) (так же как и при подходе, основанном на минимизации функционала  $J_s$ ) возможно распараллелить управление по отдельным каналам. Подчеркнем также, что смещение сегмента, кратное  $2\pi$ , очевидно, не приведет к изменению критерия качества на приемнике. Поэтому при оптимизации  $\theta_{pq}$  необходимо вводить ограничения [8], которые являются регуляризаторами по Тихонову [9].

В заключение данного раздела необходимо обсудить возможные способы задания функций  $R_{pq}$ . Очевидно, что на практике коэффициент отражения отдельного сегмента равен

$$R_{pq} = \begin{cases} 1, & |x-x_p| \leq L_c \cos \varphi_{xp}, \quad |y-y_q| \leq L_c \cos \varphi_{yq}, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad (9)$$

$2L_c$  — размер сегмента. Для простоты считаем, что сегменты имеют квадратную форму. Такую функцию  $R_{pq}$  целесообразно использовать при аналитических исследованиях, связанных с изучением возможностей формирования сегментным зеркалом требуемой поверхности (и она использовалась, в частности, в [6,8]), когда исходные выражения для оценки качества представляют собой интегральные соотношения (например, (6)). При численном же моделировании описание с помощью разрывной функции (9) коэффициента отражения зеркала неприемлемо, так как решение исходной дифференциальной задачи (1), (3) задано в классе непрерывных функций, имеющих непрерывные вторые производные по поперечным координатам, а решение разностной задачи должно сходиться к нему. Поэтому вместо (9) в численных экспериментах следует использовать другие аппроксимации коэффициента отражения зеркала, такие, чтобы, во-первых, они были достаточно близки к (9) и, во-вторых, имели непрерывные производные. Данным требованиям удовлетворяют функции, например, вида

$$R_{pq} = \exp \left[ - \left( \frac{x-x_p}{L_c \cos \varphi_{xp}} \right)^{m_c} - \left( \frac{y-y_q}{L_c \cos \varphi_{yq}} \right)^{m_c} \right], \quad (10)$$

параметр  $m_c$  характеризует крутизну границы сегмента, или

$$R_{pq} = 1 - \frac{1}{2} \left[ 4 + \operatorname{th} \left( \frac{x-x_p-L_c-\delta_{xp}}{\delta_{xp}} \right)^7 + \operatorname{th} \left( \frac{x_p-x+L_c-\delta_{xp}}{\delta_{xp}} \right)^7 + \operatorname{th} \left( \frac{y-y_q-L_c-\delta_{yq}}{\delta_{yq}} \right)^7 + \operatorname{th} \left( \frac{y_q+L_c-y-\delta_{yq}}{\delta_{yq}} \right)^7 \right], \quad (11)$$

где  $\delta_{xp}$ ,  $\delta_{yq}$  — зазоры между сегментами по осям  $x$ ,  $y$ . Их ширина определяется через углы наклона соседних сегментов. Отметим, что отличие (11) от (10) состоит лишь в законе перехода пучка в область геометрической тени. Использовались также и другие способы задания вблизи границы сегмента перехода в область геометрической тени пучка, в частности, тригонометрические функции  $\cos^2 \dots$ . Анализ их представлен в разд. 4

3. Проанализируем качество формирования требуемой поверхности сегментным зеркалом. Как отмечалось выше, в [8] аналитически исследованы закономерности фокусировки световых пучков сегментным зеркалом в регулярной среде. Здесь же приводятся результаты численного моделирования по минимизации  $J_s$  градиентным методом (см. (7)) при управлении сдвигами сегментов. Цель исследования состоит, во-первых, в анализе зависимости  $J_s$  от размера пластин (и подтверждении полученных в [8] закономерностей), во-вторых, в анализе скорости сходимости градиентного метода от номера канала управления. Для простоты рассмотрим одномерный случай (координата  $y$  опускается) с апертурной функцией вида  $\exp(-x^2)$ , коэффициентом отражения сег-

мента в виде (10) с  $m_c=10$ ; требуется, например, сформировать  $S_{\text{опт}}=x^2$ , обеспечивающий фокусировку пучка в линейной среде. Отметим, что аппроксимация  $R_p$  (ниже индекс  $q$  опускается) по (10) вместо (9) не привела в численных экспериментах к сколь-нибудь существенным отличиям как в значении функционала  $J_s$ , так и в значениях оптимальных сдвигов сегментов, что подтверждает правомерность перехода от (9) к (10) или (11).

Прежде всего отметим, что при добавлении очередного сегмента оптимальные значения сдвигов предыдущих сегментов не изменяются (следовательно, вывод о параллельном управлении, сделанный в [8], справедлив). Численные эксперименты подтвердили также полученные в [8] зависимости оптимальных сдвигов сегментов от номера канала.

Второй вывод (важный для практики) состоит в том, что наиболее быстро устанавливаются оптимальные значения центральных сегментов. Поэтому при удалении от оси пучка необходимо увеличивать константы управления в соответствующем канале (7) по закону

$$\gamma_i = \gamma_0 / \int R_i(x) \kappa(x) dx, \quad (12)$$

где  $\gamma_0$  — константа, определяемая из условия сходимости алгоритма. Эффективность использования (12) подтвердили численные эксперименты. Так, например, при  $\gamma_i = \gamma_0 = 1$  и оптимизации сдвигов четырех первых сегментов зеркала с  $2L_c = 0,4$  требуется 83 итерации, в то же время оптимизация всех сегментов (в данном случае  $M_0 = 7$ ) при использовании в (7)  $\gamma_i$ , определяемых по (12) с  $\gamma_0 = 1$ , требует всего лишь 12 итераций. При дальнейшем увеличении числа сегментов выигрыш в числе итераций быстро возрастает. Отметим, что управлению сдвигами и наклонами по (7) присущи известные черты (недостатки) градиентного метода.

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены зависимости функционала  $J_s$  от размера пластин. Как следует из рисунка, в широких пределах изменения  $L_c$  имеет место линейный закон зависимости  $J_s$  от  $L_c$ .

Рисунок также демонстрирует возможность эффективного формирования требуемой поверхности с помощью одной операции: сдвига сегментов. Для увеличения же скорости стремления к нулю  $J_s$  при уменьшении размера пластин, очевидно, необходимо оптимизировать наклоны сегментов. Это приводит, как уже отмечалось, к возникновению узких провалов в профиле пучка. Поэтому необходимо исследовать влияние этих провалов на характер распространения пучка и правильность получаемых в численных экспериментах расчетов. Этому вопросу посвящен следующий раздел работы.

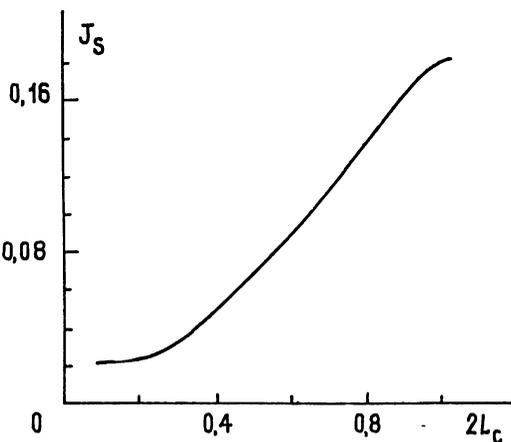


Рис. 1. Зависимость функционала  $J_s$  от размера пластин сегментного зеркала.

Этому вопросу посвящен следующий раздел работы.

4. При численном моделировании фокусировки щелевого пучка сегментным зеркалом по алгоритму (7), (8) на приемник, расположенный в линейной и керровской дефокусирующей среде, было обнаружено, что образующие провалы в распределении интенсивности приводят (как в линейной, так и керровской среде) к развитию неустойчивости, проявляющейся в сильно изрезанной структуре профиля интенсивности. Это обстоятельство потребовало проведения дополнительного исследования эффективности применяемых для расчета распространения световых

пучков численных методов, в частности, применяемых [12, 13] симметричных разностных схем, основанных на принципе консервативности [14]. Так как в численных экспериментах принципиального различия в проявлении (т. е. вычислительной неустойчивости) узких провалов на распространение оптического излучения в линейной и керровской средах не было обнаружено, то, естественно, дальнейшие исследования выполнялись для линейной среды.

Прежде чем переходить к обсуждению полученных результатов, следует еще подчеркнуть, что вопросы численного решения задач с пограничным слоем (см. разд. 1) и с разрывными начальными условиями привлекают большой интерес различных исследователей [15-19], и эта проблема до сих пор не решена. Сейчас используются два подхода к решению таких задач (как правило, одномерных). Первый состоит в измельчении по специальному закону шага сетки по поперечным координатам в местах провала интенсивности. Важно, что при этом необходимо подстраивать сетку к распределению интенсивности. Трудность состоит в том, что априори нельзя выделить возможные «направления» изменения профиля. Поэтому здесь необходимо использовать адаптируемые к решению сетки [17-19].

Другой подход состоит в изменении по специальному закону шага интегрирования по продольной координате. В литературе известен данный метод для численного решения уравнения теплопроводности с разрывными начальными условиями [15, 16], который позволил получить хорошие результаты. Важное его преимущество заключается в возможности построения сетки по поперечным координатам с постоянным шагом. Однако непосредственный перенос методики авторов [15, 16] не всегда возможен из-за отсутствия выраженного «направления» эволюции провалов в распределении интенсивности. В численных экспериментах использовались обе эти методики, а также их объединение.

Для правильного описания в численных экспериментах происходящих процессов следует иметь в виду, что по продольной координате имеется три характерные длины: дифракционная длина пучка с распределением  $f(x, y)$ , субпучков  $-2kL_c^2$  и  $l_d = 2k\delta^2$  ( $\delta$  — минимальное значение  $\delta_{xp}$ ,  $\delta_{yq}$ , отличных от нуля). Следовательно, шаг по продольной координате необходимо ограничить этим наименьшим размером. Это же утверждение можно получить из других соображений: нетрудно видеть, что в точках провала интенсивности градиент по продольной координате возрастает как  $\delta^{-1}$ . Поэтому изменение вторых производных по  $x$  и  $y$  в окрестности этих точек будет пропорционально  $\delta^{-2}$ .

Численные эксперименты, проведенные для зеркал с функцией отклика (10) ( $\varphi_{xp} = 0$ ) с различным отношением ширины гауссова  $\exp[-(x/0,5)^2]$  пучка к ширине зазоров  $2\delta$  между сегментами и соотношениями между шагами по продольной координате  $h_z$  и по поперечной координате в области пластины (обозначим его через  $h_x$ ) и в области зазора (обозначим его через  $h_{x\delta}$ ), позволяющие сделать следующие выводы. Первое, что следует подчеркнуть, заключается в следующем: сохранение интеграла мощности пучка  $I_1$  не гарантирует правильности получаемых результатов. С ростом  $\delta$  (от 0,01 до 0,05) радиус пучка, определяемый через второй момент распределения интенсивности, в конце трассы распространения  $z=0,16$  увеличивался от 0,47 (при  $\delta=0$  зазоры отсутствуют) до 0,694 (при  $\delta=0,05$ ), параметры в (10) равны  $m_c = 10$ ,  $2L_c = 0,5$ ;  $h_z = h_x = h_{x\delta} = 0,01$ . При этом значения инварианта  $I_2$  изменяются от  $7 \cdot 10^{-4}$  ( $\delta=0,02$ ) до 0,003 ( $\delta=0,05$ ); при  $\delta=0$   $I_2 = 10^{-10}$ . Значение же интеграла  $I_3$  монотонно увеличивалось от  $I_3 = 16$  ( $\delta=0$ ) до  $I_3 = 55$  ( $\delta=0,05$ ). Зависимость пиковой интенсивности более сложная: она сначала увеличивается, а затем уменьшается. Возможно, это объясняется изрезанностью профиля пучка. Отметим, что в процессе распространения значения интегралов  $I_2$  и  $I_3$  сохраняются хорошо. Однако изрезанность профиля интенсивности пучка показывает, что точ-

ность получаемых локальных его характеристик (например, максимальной интенсивности, координаты ее достижения и т. д.) низка.

С целью устранения изрезанности профиля вычислительной неустойчивости проводились расчеты с фиксированными  $2L_c=0,5$ ,  $\delta=0,05$ ,  $h_z=0,01$  и различными соотношениями  $h_x$  и  $h_{x\delta}$ . Оказалось, что профиль пучка становится достаточно монотонным, если  $h_x/h_{x\delta}=5$ , т. е. равно отношению ширины пластины к ширине зазора  $2\delta=0,1$ . Модуляция профиля интенсивности пучка в точке ее максимума не превышает нескольких процентов и переход в область геометрической тени пучка в пределах первого максимума также является монотонным. На краях же профиля интенсивности осцилляции все же имеют место. Подчеркнем, что второй интеграл в этом случае сохраняется с высокой точностью  $I_2=10^{-7}$  (при  $z=0,16$ ), а  $I_3=29$ . При других же соотношениях шагов  $h_x$  и  $h_{x\delta}$   $I_3$  изменяются в пределах от 23 до 33. Достаточно сильно изменяются и другие характеристики пучка.

В следующей группе расчетов изменялся шаг по продольной координате. При этом параметры были следующими:  $m_c=10$ ,  $\delta=0,05$ ,  $2L_c=0,5$ ,  $h_x=h_{x\delta}=0,01$  — для одной группы расчетов и  $h_x/h_{x\delta}=5$  — для другой группы расчетов. Заметим, если  $h_x/h_{x\delta}\neq 5$ , то изрезанность профиля пучка была, хотя амплитуда «выбросов» уменьшалась при уменьшении  $h_z$ . Наилучший результат с точки зрения устранения неустойчивости был получен при выполнении указанного выше условия на соотношения шагов. Однако при уменьшении  $h_z$ , во-первых, абсолютная величина  $I_3$  увеличивалась, во-вторых, ухудшалось его сохранение ( $I_3$  изменялся вдоль  $z$  на 10—15%), что указывает на плохое описание процесса распространения пучка вблизи поверхности зеркала. Поэтому рассматривалась еще методика, предложенная в [15, 16]: шаг по продольной координате изменялся, в частности, по закону

$$h_{zj} = h_x^{-4}(1,1)^j \quad (13)$$

( $j$  — номер слоя по  $z$ ), если  $h_z < 0,01$ , и  $h_z = 0,01$  — в противном случае, а по поперечной координате оставался постоянным. В этом случае значения интегралов  $I_2, I_3$  сохраняются с требуемой точностью на всей трассе распространения по  $z$  ( $0 \leq z \leq 0,16$ ). Однако время расчетов, естественно, увеличивалось по сравнению со случаем  $h_z = \text{const}$ . Сочетание данного метода с выполнением условия на соотношения шагов по поперечной координате позволяет рассчитывать распространение пучков, имеющих узкие провалы в их распределении амплитуды.

В заключение раздела отметим еще, что проводились расчеты на неравномерных сетках по  $h_x$ , в которых переход от шага  $h_x$  к  $h_{x\delta}$  осуществлялся по экспоненциальному или степенному закону при постоянном шаге по  $z$ . Коэффициент отражения в провалах изменялся также по экспоненте. Из них следует, что для экспоненциальных сеток результаты получились такими же, как и для сеток без согласования перехода от шага  $h_x$  к  $h_{x\delta}$ , а для сеток со степенным согласованием  $h_x$  и  $h_{x\delta}$  даже при невыполнении условия  $h_x/h_{x\delta} = L_c/\delta$  распределение амплитуды пучка по поперечной координате было значительно меньше изрезанным по сравнению с равномерной сеткой по  $x$ . Таким образом, сочетание приведенных здесь методов (выполнение соотношения шагов, их согласование по степенному закону, изменение шага по продольной координате) позволит устранить полностью вычислительную неустойчивость и моделировать с высокой точностью распространение пучков с узкими провалами в начальном распределении амплитуды. В случае наложения на профиль излучения мелкомасштабных флуктуаций необходимо использовать адаптируемые к решению сетки [18, 19].

5. Краткие выводы. В настоящей работе предложены и обсуждены различные функции для описания сегментированного зеркала, записаны алгоритмы оптимизации сдвигов и наклонов сегментов на основе

двух подходов: минимизации функционала среднеквадратичного отклонения профиля зеркала от заданной поверхности, максимизации критерия качества фокусировки излучения на приемник. Предложены законы изменения констант управления в каждом канале. Численно показана возможность организации параллельного управления сдвигами сегментов. Обсуждены различные подходы к численному моделированию распространения светового пучка, имеющего в начальном распределении амплитуды узкие провалы, и описаны методы, практически свободные от развития вычислительной неустойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Дж. У. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 6. С. 31.
2. Тараненко В. Г., Горохов Ю. Г., Романюк Н. С. // Зарубежная радиоэлектроника. 1982. № 8. С. 19.
3. Адаптивная оптика: Пер. с англ. / Под ред. Э. А. Витриченко. — М.: Мир. 1980.
4. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1988. Т. 52. № 2. С. 377.
5. Ахманов С. А. и др. // Изв. вузов. Радифизика. 1980. Т. 23. № 1. С. 3.
6. Киракосянц В. Е., Логинов В. А., Слонов В. В. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. № 12. С. 2485.
7. Артамонов Н. Н., Киселев Г. Л., Козлов С. Н., Печенов А. С. // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1984. Т. 48. № 7. С. 1415.
8. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 6. С. 44.
9. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
10. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
11. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. // Квантовая электроника. 1984. Т. 14. № 4. С. 663.
12. Карамзин Ю. Н. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. № 74. М., 1982.
13. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1186.
14. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
15. Мокин Ю. И. // ЖВММФ. 1975. Т. 15. № 5. С. 1183.
16. Фещенко А. И. // Вестник Московского ун-та. — Сер. Вычислит. матем. и кибернетика. 1978. № 2. С. 57.
17. Бахвалов Н. С. // ЖВММФ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841.
18. Иванова Т. С. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 196. М., 1987.
19. Дегтярев Л. М., Дроздов В. В., Иванова Т. С. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 164. М., 1986.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6 июля 1988 г.

#### A NUMERICAL EXPERIMENT OF FOCUSING OF LIGHT BEAMS BY THE COMPOSITE MIRROR

*V. A. Trofimov*

The problem of focusing of light beams with the help of the segment mirror is analyzed. An algorithm of the calculation of an inclination and displacement of a segment is written. Peculiarities of the numerical modeling of a propagation of light beam which has narrow dark stripes in a profile of the intensity are discussed.

УДК 621.372.8

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН НА КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛЕНТ В СЛОИСТОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

В. А. Кузнецов, А. М. Лерер, Г. Н. Шеламов

Рассмотрена дифракция электромагнитных волн на произвольном числе полосок в металлическом волноводе, заполненном слоистым диэлектриком, и на полосках, находящихся на поверхности плоского диэлектрического волновода. Задача решена методом частичных областей с продольным разбиением на частичные области, что позволяет не рассматривать в явном виде непрерывный спектр для открытых структур и затухающие типы волн для закрытых. Результаты использованы при синтезе полосовых фильтров на индуктивных полосках, выполненных с помощью интегральной технологии.

В технике СВЧ используются антенны вытекающих волн, которые представляют собой плоский диэлектрический волновод (ДВ), на поверхность которого нанесены металлические полоски. Анализ таких антенн в известной нам литературе [1, 2] проводится в приближении бесконечной периодической решетки без вариации поля вдоль полосок, что может привести к большой погрешности расчетов реальных антенн с ограниченным числом полосок и их размерами. В этом приближении не могут быть исследованы непериодические решетки, на основе которых создаются антенны с улучшенными характеристиками [3].

В настоящей работе получено решение граничной задачи дифракции волноводных волн на конечном числе металлических лент без ограничения на их размеры. Полученное решение позволяет также исследовать свойства высших вытекающих волн микрополосковой линии, строго рассчитать параметры волноводных фильтров, образованных металлическими полосками, нанесенными на диэлектрическую подложку, расположенную в  $E$ -плоскости прямоугольного волновода. Такие фильтры нашли применение в миллиметровом диапазоне [4, 5]. В отличие от этих работ в настоящей статье учитывается влияние диэлектрической подложки.

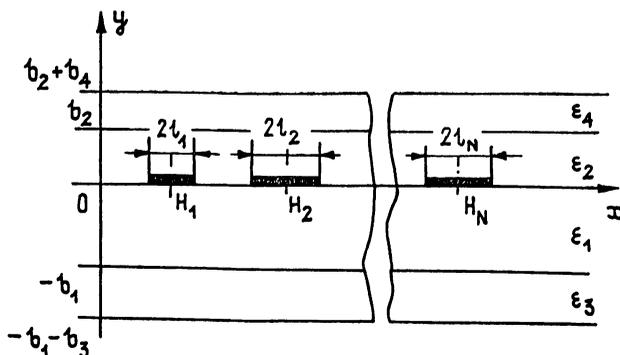


Рис. 1.

Рассмотрим плоскую слоистую структуру (границы слоев параллельны плоскости  $xOz$ ), у которой на одной из границ раздела сред расположены  $N$  бесконечно тонких идеально проводящих полосок (рис. 1).

На горизонтальных экранах выполняются граничные условия типа «электрическая» или «магнитная стенка». Один или оба экрана могут отсутствовать, тогда предполагается выполнение условий излучения.

Пусть под углом к оси  $Oz$  со стороны  $x = -\infty$  падают  $LM$ - и  $LE$ -волны, зависимость от координаты  $z$  и времени описывается множителем  $\exp[i(\omega t - hz)]$ . Введем две частичные области (ЧО)  $y \geq 0$  и  $y \leq 0$ , в каждой из которых компоненты электромагнитного поля выразим через  $y$ -составляющие электрического ( $LE$ -волны) и магнитного ( $LM$ -волны) векторов Герца  $A$  и  $F$ . Граничные условия на границах раздела сред, кроме  $y=0$ , и на горизонтальных экранах выполняются независимо для  $LE$ - и  $LM$ -волн. Поэтому в каждой из ЧО можно записать

$$F^{\pm}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{f}(\alpha) + f_0 \delta(\alpha - \alpha_e)] \frac{E^{\pm}(y, \alpha)}{E^{\pm}(0, \alpha)} e^{-i\alpha x} dx, \quad (1)$$

$$A^{\pm}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{a}(\alpha) + a_0 \delta(\alpha - \alpha_m)] \frac{M^{\pm}(y, \alpha)}{[M^{\pm}(0, \alpha)]'} e^{-i\alpha x} dx,$$

где  $\tilde{f}(\alpha)$ ,  $\tilde{a}(\alpha)$  — неизвестные функции,  $\alpha_e, \alpha_m$  — постоянные распространения падающих  $LE$ -,  $LM$ -волн,  $f_0, a_0$  — их амплитуды,  $\delta(\alpha)$  — дельта-функция. Знаки «+» и «-» означают ЧО  $y \geq 0$  и  $y \leq 0$ . Функции  $M^{\pm}(y, \alpha)$  и  $E^{\pm}(y, \alpha)$  обладают следующими свойствами: удовлетворяют уравнению Гельмгольца в каждом из слоев, граничным условиям на границах между слоями и на горизонтальных экранах или условиям излучения при отсутствии экранов. Их вид приведен в [6]. Кроме того, потенциалы  $A$  и  $F$ , записанные в виде (1), автоматически удовлетворяют условию непрерывности  $F$  и  $(\epsilon^{-1})(\partial A / \partial y)$  при  $y=0$ .

