

СОДЕРЖАНИЕ

Григорьев Г. И., [Денисов Н. Г.], Тамойкин В. В. О влиянии движения ионизированной компоненты на рассеивающие свойства ионосферной решетки	263
Куницын В. Е., Усачев А. Б. Отражение радиоволн от немонотонных ионосферных слоев	267
Захаров А. С., Тимофеев В. А. Влияние несферичности частиц гидрометеоров на флуктуационные характеристики излучения миллиметрового диапазона	275
Буренин А. В., Рябкин М. Ю. Метод описания высоковозбужденных колебательно-вращательных состояний двухатомных молекул	281
Фокина Н. П., Челидзе Л. Т. Сигналы поглощения СВЧ поля в условиях насыщения неэквидистантных уровней ($S=3/2$) парамагнетиков при низких температурах	290
Кучеров А. Н., Устинов Е. В. Исследование стационарного эффекта теплового самовоздействия на дозвуковом и сверхзвуковом газодинамических режимах	299
Кашенко С. А. Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью	308
Музычук О. В. Об эффективной частотной характеристике линейной системы с сильными небелыми флуктуациями параметров	315
Кравцов Ю. А. Свойства условного характеристического функционала частично детерминированных процессов типа динамического хаоса	322
Городничев Е. Е., Дударев С. Л., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И. Преломление и когерентное отражение волн на границе среды со случайными неоднородностями	326
Слепян А. Я. Дифракция электромагнитных волн на открытом конце плоского нерегулярного волновода с фланцем	334
Белов Ю. И., Снегирева В. В. Метод разделения данных на гладкие составляющие при измерениях в диапазоне частот	342
Кириленко А. А., Кусайкин А. П. Автоколлимационное отражение ленточной решеткой с экраном	348
Задорин А. С., Шарангович С. Н. Акустооптическое взаимодействие в поле затухающего ультразвукового пучка с квадратичным фазовым фронтом в анизотропной среде	357
Барминова Е. Е., Чихачев А. С. Движение сгустков заряженных частиц в поперечном магнитном поле	366

Краткие сообщения и письма в редакцию

Брюховецкий А. С., Фукс И. М., Ширманова С. И. О спектре флуктуаций радиосигнала в поглощающей атмосфере с учетом направленности излучения антенных систем	375
Гс бачев Л. П., Семенова Т. А., Федоров В. Ф. О геомагнитных возмущениях, возбуждаемых воздействием электрического диполя на ионосферу	378
Нязов Б. А., Султанова Ф. Р. Нерегулярные пульсации интенсивности излучения двухмодового лазера с периодической модуляцией накачки	382
Гмыко И. А., Пустоваров В. Е. Прохождение параллельных пучков излучения через слабо рассеивающие экраны	385
Бданов М. Б. Нелинейный алгоритм восстановления радиоизображений, основанный на методе регуляризации	387
Ефимова И. Г. О решении задачи нестационарной дифракции на диэлектрическом теле методом интегриродифференциальных уравнений	389
Моденов В. П. Резонансное поглощение в волноводе	391

Аннотации депонированных статей

Онуфриенко В. М., Чумаченко В. П. Расчет изменения критических длин волн типа H при деформации сечения четырехугольных волноводов	298, 314
Казанский В. Б., Коцаревская И. В. Гибридные волны в экранированном кольцевом волноводе с неоднородным диэлектрическим заполнением	321
Вертий А. А., Гаврилов С. П., Деркач В. Н. Рассеяние двумерных эрмит-гауссовых электромагнитных волн плоскостойкими структурами	347
Информация о новых книгах	307, 365, 374, 392

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. И. ГАПОНОВ,
В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),
В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРА-
ТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИ-
КОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР,
В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 28.12.89. Подписано к печати 14.03.90. МЦ 05028.
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.
Усл. печ. л. 11,55. Усл. кр.-отт. 13,70. Уч.-изд. л. 13,7. Тираж 1220 экз.
Заказ 1861. Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 603600, Горький, ул. Лядова, 25, Научно-исследовательский
радиофизический институт, редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика».
Телефон 36-01-71.