Выразим неизвестные функции  $\tilde{a}(\alpha)$  и  $\tilde{f}(\alpha)$  через фурье-преобразования плотностей тока  $\tilde{I}_z, \tilde{I}_x$ , используя граничные условия для  $H_x$  и  $H_z$  при  $y=0$ :

$$f(\alpha) = \frac{\omega \mu_0 (h \tilde{I}_x - \alpha \tilde{I}_z)}{(\alpha^2 + h^2) \varphi^e(\alpha)}, \quad \tilde{a}(\alpha) = - \frac{i(\alpha \tilde{I}_x + h \tilde{I}_z)}{(\alpha^2 + h^2) \varphi^m(\alpha)}, \quad (2)$$

где

$$\varphi^m(\alpha) = \frac{\epsilon_1 M^-(0, \alpha)}{[M^-(0, \alpha)]'} - \frac{\epsilon_2 M^+(0, \alpha)}{[M^+(0, \alpha)]'}, \quad (3)$$

$$\varphi^e(\alpha) = \frac{[E^-(0, \alpha)]'}{E^-(0, \alpha)} - \frac{[E^+(0, \alpha)]'}{E^+(0, \alpha)},$$

' означает дифференцирование по  $y$ .

Уравнения  $\varphi^m(\alpha) = 0$  и  $\varphi^e(\alpha) = 0$  являются характеристическими для  $LM$ - и  $LE$ -волн, поэтому

$$\varphi^m(\alpha_m) = \varphi^e(\alpha_e) = 0. \quad (4)$$

Рассматривая граничные условия для тангенциальных составляющих  $E$ -поля и проводя обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [f^{11}(\alpha) \tilde{I}_z(\alpha) - \alpha h f^{12}(\alpha) \tilde{I}_x(\alpha)] \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + h^2} d\alpha = \\ & = - \frac{i h}{\omega \epsilon_0} a_0 \exp(-i\alpha_m x) + f_0 \alpha_e \exp(-i\alpha_e x), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [-\alpha h f^{12}(\alpha) \tilde{I}_z(\alpha) + f^{22} \tilde{I}_x(\alpha)] \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + h^2} d\alpha =$$

$$= -i \frac{a_n a_m}{\omega \varepsilon_0} \exp(-i\alpha_m x) - f_0 h \exp(-i\alpha_e x),$$
(5)

где

$$f^{11}(\alpha) = h^2 / \varphi^m(\alpha) - k^2 \alpha^2 / \varphi^e(\alpha),$$

$$f^{12}(\alpha) = 1 / \varphi^m(\alpha) - k^2 / \varphi^e(\alpha),$$

$$f^{22}(\alpha) = \alpha^2 / \varphi^m(\alpha) - k^2 h^2 / \varphi^e(\alpha),$$

$k = 2\pi / \lambda_0$  — волновое число в вакууме,  $x \in S$ ,  $S$  — область, занятая полосками.

Из условия  $I_x = 0$ ,  $I_z = 0$  вне полосок получим вторую пару интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}_{x,z}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = 0, \quad x \in \bar{S}. \quad (6)$$

При  $h = 0$ , т. е. при падении волн перпендикулярно полоскам, система (5) распадается на два независимых уравнения,  $LE$ - и  $LM$ -волны в этом случае распространяются независимо.

Ищем решение системы парных интегральных уравнений (5) методом Галеркина. Для этого представим токи  $I_x$ ,  $I_z$  в виде ряда по ортогональным полиномам с весом, учитывающим особенность поведения токов  $I_{x,z}$  на краях полосок:

$$I_{x,z} = \sum_{p=1}^N I_{x,z}^{(p)}; \quad (7)$$

$$I_z^{(p)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-i)^j X_j^p T_j(x'_p / l_p) / \sqrt{l_p^2 - x_p'^2}, & |x'_p| \leq l_p; \\ 0, & |x'_p| > l_p \end{cases} \quad (8)$$

$$I_x^{(p)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi l_p} \sum_{j=1}^{\infty} (-i)^{j-1} / j Y_j^p U_{j-1}(x'_p / l_p) \sqrt{l_p^2 - x_p'^2}, & |x'_p| \leq l_p, \\ 0, & |x'_p| > l_p \end{cases}$$

где  $x'_p = x - H_p$  — координата, связанная с центром  $p$ -й полоски,  $X_j^p$ ,  $Y_j^p$  — коэффициенты разложения,  $T_j(x)$ ,  $U_j(x)$  — полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода соответственно. В такой записи токи  $I_x$ ,  $I_z$  автоматически удовлетворяют уравнению (6).

Подставляя (7), (8) в (5), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов  $X_j^p$ ,  $Y_j^p$ :

$$\sum_{p=1}^N \left[ \sum_{j=0}^{\infty} X_j^p A_{mj\rho q}^{11} + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^p A_{mj\rho q}^{12} \right] = - \frac{a_0 h}{\omega \varepsilon_0} \tilde{J}_m^q(\alpha_m) -$$

$$- i f_0 \alpha_e \tilde{J}_m^q(\alpha_e), \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\sum_{p=1}^N \left[ h \sum_{j=0}^{\infty} X_j^p A_{jmq}^{12} + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^p A_{mjpq}^{12} \right] = -\frac{a_0 \alpha_m}{\omega \varepsilon_0} \tilde{J}_m^q(\alpha_m) +$$

$$+ i f_0 h \tilde{J}_m^q(\alpha_0), \quad m=1, 2, \dots, \quad q=1, 2, \dots, N,$$

где

$$\tilde{J}_m^q(\alpha) = J_m(\alpha l_q) \exp(-i\alpha H_q),$$

$$A_{mjpq}^{ts} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{ts}(\alpha) J_j(\alpha l_p) J_m(\alpha l_q) \frac{\exp[i\alpha(H_q - H_p)]}{\alpha^2 + h^2} d\alpha. \quad (10)$$

При больших расстояниях между полосками ( $|H_p - H_q| \gg l_p, l_q, b_i$ ) интеграл (10) находится методом теории вычетов; при этом полагается, что в открытой задаче интегралы по разрезам в комплексной плоскости равны нулю, а для закрытой задачи вычеты по мнимым корням уравнений (4) много меньше вычетов по действительным корням в силу быстрого убывания функции  $\exp[-|\alpha(H_p - H_q)|]$ . Физически это эквивалентно учету связи между далеко расположенными полосками только по распространяющимся типам волн и пренебрежению затухающими волнами в закрытой структуре и непрерывным спектром излучения в открытой.

Для расчета интеграла связи (10) в случае близкорасположенных полосок и при  $p=q$  проводилось численное интегрирование с выделением особенности функций  $f^{ts}(\alpha)$  в полюсах  $\alpha = \alpha_r$  ( $r=1, 2, \dots$ ), являющихся постоянными распространения  $LE$ - и  $LM$ -волн в исследуемой структуре без полосок (см. Приложение). Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения подставим в (1) выражения (2) и найдем вычеты, соответствующие распространяющимся волнам. Для открытой задачи методом стационарной фазы находим диаграмму направленности излучения в дальней зоне. Соответствующие преобразования достаточно просты и здесь не приводятся.

Таблица 1

Исследование сходимости метода по числу базисных функций  $M$

$M$	$LE$ , одна полоска	$LM$ , одна полоска	$LE$ , две полоски	$LM$ , две полоски
1	0,5809 -51,4535	— —	0,8479 -22,7878	— —
2	0,3955 -37,4815	0,1457 54,4712	0,6388 4,9713	0,2491 51,7643
3	0,4090 -36,7884	0,1355 51,5048	0,6527 5,8310	0,2299 48,1040
4	0,4088 -36,7755	0,1365 51,4491	0,6524 5,8610	0,2314 48,0421
5	0,4090 -36,7635	0,1367 51,5645	0,6524 5,8645	0,2314 48,0381

Так как СЛАУ (9) является системой второго рода [6], то ее можно решать методом редукции, причем характер сходимости экспоненциальный. Бесконечные ряды (7), (8) заменяются конечными суммами с максимальным индексом  $j=M-1$ . В табл. 1 приведены результаты расчета модулей и фаз коэффициентов отражения  $LE$ - и  $LM$ -волн от одной

и двух полосок на поверхности ДВ в зависимости от числа членов в разложении токов  $I_x, I_z$  на полосках;  $l_p/b_1=0,5$ ,  $\epsilon_1=2,25$ ,  $h=0$ ,  $fb_1=60$  ГГц·мм,  $b_2=b_3=0$ ,  $b_4=\infty$ . Для  $LE$ -волн полагается, что в плоскости  $y=-b_1$  — магнитная стенка,  $H_1=0$  — для одной полоски,  $H_{1,2}=\mp 2b_1$  — для двух полосок. Из приведенных результатов видно, что для расчета матрицы рассеяния с погрешностью не более 0,1% достаточно ограничиться значениями  $M=3$ .

Разработанная программа для ЭВМ БЭСМ-6 позволяет исследовать дифракцию волноводных волн при  $N \leq 30$  без ограничения на частоту и геометрические размеры полосок, так как в алгоритме автоматически учитывается взаимодействие как краев полосок, так и полосок между собой по всему спектру волн. При этом экранированные и открытые структуры с точки зрения построения алгоритма не отличаются. При  $N > 30$  необходим переход на ЭВМ с большей, чем у БЭСМ-6, оперативной памятью.

Из-за ограниченного объема статьи здесь приводится только исследование зависимости свойств полосно-заграждающих фильтров на открытых ДВ от числа полосок, образующих фильтры (рис. 2). Параметры ДВ:  $b_1=8$  мм,  $b_3=b_4=\infty$ ,  $b_2=0$ ,  $\epsilon_1=2,25$ ,  $\epsilon_3=\epsilon_4=1$ ,  $H_{p-1}=-H_p=14$  мм,  $l_p=3$  мм. Крестиками обозначены экспериментальные данные при  $N=40$  [1]. Сравнение с экспериментом подтверждает правильность работы программы и позволяет заключить, что приближение бесконечной непериодической решетки работает только при  $N > 15-19$ , при меньшем  $N$  заметными становятся изменение ширины полосы заграждения фильтра и сдвиг границы «области излучения» в периодической структуре.

Полученное решение позволяет также исследовать спектр высших излучающихся волн одиночных микрополосковых линий на многослойных подложках. На рис. 3 приведены частотные зависимости коэффициента

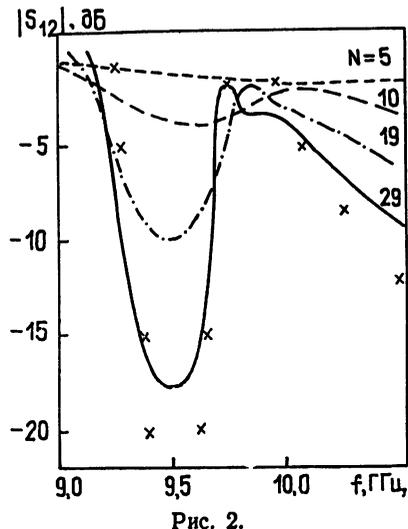


Рис. 2.

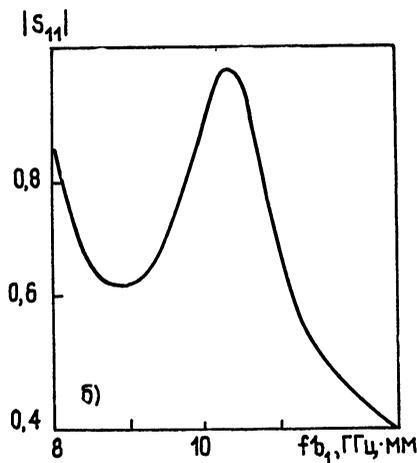
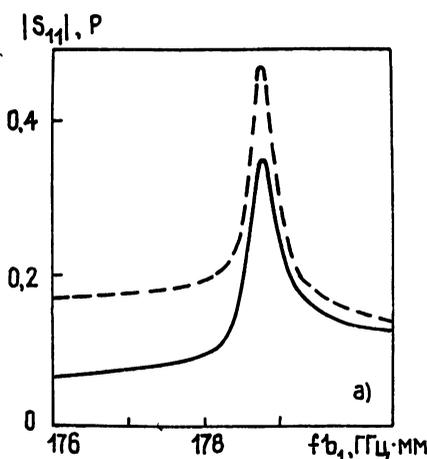


Рис. 3.

циента отражения  $LE$ - (рис. 3а) и  $LM$ -волн (рис. 3б) от несимметричной полосковой линии в экране. Параметры волноводов: рис. 3а —

$-b_2/b_1=10$ ,  $b_3=b_4=0$ ,  $\varepsilon_1=6$ ,  $\varepsilon_2=1$ ,  $l_1/b_1=1$ ,  $h/b_1=6$ ; рис. 3б —  $b_2/b_1=$   
 $=2$ ,  $b_3=b_4=0$ ,  $\varepsilon_1=9,8$ ;  $\varepsilon_2=1$ ,  $l_1/b_1=2$ ,  $hb_1=0,2$ . Падающая волна рас-  
 пространяется под углом к полоске  $\varphi = \arccos(h/a_{m,e})$ . Если  $h$  совпа-  
 дает с реальной частью постоянной распространения излучающейся  
 волны в полосковой линии, то наблюдается резонансное увеличение ко-  
 эффициента отражения и суммарного коэффициента преобразования  
 мощности в другие типы волн —  $P$  (штриховая линия на рис. 3а). По-  
 стоянная затухания за счет излучения в полосковой линии оценивается  
 по формуле  $\kappa = h/(2Q)$ , где  $Q$  — добротность резонанса, вычисляемая  
 из графика. Сравнение данных для рис. 3а показывает совпадение по  
 порядку величины  $\kappa$  и графическое совпадение по  $h$  с данными [7]  
 для  $E_{11}$ -волн открытой микрополосковой линии. Заметим, что в частот-  
 ном диапазоне  $f b_1 = 8-12$  ГГц·мм в волноводе, соответствующем  
 рис. 3б, распространяется только основная  $LM$ -волна, поэтому для него  
 $P=0$ .

При расчете фильтров на индуктивных полосках для прямоуголь-  
 ного волновода с волной  $H_{10}$  рассматриваются только  $LE$ -волны плоско-  
 го волновода, при этом полагается  $h=0$ ,  $a_0=0$ . Для синтеза таких  
 фильтров использовалась стандартная процедура прямого поиска ми-  
 нимума целевой функции

$$F(l_1, \dots, l_N, H_1, \dots, H_N) = \sum_{m=1}^p V_m (|R(f_m)| - |R^*(f_m)|)^2,$$

где  $R(f_m)$  — коэффициент отражения от системы  $N$  полосок на частоте  
 $f_m$ ;  $R^*(f_m)$  — требуемые коэффициенты отражения, рассчитанные из ус-  
 ловия, что функция затухания фильтра описывается полиномом степени  
 $2N - 2$ ;  $V_m$  — весовые коэффициенты.

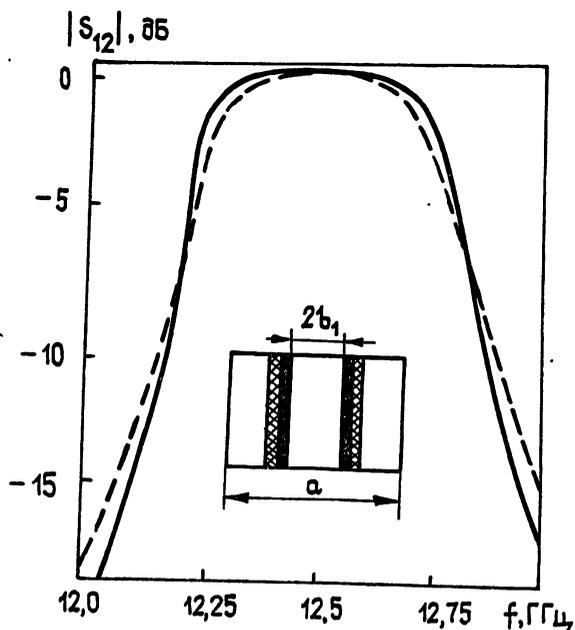


Рис. 4.

Начальные геометрические размеры определялись методом радио-  
 технического синтеза (РТС) [8] на основе исследования матрицы рас-  
 сеяния основной волны на одиночной полоске. На рис. 4 приведены ам-  
 плитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтра Батерворта  
 (фильтр с максимально плоской характеристикой) на параллельных  
 полосках; синтезирование с помощью метода РТС — штриховая линия,  
 с помощью численной оптимизации — сплошная. Параметры волновода:

$N=4$ ,  $b_1=2,67$  мм,  $b_2=0,2$  мм,  $b_3=0$ ,  $b_4=5,13$  мм,  $\epsilon_2=3,8$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_4=1$ . В плоскости  $xOz$  — магнитная стенка. Сравнение двух АЧХ показывает, что для многих практических применений достаточно пользоваться методом РТС, позволяющим значительно экономить машинное время. Однако для конструирования фильтров с АЧХ, близкими к прямоугольным, необходимо применять методы численной оптимизации.

На рис. 5 приведены теоретическая (сплошная линия) и экспериментальная (крестики) АЧХ оптимизированного фильтра Батерворта на четырех индуктивных полосках, нанесенных на диэлектрическую подложку ( $b_1=0,2$  мм,  $b_2=8$  мм,  $b_3=7,8$  мм,  $b_4=0$ ,  $\epsilon_1=3,8$ ,  $\epsilon_2=\epsilon_3=0$ ). Сравнение с экспериментом показывает высокую точность расчета. Если проводить расчет и оптимизацию фильтра на основе существующих методов, вообще не учитывающих диэлектрическую подложку, то даже в случае тонких подложек  $b_1/a \approx 0,015$  теоретическая АЧХ (штрихпунктир на рис. 5) оказывается смещенной относительно экспериментальной на величину, сравнимую с полосой пропускания фильтра.

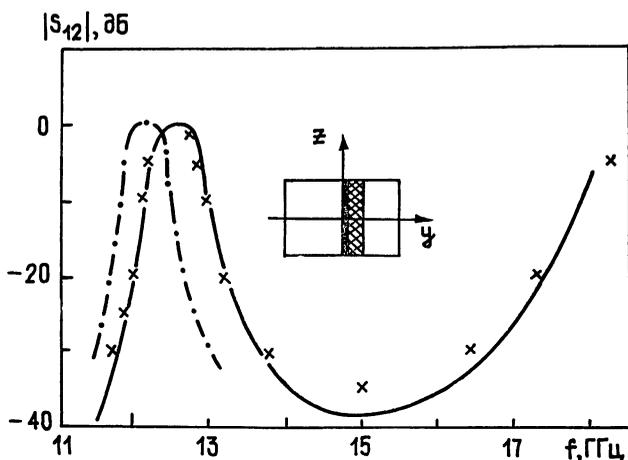


Рис. 5.

Следует отметить, что в рамках постановки задачи не учитывается отражение  $LE$ -волны от краев диэлектрической пластины, что приводит к увеличенному, по сравнению с расчетным, затуханию в полосе пропускания фильтра на величину  $\sim 0,9$  дБ, что вполне согласуется с рассчитанной в [9] величиной коэффициента отражения от края пластины ( $S_{11} \approx 0,05$ ). Для учета отражения от краев диэлектрической пластины необходимо перемножать матрицы рассеяния диэлектрической ступеньки и системы полосок, что приведет к изменению правой части системы (9).

При расчете реальных устройств конечная толщина полосок учитывалась двумя способами. В первом способе, аналогичном применяемому для определения волнового сопротивления полосковых линий, полоска шириной  $l$  и толщиной  $t$  заменялась бесконечно тонкой полоской шириной  $l'$ , рассчитанной по формуле Уилера [10]:

$$l' = l + t/4\pi(1 + \ln(2x/t)), \quad (11)$$

где  $x = \min\{4\pi l, b_1 + b_3\}$ .

Сравнение матрицы рассеяния  $H_{10}$  волны на одиночной индуктивной полоске конечной толщины, рассчитанной строгим методом, аналогично [11], показывает, что для полосок с  $t/a < 0,02-0,03$  это приближение оказывается достаточно эффективным. При более толстых полосках применялся второй способ, в котором одна толстая полоска толщиной  $t$  заменялась двумя бесконечно тонкими, расположенными на расстоянии  $t$  друг от друга. На рис. 6 приведены АЧХ фильтра на че-

тырех полосках толщиной  $t=0,1$  мм, расположенных в волноводе  $3,04 \times 1,55$  м. Расчет проведен без учета толщины полосок (штриховая линия) и с учетом двумя способами:

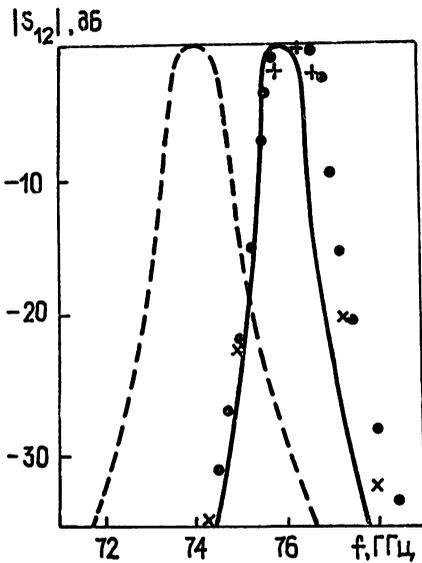


Рис. 6.

сплошная линия — с использованием (11), кружочки — с заменой на две параллельные полоски. Экспериментальные данные [4] обозначены крестиками; видно, что приближенный учет толщины полосок существенно увеличивает точность расчетов.

Таким образом, в работе развит метод, позволяющий исследовать дифракцию волноводных волн на конечном числе металлических полосок. Продольное разбиение исходной структуры на ЧО позволяет не рассматривать в явном виде непрерывный спектр ДВ для открытых задач и затухающие типы волн — для закрытых. На основе численной оптимизации рассчитаны и сконструированы полосовые волноводные фильтры на индуктивных полосках, выполненных с помощью интегральной технологии.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим интегралы

$$A_{mj pq}^{ts} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{ts}(\alpha) J_j(\alpha l_p) J_m(\alpha l_q) \frac{\exp[-i\alpha(H_p - H_q)]}{\alpha^2 + h^2}, \quad (\text{П.1})$$

где функция  $f^{ts}(\alpha)$  имеет полюсы на действительной оси в точках

$$\alpha = \pm \alpha_r, \quad r=0, 1, \dots, R.$$

Точки  $\alpha = \pm ih$  не являются полюсами подынтегральной функции, так как  $f^{ts}(\pm ih) = 0$ .

Для того чтобы к исходному интегралу можно было применять известные квадратурные формулы, преобразуем его к виду

$$A_{mj pq}^{ts} = 2 \int_0^{\infty} \left[ \frac{f^{ts}(\alpha)}{\alpha^2 + h^2} J_j(\alpha l_p) J_m(\alpha l_q) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ i \sin \end{matrix} \right\} [\alpha(H_p - H_q)] - \right. \\ \left. - \sum_{r=0}^R \chi_{jmq}^{tsr} \frac{2\alpha_r}{\alpha^2 - \alpha_r^2} \right] d\alpha + \sum_{r=1}^R \chi_{jmq}^{tsr} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2 - \alpha_r^2} d\alpha, \quad (\text{П.2})$$

где

$$\chi_{jmq}^{tsr} = \operatorname{res}_{\alpha \rightarrow \alpha_r} f^{ts}(\alpha) J_j(\alpha l_p) J_m(\alpha l_q) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ i \sin \end{matrix} \right\} [\alpha(H_p - H_q)],$$

верхние выражения в фигурных скобках соответствуют  $m$  и  $j$  одной четности, нижние — разной четности. Так как интеграл в квадратных скобках не имеет особенности на действительной оси, его можно вычислить по квадратурной формуле прямоугольников с узлами

$$\alpha_n = \pi(n + 0,5)/L, \quad L \gg (l_p, H_p - H_q).$$

В результате интеграл заменяется двумя рядами, один из которых можно просуммировать в конечном виде:

$$A_{mjpq}^{ts} = \frac{4\pi}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{ts}(\alpha_n)}{\alpha_n^2 + h^2} J_j(\alpha_n l_p) J_m(\alpha_n l_q) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \times \quad (П.3)$$

$$\times [\alpha_n(H_p - H_q)] - 2\pi \sum_{r=0}^R (\operatorname{tg} L \alpha_r + i) \chi_{jmq}^{tsr}.$$

Бесконечный ряд в (П.3) заменяется конечной суммой  $n=0, \dots, N_1$ , остаток ряда вычисляется аналитически аналогично [12]. Численный эксперимент показывает, что для расчетов с погрешностью  $\sim 0,1\%$  необходимо выбирать  $L > \max\{20|H_p - H_q|, 20l_p\}$ ,  $N_1 \approx 30-50$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Oqusu K. // IEEE Trans. 1981. V. MTT-29. № 1. P. 16.
2. Mitra R., Kastner R. // IEEE Trans. 1981. V. AP-29. № 4. P. 652.
3. Trinh T. N., Mitra R., Paleta P. J. // IEEE Trans. 1981. V. MTT-29. № 12. P. 1310.
4. Borneman J., Vahldeck A., Arndt F., Grauerholz D. // The Radio and Electron. Eng. 1982. V. 52. № 11/12. P. 513.
5. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. — Киев: Наукова думка, 1986.—216 с.
6. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. Линии передачи сложных сечений. — Ростов-на-Дону: Гос. ун-т, 1983. — 320 с.
7. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Полосковые линии передачи. — М.: Наука, 1980. — 312 с.
8. Маттей Д. Л., Янг Л., Джонс Е. М. Т. Фильтры СВЧ. Согласующие цепи и цепи связи. — М.: Связь, 1971. — 439 с.
9. Кузнецов В. А., Лерер А. М., Синявский Г. П. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1982. Т. 25. № 3. С. 16.
10. Ганстон М. А. Р. Справочник по волноводным сопротивлениям фидерных линий СВЧ. — М.: Связь, 1976. — 150 с.
11. Цюпко А. С. Диссертация. — Ростов-на-Дону: Гос. ун-т, 1987.
12. Кузнецов В. А., Лерер А. М., Михалевский В. С. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 9. С. 28.

Ростовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
10 октября 1988 г.

#### WAVEGUIDE MODE DIFFRACTION BY FINITE SET OF STRIPS IN LAYERED DIELECTRIC

V. A. Kuznetsov, A. M. Lerer, G. N. Shelamov

Waveguide mode diffraction by arbitrary number of metallic strips inserted in dielectric or inhomogeneously filled metal waveguide is considered. The mode matching technique is used to solve the problem. The mode matching interface is chosen to lie in the direction of incident wave propagation. It allows to use only propagating modes in numerical analysis. The results are applied to construct E-plane waveguide filters on the basis of integral technology.

УДК 533.951:537.533

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН ЛЕНТОЧНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ | МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*К. О. Качалов, Н. Г. Попков*

Исследована генерация электромагнитных волн ленточным релятивистским электронным пучком, проходящим в отсутствие волновода через периодическое магнитное поле. В основу генерации положен параметрический процесс с возбуждением поверхностной плазменной волны пучка. Анализ полученных дисперсионных уравнений показал, что генерация симметричных волн идет более эффективно, чем антисимметричных. Рассмотрен вопрос оптимизации размеров пучка.

Последние годы интенсивно ведутся работы по совершенствованию источников когерентного электромагнитного излучения, основанных на вынужденном рассеянии волн накачки релятивистским электронным пучком. При этом поле волны накачки может создаваться как внешней электромагнитной волной, так и стационарными магнитами, создающими переменное пространственно периодическое магнитное поле (ондулятор). Большая часть теоретических работ, сделанных в этом направлении, основана на предположении о поперечной безграничности электронного пучка [1-5]. Это приближение делается неприменимым, когда длина волны излучения становится сравнимой с толщиной пучка. Изучению влияния конечной геометрии системы на генерацию излучения сейчас также стало уделяться много внимания. Авторами работы [6] при исследовании генерации излучения цилиндрическим пучком в периодическом магнитном поле было показано, что инкремент соответствующей неустойчивости падает с уменьшением радиуса пучка. В работе [7] отыскивались оптимальные размеры электронного пучка. Существенным в отмеченных выше работах да и в большинстве других, где изучается генерация излучения из органических пучков, является наличие волновода, который выделяет собственные моды колебаний и формирует тем самым поперечную структуру излучаемой волны. Ситуация решительным образом меняется, если обратиться к системам без волновода, в этом случае пространственную структуру излучаемой волны формирует сам пучок. В работе [8] было указано на возможность канализации излучения ленточным релятивистским электронным пучком, проходящим через магнитное поле плоского ондулятора, в отсутствие волновода. В этой работе ширина пучка предполагалась предельно малой. В настоящей работе исследуется влияние ширины ленточного релятивистского электронного пучка на генерацию электромагнитного излучения в периодическом магнитном поле ондулятора. При этом исследуется такой параметрический процесс, при котором кроме электромагнитной волны образуется поверхностная плазменная волна пучка.

**1. Основные уравнения.** Для описания процессов резонансного параметрического рассеяния будем использовать уравнения гидродинамики и систему уравнений Максвелла. Анализ проведем в системе покоя пучка. Пусть ось  $x$  совпадает с направлением поступательного движения пучка, ось  $z$  перпендикулярна его границе, а ось  $y$  пер-

пендикулярна осям  $x$  и  $z$ . Пучок проходит через пространственно-периодическое магнитное поле ондулятора, векторный потенциал которого зададим в виде  $A_{0y}(x) = (B_0/k_0) \sin k_0 x$ , где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  — пространственный период ондулятора,  $B_0$  — амплитуда поперечного магнитного поля. Это приближенное выражение справедливо для не очень широких пучков, когда  $k_0 d/2 \leq 1$ , где  $d$  — ширина пучка. В системе покоя пучка поле ондулятора представляет собой электромагнитную волну, векторный потенциал которой определяется в соответствии с преобразованиями Лоренца:  $A_{0y}(x, t) = (B_0/k_0) \sin(k'_0 x + \omega'_0 t)$ , где  $k'_0 = k_0 \gamma_0$ ,  $\omega'_0 = k_0 \gamma_0 V_0$ ,  $\gamma_0 = (1 - V_0^2/c^2)^{-1/2}$ , а  $V_0$  — скорость электронов пучка вдоль оси  $x$ . Под действием магнитного поля ондулятора электроны пучка кроме поступательного движения будут совершать колебания по оси  $y$  со скоростью  $V_{0y}(x, t) = (e/mc) A_{0y}(x, t)$  (мы ограничимся линейным по  $A_{0y}$  приближением). Отметим, что граница пучка при этом не деформируется.

Исследуем эволюцию малых колебаний такой системы. Пусть  $V_1$  — возмущение скорости пучка,  $n_1$  — возмущение его плотности,  $E_1$  — возмущение электрического, а  $B_1$  — магнитного поля. Тогда линеаризованная система уравнений магнитной гидродинамики будет иметь вид

$$\frac{\partial V_{1x}}{\partial t} = -\frac{e}{m} (E_{1x} + Q_x), \quad \frac{\partial V_{1y}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_{1y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_{1z}}{\partial t} = -\frac{e}{m} (E_{1z} + Q_z), \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} = -n_0 \left( \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} \right),$$

где  $Q_x = \frac{1}{c} (V_{1y} B_{0z} + V_{0y} B_{1z})$ ,  $Q_z = -\frac{1}{c} V_{0y} B_{1x}$  — компоненты силы

Лоренца, связывающие волну типа  $E$  ( $E_{1x}$ ,  $E_{1z}$ ,  $B_{1y}$ ) с волной типа  $H$  ( $E_{1y}$ ,  $B_{1x}$ ,  $B_{1z}$ ),  $B_{0z} = -\partial A_{0y}/\partial x$  — напряженность магнитного поля ондулятора, а  $n_0$  — невозмущенная плотность пучка. Для простоты мы считаем систему однородной вдоль оси  $y$  и положили  $\partial/\partial y = 0$ . Будем искать решение системы (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \{V_{1x}, V_{1z}, E_{1x}, E_{1z}, B_{1y}, n_1\} = \\ & = \{V_x(z), V_z(z), E_x(z), E_z(z), B_y(z), n(z)\} \exp\{-i(\omega_x t - k_x x)\}, \\ & \{V_{1y}, E_{1y}, B_{1x}, B_{1z}\} = \\ & = \{V_y(z), E_y(z), B_x(z), B_z(z)\} \exp\{-i(\omega_y t - k_y x)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

причем частоты и продольные волновые числа колебаний волны типа  $E$  и  $H$  связаны между собой комбинационными условиями

$$\omega_x = \omega_y - \omega'_0, \quad k_x = k_y + k'_0. \quad (3)$$

Решая систему (1), находим выражения для возмущенных токов

$$\begin{aligned} j_x(z) &= i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_x} (E_x(z) + Q_x(z)), \\ j_y(z) &= i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_y} E_y(z) - \frac{\omega_H^2}{2ik_0} \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_x^2 \epsilon_{\perp}} \left( ik_x Q_x(z) + \frac{dQ_z(z)}{dz} \right), \\ j_z(z) &= i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_x} (E_z(z) + Q_z(z)), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$Q_x(z) = -i \frac{k_x \omega_H}{2k_0} \frac{E_y(z)}{\omega_y}, \quad Q_z(z) = \frac{1}{ik_x} \frac{dQ_x}{dz}, \quad \epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_x^2}, \quad \omega_H = \frac{eB_0}{mc},$$

которые затем представляем в систему уравнений электродинамики

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} - ik_x \frac{dE_z}{dz} + \frac{\omega_x^2}{c^2} E_x &= -\frac{4\pi i \omega_x}{c^2} J_x(z), \\ -ik_x \frac{dE_x}{dz} + \frac{\omega_x^2 - k_x^2 c^2}{c^2} E_z &= -\frac{4\pi i \omega_x}{c^2} J_z(z), \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega_y^2 - k_y^2 c^2}{c^2} E_y &= -\frac{4\pi i \omega_y}{c^2} J_y(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Для получения граничных условий к системе (5) воспользуемся непрерывностью тангенциальной составляющей электрического поля ( $E_x$ ,  $E_y$ ) и условиями шивки продольной составляющей магнитного поля ( $B_x$ ,  $B_y$ ). Заметим, что в линейном приближении поверхностный ток течет только в направлении оси  $y$ , следовательно, разрывна лишь  $x$ -компонента магнитного поля:

$$B_x(d+0) - B_x(d-0) = \frac{4\pi}{c} I(d), \quad B_x(+0) - B_x(-0) = \frac{4\pi}{c} I(0), \quad (6)$$

где  $I = \frac{1}{2i k_0} \sigma$ , а  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Поверхностный ток  $I$  возникает вследствие нелинейного взаимодействия волны накачки и поверхностной плазменной волны и соответствует «сносу» поверхностного заряда плазменной волны за счет движения в ондуляторном поле. Отметим, что аналогичные граничные условия были использованы в работе [7].

Легко показать (см. [9]), что систему уравнений (5) можно разбить на две независимые: для симметричных и антисимметричных относительно центра пучка колебаний соответственно, а общее решение представить в виде

$$\begin{aligned} E_x^i &= A_{1c} \cos(k_z(z-d/2)) + B_{1c} \cos(k_{ix}(z-d/2)), \\ E_z^i &= A_{2c} \sin(k_z(z-d/2)) + B_{2c} \sin(k_{ix}(z-d/2)) \quad (\text{сим.}), \\ E_y^i &= A_{3c} \cos(k_z(z-d/2)); \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} E_x^i &= A_{1s} \sin(k_z(z-d/2)) + B_{1s} \sin(k_{ix}(z-d/2)), \\ E_z^i &= A_{2s} \cos(k_z(z-d/2)) + B_{2s} \cos(k_{ix}(z-d/2)), \\ E_y^i &= A_{3s} \sin(k_z(z-d/2)) \quad (\text{антисим.}) \end{aligned} \quad (76)$$

— общее решение для поля внутри пучка;

$$\begin{aligned} E_x^e &= C_1 \exp\{ik_{ex}(z-d)\}, \quad E_z^e = C_2 \exp\{ik_{ex}(z-d)\}, \\ E_y^e &= C_3 \exp\{ik_{ey}(z-d)\}; \end{aligned} \quad (\text{при } z > d) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_x^e &= \pm C_1 \exp\{-ik_{ex}z\}, \quad E_z^e = \mp C_2 \exp\{-ik_{ex}z\}, \\ E_y^e &= \pm C_3 \exp\{-ik_{ey}z\} \end{aligned} \quad (\text{при } z < 0)$$

— общее решение для поля вне пучка ( $A_{ic}, A_{is}, B_{ic}, B_{is}, C_i$  — константы интегрирования), верхний знак соответствует симметричной, а нижний — антисимметричной моде,

$$k_z^2 = \left[ k_{iy}^2 \left( \frac{\omega_x^2}{\omega_p^2} - 1 \right) - \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 k_x^2 \right] \left[ \frac{\omega_x^2}{\omega_p^2} - 1 + \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \right]^{-1}.$$

$$k_{iy}^2 = \frac{\omega_y^2 - \omega_p^2}{c^2} - k_y^2, \quad k_{ix}^2 = \frac{\omega_x^2 - \omega_p^2}{c^2} - k_x^2,$$

$$k_{ey}^2 = \frac{\omega_y^2}{c^2} - k_y^2, \quad k_{ex}^2 = \frac{\omega_x^2}{c^2} - k_x^2.$$

В дальнейшем формулы, относящиеся к симметричным модам, будут отмечены одним штрихом, а к антисимметричным — двумя.

Из выражения для общих решений в вакууме (вне пучка) видно, что волновые векторы электромагнитных колебаний имеют составляющую, направленную от границы пучка, это соответствует тому, что вектор Умова—Пойнтинга также имеет  $z$ -составляющую, направленную от пучка. В этом заключается принципиальная разница между исследуемыми нами колебаниями и колебаниями в присутствии волновода, где в поперечном к движению пучка направлении реализуется решение в виде стоячей волны с равной нулю составляющей вектора потока энергии.

Подставляя (7а), (7б), (8) в граничные условия, получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$-ik_{ex} + \frac{k_{ix} \operatorname{ctg}(k_{ix}(d/2))}{\varepsilon_1} = - \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2} \right)^2 \times \quad (9a)$$

$$\times \left\{ ik_{ey} + k_z \operatorname{tg} \left( \frac{k_z d}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2} \right] \right\}^{-1};$$

$$-ik_{ex} - \frac{k_{ix} \operatorname{tg}(k_{ix}(d/2))}{\varepsilon_1} = - \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2} \right)^2 \times \quad (9б)$$

$$\times \left\{ ik_{ey} - k_z \operatorname{ctg} \left( \frac{k_z d}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_x^2} \right] \right\}^{-1}.$$

Для очень тонких пучков, характеризующихся тем не менее конечной величиной электронного тока, дисперсионное уравнение (9а) можно переписать в следующем виде:

$$ik_{ex} + \omega_x^2 / \omega_p^2 (d/2) = \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 k_x^2 \left( ik_{ey} - \frac{\omega_p^2 d}{2c^2} \right)^{-1}. \quad (9в)$$

При выводе (9в) предполагалось, что  $\omega_p^2 d/2 |_{d \rightarrow 0} \rightarrow \text{const}$ . Полученное уравнение совпадает с дисперсионным уравнением работы [8], если в последнем исправить допущенные авторами мелкие неточности. Ниже мы ограничимся в основном случае потенциальных колебаний в не очень плотной плазме, когда  $k_x \gg \omega_p/c$ , который не описывается уравнением (9в), поскольку предельный переход к (9в) нарушает приведенное выше условие.

**2. Результаты численного счета и приближенные аналитические решения.** Полученные в предыдущем разделе работы дисперсионные

уравнения (9) исследовались аналитически и численно. Необходимо отметить, что для обеих мод колебаний характерно наличие четко выраженного порога неустойчивости. Если продольное волновое число  $k_x$  выше некоторого предельного, то неустойчивость не развивается. Это связано с тем, что с ростом  $k_x$  сгусток электронов выходит из замедляющей фазы электрического поля и трансформация кинетической энергии пучка в энергию электромагнитных колебаний прекращается.

Для не очень малых толщин пучка вдали от резонанса, когда справедливы условия  $k_x < 2\gamma_0 k_0$ ,  $\gamma \ll \omega_p$ ,  $\text{Re}(k_{ey}) \gg \text{Im}(k_{ey})$ ,  $\text{Re}(k_{ey}) \gg \omega_p/c$ ,  $\text{Re}(k_{ey}) \gg \frac{\omega_H}{2k_0 c} \frac{k_x}{\sqrt{k_x d}}$ , где  $\gamma = \text{Im}(\omega_y)$  — инкремент неустойчивости, дисперсионные уравнения для симметричной и антисимметричной мод колебаний имеют следующие решения:

$$\gamma \simeq \omega_p \sqrt{(1 + \text{th}(k_x d/2)) \text{th}(k_x d/2)} k_x \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \frac{\cos^2 \sqrt{k_x (2k_0 \gamma_0 - k_x) d^2/4}}{\sqrt{k_x (2k_0 \gamma_0 - k_x)}}; \quad (10a)$$

$$\gamma \simeq \omega_p \frac{\sqrt{1 + \text{th}(k_x d/2)}}{2 \text{th}(k_x d/2)} k_x \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \frac{\sin^2 \sqrt{k_x (2k_0 \gamma_0 - k_x) d^2/4}}{\sqrt{k_x (2k_0 \gamma_0 - k_x)}}. \quad (10b)$$

Видно, что для симметричной волны при  $k_x \rightarrow 2k_0 \gamma_0$  имеет место резонансное увеличение инкремента, в случае антисимметричных колебаний этого не происходит. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено исследованию неустойчивости на симметричной моде.

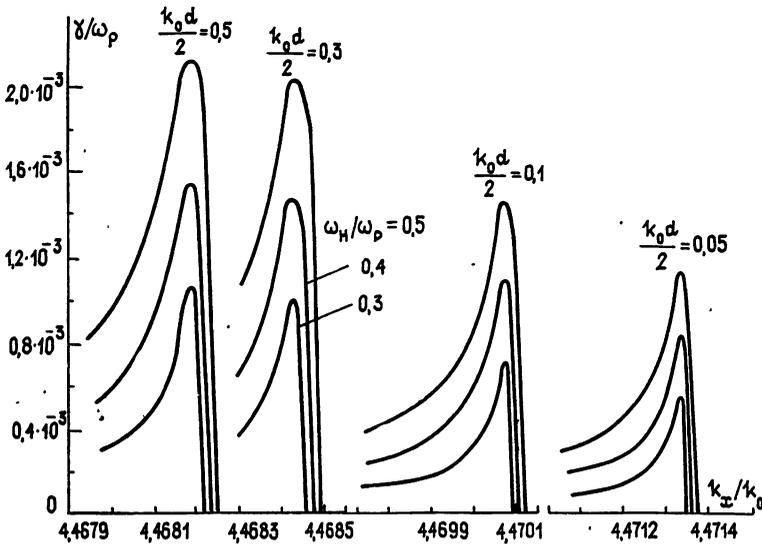


Рис. 1.

На рис. 1 представлены зависимости инкремента неустойчивости на симметричной моде колебаний от продольного волнового числа при различных ширинах пучка и амплитудах магнитного поля ( $\gamma_0 = 2,35$ ). Резкое возрастание инкремента колебаний происходит, когда действительная часть поперечного волнового числа электромагнитных колебаний ( $\text{Re} k_{ey}$ ) стремится к нулю. В этом случае уменьшается поперечная составляющая вектора потока энергии этих колебаний, а вместе с этим и уменьшается их рассеяние в пространство. Однако при дальнейшем уменьшении  $\text{Re} k_{ey}$  существенное влияние на инкремент оказывает уже упоминавшийся выход электронного сгустка из замедляющей фазы электрического поля. Необходимо отметить, что полуширина дисперсионной кривой растет с ростом инкремента, а для кривых с одинако-

вым инкрементом приблизительно одинакова. Видно также, что величина резонансного значения продольного волнового числа зависит от ширины пучка и растет по мере его сужения. Причиной этого является зависимость частоты симметричной поверхностной плазменной волны от  $d$ .