Горьковская областная типография управления издательств, полиграфии и книжной
торговли, 603116, г. Горький, ул. Гордеевская, 7.

УДК 551.510.535

О ВЛИЯНИИ ДВИЖЕНИЯ ИОНИЗИРОВАННОЙ КОМПОНЕНТЫ НА РАССЕИВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ИОНОСФЕРНОЙ РЕШЕТКИ

Г. И. Григорьев, Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин

Выполнены оценки времени жизни искусственных ионосферных возмущений из-за движения ионосферной плазмы под действием акустико-гравитационных волн (АГВ). Показано, что для типичных значений параметров АГВ характерное время релаксации рассеянного сигнала составляет 1—10 с.

Экспериментальные исследования сигналов, рассеянных ионосферной квазипериодической решеткой, позволили выявить ряд интересных особенностей динамики отражающей структуры. Были определены характерные времена распада решетки и обнаружены значительные вариации этого параметра как с высотой, так и со временем. Указывалось также на связь этих изменений с динамическими процессами в атмосфере. В работах [1,2] было показано, что времена релаксации ионосферной решетки на высотах E -области можно объяснить на основе механизма амбиполярной диффузии. На меньших высотах релаксация квазипериодической структуры решетки определяется другими факторами. Высказывалось предположение о влиянии турбулентного перемешивания и даны статистические оценки соответствующих времен релаксации. Показано также, что восстановление равновесного профиля ионизации возможно из-за прилипания электронов и рекомбинации.

Вместе с тем в процессах распада квазипериодической структуры ионизации могут играть роль и процессы переноса, приводящие к искажению решетки и ослаблению рассеянного сигнала. К этому следует добавить, что малые времена существования отражающей структуры не позволяют использовать ее усредненные характеристики, возникающие в результате перемешивания крупномасштабными вихрями.

Ниже исследуются рассеивающие свойства периодической ионосферной структуры после выключения создающего ее поля мощного наземного передатчика при наличии вихревого движения нейтрального газа атмосферы. Такое движение характерно, например, для низкочастотных АГВ или турбулентного состояния атмосферы*. При этом крупномасштабное поле скоростей вызывает такие искажения периодической структуры, которые нарушают условие резонансного рассеяния и приводят к падению интенсивности рассеянного сигнала.

Расслоение ионосферной плазмы в поле мощной стоячей волны приводит к созданию неоднородной структуры с амплитудой, пропорциональной квадрату напряженности поля. Отклонение диэлектрической проницаемости при этом равно

$$\Delta\epsilon(\mathbf{r}) = A \cos(2k_0z + \varphi). \quad (1)$$

Считается, что возмущающая плазму плоская волна с волновым числом $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$ распространяется в направлении z в плазме, средняя диэлектрическая проницаемость которой близка к вакуумной. Амплитуда решетки A определяется нелинейными свойствами среды и мощ-

* Влияние акустико-гравитационных волн на времена релаксации ИПН рассматривалось также в [3].

ностью волны накачки. Фаза φ зависит от условий распространения мощной волны до уровня отражения, она не влияет на интенсивность рассеянного сигнала пробных волн и далее не учитывается.

После выключения мощного передатчика неоднородная структура (1) распадается из-за диффузии и движения в нейтральной атмосфере. Здесь мы рассмотрим лишь те искажения решетки, которые вызываются заданным полем скоростей движения нейтральной компоненты атмосферы.

Считая ионизированную компоненту ионосферы пассивной примесью в несжимаемом потоке нейтрального газа, а фоновую плазму однородной, запишем уравнение для возмущений плотности плазмы $N(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\partial N / \partial t + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \nabla N = 0. \quad (2)$$

Поле скоростей нейтрального газа $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ в акустико-гравитационных волнах можно записать в упрощенном виде:

$$v_x = U \sin \Phi, \quad v_z = W \sin \Phi, \quad (3)$$

где $\Phi = k_x x - k_z(z - z_1) + \varphi_0$, φ_0 — фаза плоской волны относительно нижней границы $z = z_1$ рассеивающего слоя. Толщина рассеивающего слоя обычно мала по сравнению с масштабом однородной атмосферы, поэтому в (3) не учитывается изменение амплитуды АГВ с высотой. Кроме того в (3) не учитываются медленные изменения фазы волны во времени. Использование такого стационарного вихревого движения нейтрального газа оправдано тем, что времена распада решетки составляют от долей секунды до нескольких секунд, что много меньше периода колебаний АГВ $t_0 \gg 10$ мин.

В табл. 1 приведены некоторые параметры ($\Omega, t_0 = 2\pi/\Omega, \Lambda_z = 2\pi/k_z, v_\Phi = (2\pi)^{-1}\Omega\Lambda_x \sin \Phi$) плоских АГВ, рассчитанные для условий $k_z H \gg 1$ и $\Lambda_x = 2\pi/k_x = 100$ км на основе дисперсионного соотношения

$$\Omega = \omega_g k_x (k_x^2 + k_z^2 + 1/4H^2)^{-1/2} \simeq \omega_g \sin \Phi, \quad (4)$$

где $\omega_g = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, Φ — угол между волновым вектором $\mathbf{k}(k_x, k_z)$ и осью z .

Решение уравнения (2) для поля скоростей (3) при начальной структуре $N(z, 0) = \Delta N_0 \cos 2k_0 z$ имеет вид

$$N(\mathbf{r}, t) = \Delta N_0 \cos [2k_0(z - Wt \sin \Phi)]. \quad (5)$$

Таблица 1

Φ , град	Ω , с^{-1}	t_0 , мин	Λ_z , км	v_Φ , м/с
3	10^{-3}	105	5,24	0,83
10	$3,47 \cdot 10^{-3}$	30	17,6	6,0
15	$5 \cdot 10^{-3}$	21	26,8	20,6

Слабое рассеяние пробной сферической радиоволны на структуре (5) можно описать методом возмущений. Поле рассеяния в точке $r=0$ находим по формуле

$$E(t) = \frac{k_0^2 A_0}{4\pi} \int \Delta \epsilon(\mathbf{r}, t) \frac{\exp(-2ik_0 r)}{r^2} d\mathbf{r}, \quad (6)$$

где константа A_0 определяется мощностью пробного передатчика и $\Delta \epsilon(\mathbf{r}, t) = -4\pi e^2 N(\mathbf{r}, t) / m\omega^2$ — изменение диэлектрической проницаемости плазмы на частоте $\omega = k_0 c$, которая в условиях резонансного рассеяния совпадает с частотой пробной волны. При этом основной вклад в поле рассеяния дает структура возмущения

$$\Delta \epsilon(\mathbf{r}, t) = (1/2) \epsilon_1 \exp [2ik_0(z - Wt \sin \Phi)], \quad (7)$$

где $\varepsilon_1 = -4\pi e^2 \Delta N_0 / m\omega^2$, $\Phi = k_x x - k_z(z - z_1) + \varphi_0$. Поскольку рассматриваются крупномасштабные горизонтальные искажения ионосферной решетки, в поле обратного рассеяния (6) основной вклад вносит область решетки, лежащая в узком интервале углов θ около $\theta = 0$. Фактически это соответствует тому, что доминирующий вклад в поле обратного рассеяния вносит область возмущения, горизонтальные размеры которой порядка радиуса первой зоны Френеля. Действительно, разлагая фазу в экспоненте в (6) в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами разложения

$$2ik_0 r = 2ik_0 \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} \simeq 2ik_0 z + ik_0(x^2 + y^2)/z, \quad (8)$$

убеждаемся, что характерные размеры области по переменным x и y составляют величину $x_m \simeq y_m \simeq (\lambda z/2)^{1/2}$. Заметим, что z изменяется в пределах от z_1 до z_2 , причем $z_2 - z_1 = L = c\tau_{\text{н}}/2$ ($\tau_{\text{н}}$ — длительность зондирующего импульса пробной волны). Следовательно, малоугловое приближение обратного рассеянных от решетки волн заведомо выполнено в условиях, когда $L \ll z_1$.