На рис. 2 приведены кривые, описывающие поведение максимального инкремента симметричной моды колебаний в зависимости от ширины пучка. Резкое уменьшение инкремента с уменьшением  $d$  соответствует той области параметров, когда ширина плазменной моды становится сравнимой с толщиной пучка. Необходимо также отметить, что при некоторых значениях ширины пучка максимальный инкремент плавно достигает наибольшей величины, а при дальнейшем росте  $d$  медленно спадает.

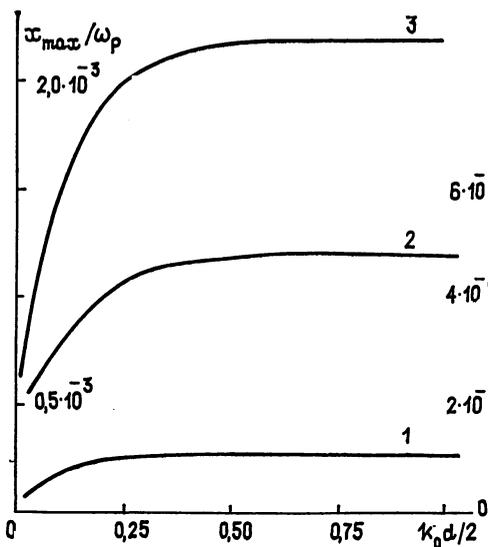


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость максимального инкремента от ширины пучка при различных значениях  $\omega_H/\omega_p$ ,  $\gamma_0=2,35$ :

1 —  $\omega_H/\omega_p = 0,1$ ; 2 —  $\omega_H/\omega_p = 0,3$ ; 3 —  $\omega_H/\omega_p = 0,5$ .

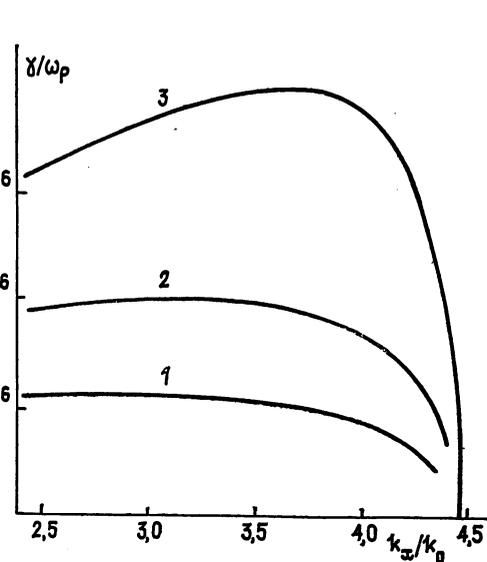


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость инкремента неустойчивости антисимметричной моды от продольного волнового числа для различных  $d$ ,  $\gamma_0=2,35$ :

1 —  $k_0d/2=0,2$ ; 2 —  $k_0d/2=0,3$ ; 3 —  $k_0d/2=0,5$ .

На рис. 3 представлены графики зависимости инкремента антисимметричной моды колебаний от продольного волнового числа. Как показывают расчеты, для антисимметричной моды не существует ярко выраженного резонансного максимума при  $k_x \rightarrow 2k_0\gamma_0$ , поэтому поведение инкремента изучалось в более широкой области значений  $k_x$ . Было установлено, что имеет место плавный максимум, который с ростом  $d$  медленно смещается в область больших значений  $k_x$  и растет по величине. Отметим, что благодаря наличию резонанса абсолютная величина инкремента симметричной моды колебаний на несколько порядков выше инкремента антисимметричной моды.

В некоторых областях параметров дисперсионные уравнения допускают аналитические решения. Получим приближенные выражения для инкремента симметричных колебаний, когда плазменные моды можно считать потенциальными,  $k_x \gg \omega_p/c$ . При этом, как показывает анализ, выделяются три области параметров, которые в конечном счете связаны с толщиной пучка:

1)  $\gamma \ll \omega_c$ ,  $\text{Re}(k_{ey}) \gg \text{Im}(k_{ey})$ , где  $\omega_c = \omega_p / \sqrt{1 + \text{ctg}^2(k_x d/2)}$ . В этом случае

$$\gamma = \sqrt{\left(1 + \text{th}\left(\frac{k_x d}{2k_0 c}\right)\right) \text{th}\left(\frac{k_x d}{2}\right) \left(\frac{\omega_H}{2k_0 c}\right)^2 \left(\frac{1}{2} k_x k_{ex}\right) \left(k_{ey}^2 + k_z^2 \text{tg}\left(\frac{k_x d}{2}\right)\right)^{-1}}, \quad (11)$$

где

$$k_{ey}^2 \simeq (k_0 \gamma_0 V_0 - \omega_c)^2 - (k_x - k_0 \gamma_0)^2,$$

$$k_z^2 = k_{ey}^2 - \frac{\omega_p^2}{c^2} + \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 k_x^2 \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_x d}{2} \right) \right),$$

причем максимальный инкремент достигается при  $k_{ey} \sim |k_z \operatorname{tg}(k_z d/2)|$  и равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\omega_p}{4} \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \left( k_x \sqrt{\left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_x d}{2} \right) \right) \operatorname{th} \left( \frac{k_x d}{2} \right)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{d}{2} \left| \frac{\omega_p^2}{c^2} - \left( \frac{\omega_H k_x}{2k_0 c} \right)^2 \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_x d}{2} \right) \right) \right| \right]^{-1} \right), \quad (12)$$

естественно, эта формула неприменима, когда

$$\frac{\omega_p}{c} \sim \frac{\omega_H k_x}{2k_0 c} \sqrt{1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_x d}{2} \right)}.$$

2)  $\gamma \ll \omega_c$ ,  $\operatorname{Re}(k_{ey}) \leq \operatorname{Im}(k_{ey})$ . В этой области параметров можно получить следующее приближенное выражение для дисперсионного уравнения симметричных колебаний:

$$(A(k_x) + \delta) \delta^2 = -B(k_x), \quad (13)$$

где

$$\delta = \omega_x / \omega_p - \omega_c / \omega_p,$$

$$A(k_x) = \frac{k_x (2k_0 \gamma_0 - k_x) - k_0^2 + 2k_0 \gamma_0 V_0 (\omega_c / c^2) + \omega_p^2 / c^2}{2k_0 \gamma_0 V_0 (\omega_p / c^2)},$$

$$B(k_x) = k_x^2 \operatorname{th}^2 \left( \frac{k_x d}{2} \right) \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \left[ 2k_0 \gamma_0 V_0 \left( \frac{\omega_p}{c^2} \right) \left( \frac{2\omega_c}{\omega_p} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Как легко показать, максимальный инкремент достигается при  $A(k_x) \simeq 0$  и равен  $\gamma_{\max} \simeq \omega_p \frac{\sqrt{3}}{2} B^{1/3}$ , в окрестности максимума поведение инкремента приближенно описывается формулой

$$\gamma(k_x) = \gamma_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{A(k_x) \omega_p}{3\gamma_{\max}} \right)^2 \right].$$

Отметим, что приведенные выше численные расчеты соответствуют переходу от первой области параметров ко второй.

3)  $\gamma \sim \omega_c$ . Это условие соответствует очень узким пучкам, здесь можно воспользоваться следующим приближенным выражением для дисперсионного уравнения:

$$[C(k_x) + \delta] \delta^4 = -D(k_x), \quad (14)$$

где

$$\delta = \frac{\omega_x}{\omega_p}, \quad C(k_x) = \frac{k_x (2k_0 \gamma_0 - k_x) - k_0^2}{2k_0 \gamma_0 V_0 (\omega_p / c^2)},$$

$$D(k_x) = \left( \frac{\omega_H}{2k_0 c} \right)^2 \left( \operatorname{th}^2 \left( \frac{k_x d}{2} \right) k_x^2 c^2 \right) \left[ 2k_0 \gamma_0 V_0 \omega_p \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{k_x d}{2} \right) \right)^2 \right]^{-1}.$$

Максимальное значение инкремента достигается при  $c=0$  и равно

$$\gamma_{\max} \simeq \omega_p D^{1/5}, \quad (15)$$

В окрестности максимума поведение инкремента аппроксимируется следующим выражением:

$$\gamma(k_x) \approx \gamma_{\max} \left[ 1 - \frac{3}{128} \left( \frac{c(k_x)\omega_p}{\gamma_{\max}} \right)^2 \right].$$

**3. Обсуждение результатов.** Выше мы отметили, что в исследуемой области параметров для симметричной моды колебаний величина инкремента падает по мере уменьшения  $d$ . Это связано прежде всего с тем, что чем уже пучок, тем медленнее поперечное движение электронов и, следовательно, меньший поверхностный заряд выносится поперечными токами на границу пучка. При увеличении толщины пучка, когда выполняется условие  $k_x d/2 \gg 1$ , структура поля плазменной волны перестает зависеть от  $d$ , а сам процесс параметрического рассеяния происходит в окрестности границы ( $\Delta \sim 1/k_x$ ). Эта область параметров соответствует плавному поведению кривых на рис. 2, при этом  $y$ -составляющая электрического поля электромагнитной волны практически однородна по сечению пучка. Последующее слабое уменьшение инкремента с ростом  $d$  связано с поперечной неоднородностью  $E_y$ , которое спадает к границам пучка.

С уменьшением  $d$  при генерации антисимметричной моды колебаний основное влияние на инкремент оказывает рост поперечной неоднородности  $E_y$  по сечению пучка, что приводит к результирующему уменьшению инкремента.

В заключение этого раздела остановимся на вопросе выбора оптимальных размеров пучка для достижения максимальной генерации. Для этого рассмотрим, как ведет себя инкремент при изменении ширины пучка, но при сохранении его полного тока. Преобразуя формулы (11)–(15), найдем, что в рассмотренных в предыдущем разделе трех предельных случаях максимальный инкремент в зависимости от  $d$  при постоянном  $n_0 d$  ведет себя следующим образом:

$$1) \quad \gamma_{\max} \sim \sqrt{\operatorname{th}\left(\frac{k_x d}{2}\right) \left(1 + \operatorname{th}\left(\frac{k_x d}{2}\right)\right) \left(\frac{k_x d}{2}\right)^{-1}}; \quad (16)$$

$$2) \quad \gamma_{\max} \sim \left[ \frac{\operatorname{th}(k_x d/2)}{k_x d/2} \left(1 + \operatorname{th}\left(\frac{k_x d}{2}\right)\right) \right]^{1/3}; \quad (17)$$

$$3) \quad \gamma_{\max} \sim \left[ \frac{\operatorname{th}(k_x d/2)}{(k_x d/2) (1 + \operatorname{th}(k_x d/2))} \right]^{2/3}, \quad (18)$$

где  $k_x \approx 2k_0 \gamma_0$ . Анализируя выражения (16)–(18), а также используя результаты численного счета, можно заключить, что оптимальными являются размеры  $d \sim 1/k_0 \gamma_0$ .

В настоящей работе показана возможность генерации электромагнитного излучения с возбуждением поверхностных плазменных волн при пропускании ленточного релятивистского пучка электронов через пространственно-периодическое магнитное поле. Рассмотрена система без волновода, в которой не существует собственных электромагнитных мод колебаний, они возбуждаются пучком только при наложении периодического магнитного поля. Показано, что для симметричных волн зависимость инкремента от длины волны носит резонансный характер. Положение резонанса зависит от толщины слоя и достигает оптимальной величины при  $k_x d/2 \sim 1$ , когда влияние границ пучка друг на друга становится несущественным. Для антисимметричных волн такой резонансной зависимости не наблюдается.

Исследование вопроса о выборе оптимальных размеров пучка при заданном токе показало, что максимум генерации лежит в области  $d \leq 1/k_0 \gamma_0$ .

В заключение отметим, что полученные нами результаты относятся

к системе отсчета, движущейся с пучком. Для того чтобы перейти в лабораторную систему, надо сделать обратное преобразование Лоренца:  $\omega_L = \gamma_0(\omega + k_x V_0)$ ,  $k_{Lx} = \gamma_0(k_x + \omega V_0/c^2)$ , где  $\omega_L$  и  $k_{Lx}$  — частота и волновой вектор в лабораторной системе, а  $\omega$  и  $k_x$  — в системе, движущейся с пучком. Легко видеть, что полученное нами условие резонанса  $k_x \sim 2k_0\gamma_0$  в лабораторной системе трансформируется в  $k_{Lx} \sim 2k_0\gamma_0^2$ , а зависимости инкрементов от геометрических размеров пучка остаются прежними.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sprangle P., Smith R. A. // Phys. Rev. A. 1980. V. 21. P. 293.
2. Marshall T. C., Schlesinger S. P., Drobot D. B. // Advances in Electronics and Electron Physics. 1980. V. 53. P. 47.
3. Буц В. А., Мирошниченко В. И., Огневенко Б. В. // ЖТФ. 1980. Т. 50, Вып. 10. С. 2257.
4. Гинзбург Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 4. С. 470.
5. Мирошниченко В. И. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. Вып. 3. С. 581.
6. Davidson R. C., Yuan-Zhao Yin // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. № 6. P. 30708.
7. Shiozawa T., Nakashima T. // J. Appl. Phys. 1984. V. 55. № 3. P. 637.
8. Гинзбург Н. С., Ковалев Н. Ф. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. № 5. С. 274.
9. Рютов Д. Д. Автореферат диссертации. М., 1965.

Поступила в редакцию  
3 февраля 1988 г.

#### PARAMETRIC EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC AND SURFACE PLASMA WAVES BY RIBBON ELECTRON BEAM IN PERIODIC MAGNETIC FIELD

*K. O. Kachalov, N. G. Popkov*

The generation of electromagnetic wave by ribbon relativistic electron beam coming through the periodic magnetic field without waveguide is investigated. The parametric process with exciting of beam surface plasma wave has been taken as the basis of generation. It was shown by analysing the dispersion equations obtained that the generation of symmetric waves is more effective than that of antisymmetric ones. The problem of optimizing beam dimensions is considered.

#### ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

**Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли: Пер. с англ.—М.: Мир, 1990 (I кв.).—10 л.**  
Книга видного американского специалиста по теоретической радиотехнике является первой в мире монографией, посвященной преобразованию Хартли, которое, как и преобразование Фурье, может применяться для спектрального анализа и различных видов обработки сигналов. В книге устанавливается связь между преобразованиями Фурье и Хартли, приводятся основные теоремы и методы вычисления свертки, показаны преимущества преобразования Хартли при обработке сигналов. Изучаются методы цифровой фильтрации, а также быстрое и оптическое преобразование Хартли. Приведены машинные программы для расчета преобразования Хартли.

Для специалистов, занимающихся проблемами обработки сигналов и спектрального анализа, а также аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

**Хехт Дж. Введение в волоконную оптику: Пер. с англ.—М.: Мир, 1990 (IV кв.).—29 л.**

Книга представляет собой наглядное и удачно иллюстрированное пособие по волоконной оптике. Последовательно излагаются физические основы волоконной оптики, принципы работы волоконно-оптических линий, методы проектирования систем оптической связи. Рассматриваются конструкции оптических линий связи, кабельных соединителей и ответвителей, активные оптические элементы. Изучаются принципы измерения параметров оптических линий, анализируются состояние и перспективы техники оптической связи. Каждая глава снабжена вопросами для самопроверки.

Для студентов вузов, изучающих волоконную оптику и технику оптической связи, а также специалистов, приступающих к разработке волоконно-оптических линий связи.

УДК 621.375.4.029.45

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСИЛИТЕЛЯ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ НА РАСПРЕДЕЛЕННОМ ЛАВИНОПРОЛЕТНОМ ДИОДЕ

*Г. Б. Михайлов*

Представлен полный анализ волновых взаимодействий в распределенном лавинопролетном диоде (ЛПД). Выделены основные нелинейные эффекты в ЛПД-усилителе: генерация суб- и супергармоник, насыщение амплитуды волны, изменение знака коэффициента усиления субгармоники в поле основной волны. Проведено сравнение механизмов усиления в ЛПД-усилителе и распределенном диоде Ганна.

С конца шестидесятых годов и по настоящее время в связи с развитием интегральной электроники СВЧ актуальным остается изучение особенностей распространения волн в полупроводниковых структурах с отрицательной дифференциальной проводимостью [1]. Примером устройства такого рода является усилитель бегущей волны (УБВ), использующий лавинопролетную неустойчивость (ЛПД-усилитель). Такой УБВ реализован экспериментально в виде распределенного лавинопролетного диода на кремнии [2] и арсениде галлия [3].

Первоначально анализ работы УБВ проводился методом теории длинных линий с использованием эквивалентной схемы диода в условиях динамического отрицательного сопротивления [4]. Такой подход позволил получить простые расчетные формулы для коэффициента усиления, учитывающие особенности эксперимента (конечную проводимость контактов, глубину скин-слоя в полупроводнике и т. д.). В этом первоначальном анализе использовалась более сложная физическая модель пролетного пространства, чем в построенной позднее линейной электродинамической теории ЛПД-усилителя [5, 6].

В перечисленных выше работах [4-6] анализ пространственного усиления электромагнитной волны в ЛПД-усилителе проводился в линейном приближении, поэтому физическая картина распространения волн обеднялась отсутствием многообразных нелинейных явлений. Часть нелинейных эффектов в ЛПД-усилителе (стабилизация роста амплитуды волны, перекачка энергии вверх по спектру) впервые была описана в работе автора [7] на примере распределенного диода Рида. В отличие от нелинейного электродинамического анализа усиления в ЛПД-усилителе расчет максимальной амплитуды усиливаемой волны методами теории нелинейных электрических цепей проводился и в более поздней работе [8] на примере двойного диода Рида. Никакие другие нелинейные эффекты при этом не рассматривались.

В настоящей работе развита нелинейная электродинамическая теория ЛПД-усилителя бегущей волны на примере распределенного диода Рида. В отличие от первоначального варианта [7] она учитывает широкий класс волновых взаимодействий и позволяет рассчитывать все практически необходимые величины — коэффициент усиления, максимальную амплитуду волны и т. д. Без принципиальных изменений этот анализ применим и к двойному диоду Рида. Эти полупроводниковые структуры распространены в электронике СВЧ и в то же время являются наиболее простыми с точки зрения анализа волновых взаимодействий в распределенном ЛПД-усилителе.

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в распределенной ЛПД-структуре, контакты с которой образуют плоскопараллельный волновод (рис. 1а). Предполагается, что усиление электромагнитной волны обусловлено ее взаимодействием с током поперечного (по отношению к направлению распространения волны) дрейфа горячих электронов.

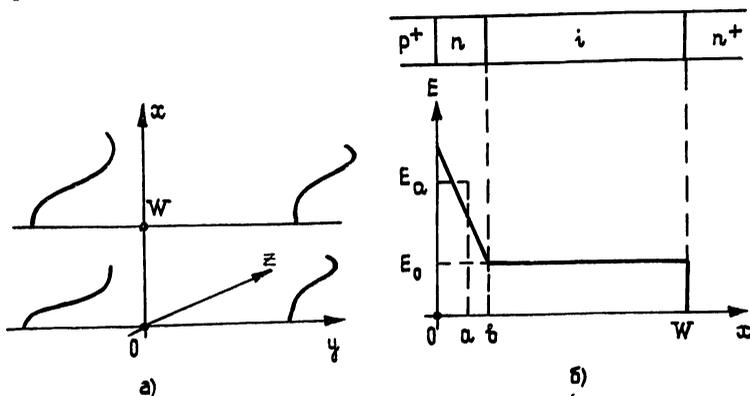


Рис. 1.

Для описания волнового процесса уравнения Максвелла удобно преобразовать к одному уравнению для напряженности электрического поля:

$$\Delta E - V_1^{-2} E_{tt} = \text{grad}(\text{div } E) + \mu_0 j_t, \quad V_1^{-2} = \epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0. \quad (1)$$

Взаимодействие электромагнитной волны с дрейфующими электронами описывается уравнением Пуассона

$$\text{div } E = \frac{e}{\epsilon_1 \epsilon_0} (N^+ - n) \quad (2)$$

и уравнением непрерывности электронного тока

$$en_t - \text{div } j = 0. \quad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $t$  — время,  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума,  $N^+$  — концентрация легирующей примеси,  $n$  — концентрация электронов. Дифференциальные операторы в (1)–(3) записаны в общепринятых обозначениях, а искомые функции от координаты  $y$  не зависят.

Систему уравнений (1)–(3) необходимо дополнить граничными условиями для составляющих электрического поля и плотности тока. Граничные условия для касательной составляющей поля  $E_z$  очевидны:

$$E_z|_{x=0} = 0, \quad E_z|_{x=W} = 0, \quad (4)$$

а два условия для  $E_x$  будут сформулированы ниже.

Граничное условие для плотности электронного тока  $j_x$  должно описывать процесс лавинного умножения и поэтому определяется уравнением лавины

$$\frac{\partial j_x}{\partial t} = \frac{2j_x}{\tau_1} \left( \int_0^b \alpha_i(|E|) dx - 1 \right) + \frac{2j_s}{\tau_1}. \quad (5)$$

Здесь введено пролетное время  $\tau_1 = b/V_s$  и коэффициент ударной ионизации  $\alpha_i$ ;  $j_s$  — плотность тока насыщения;  $V_s$  — скорость насыщения электронов,

Дальнейший анализ системы уравнений (1)—(3) требует конкретизации физической модели ЛПД-структуры и будет проведен на примере диода Рида. Распределение стационарного электрического поля  $E_c(x)$  в нем таково, что в области  $p^+-n$ -перехода напряженность поля превышает пороговую величину, достаточную для развития ударной ионизации, а в остальной части структуры меньше ее. В теории диода Рида (см., например, [9]) область сильного поля рассматривается как эквивалентный слой умножения с однородным распределением поля  $E_a$  (рис. 1б). Этим модельным представлением можно воспользоваться для преобразования уравнения лавины (5) к более удобной форме.

Введем усредненный коэффициент ударной ионизации

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{b} \int_0^b \alpha_i dx \approx \alpha_0 + \left. \frac{d\alpha_i}{dE} \right|_{E_a} E_1$$

и выделим постоянную ( $j_0, E_a$ ) и переменную ( $j_1, E_1$ ) части электронного тока и  $x$ -компоненты поля, пренебрегая током насыщения и учитывая условие пробоя

$$\int_0^b \alpha_0 dx = 1,$$

из уравнения лавины (5) получим

$$\frac{\partial j_1}{\partial t} - 2 \frac{x_a}{\tau_1} \left. \frac{d\alpha_i}{dE} \right|_{E_a} E_1 (j_0 + j_1) = 0. \quad (6)$$

Условие (6) справедливо лишь при малой величине  $x_a$ , когда можно пренебречь пролетными эффектами в эквивалентном слое умножения [9]. В постановке электродинамической задачи приближение тонкого слоя умножения позволяет рассматривать уравнение лавины в форме (6) как граничное условие на плотность электронного тока при  $x=0$  [7].

Рожденные в результате ударной ионизации электроны вытягиваются в пролетное пространство, дрейф в котором и определяет усиление электромагнитной волны. При этом предполагается, что распределение стационарного электрического поля в пролетном пространстве однородно, а напряженность поля настолько велика, что дрейфовая скорость электронов равна скорости насыщения  $V_s$ . В этих условиях  $x$ -компонента плотности электронного тока пропорциональна концентрации дрейфующих электронов, а продольная часть плотности тока  $j_z \sim j_x E_z$ , определяющая очень малое затухание волны, не учитывается.

Теория диода Рида ограничивается анализом случая, когда пролетное пространство полностью охвачено пространственным зарядом. Так как объемный заряд является непрерывной величиной при переходе от слоя умножения к пролетному пространству, то  $x$ -компонента поля при этом переходе разрыва не испытывает, а непрерывность касательной составляющей поля следует из электродинамических граничных условий. Поэтому в принятой модели пролетного пространства граничное условие для  $x$ -компоненты поля формируется из уравнения Пуассона, записанного при  $x=0$ . Использование уравнения Пуассона в качестве граничного условия при  $x=W$  есть формальное выражение условия так называемого «прокола» структуры диода Рида [9]. Таким образом, граничные условия для  $E_x$  имеют вид

$$\left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{e}{\epsilon_1 \epsilon_0} (N^+ - n) \right] \Big|_{x=0, W} = 0. \quad (7)$$

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \omega t, \quad s = k_1 z, \quad k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0, \quad \xi = x/W, \quad \mathcal{E}_{x,z} = E_{x,z}/E_0,$$

$$E_0 = j_0/\omega\epsilon_1\epsilon_0, \quad J = enV_s/j_0, \quad \theta = \omega W/V_s, \quad \epsilon = k_1 W, \\ \omega_0^2 = (2V_s/\epsilon_1\epsilon_0)j_0(d\alpha_i/dE)|_{E_0},$$

в которых уравнения (1)–(3) с граничными условиями (4), (6), (7) принимают вид

$$\hat{L}_\epsilon \mathcal{E}_x = \theta \frac{\partial J}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial J}{\partial \tau}, \quad \hat{L}_\epsilon = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right); \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \xi} - \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial s} - \theta J \right) \Big|_{\xi=0,1} = 0; \quad (10)$$

$$\hat{L}_\epsilon \mathcal{E}_z = -\epsilon \theta \frac{\partial J}{\partial s}; \quad (11)$$

$$\mathcal{E}_z|_{\xi=0,1} = 0; \quad (12)$$

$$\theta \frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial \xi} = 0; \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial J}{\partial \tau} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \mathcal{E}_x (1 + J) \right] \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (14)$$

В (9)–(14) учтено направление  $x$ -составляющих поля и тока (см. рис. 1) и введен параметр  $\epsilon$ , пропорциональный отношению поперечного размера ЛПД-усилителя к длине волны. Величина  $\epsilon$  очень мала — даже на частоте  $\sim 100$  ГГц она не превосходит  $10^{-2}$ .

Этим можно воспользоваться, в частности, чтобы получить простую форму дисперсионного уравнения, определяющего усиление волны в малосигнальном приближении. Линеаризуя граничное условие (14), будем искать решение системы (9)–(14) среди функций вида  $\exp\{i(kx - \tau)\}\varphi(\xi)$ , сохраняя за амплитудными множителями прежние обозначения  $\varphi(\xi)$ :  $\mathcal{E}_x(\xi)$ ,  $\mathcal{E}_z(\xi)$ ,  $J(\xi)$ . При этом поперечное распределение плотности тока имеет вид  $J(\xi) = J(0)\exp\{i\theta\xi\}$ , а задачи для продольной и поперечной составляющих поля разделяются:

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \lambda_\epsilon^2 \right) \mathcal{E}_x = i(\theta^2 - \epsilon^2)J(\xi), \quad \lambda_\epsilon^2 = \epsilon^2(1 - k^2); \quad (15)$$

$$\left( \frac{d\mathcal{E}_x}{d\xi} - \theta J(\xi) \right) \Big|_{\xi=0,1} = 0; \quad (16)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \lambda_\epsilon^2 \right) \mathcal{E}_z = -i\epsilon k \theta J(\xi), \quad \mathcal{E}_z(\xi)|_{\xi=0,1} = 0. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (15) ( $A_1, B_1$  — постоянные)

$$\mathcal{E}_x(\xi) = A_1 \exp(i\lambda_\epsilon \xi) + B_1 \exp(-i\lambda_\epsilon \xi) + i \frac{\theta^2 - \epsilon^2}{\lambda_\epsilon^2 - \theta^2} J(\xi) \quad (18)$$

должно удовлетворять граничным условиям (16) и условию  $J(0) = i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \mathcal{E}_x(0)$ , следующему из уравнения лавины (14). Полученная таким образом система линейных однородных уравнений относительно  $A_1, B_1, J(0)$  имеет нетривиальные решения, если ее определитель

$$D(k, \omega) = 2i\lambda_\epsilon \left[ \theta \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\lambda_\epsilon^2 - \epsilon^2}{\lambda_\epsilon^2 - \theta^2} (e^{i\theta} - \cos\lambda_\epsilon) - i\lambda_\epsilon \sin\lambda_\epsilon \left( 1 + \frac{\omega_0^2 \theta^2 - \epsilon^2}{\omega^2 \lambda_\epsilon^2 - \theta^2} \right) \right] \quad (19)$$

обращается в нуль. Искомое дисперсионное уравнение  $k(\omega)$  есть функция, заданная условием  $D(k, \omega) = 0$ .

Уравнение  $D(k, \omega) = 0$  имеет два решения. Первое из них  $\lambda_\varepsilon = 0$  ( $k^2 = 1$ ) определяет волновой вектор волны, распространяющейся в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Это решение не связано с усилением волны и поэтому не рассматривается. Второе решение, с учетом малости  $\varepsilon$ , имеет простую форму:

$$k^2 = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) + i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}\right]^{-1}. \quad (20)$$

На рис. 2 показано семейство зависимостей  $\text{Im } k(\omega/\omega_0)$  при разной величине пролетного угла на частоте лавины  $\theta_0 = \omega_0 W/V_s$ . Как видно из рис. 2, усиление  $G = -\text{Im } k$  как функция частоты имеет максимум, положение которого медленно сдвигается с увеличением  $\theta_0$  в сторону меньших частот. В малосигнальном приближении поперечное распределение продольного поля  $\mathcal{E}_z(\xi)$  определяется как решение задачи (17) и имеет вид

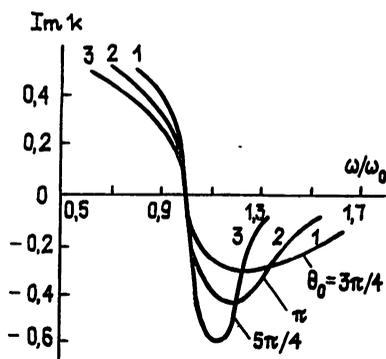


Рис. 2.

$$\mathcal{E}_z(\xi) = i\varepsilon \frac{k\theta J(0)}{\theta^2 - \lambda_\varepsilon^2} \left[ e^{i\theta\xi} - e^{i\theta} \frac{\sin \lambda_\varepsilon \xi}{\sin \lambda_\varepsilon} + \frac{\sin \lambda_\varepsilon (\xi - 1)}{\sin \lambda_\varepsilon} \right]. \quad (21)$$

Таким образом, величина  $\mathcal{E}_z$  пропорциональна  $\varepsilon$ , и поэтому для анализа волновых взаимодействий в распределенном ЛПД-усилителе можно использовать приближение  $T$ -волны. В приближении  $T$ -волны системы уравнений (9), (11), (13) удобно привести к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \mathcal{E}_x = \frac{\partial J}{\partial \tau}; \quad (22)$$

$$\theta \frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial \xi} = 0; \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \xi} = \theta J. \quad (24)$$

Функции  $\mathcal{E}_x(s, \tau, \xi)$ ,  $J(s, \tau, \xi)$  по-прежнему связаны граничным условием (14), которым и определяется нелинейность задачи. Разложим решение уравнений (22)–(24) в ряд по плоским волнам:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ J \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n(\xi, s) \\ J_n(\xi, s) \end{bmatrix} \exp\{in(s-\tau)\}. \quad (25)$$

Так как амплитуда волны мало меняется на расстоянии порядка длины волны ( $|\text{Im } k| < 1$ , рис. 2), то для анализа системы уравнений (22)–(24) можно использовать метод медленно меняющихся амплитуд. В этом приближении получим

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} J_n, \quad J_n = J_n(0, s) \exp\{in\theta\xi\}. \quad (26)$$

При этом функции  $\mathcal{E}_n(\dot{0}, s)$ ,  $J_n(\dot{0}, s)$  связаны между собой соотношением

$$inJ_n + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} [\mathcal{E}_n + \sum_{a+b=n} J_a \mathcal{E}_b] = 0, \quad (27)$$

следующим из граничного условия (14).

Далее удобно воспользоваться «законом сохранения» полного тока

$$\frac{\partial i}{\partial \xi} = 0, \quad i(s, \tau) = J(s, \tau, \xi) + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{E}_x(s, \tau, \xi) = \sum_n i_n(s) \exp \{in(s-\tau)\}, \quad (28)$$

следующим из (23), (24), и перейти к величинам, усредненным по толщине пролетной области. Процедура усреднения сглаживает особенности распределения поля у контактов и, кроме того, позволяет естественным образом ввести «импедансы»  $Z_{n\omega}$  — безразмерные функции частоты и пролетного угла:

$$Z_{n\omega} = \frac{1}{i_n(0)} \int_0^1 \mathcal{E}_n(\xi, 0) d\xi = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1 - \cos n\theta}{n\theta(1 - (n^2\omega^2/\omega_0^2))} + i \left[ 1 - \frac{\sin n\theta}{n\theta(1 - (n^2\omega^2/\omega_0^2))} \right] \right\}. \quad (29)$$

Используя введенные функции, из (26) — (28) получим окончательно для амплитуд усредненного поля  $E_n(s)$  следующую систему уравнений:

$$\frac{dE_n}{ds} = -\frac{\Phi_n I_n}{2}, \quad E_n = \int_0^1 \mathcal{E}_n(\xi, s) d\xi, \quad \Phi_n = \Psi_n (in + Z_{n\omega}^{-1}); \quad (30)$$

$$\Psi_n I_n = E_n + \sum_{a+b=n} I_a (E_b + F_b I_b), \quad \Psi_n = Z_{n\omega} \left( 1 - \frac{n^2\omega^2}{\omega_0^2} \right), \quad F_n = \frac{1 - \Phi_n}{in}. \quad (31)$$

Для оценки вклада каждой гармоники в поле волны рассмотрим уравнения (30), (31) в линейном приближении. В этом случае все гармоники независимы, а инкремент нарастания и дисперсия каждой из них определяются, соответственно, как действительная и мнимая части величины

$$\alpha_n = \frac{1}{E_n} \frac{dE_n}{ds} = \frac{1}{2} (in + Z_{n\omega}^{-1}). \quad (32)$$

Подстановка (29) в (32) показывает, что усиление высших гармоник быстро убывает с увеличением их номера ( $\text{Re } \alpha_n \sim n^{-2}$ ), а характерная длина нарастания  $n$ -гармоники в  $n^2$  раз больше той же длины для первой гармоники [7]. По этой причине в эффективном взаимодействии может участвовать лишь небольшое число гармоник.

Вернемся к нелинейным уравнениям (30), (31) и рассмотрим распространение волны частоты  $\omega$ , падающей на активную среду ( $s \geq 0$ ). Эффективность взаимодействия основной волны с каждой из высших гармоник зависит от величины пролетного угла. Так, например, при  $\theta = \pi$  четные гармоники не усиливаются ( $\alpha_{2n} \equiv 0$ ), поэтому передача энергии основной волны вверх по спектру приводит к возбуждению в основном нечетных гармоник. Так как характерная длина нарастания  $n$ -гармоники квадратично зависит от ее номера, то эффективная генерация, например, третьей гармоники возможна в УВВ, продольный размер которого на порядок больше длины основной усиливаемой волны [7]. Однако практическая ценность таких протяженных устройств пока не очевидна. Имея в виду это замечание, пренебрежем генерацией гармоник и удержим в уравнениях (30), (31) только слагаемые с  $n = \pm 1$ . Тогда из (30), (31) с точностью до членов третьего порядка по ампли-

туде поля включительно получим уравнение для распределения интенсивности основной волны:

$$\frac{dI_1}{ds} = -\frac{\text{Re}Z_\omega}{|Z_\omega|^2} I_1(1 - I_1), \quad I_1 = \frac{|E_1|^2}{I_{\max}}, \quad (33)$$

$$I_{\max} = \text{Re} Z_\omega [4 (\text{Im} Z_\omega \text{Im} \sigma_\omega - \text{Re} Z_\omega \text{Re} \sigma_\omega)]^{-1};$$

$$\sigma_\omega = \sigma_{11} (\sigma_{2-1} + \sigma_{-12} - \Psi_{-1}^{-1}), \quad \sigma_{ab} = ia \left[ Z_{a\omega} Z_{b\omega} \left( 1 - \frac{a^2 \omega^2}{\omega_0^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{b^2 \omega^2} \right) \right]^{-1}. \quad (34)$$

Таким образом, ограничение роста амплитуды волны обусловлено уменьшением усиления волны с увеличением ее интенсивности. Зависимость усиления волны от ее интенсивности (самовоздействие волны) объясняется следующим образом. С увеличением амплитуды волны из-за нелинейных эффектов появляется добавка к постоянному току, пропорциональная  $E_{-1}E_1 = |E_1|^2$ . Это увеличит частоту лавины  $\omega_0$  ( $\omega_0^2 \sim$  постоянному току), а отношение  $\omega/\omega_0$ , которым определяется усиление волны, уменьшится. Эффективность нелинейного взаимодействия, отметим, зависит от фаз взаимодействующих волн, что определяет  $I_{\max}$  как функцию преломного угла и частоты.

Вследствие взаимодействия и самовоздействия волн в рассматриваемой системе возможна передача энергии основной волны не только вверх, но и вниз по спектру. Имеется, однако, принципиальное различие в генерации суб- и супергармоник, обусловленное спецификой частотной зависимости коэффициента усиления УБВ: если на некоторой частоте  $\omega_a$  коэффициент усиления положителен ( $\text{Re} \alpha_a > 0$ ), то он положителен и на любой  $\omega > \omega_a$ . При этом волны с меньшими частотами, вообще говоря, не усиливаются ( $\text{Re} \alpha_{\omega < \omega_a} < 0$ ).

Чтобы выделить особенности генерации субгармоник, рассмотрим распространение волны с частотой  $2\omega$ , удовлетворяющей условиям  $\omega < \omega_0 < 2\omega$ . В этом частотном интервале основная волна усиливается ( $\text{Re} \alpha_2 > 0$ ), а ее субгармоника — нет ( $\text{Re} \alpha_1 < 0$ ). Возникающие при этом нелинейные эффекты обусловлены в простейшем случае взаимодействием трех волн  $E_i$ ,  $i=1, 2, 3$ . Физическая модель этого взаимодействия относится к области волнового взаимодействия небольшой протяженности, когда эффект самовоздействия в субгармониках незначителен. В этом случае эволюция амплитуд субгармоник определяется волновыми взаимодействиями на комбинационных частотах и можно пренебречь обратным влиянием субгармоник на поле основной волны, максимальная величина амплитуды которой ограничена самовоздействием.

Удерживая в разложении  $I_1$ ,  $I_3$  слагаемые, квадратичные по амплитудам взаимодействующих волн, получим из (31) с учетом сказанного

$$\Psi_1 I_1 = E_1 + 2\Delta_{-12} E_{-1} E_2 + 2\Delta_{-23} E_{-2} E_3; \quad (35)$$

$$\Psi_2 I_2 = E_2 + 4\delta_{-24} \Delta_{22} E_2 |E_2|^2; \quad (36)$$

$$\Psi_3 I_3 = E_3 + 2\Delta_{12} E_1 E_2, \quad \Delta_{ab} = \sigma_{ab} + \sigma_{ba}, \quad \delta_{ab} = \Delta_{ab} - \Psi_a^{-1}. \quad (37)$$

Система уравнений (30), (35)—(37) описывает нелинейные эффекты двоякого рода. Во-первых, имеет место генерация субгармоники на комбинационной частоте. Во-вторых, в рассматриваемой системе может реализоваться другой нелинейный эффект, состоящий в смене знака коэффициента субгармоники в поле основной волны. Оба явления сопутствуют друг другу, а общая картина волнового процесса включает также и эффект их взаимодействия. Рассмотрим сначала генерацию субгармоники на комбинационной частоте. Для оценки величины этого эффекта воспользуемся адиабатическим принципом, распространенным в теории неравновесных систем [10]. Применительно к анализу возбужде-

ния субгармоники этот принцип позволяет считать, что амплитуда усиливающейся субгармоники определяется только эффективностью нелинейного волнового взаимодействия, т. е. имеет место локальная связь между амплитудами полей,  $E_1 \approx -2\Delta_{-23}E_{-2}E_3$ . В этом приближении эффективность передачи энергии основной волны в субгармоники определяется механизмом ограничения роста интенсивности усиливающейся субгармоники,  $I_1/I_2 = 4|\Delta_{-23}|I_3$ ,  $I_a = |E_a|^2$ . Не конкретизируя физической природы этого механизма, отметим только, что он описывается в (37) слагаемыми третьего порядка по амплитудам взаимодействующих волн и поэтому может быть эффективным только при достаточно большой протяженности области волнового взаимодействия. Если продольный размер УБВ недостаточен для этого, то обогащение низкочастотного спектра неэффективно.

Чтобы выделить эффект воздействия поля основной волны на коэффициент усиления субгармоники, опустим в (35) третье слагаемое, описывающее ее генерацию. Переходя в уравнениях (30), (35), (36) к действительным величинам  $E_k = \rho_k \exp\{i\varphi_k\}$ ,  $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ , получим

$$\frac{d\rho_1}{ds} = \rho_1[-a_1 + \rho_2(\beta \sin \Phi - \alpha \cos \Phi)],$$

$$\frac{d\rho_2}{ds} = \rho_2[-a_2 - A\rho_2^2],$$

(38)

$$\frac{d\Phi}{ds} = (2b_1 - b_2)' + 2\rho_2(\alpha \sin \Phi + \beta \cos \Phi) - B\rho_2^2,$$

$$\alpha_k = 2(a_k + ib_k), \quad \alpha_1\Delta_{-12} = \alpha + i\beta, \quad 2\alpha_2\sigma_{22}\delta_{-24} = A + iB.$$

Определим величину  $F = (d/ds) \ln \rho_1$  как локальный коэффициент усиления субгармоники. Для выделения нелинейного эффекта, сводящегося

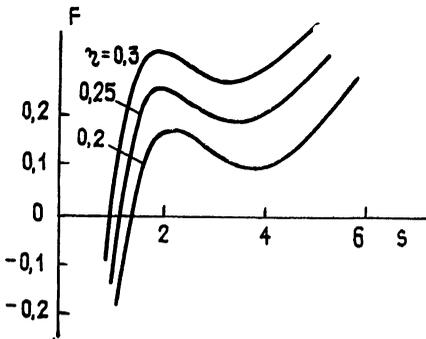


Рис. 3.

к смене знака коэффициента усиления в поле основной волны, система уравнений (38) была решена численно методом Рунге—Кутты. Результаты этого расчета показаны на рис. 3; кривые построены при разной величине  $\eta$ , равной отношению амплитуды падающей волны  $\rho_2(0)$  к максимально возможному ее значению  $\rho_{\max} = \sqrt{-a_2/A}$ .

ЛПД-усилитель выделяется из множества известных неравновесных систем с распределенным усилением в двух отношениях. Во-пер-

вых, усиление в ЛПД-усилителе обусловлено неравновесными процессами, протекающими не в объеме полупроводника, а у его поверхности вблизи контакта (лавинное умножение разогретых носителей и их инжекция в пролетное пространство). В известных твердотельных УБВ (например в распределенном диоде Ганна [1]), напротив, электронные процессы вблизи контакта хотя и не являются второстепенными, но не они определяют усиление электромагнитной волны. Это усиление определяется неравновесными свойствами электронного газа в объеме полупроводника. По названным причинам ограничение амплитуды усиливаемой волны обусловлено, соответственно, в ЛПД-усилителе — токовой нелинейностью лавинного умножения носителей вблизи контакта, а в распределенном диоде Ганна — полевой зависимостью дрейфовой скорости горячих электронов.

Второй отличительной особенностью ЛПД-усилителя является частотная зависимость коэффициента усиления волны и эффективности вол-

нового взаимодействия в нем. Эта зависимость обусловлена тем, что ЛПД-усилитель является устройством с динамическим отрицательным сопротивлением, появление которого связано с временным запаздыванием между лавинным умножением носителей и их дрейфом в пролетном пространстве. Возникающий вследствие этого фазовый сдвиг между различными составляющими плотности тока и напряжения зависит от двух величин — частоты волны, отнесенной к частоте лавины  $\omega/\omega_0$ , и величины пролетного угла  $\theta$ . Так как эффективность волнового взаимодействия определяется фазовым сдвигом между взаимодействующими волнами, то, меняя постоянный ток через усилитель ( $\omega_0^2 \sim j_0$ ) и (или) частоту  $\omega$  усиливаемой волны ( $\theta = \omega W/V_s$ ), можно выделить одни эффекты волнового взаимодействия или подавить другие из числа описанных выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Любченко В. Е., Макеева Г. С., Нефедов Е. И. // Радиотехника и электроника, 1982. Т. 27. № 9. С. 1665.
2. Midford T., Bowers H. // Proc. IEEE. 1968. V. 56. № 10. P. 1724.
3. Bayraktaroglu B., Shih H. // IEEE Electron Devices Letters. 1983. EDL-4. № 11. P. 393.
4. Давыдова Н. С., Данюшевский Ю. З., Телятников Л. И. // Радиотехника. 1972. Т. 27. № 8. С. 77.
5. Franz M., Beyer J. // IEEE Trans. 1978. V. MTT-26. № 11. P. 851.
6. Itoh T., Fukuoka Y. // IEEE Trans. 1985. V. MTT-33. № 3. P. 216.
7. Михайлов Г. Б., Сарычев В. И. // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. 1986. Вып. 2 (181). С. 24.
8. Mains R., Haddad G. // IEEE Trans. 1986. V. MTT-34. № 9. P. 965.
9. Тагер А. С., Вальд-Перлов В. М. Лавинно-пролетные диоды и их применение в технике СВЧ. — М.: Сов. Радио. 1968. С. 480.
10. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980. — 404 с.

Поступила в редакцию  
29 сентября 1988 г.,  
после доработки  
28 сентября 1989 г.

#### THE NONLINEAR ELECTRODYNAMIC THEORY OF TRAVELLING-WAVE AMPLIFIER ON DISTRIBUTED IMPATT-DIODE

*G. B. Mikhailov*

The full analysis of wave interactions in distributed IMPATT-diode (DID) is presented. The main nonlinear phenomena in DID: generation of sub- and super-harmonics, saturation of wave amplitude, inversion of subharmonic gain sign in the main wave field are extracted. The comparison of the gain mechanism in DID and that in distributed Gunn's diode is made.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 551.510.535

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ДИАГНОСТИКА ИСКУССТВЕННЫХ КРУПНО-  
МАСШТАБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЫ МЕТОДОМ ВНЗ**

*В. А. Гудин, В. Н. Дейнеко, В. Н. Иванов, Ю. А. Игнатьев, А. С. Терехов*

При взаимодействии мощного вертикального радиоизлучения с плазмой верхней ионосферы генерируются неоднородности электронной концентрации с масштабами поперек геомагнитного поля от единиц метров до сотен километров. Этот факт достаточно хорошо изучен экспериментально (см., например, [1-5]). Крупномасштабная область возмущения (ОВ) имеет наибольшее относительное отклонение электронной концентрации и максимальные размеры, определяемые раствором диаграммы направленности нагревного стенда, из всего спектра масштабов искусственных неоднородностей. В силу этого крупномасштабная ОВ оказывает наибольшее влияние на характеристики распространяющихся через нее пробных радиоволн. К настоящему времени методом вертикального и наклонного зондирования исследованы фокусирующие свойства искусственной ОВ верхней ионосферы с пониженным значением электронов [6-9]. Однако возникновение дополнительной рефракции лучей, приводящее к появлению фокусирующих свойств ОВ, должно вызывать изменения в характеристиках сигналов не только наклонного и вертикального зондирования, но и в характеристиках сигналов возвратно-наклонного зондирования.

В данной работе рассматриваются результаты первых экспериментов по диагностике крупномасштабной области возмущения, возникающей в верхней ионосфере при вертикальном нагреве мощным радиоизлучением, методом возвратно-наклонного зондирования (ВНЗ). Диагностика ОВ осуществлялась с помощью станции ВНЗ, расположенной на расстоянии 1300 км от нагревного стенда и излучающей импульсы длительностью 0,8 мс с частотой повторения 10 Гц. Станция позволяла регистрировать сигналы ВНЗ с девяти азимутальных направлений параллельно с суммарным сектором обзора 50°.

Первая серия экспериментов была проведена в августе—сентябре 1980 г. в ночное время суток (20.00—4.00 МДВ). Для нагрева использовался передатчик НИРФИ с эквивалентной мощностью 30 МВт, который работал на одной из двух частот: 4,6 МГц или 5,75 МГц. Анализ экспериментальных данных проводился на основе дистанционно-частотных (ДЧХ) и пространственно-временных характеристик (ПВХ) сигнала ВНЗ.

Обнаружено, что только в условиях летней полуночи (23.00—2.00 МДВ) при приеме с азимутального направления, ориентированного на ОВ, наблюдалось появление в циклах нагрева дополнительных локальных максимумов в азимутально-дальностном распределении сигнала ВНЗ. Это обусловило появление характерных расщеплений в ДЧХ.

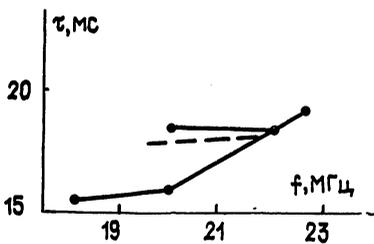


Рис. 1.

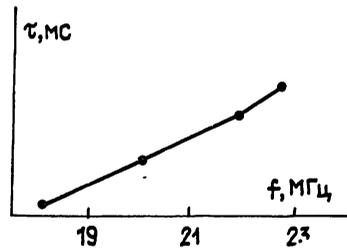


Рис. 2.

На рис. 1 в качестве примера приведена дистанционно-частотная характеристика ВНЗ, полученная в период нагрева ионосферы при приеме с направления ( $\varphi=0$ ), ориентированного на ОВ. На рис. 2 приведена ДЧХ ВНЗ при приеме с азимутального направления, смещенного относительно нулевого на 12°. Из рисунков видно, что на трассе, проходящей через ОВ, ДЧХ имеет дополнительный трек. Изменения в виде

ДЧХ регистрировались через 4—8 мин после начала сеанса нагрева. Примерно через такое же время после выключения нагревного стенда вид ДЧХ восстанавливался. Характер изменения ДЧХ, время их появления, четкая корреляция с работой нагревного стенда и азимутальная избирательность позволяют предположить, что изменения в наблюдаемых характеристиках сигналов ВНЗ связаны с развитием крупномасштабной ОВ и появлением дополнительной рефракции лучей на ней. Это согласуется с результатами модельных расчетов амплитудных характеристик и ДЧХ сигналов ВНЗ, которые были выполнены с учетом геофизических условий проведения экспериментов и наличия ОВ в ионосфере. Из результатов расчета следует, что в условиях данного эксперимента наиболее оптимальным для развития ОВ являлся временной интервал 22.00—2.00 МДВ. Величина относительного изменения электронной концентрации в ОВ  $\Delta N/N$  может достигать 5—10%, что и приводит к наблюдаемым в эксперименте искажениям ДЧХ сигнала ВНЗ\*.

Последующие эксперименты были проведены в ноябре (8.00—19.00 МДВ) 1982 г. Здесь для нагрева ионосферы использовался стенд «Сура» с эквивалентной мощностью ~150 МВт. Результаты наблюдений показали, что на протяжении всего сеанса наблюдений характер изменения ДЧХ сигнала ВНЗ в циклах нагрева сохранился примерно таким, как и в экспериментах 1980 г., и только в период 17.00—19.00 в ноябре 1982 г. наблюдалось более значительное усиление амплитуд сигнала ВНЗ, достигающее в отдельных сеансах нагрева 6—8 ДБ. Подобный характер проявления влияния ОВ на ВНЗ сигнал обусловлен, по-видимому, особенностями ее возбуждения. В частности, для экспериментов 1982 г. являлось характерным то, что высота отражения мощной радиоволны в дневных условиях при рабочих частотах нагревного стенда 6—8 МГц составляет 210—230 км. В этом случае расчетное значение величины  $\Delta N/N$  порядка 3—8%. При переходе к ночным условиям проведения экспериментов (16.00—19.00 МДВ) в ноябре 1982 г., когда растет высота отражения мощной радиоволны ( $H \geq 230$ —250 км) и рабочие частоты нагревного стенда приближаются к критической частоте слоя F2, величина  $\Delta N/N$  по оценкам достигает 15—20%. При этом в эксперименте наблюдались более значительные искажения энергетически-частотных характеристик сигналов ВНЗ. Расчеты  $\Delta N/N$  проводились на основе модели искусственной области возмущения, приведенной в работе [10] для конкретной геофизической обстановки. На рис. 3 приведено расчетное значение  $\Delta N/N$  в ОВ в зависимости от времени суток для ноября 1982 г.

Таким образом, проведенные эксперименты, иллюстрирующие возможности метода ВНЗ, позволяют получить новые данные об особенностях развития крупномасштабной ОВ и ее влияния на распространение декаметровых радиоволн из-за дополнительной рефракции лучей. Эксперименты указывают на существенную зависимость возмущения электронной концентрации  $N$  в ОВ от геофизических условий. В наиболее благоприятных условиях образования ОВ (летом и ночью) использование передатчиков со сравнительно малой мощностью (30 МВт) позволяет исследовать особенности развития ОВ и оценить величину  $\Delta N/N$ .

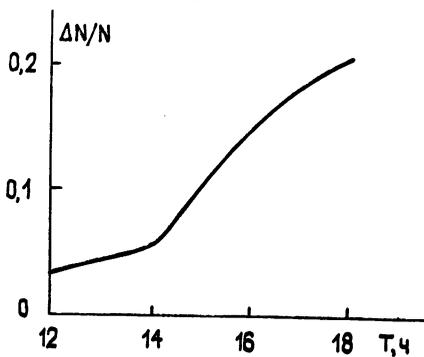


Рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Utlaut W. F., Violette E. G., Paul A. K. // J. Geophys. Res. 1970. V. 75. № 31. P. 6429.
2. Ерухимов Л. М., Метелев С. А., Митякова Э. Е. и др. // Сб.: Тепловые нелинейные явления в плазме. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 7.
3. Алебастров В. А., Бенедиктов Е. А., Иванов В. Н. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 4. С. 497.
4. Коровин А. В., Насыров А. М., Ятнов Н. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 2. С. 148.
5. Бахметьева Н. В., Иванов В. А., Игнатьев Ю. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 359.
6. Бенедиктов Е. А., Горохов Н. А., Игнатьев Ю. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 4. С. 502.
7. Бочкарев Г. С., Игнатьев Ю. А. В кн.: Эффекты искусственного воздействия мощным радиозлучением на ионосферу Земли. — М.: Наука, 1983. С. 37.
8. Бенедиктов Н. А., Гончаров Н. П., Игнатьев Ю. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 1. С. 12.
9. Иванов В. А., Игнатьев Ю. А., Фролов В. А. и др. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1986. Т. 26. № 2. С. 328.

\* Пунктиром на рис. 1 приведен дополнительный трек, полученный путем расчетов ДЧХ сигнала ВНЗ при наличии в ионосфере крупномасштабной ОВ с центром на высоте 250 км и  $\Delta N/N \sim 10\%$  для условий летней ночи (24.00 МДВ).

УДК 550.388.2

## НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ИОНОСФЕРЫ

С. В. Сазонов

Появление ионосферных неоднородностей (пузырей), обедненных плазмой в  $F$ -области геомагнитного экватора обычно связывают с механизмами столкновительной неустойчивости Рэлея—Тейлора (НРТ) [1–3] и градиентно-дрейфовой неустойчивости (ГДН) [4, 5]. В [6] было указано, что для эффективного проявления механизма НРТ отношение размеров возмущения вдоль  $l_{\parallel}$  и поперек  $l_{\perp}$  вектора магнитного поля  $H$  должно удовлетворять неравенству

$$l_{\parallel}/l_{\perp} > \mu \equiv \sqrt{\omega\Omega/v_e v_{in}} \sim 10^3,$$

где  $\omega$ ,  $\Omega$  — электронная и ионная гирочастоты,  $v_e = v_{ei} + v_{en}$ ,  $v_{ei}$ ,  $v_{en}$ ,  $v_{in}$  — эффективные частоты электрон-ионных, электрон-нейтральных и ион-нейтральных столкновений соответственно. Однако, как показывают эксперименты, обычно  $l_{\parallel}/l_{\perp} \sim 10 \div 100$  [6]. В [1–5] поляризационное электрическое поле возмущения  $E$  считалось потенциальным. В работе [7] обоснована необходимость учета непотенциальности  $E$  для возмущений, возникающих под действием НРТ, с поперечными размерами  $l_{\perp} > 10$  км. Для них была выявлена электродинамическая ветвь НРТ. Линейные приближения не способны выявить асимметрию в динамике пузырей и возмущений с повышенной концентрацией плазмы. В то же время эксперименты свидетельствуют о преимущественном появлении пузырей [6]. Настоящая работа посвящена анализу динамики экваториальных возмущений  $F$ -области с учетом электродинамических и нелинейных эффектов на совместной основе механизмов НРТ и ГДН.

В качестве исходных взяты гидродинамические уравнения квазинейтральной холодной замагниченной плазмы, а также уравнения Максвелла в пренебрежении током смещения:

$$\text{rot rot } E = - (4\pi/c^2) (\partial j / \partial t). \quad (1)$$

Здесь  $c$  — скорость света,  $j = eN(u_i - u_e)$  — плотность электрического тока,  $e$  — заряд электрона,  $N$  — электронная концентрация,  $u_e$ ,  $u_i$  — дрейфовые электронная и ионная скорости, которые находятся из соответствующих уравнений движения в безынерционном приближении [2]. В результате получена следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{L} u = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [(1 + \rho)u] + \mu^2 \frac{\partial w}{\partial z} = \left( \frac{g}{v_i} + u_0 \right) \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad (3)$$

$$d_{\perp} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $u = cE_x/H$ ,  $w = cE_z/H$ ,  $N_0(y)$  — равновесная электронная концентрация,  $n$  — ее возмущение,  $\rho = n/N_0$ ,  $L^{-1} = d \ln N_0 / dy$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $d_{\perp} = c^2 v_e / \omega_p^2$  — коэффициент магнитной диффузии поперек геомагнитного поля [7],  $\omega_p$  — электронная ленгмюэровская частота. При этом ось  $z$  параллельна  $H$ ,  $y$  — антипараллельна  $g$ ,  $x$  определяет долготную координату,  $u_0 = cE_0/H$ ,  $E_0$  — напряженность внешнего электрического поля восточного направления. При выводе (2)–(4) учтено, что в  $F$ -области  $v_{ei} \gg v_{en}$ ,  $v_{ei} \sim N$ .

Уравнение (2) представляет собой уравнение непрерывности для электронов, (3) — закон сохранения заряда  $\text{div } j = 0$ , (4) —  $z$ -я компонента уравнения (1). В (2) опущено слагаемое  $(c/H) E_y \partial \rho / \partial x - (u/N_0) \partial n / \partial y$ , в силу того, что вертикальные размеры наблюдаемых пузырей составляют обычно 50–100 км [2, 6, 8], в то время как для нижней части  $F$ -слоя  $L \sim 5 \div 10$  км. В этом случае скорость подъема пузыря можно оценить методом последовательных приближений, что и будет сделано ниже.

В (3) принято приближение «вертикально вытянутого возмущения» ( $|\partial E_x/\partial x| \gg \gg |\partial E_y/\partial y|$ ) [3, 8]. Последнее также относится к уравнению (4). Пусть поперечный размер возмущения удовлетворяет неравенству

$$l_{\perp} \gg \sqrt{d_{\perp}/|\Gamma - d_{\parallel}/l_{\parallel}^2|}, \quad (5)$$

где  $d_{\parallel} = \mu^2 d_{\perp} = u_A^2/\nu_{in}$  — коэффициент продольной магнитной диффузии [7],  $u_A = c\sqrt{\omega\Omega}/\omega_p$  — альфвеновская скорость,  $\Gamma = (g/\nu_{in} + u_0)/L$ . Тогда в (4) можно пренебречь членом  $\partial^2 \omega/\partial x^2$ , в чем просто убедиться после линейризации (2) — (4). Данное приближение соответствует электродинамической ветви НРТ — ГДН, в то время как в электростатике  $\partial \omega/\partial x = \partial u/\partial z$ . Электростатическое приближение получается из (4) при  $d_{\perp} \rightarrow \infty$ . Взяв характерные значения [7]  $d_{\perp} \sim 0,1$  км<sup>2</sup>/с,  $\Gamma \sim 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>, найдем из (5), что  $l_{\perp} > 10$  км. С учетом сказанного для таких возмущений из (2) — (4) следует

$$(1 + \rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Gamma \rho + d_{\parallel} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что основным механизмом, демпфирующим НРТ — ГДН для возмущений, удовлетворяющих (5), является продольная диффузия их магнитного поля. Вместе с магнитным полем возмущения диффундирует поперечная компонента электрического поля поляризации  $E_x$ , выполняющая роль положительной обратной связи в развитии НРТ — ГДН. Данная диффузия рассредотачивает и тем самым ослабляет обратную связь. Кроме того, из (6) следует, что динамика пузырей ( $-1 < \rho < 0$ ) должна развиваться быстрее, чем возмущений с повышенной концентрацией плазмы ( $\rho > 0$ ).

Приведем анализ граничной задачи для уравнения (6) в области длины  $l_{\parallel}$  с нулевыми значениями  $\rho$  на границах. Приближенной реализацией этой модели является развитие возмущения вдоль силовой линии геомагнитного поля длины  $l_{\parallel}$  с учетом ее погружения на концах в высокопроводящий  $E$ -слой. Обычно  $l_{\parallel} \simeq 4000$  км [9]. Очевидно, при таких размерах возмущений требуется учет неоднородности регулярных параметров плазмы вдоль силовой линии геомагнитного поля, что приведет к усложнению уравнения (6). Однако учет данной неоднородности является существенным лишь в нескольких сотнях километров от областей погружения силовой линии в  $E$ -слой, оставаясь не столь существенным на основной ее длине [9]. Для учета этого обстоятельства в первом приближении примем в уравнении (6)  $\Gamma = \Gamma(z)$ ,  $d_{\parallel} = d_{\parallel}(z)$ . Рассмотрим проведем методом Бубнова — Галеркина [10]. Для уяснения качественных особенностей достаточно ограничиться учетом лишь первой, неустойчивой, пространственной моды линейризованной задачи. Остальные моды будут затухать. Представляя  $\rho$  в виде  $\rho = A(t) \cos(\pi z/l_{\parallel})$ ,  $|z| < l_{\parallel}/2$ , для  $A$  найдем следующее уравнение:

$$\frac{da}{dt} = \gamma a(1+a)^{-1}, \quad a = 8A/(3\pi), \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{2}{l_{\parallel}} \int_{-l_{\parallel}/2}^{l_{\parallel}/2} [\Gamma(z) - \pi^2 d_{\parallel}(z)/l_{\parallel}^2] \cos^2(\pi z/l_{\parallel}) dz.$$

Пусть начальное возмущение  $\rho(z, 0)$  представляет собой область размером  $l$  со значением  $\rho_0$ , центр которой лежит посередине отрезка силовой линии. Тогда  $A(0) \simeq 2l/l_{\parallel}$ .

Качественный временной ход  $\rho$  в точке  $z=0$  приведен на рис. 1. Выше оси абсцисс — динамика возмущения с повышенной концентрацией плазмы, ниже — пузыря. При этом  $\gamma\tau^{\pm} = \pm(1 - 2l/l_{\parallel}) + \ln(l_{\parallel}/2l)$ . Из (2), (7) следует, что пузыри развиваются в режиме с обратным:

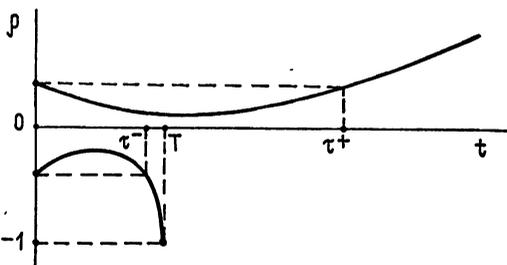


Рис. 1.

$$t \rightarrow t_0 = \gamma^{-1} [\ln(l_{\parallel}/2l) |\rho_0| + 2l|\rho_0|/l_{\parallel} - 1] \quad u \sim (t_0 - t)^{-1/2}.$$

Из (6) легко получить оценочное условие на параметры  $F$ -области, при выполнении которого будет происходить рост возмущения:

$$E_0 > H/c\nu_{in}(\pi^2 u_A^2/l_{\parallel}^2 L - g). \quad (8)$$

Примечательно, что оно не зависит от  $l_{\perp}$ . Взяв для  $F$ -области  $H \sim 0,4$  Гс,  $\nu_{in} \sim 1$  с<sup>-1</sup>,  $u_A \simeq 400$  км/с,  $L \sim 10$  км,  $l_{\parallel} \sim 4000$  км, найдем:  $E_0 > 10^{-6}$  ед. СГСЭ  $\simeq 30$  мВ/м. Отсюда следует, что роль механизма ГДН является определяющей в возникновении и развитии крупномасштабных возмущений.

Из (2)—(4) нетрудно в общем случае получить оценку для скорости подъема пузыря  $u$ :

$$u \sim (L/2) (s + \sqrt{s^2 + 4\pi^2 d_{\perp}^2 / l_{\perp}^2}) |\rho| / (1 - |\rho|),$$

где  $s = \Gamma - \pi^2 (d_{\perp}^2 / l_{\perp}^2 - d_{\parallel}^2 / l_{\parallel}^2)$ . Отсюда, в частности, следует, что электростатические пузыри ( $d_{\perp}, d_{\parallel} \rightarrow \infty, d_{\parallel} / d_{\perp} = \mu^2 = \text{const}$ ) будут подниматься со скоростью

$$u \sim \left( \frac{g}{v_{in}} + u_0 \right) (1 + \mu^2 l_{\perp}^2 / l_{\parallel}^2)^{-1} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|}.$$

Таким образом, экваториальные ионосферные пузыри с поперечными размерами в десятки километров — существенно нелинейные образования, электрическое поле которых имеет непотенциальный характер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dungey J. W. // J. Atm. Terr. Phys. 1956. V. 9. P. 304.
2. Ossakow S. L., Zalesak S. T., McDonald B. E., Chaturvedi P. K. // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. P. 17.
3. Мацневский С. В., Никитиц М. А., Пец А. В. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1987. Т. 30. № 6. С. 921.
4. Martyn D. F. // J. Geophys. Res. 1959. V. 64. P. 2178.
5. Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д., Чернобровкина Н. А. Явление  $F$ -рассеяния в ионосфере. — М.: Наука, 1984.
6. Фельдштейн А. Я. // Сб. Ионосферные исследования. — М.: Сов. радио. 1986. № 41. С. 70.
7. Пец А. В., Сазонов С. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 10. С. 1261.
8. Генкин Л. Г., Ерухимов Л. М., Мясников Е. Н., Шварц М. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 5. С. 567.
9. Zalesak S. T., Ossakow S. L., Chaturvedi P. K. // J. Geophys. Res. 1982. V. 87. P. 151.
10. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. — М.: Наука. 1983.

Тихоокеанский океанологический институт  
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию  
8 августа 1988 г.

УДК 550.388.2

### О НАБЛЮДЕНИЯХ СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ, ЗНАЧИТЕЛЬНО ПРЕВЫШАЮЩЕМ ПРЕДЕЛЬНУЮ ЧАСТОТУ СПЕКТРА ДЕКАМЕТРОВЫХ ВОЛН

Л. В. Паньков, В. М. Поляков, Ю. А. Семеней

При исследовании динамики спектров сигналов в коротковолновом диапазоне радиоволн, путем регистрации амплитудно-частотной характеристики напряженности поля с помощью анализатора помеховой обстановки [1], нами было обнаружено явление спорадического повышения интенсивности сигналов на частотах, в 1,5—2,0 раза превышающих предельную частоту типичного частотного спектра декаметровых волн.

Это явление наблюдается в ночное время суток с неодинаковой интенсивностью в разные времена года. Наиболее вероятным периодом наблюдения являются ночные часы ноября.

Анализ записей спектров сигналов, полученных в режиме низкого частотного разрешения (полоса усредняемых частот — 100 кГц, при времени усреднения 1 с) позволяет выделить следующие особенности данного явления.

1. В ночные часы наблюдается резкое повышение интегрального уровня интенсивности сигналов на частотах выше предельных наблюдаемых частот типичного частотного спектра радиоволн, т. е. выше 15—17 МГц. На рис. 1, для наглядности, показаны реализации спектров сигналов в диапазоне 15—32 МГц для ноября 1987 г. и марта 1988 г., полученные путем сглаживания интенсивности сигналов во времени и в полосе частот. Рис. 1а дает представление о форме типичной частотной зависимости интенсивности сигналов в исследуемой полосе частот (15—32 МГц), а рис. 1б—з иллюстрируют появление спорадических сигналов в высокочастотной части диапазона. Сезон и время записи спектров указаны на рис. 1.

2. Спектральные характеристики спорадических сигналов, полученные в разные времена года, имеют существенные различия. Если в ноябре (рис. 1б, в) повы-

шение уровня сигналов наблюдается в сравнительно узкой полосе частот, то в марте (рис. 1г, д, ж, з) за пределами регулярного распространения радиоволн оно наблюдается во всей высокочастотной области КВ диапазона. При этом расширение полосы частот, занимаемой спорадическими сигналами, сопровождается уменьшением их спектральной плотности.

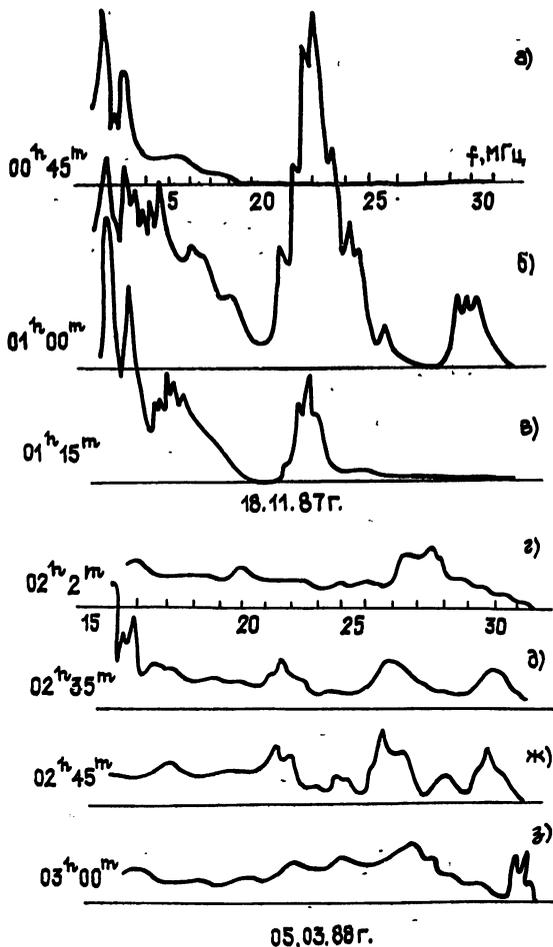


Рис. 1.

3. Продолжительность явления во времени носит случайный характер. Интервалы наблюдений изменяются от нескольких минут до нескольких часов. В отдельные дни кратковременные всплески интенсивности сигналов наблюдаются с 23.00 до 07.00 часов местного времени. На рис. 2 показана суточная зависимость интегрального уровня сигналов в полосе 21,0—22,0 МГц. Видно резкое отличие в поведении интегрального уровня интенсивности сигналов в дневное и ночное время. В дневное время наблюдается типичная, обусловленная регулярными механизмами распространения радиоволн, зависимость интенсивности поля сигналов, а начиная с 23.00 часов наблюдаются случайные всплески сигналов с размахом до 20 дБ, в отдельные моменты превышающие уровни сигналов в дневное время.

Кроме регистрации самого факта появления спорадических сигналов предприятия попытка исследования их тонкой структуры. Исследования проводились на различных радиоприемных устройствах с использованием антенн типа ОБ  $\frac{100}{4}$ , ориентированных

по кругу от 0 до 360° с дискретом 45°, ромбической антенны РГ  $\frac{65}{4}$  1 ( $\lambda = 15$  м) и несимметричного вертикального вибратора с действующей высотой, равной 2 м. Сравнительный анализ уровней сигналов, принимаемых с различных антенн, показал, что наибольшая интенсивность наблюдается при использовании ромбической антенны, ориентированной по азимуту 302°, для антенны ОБ с азимутом 315° уровень сигналов на 12 дБ ниже, чем для ромбической антенны.

Слуховой контроль сигналов в узкополосном режиме (полоса ПЧ = 1 кГц), а также спектральный анализ с более высоким частотным разрешением позволяют сделать следующие выводы.

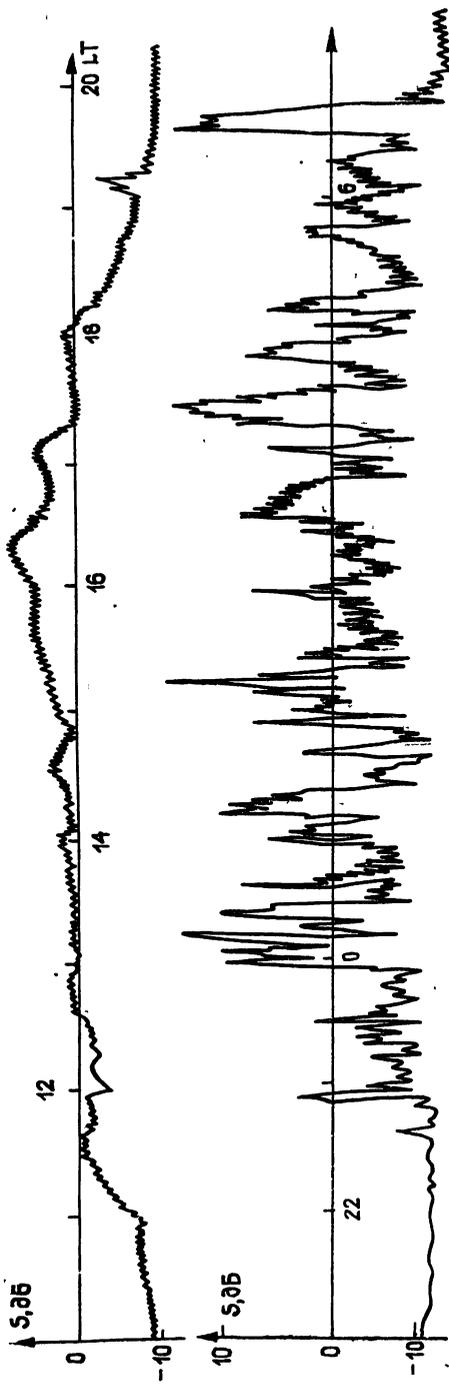


Рис. 2.

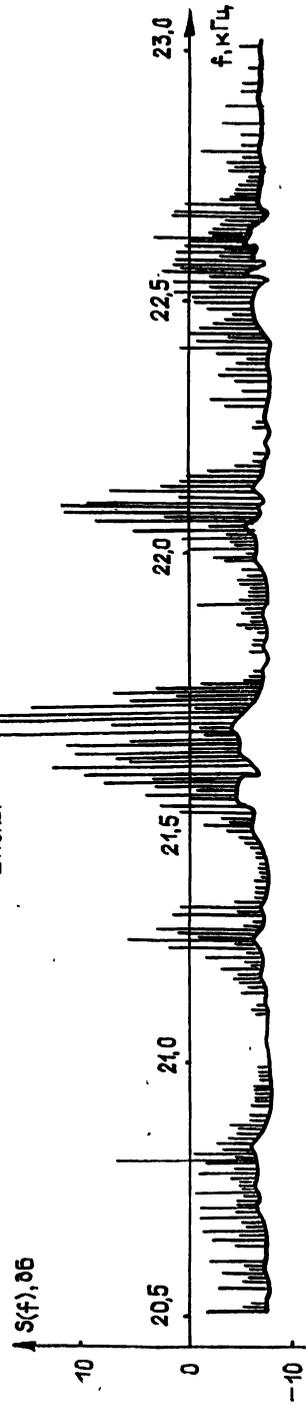


Рис. 3.

1. Существенный вклад в наблюдаемый спектр спорадических сигналов дают сигналы, которые идентифицируются с излучением программ радиовещательных радиостанций, работающих в частотном диапазоне 7,1—7,3 МГц с территории Китая.

2. Наряду с вещательными станциями прослушиваются радиостанции, работающие в режиме телеграфии, идентифицировать которые не удалось.

3. При внимательном прослушивании можно различать до трех программ на одной и той же частоте настройки в узкой полосе приема (полоса ПЧ приемника 1 кГц). Иногда одна программа сопровождалась реверберацией с задержкой 0,1—0,3 с, которую можно объяснить, если не пренебрегать сложными механизмами распространения радиоволн наложением спектров двух радиостанций, передающих одну программу.

4. При спектральном анализе с частотным разрешением 1 кГц спектр спорадических сигналов имеет ярко выраженный линейчатый характер. Отдельные линии в спектре группируются на участках шириной до 500 кГц. Расстояние между отдельными линиями в спектре меняется от 5 до 30 кГц. Вид такого спектра показан на рис. 3. Спектр получен методом последовательного спектрального анализа в полосе 19—24 МГц с разрешающей способностью 1 кГц. Отчетливо проявляется линейчатый характер спектра и тенденция спектральных линий к группировке.

5. Слуховой контроль отдельных линий спектра показывает, что в пределах одной частотной группы характер принимаемых сообщений не различим, т. е. одни и те же станции прослушиваются на разных частотах настройки с интервалом 5—30 кГц при перестройке в полосе нескольких сотен килогерц.

6. Уровень принимаемых сигналов при регистрации их в узкой полосе претерпевает квазипериодические колебания с периодом от единиц до нескольких секунд, на которые накладываются более медленные колебания продолжительностью, достигающей десятков секунд.

7. Анализ сонограмм несущей частоты спорадических сигналов, полученных для различных частот настройки, показывает изменение доплеровской частоты в пределах 1 Гц в течение десятков минут. В основном наблюдается одна спектральная линия. Однако в течение 5—15 минут, предшествующих исчезновению спорадических сигналов, наблюдается уширение спектра.

Предпринимались также попытки измерения углов прихода спорадических сигналов фазовым пеленгатором [2], но эти попытки не увенчались успехом. Неудача измерения углов прихода, возможно, связана с недостаточной чувствительностью пеленгатора, поскольку его антенная система реализована на базе укороченных несимметричных вибраторов, диаграмма направленности которых имеет провал для углов прихода, близких к зенитным. Если предположить, что наблюдаемые сигналы приходят именно под такими углами, то они испытывают дополнительное ослабление.

Приведем еще два факта, которые, по-видимому, имеют отношение к наблюдаемому явлению.

Во-первых, известно, что во время наблюдения спорадических сигналов на небольшом удалении от приемного пункта в диапазоне 7,0 МГц работало несколько вещательных радиостанций, мощность излучения которых достаточна для возбуждения нелинейных образований в ионосфере. Во-вторых, согласно данным станции вертикального зондирования, расположенной в 90 км от пункта измерений, наблюдаемому явлению сопутствовали спорадические образования в области F2 ионосферы.

Перечисленные выше факты наводят на мысль о нелинейном механизме возбуждения спорадических сигналов. Если, например, предположить, что траектории радиоволн, дающих вклад в наблюдаемый эффект, достаточно близки друг к другу и все проходят через одну и ту же область возмущенной ионосферы, то в случае нелинейного характера возмущения следует ожидать появления излучения на комбинационных частотах.

Ясно, что высказанное предположение не претендует на бесспорность и нуждается в проверке путем соответствующих количественных оценок и дополнительных исследований. В связи с этим авторы намерены продолжить изучение описанного явления и будут признательны всем, кто проявит к нему интерес.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Паньков Л. В., Семеней Ю. А. В кн: Исследования по геомагнетизму, аэронауки и физике Солнца. — М.: Наука, 1987. Вып. 77. С. 56.
2. Антошкин Б. Н., Солопанов Е. Ю., Унучков В. Е. В кн: Исследования по геомагнетизму, аэронауки и физике Солнца. — М.: Наука, 1987. Вып. 77. С. 77.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию  
15 декабря 1988 г.

## О ВЛИЯНИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ЭФФЕКТОВ НА ЧАСТОТУ НЕУПРУГИХ АТОМНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, Е. Г. Ступко

Как известно, поляризационные свойства плазмы существенно меняют характер взаимодействия между заряженными частицами. Под поляризационными свойствами обычно понимают экранирование кулоновских сил и эффекты взаимодействия заряженных частиц с плазменными колебаниями. При этом можно различать поляризационные эффекты за счет экранирования электронами и ионами по отдельности, так же как и процессы взаимодействия частиц с ленгмюровскими электронными и ионными волнами в плазме. Очевидно, что эти эффекты должны также определенным образом сказываться на параметрах излучательных процессов в плазме, например, на скоростях релаксации возбужденных состояний многозарядных ионов, помещенных в плазму.

В работе [1] было рассмотрено влияние поляризационных плазменных эффектов на частоту неупругих электрон-атомных столкновительных оптически разрешенных переходов с малым дефектом резонанса в пренебрежении вкладом ионов в диэлектрическую проницаемость плазмы. Однако такое рассмотрение применимо лишь в условиях относительно малых концентраций частиц плазмы и не слишком низких температур.

В случае же сверхплотной горячей плазмы [2], а также в пределе низких температур эффектами ионной поляризации пренебрегать нельзя. Ниже проведено рассмотрение применительно к указанным условиям.

1. Следуя методике [1], найдем выражение для частоты электрон-атомного неупругого перехода между атомными уровнями  $0 \rightarrow 1$ , учитывающее эффекты ионной поляризации плазмы. Указанное выражение имеет вид

$$W = N \frac{8\sqrt{2\pi} \lambda^2}{\omega_0 R_0} f(\alpha, \beta, t, \mu), \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{v_{Te}}{\omega_0 R_0}, \quad \beta = \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2}, \quad t = \frac{T_e}{T_i}, \quad \mu^2 = \frac{T_e}{T_i} \frac{M}{m}.$$

Здесь  $\lambda$  — сила осциллятора перехода,  $R_0$  — характерный радиус взаимодействия, вызывающего неупругий переход,  $\omega_0$  — частота перехода  $0 \rightarrow 1$ ,  $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов плазмы,  $\omega_L$  — ленгмюровская частота,  $T_e$ ,  $T_i$  — температуры электронов и ионов плазмы соответственно,  $M$  — масса иона,  $m$  — масса электрона и далее  $Z_i$  — заряд ионов плазмы.

В (1) функция  $f(\alpha, \beta, t, \mu)$  представляется в виде интеграла по безразмерной переменной  $\chi = qv_{Te}/\omega_0$  ( $q$  — волновое число):

$$f(\alpha, \beta, t, \mu) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi} \left[ \frac{\chi}{\alpha} K_1 \left( \frac{\chi}{\alpha} \right) \right]^2 |\varepsilon(\beta, t, \mu, \chi)|^{-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\chi^2} \right\}, \quad (2)$$

где выражение для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  имеет вид [3]

$$\varepsilon = \sum_{\alpha=e, i} \varepsilon_\alpha, \quad (3)$$

(суммирование ведется по сортам частиц плазмы).

Интеграл в (2) в общем случае аналитическими методами не вычисляется. Поэтому рассмотрим ниже предельные случаи, в которых становится возможным его приближенное вычисление.

2. При  $\alpha \gg 1$ ,  $\beta \ll M/mZ_i$ , когда эффекты ионной поляризации несущественны, основной вклад в интеграл (2) вносит область относительно малых значений аргумента  $\chi$  ( $\chi/\alpha < 1$ ), тогда

$$f(\alpha, \beta, t, \mu) \simeq \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln 2\alpha - \frac{1}{2} - C - C(\beta, t, \mu) \right\}, \quad (4)$$

где  $C = 0,5772$  — константа Эйлера,

$$C(\beta, t, \mu) = \int_0^\infty \left[ |\varepsilon(\beta, t, \mu, \chi)|^{-2} \exp \left( -\frac{1}{2\chi^2} \right) \right]'_x \ln \chi d\chi. \quad (5)$$

Отсюда видно, что в этом случае вклад ионных эффектов определяется величиной  $C(\beta, t, \mu)$ , которая мало меняется при изменении параметров  $t, \mu$  [4].

Иначе говоря, при достаточно малой энергии возбуждения зависимость частоты

неупругих переходов от температуры остается логарифмической, как и в разреженной плазме.

В случае же  $\beta > M/Z_i m$ ,  $t \gg 1$  физическая картина существенно меняется, поскольку в плазме появляется возможность возбуждения ионных ленгмюровских волн. Взаимодействие с которыми дает дополнительную вероятность неупругого атомного перехода.

При выполнении условий

$$1 \ll \alpha \ll \chi_0 \ll \mu \quad (\chi_0 = \sqrt{\beta/(tZ_i\beta/\mu^2 - 1)}) \quad (6)$$

можно оценить отдельно вклад области прозрачности ( $1 \ll \chi \ll \mu$ ) для ионных волн в интеграл (2), используя методику [4]. В этом случае имеем

$$f_I(\alpha, \beta, t, \mu) \simeq \frac{1}{\alpha^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_0^3 \left( \frac{tZ_i}{\mu^2} \chi_0^2 - 1 \right)^2 K_1^2 \left( \frac{\chi_0}{\alpha} \right). \quad (7)$$

При этом вклад электронной части дается выражением (4), причем интеграл в (5) теперь берется от 0 до  $\alpha$ .

Из сопоставления выражений (4) и (7) видно, что при значениях  $\chi_0$ , близких к  $\alpha$ , вклад ионной части не только существен, но и при определенных условиях играет определяющую роль. При этом коренным образом изменяется зависимость частоты неупругих переходов от температуры  $T_e$ , которая приобретает степенной вид. Кроме того, появляется сильная зависимость частоты перехода от параметра  $Z_i t/\mu^2$ . Как и следовало ожидать, с увеличением  $\beta$  от некоторого значения (т. е. при увеличении расстройки ионного резонанса) выражение (7) убывает, так как при этом  $\chi_0^2 \rightarrow \sqrt{\mu^2/tZ_i}$  и при достаточно больших  $\beta$  электронный вклад снова доминирует.

В обратном предельном случае, когда  $\alpha \ll 1$ , можно произвести интегрирование в (2), воспользовавшись методом перевала. При этом для нас представляет интерес случай точного электронного резонанса, когда  $1 - \beta < m/M$  в пределе низких температур  $\alpha \ll (m/M)^{3/2}$ , где влияние эффектов ионной поляризации на частоту неупругих переходов существенно. В этом случае выражение  $f(\alpha, \beta, t, \mu)$  имеет вид

$$f(\alpha, \beta, t, \mu) \simeq \frac{\pi^{3/2}}{3^{1/2} 2^{7/6}} \alpha^{-1/3} \left[ \frac{t}{\mu^3} + 3 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{2/3} \right]^{-2} \exp \left\{ -\frac{3}{2^{1/2}} \frac{1}{\alpha^{2/3}} \right\}. \quad (8)$$

Отличие этого выражения от соответствующих выражений, полученных в [4], состоит в виде предэкспоненциального множителя. Последнее приводит к изменению характера температурной зависимости частоты неупругого перехода при точном резонансе в пределе низких температур плазмы.

3. В заключение проиллюстрируем на конкретном примере влияние эффектов взаимодействия многозарядных ионов с ионными колебаниями в плазме. В частности, рассмотрим переходы между уровнями тонкой структуры многозарядных ионов в плазме, полученной с помощью сферически-симметричного лазерного облучения твердотельной мишени [2] ( $n_e = 10^{24} - 10^{26} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 10 - 100 \text{ кэВ}$ ). Так, для переходов  $2s - 2p$ ,  $3s - 3p$  в ионах Mg XI, Al XII оценки по формулам (4) и (7) вблизи ионного резонанса ( $\beta = 1,3M/Z_i m$ ,  $\alpha = \chi_0$ ) показывают, что вклад ионных членов в частоту неупругого перехода может превосходить электронный вклад примерно на порядок. Таким образом, учет рассмотренных выше эффектов по меньшей мере необходим, и только подробный анализ в каждом конкретном случае может свидетельствовать о том, насколько их вклад существен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов А. В., Шевелько В. П. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 1037.
2. Виноградов А. В., Собельман И. И., Юков Е. А. // Квантовая электроника. 1974. Т. 1. № 2. С. 268.
3. Сб. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. — М.: Наука. 1974.
4. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика — М.: Наука. 1979. С. 238.

Восточно-Сибирский филиал  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
21 июня 1988 г.,  
после доработки  
15 сентября 1989 г.

## ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЫ НА СПЕКТРЫ АЗИМУТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В. А. Гирка, И. А. Гирка

1. Модель плазмы с однородной плотностью хорошо описывает только случай твердотельной плазмы. Наличие неоднородности плотности влияет на частоты не только объемных волн, локально зависящих от плотности плазмы, но и поверхностных. В работе [1] были исследованы азимутальные поверхностные волны (АПВ) в случае однородной плазмы, отделенной от металлического цилиндра слоем диэлектрика. Свойства различных поверхностных волн в неоднородной полуграниченной плазме, соприкасающейся с металлом, исследовались в работах [2, 3]. Учет кривизны системы существенно влияет на свойства электромагнитных поверхностных волн, распространяющихся поперек магнитного поля  $H_0$ . Так, например, частотные диапазоны их существования, указанные в [4] для случая плоской геометрии, отличаются от тех, что получены в [1] для азимутальных волн. Топология поверхностной волны, распространяющейся вдоль плоской границы раздела однородная плазма—металл, отличается от топологии АПВ тем, что у нее тангенциальный компонент электрического поля равен нулю во всем объеме плазмы. Рассмотрим влияние неоднородности плотности плазмы на дисперсию АПВ.

2. На границе плазменного цилиндра радиуса  $R_1$ , помещенного в коаксиальный металлический волновод радиуса  $R_2$ , может распространяться [1] АПВ с компонентами поля  $E_r, E_\varphi, H_z \sim \exp(im\varphi - i\omega t)$ . Внешнее магнитное поле  $H_0 \parallel z$ , диэлектрик с  $\epsilon_0 \simeq 1$  заполняет область  $R_1 < r < R_2$ .

Исходя из уравнений Максвелла и магнитной гидродинамики, получим уравнение для  $H_z$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{k_\perp^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \left[ 1 + \frac{m^2}{k_\perp^2 r^2} - \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\theta}{k_\perp^2} \right) \right] H_z = 0, \quad (1)$$

где  $k_\perp^2 = k^2(\epsilon_2/\epsilon_1 - \epsilon_i)$ ;  $kc = \omega$ ;  $\theta = \epsilon_2/\epsilon_1$ ;  $\epsilon_i$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы. Решая (1) методом эталонных уравнений [5], в области  $r < R_1$  имеем:  $H_z = A(r)I_m(z)$ ;  $A = \text{const} \sqrt{zk_\perp^2/(rz')}$ ;  $z' = k_\perp \sqrt{1 - (m/r)\partial(\theta/k_\perp^2)/\partial r}$ ;  $I_m(z)$  — модифицированная функция Бесселя. Такое решение получается при

$$1 \gg \left| \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\theta}{k_\perp^2} \right) \right|, \quad (2)$$

что соответствует случаю слабой неоднородности.

3. Дисперсионное уравнение для АПВ получается при использовании граничных условий: непрерывности тангенциальных компонентов поля на границе плазма—диэлектрик и  $E_\varphi(R_2) = 0$  (металл считается идеально проводящим), и имеет вид

$$\frac{m}{R_1} \theta + \frac{1}{H_z} \frac{dH_z}{dR_1} = \frac{k_\perp^2}{k} \frac{J'_m(kR_1)N'_m(kR_2) - N'_m(kR_1)J'_m(kR_2)}{N_m(kR_1)J'_m(kR_2) - J_m(kR_1)N'_m(kR_2)}, \quad (3)$$

где  $J_m(x)$  и  $N_m(x)$  — функции Бесселя и Неймана. Численное решение трансцендентного уравнения (3) для  $\Delta = R_2/R_1 - 1 = 0,3$  приведено на рис. 1, где  $\mu = \omega/\Omega_e$ ,  $\kappa = |m|\delta/R_1$ ,  $\delta = c/\Omega_e$ . Сплошными линиями изображены зависимости  $\mu = \mu(\kappa)$  для  $N_e = 3,3$ , а штриховыми — для  $N_e = 10$ . Цифры над кривыми соответствуют номеру азимутального волнового числа  $m$ .

Воспользовавшись асимптотиками Бесселевых функций при  $|m| \gg 1$  [6], найдем аналитические выражения для частоты АПВ соответственно в ВЧ области ( $|\omega_e|/2 + \sqrt{\gamma\Omega_e^2 + \omega_e^2/4} > \omega > \omega_1 = \sqrt{\gamma\Omega_e^2 + \omega_e^2}$ ) и в НЧ ( $\sqrt{\gamma\Omega_e^2 + \omega_e^2/4} - |\omega_e|/2 > \omega > \sqrt{\gamma\Omega_e^2 + \omega_e^2}$ ) области:

$$\omega \simeq \omega_1 \left[ 1 + \frac{\delta^2}{2R_1^2} \left( \Delta \frac{R_1^2}{\delta^2} \frac{|\omega_e|}{\omega_1} + \frac{m\Omega_e^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega_e^2}{\omega_1 |\omega_e|} \xi \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$\omega \simeq \frac{|m\omega_e|}{\sqrt{m^2 + R_1^2/\delta^2} - \Delta N_e^2(m^2 + R_1^2/\delta^2) - mR_1^2 \xi / (|m|N_e^2(m^2\delta^2 + R_1^2))}, \quad (5)$$

где  $\Omega_{e,i}$  и  $\omega_{e,i}$  — соответственно ленгмюровская и циклотронная частоты электронов и ионов,  $N_e^2 = \Omega_e^2/\omega_e^2$ ,  $\xi = (R_1/\delta)(d\delta/dR_1)$  — параметр неоднородности. Из (4) и (5) можно получить выражения для  $\omega$  в других случаях:  $z(R_1) \ll 1$ ,  $|m| \ll z(R_1)$ . График зависимости  $\mu = \mu(\xi)$  приведен на рис. 2, где  $\Delta = 0,3$ ,  $R_1/\delta = 3$ ,  $N_e = 10$ .

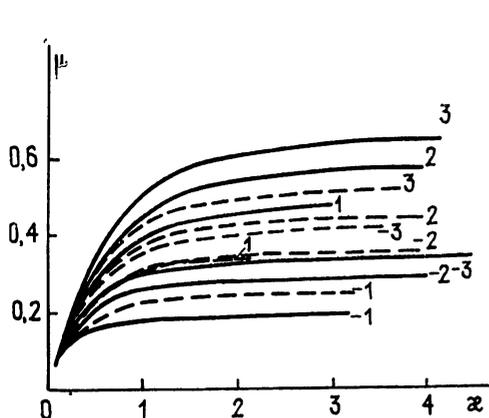


Рис. 1.

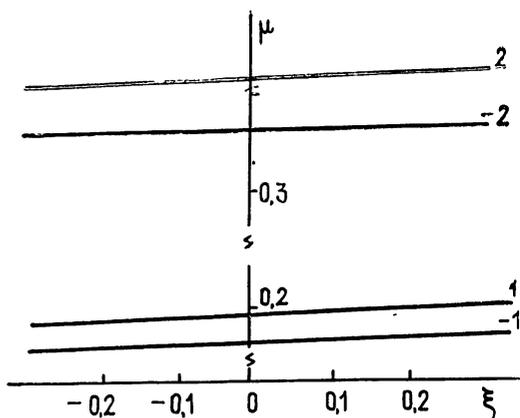


Рис. 2.

4. В заключение отметим, что уравнение (3) описывает еще две плазменные системы: свободную плазму ( $H_0=0$ ) в волноводе с  $R_2 > R_1$  и магнитоактивную плазму, граничащую с металлом ( $\Delta=0$ ). В первом случае с точностью до слагаемых порядка  $\Delta^2 \ll 1$

$$\omega^2 \approx \frac{\Delta(1 - \Delta/2)m^2\Omega_e^2}{\sqrt{m^2 + R_1^2/\delta^2} + \Delta(1 + \Delta/2)R_1^2/\delta^2 - \xi}. \quad (6)$$

Частоты АПВ во втором случае можно получить из (4) и (5). При этом АПВ становятся однонаправленными, т. е. распространяющимися только в одном направлении:  $m > 0$  при  $\omega < \omega_1$  и  $m < 0$  при  $\omega > \omega_1$ . С ростом плотности плазмы к границе раздела значение  $\omega$  падает.

Для системы плазма—диэлектрик—металл с ростом толщины диэлектрического слоя при  $\Delta > 1/(|m|N_e^2)$  в НЧ области появляются АПВ с  $m < 0$  (для ВЧ АПВ  $m < 0$ , как и в случае  $\Delta=0$ ). В силу невязности НЧ АПВ их частоты с ростом  $d\Omega_e^2/dR_1$  уменьшаются различным образом: при  $m < 0$  уменьшение не такое быстрое. Так что сделанный выше вывод о характере изменения АПВ остался справедлив и для этой волноводной системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гирка В. А., Гирка И. А., Кондратенко А. Н., Ткаченко В. И. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 5. С. 1031.
2. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
3. Бакунов М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 1. С. 25.
4. Азаренков Н. А., Кондратенко А. Н., Мельник В. Н., Олефир В. П. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 11. С. 2195.
5. Дородницын А. А. // УМН. 1952. Т. 7. № 6. С. 3.
6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 19 декабря 1988 г.

УДК 537.874.6:621.372.851

#### ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ

С. Н. Воробьев

Взаимное влияние элементов, составляющих систему рассеивателей, вносит существенный вклад в формирование электродинамических характеристик рассеянного поля. Известно, что именно взаимодействие элементов в антенных решетках приводит к явлению ослепления ФАР [1], а взаимная электродинамическая связь элементов в периодических структурах обуславливает ряд резонансных явлений, в том числе и аномалии Вуда [2]. Однако при построении решения ряда дифракционных задач все же возникает вопрос о целесообразности строгого учета взаимодействия между всеми элементами структуры. Причина этого заключена в значительной сложности математического аппарата строгого решения задачи (а зачастую и громоздкости алгоритма чис-

иной реализации), что в особенности характерно для структур из конечного числа элементов при их неэквидистантном расположении.

Исследуем результаты пренебрежения взаимодействием элементов в системе рассеивателей при расчете распределения амплитуды рассеянного поля в дальней зоне (диаграммы направленности) на примере ограниченной решетки из наклонных металлических лент. Строгое решение задачи рассеяния  $H$ -поляризованных электромагнитных волн на структуре из конечного числа неэквидистантно расположенных лент (рис. 1) получено в [3] на основе метода полуобращения оператора задачи дифракции и спектрального метода. Обращению в аналитическом виде с помощью метода Галеркина подвергалась статическая часть оператора задачи дифракции на одном рассеивателе — тонкой металлической ленте. В результате решение исходной краевой задачи сведено в [3] к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода Фредгольмовского типа, которая в матричной форме имеет следующий вид:  $g = (A_1 + A_2)g + Q$ . Матричный оператор системы представляет собой сумму двух частей:  $A = A_1 + A_2$ , причем оператор  $A_1$  в точности соответствует динамической части оператора в задаче рассеяния на одной ленте, а оператор  $A_2$  описывает взаимодействие между всеми лентами в структуре;  $Q$  — известная правая часть, соответствующая полю падающей волны. Определению подлежат неизвестные коэффициенты  $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  разложения амплитуды Фурье в ряд Неймана. Фредгольмовость оператора  $A$  позволяет получить численное решение системы уравнений методом редукции.

Следовательно, имеется возможность сопоставить диаграммы направленности (ДН) решетки, полученные по строгим формулам решения задачи и рассчитанные без учета взаимодействия между ее элементами ( $A_2 = 0$ ). Заметим, что несложно рассмотреть также и промежуточный случай, когда взаимодействует некоторое заданное число элементов [3].

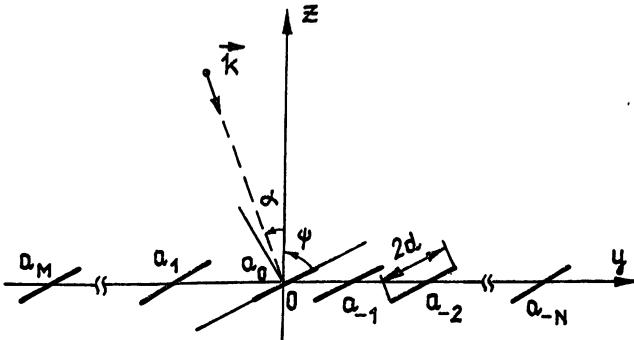


Рис. 1.

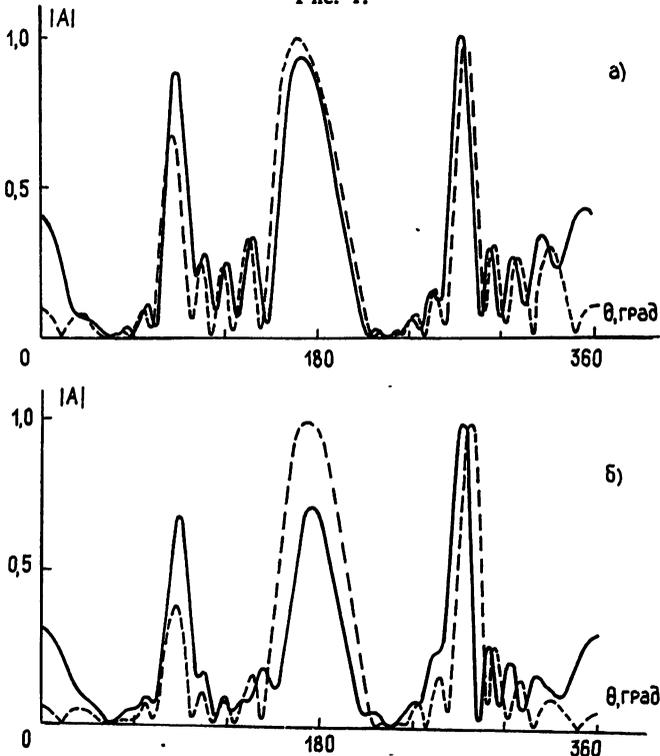


Рис. 2.

Пусть сверху на решетку (рис. 1) падает плоская  $H$ -поляризованная волна ( $H$ -компонента электромагнитного поля направлена параллельно ребрам лент). На рис. 2, 3 представлены ДН рассеянного поля для эквидистантных ограниченных решеток. Здесь и далее сплошными кривыми изображены ДН, рассчитанные по формулам строгого решения задачи, а штриховыми кривыми — без учета взаимодействия лент. Угол наклона лент выбран равным  $\psi = 45^\circ$ . Из физических соображений ясно, что рассеянное поле в этом направлении будет отсутствовать. Отметим, что значения максимальной амплитуды рассеянного поля (иначе говоря, величины, на которую нормируется ДН), рассчитанные по точным и приближенным формулам, не совпадают. Сравнить ДН тем не менее следует в нормированном виде, чтобы сохранить при сопоставлении пропорциональность в изображении дифракционных максимумов и амплитуд фонового излучения. Для характеристики ошибки, полученной при игнорировании взаимодействия элементов, введем коэффициент  $K$ , равный отношению максимальной амплитуды рассеянного поля, найденной без учета взаимного влияния лент к соответствующему значению, вычисленному по строгим формулам решения задачи.

На рис. 2а, б приведены ДН решетки из пяти лент для угла падения волны  $\alpha = 5^\circ$ . При увеличении числа элементов в структуре изрезанность ДН возрастает, для выбранного же числа лент мелкомасштабные флуктуации ДН еще невелики. Частотный параметр  $\eta = kd$  ( $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число) выбран таким, чтобы между соседними лентами решетки укладывалось  $0,9\lambda$ ; остальные параметры таковы: рис. 2а —  $K = 0,84$ ,

$\tilde{a}_{-1} = a_{-1}/d = 4$ , (значит,  $\eta = 0,45\pi$ ); рис. 2б —  $K = 1,45$ ,  $\tilde{a}_{-1} = 2$  ( $\eta = 0,9\pi$ ). Нетрудно видеть, что показанные на рис. 2б ДН отличаются значительно сильнее, чем изображен-

ные на рис. 2а. Наличие волноводных областей между соседними лентами —  $\tilde{a}_{-1} \sin \psi < < 2$  — (рис. 2б) создает условия для более сильного взаимодействия элементов, а отказ от его учета в данном случае влечет за собой значительную ошибку. У решетки, не имеющей волноводных областей (рис. 2а), взаимодействие лент выражено слабее, однако и здесь искажается не только фоновая часть излучения, но также амплитуда и угловое положение дифракционных максимумов, а довольно сильное излучение в области углов  $\theta < 20^\circ$  и  $\theta > 340^\circ$  в ДН, построенной без учета взаимного влияния, практически отсутствует. Что касается приближенной ДН на рис. 2б, то в ней не сохраняются ни форма дифракционных максимумов и амплитуд фона, ни их угловое положение в ДН, ни другие характеристики излучения.

Заметим, что для ДН, полученных без учета взаимодействия элементов, характерна глубокая изрезанность (провалы в ДН уходят почти до нуля); точное решение дает гораздо более плавное поведение ДН, как это и наблюдается на практике. Это отчетливо видно и на рис. 3 (геометрические параметры решетки такие же, как и на рис. 2б, а  $\alpha = 10^\circ$  и  $K = 2,88$ ). Такой же вывод следует из работы [4], где на основе метода Винера—Хопфа анализируется рассеяние плоской волны на ограниченной по числу лент структуре и приводятся ДН плоской ( $\psi = 90^\circ$ ) эквидистантной решетки из трех и пяти лент, рассчитанные как с учетом взаимного влияния, так и без него. Кроме того, в ДН, полученной без учета взаимодействия лент (рис. 3), нарушена пропорциональность в распределении энергии между дифракционными лепестками (в отраженном поле дифракционный лепесток подавлен). Отметим, что в эквивалентной периодической решетке при этих параметрах существуют уже две распространяющиеся пространственные гармоники: нулевая и минус первая. Структура рассеянного ограниченной решеткой поля усложняется, а пренебрежение взаимодействием лент при расчетах вносит немалую ошибку. Это особенно заметно в области дифракционных максимумов, близких к нормали к плоскости решетки, и в области углов  $\theta \sim 0$ .

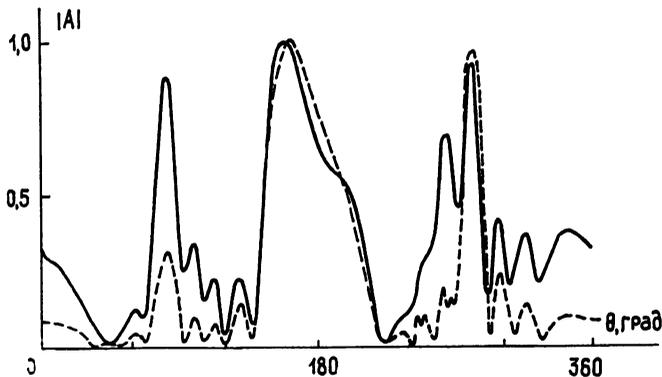


Рис. 3.

На рис. 4 приведены ДН неэквидистантной решетки из четырех лент с координатами  $\tilde{a}_1 = -1,5$ ,  $\tilde{a}_2 = 0$ ,  $\tilde{a}_{-1} = 0,9$ ,  $\tilde{a}_{-2} = 2,4$ ;  $\eta = 2\pi$  (таким образом, между центральными лентами сопрежнему укладывается  $0,9\lambda$ ). На рис. 4а величина  $K = 1,38$  и  $\alpha = 20^\circ$ , а на рис. 4б —  $K = 2,22$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . Для неэквидистантных структур отказ от учета взаимного влияния элементов приводит к искажению картины рассеяния: струк-

тура поля нарушается как количественно, так и качественно. Сохраняют форму только главные дифракционные максимумы в прошедшем поле, но этого с физической точки зрения и следовало ожидать для структуры такой геометрии. Отметим интересный момент, который может быть использован в приложениях. На рис. 4а отраженное в зеркальном направлении поле практически отсутствует.

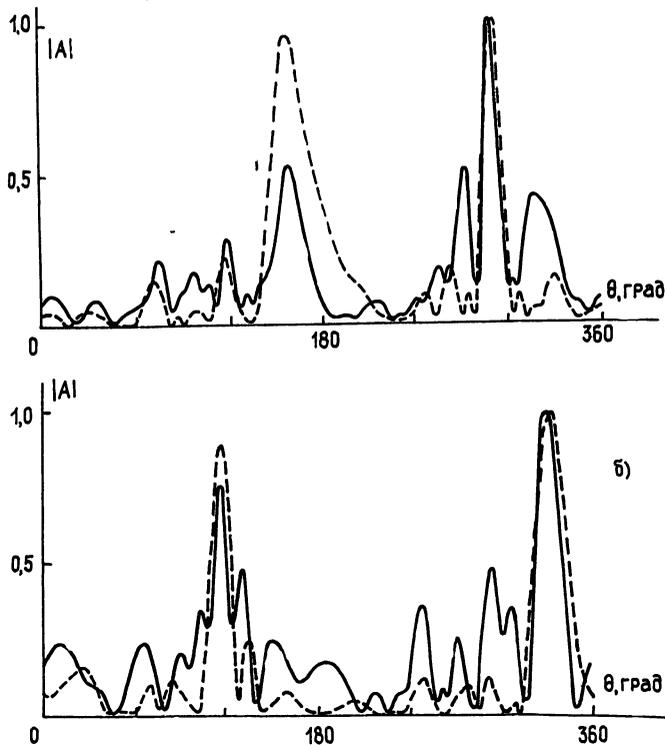


Рис. 4.

На степень взаимного влияния элементов оказывают воздействие все без исключения параметры задачи. Например, угол наклона лент: физически ребро ленты можно рассматривать как источник вторичной волны, и от расположения ребер соседних лент будет зависеть величина электродинамической связи между ними. Но и без подробного анализа всех возможных ситуаций можно заключить, что отказ от учета взаимодействия элементов вносит существенные погрешности при расчете характеристик рассеянных полей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплин А. Ф. Анализ и синтез антенных решеток. — Львов: Вища школа, 1987. — 179 с.
2. Amitey N., Galindo V., Wu C. P. The theory and analysis of phased array antennas. Wiley—Interscience, New-York, 1972. — 443 p. (Русский перевод: — М.: Мир, 1974.)
3. Воробьев С. Н. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 4. С. 687.
4. Shimoda M., Itakura T. // URSI international symposium on electromagnetic theory. Budapest: Hungary. Part B. 1986. P. 652.

Радиоастрономический институт  
АН УССР

Поступила в редакцию  
9 декабря 1988 г.

С предстоящими Днями науки и печати, дорогие авторы и читатели, вас поздравляют те, кто выпускает наш журнал