Подставляя (7) и (8) в (6), поле обратного рассеяния в точке приема запишем в виде

$$E(t) \simeq \frac{k_0^2 A_0 \varepsilon_1}{8\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -ik_0 \frac{x^2 + y^2}{z} - \right. \\ \left. - 2ik_0 W t \sin [k_x x - k_z(z - z_1) + \varphi_0] \right\} dz dx dy. \quad (9)$$

Легко видеть, что зависимостью от переменной x в аргументе синуса в (9) можно пренебречь, поскольку

$$k_x x_m \simeq \pi \sqrt{2\lambda z} / \Lambda_x \simeq 10^{-2} \ll 1 \quad (10)$$

для характерных значений $\lambda = 50$ м, $z = 100$ км, $\Lambda_x = 100$ км. Учитывая это, а также неравенство $L \ll z_1$, из (9) получаем

$$E(t) \simeq \frac{\pi e^2 A_0 z_1 \Delta N_0}{2mc\omega} \int_{-L/2}^{L/2} \exp [2ik_0 W t \sin (k_z \zeta + \varphi_1)] d\zeta, \quad (11)$$

где $\varphi_1 = k_z(z_0 - z_1) - \varphi_0$, $z_0 = (z_1 + z_2)/2$. Используя известное представление $\exp(iq \sin t)$ в виде ряда по бесселевым функциям [4]

$$\exp(iq \sin t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(q) \exp(ist) \quad (12)$$

и интегрируя полученное выражение по переменной ζ , из (11) и (12) имеем

$$E(t) = \frac{\pi e^2 A_0 z_1 L \Delta N_0}{2mc\omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(2k_0 W t) \frac{\sin(sk_z L/2)}{sk_z L/2}. \quad (13)$$

Из формулы (13) можно оценить время спадания амплитуды сигнала обратного рассеяния, по крайней мере, в случае достаточно «толстой» решетки, когда выполнено неравенство

$$k_z L \gg 1. \quad (14)$$

Основной вклад в сумму (13) вносит член с $s=0$:

$$E(t) \simeq \frac{\pi e^2 A_0 z_1 L \Delta N_0}{2m\omega c} J_0(2k_0 W t). \quad (15)$$

Если принять характерное время τ спадаения сигнала как время, за которое функция J_0 проходит через нуль ($J_0(x_1) = 0$ при $x_1 = 2,4$), то получаем

$$\tau \simeq 0,2\lambda/W. \quad (16)$$

При $\lambda = 50$ м, $W = 1 \div 10$ м/с имеем: $\tau \simeq 10 \div 1$ с. В случае «тонкой» решетки ($k_z L \ll 1$) из (11) следует, что

$$E(t) \simeq \frac{\pi e^2 A_0 z_1 L \Delta N_0}{2mc\omega} \frac{\sin(k_0 W k_z L t)}{k_0 W k_z L t} \exp(2ik_0 W t \sin \varphi_1). \quad (17)$$

Из (17) видно, что характерное время спадаения величины $|E(t)|$ равно

$$\tau_1 \simeq \lambda/2Wk_z L \gg \tau. \quad (18)$$

На основании изложенного можно сделать вывод, что крупномасштабное поле скоростей, вызываемое акустико-гравитационной волной достаточно большой амплитуды ($W \sim 1 \div 10$ м/с) и при достаточно «толстом» рассеивающем слое ($k_z L > 1$), может приводить к заметным искажениям резонансно рассеивающей решетки и ослаблению рассеянного сигнала за времена $\tau \simeq 1 \div 10$ с, что согласуется с экспериментальными данными. Ясно, что при уменьшении длительности $\tau_{\text{и}}$ зондирующего импульса характерное время τ должно возрастать, если реализуется рассмотренный здесь механизм искажения решетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 12. С. 1821.
2. Belikovich V. V., Benediktov E. A., Terina G. I. // J. Atm. Terr. Phys. 1986. V. 48. № 11—12. P. 1247.
3. Беликович В. В., Григорьев Г. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 347.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. С. 41.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
23 августа 1988 г.

THE EFFECT OF IONIZED COMPONENT MOTION ON THE SCATTERING PROPERTIES OF THE IONOSPHERIC LATTICE

G. I. Grigor'ev, N. G. Denisov, V. V. Tamoikin

Relaxation of artificial ionospheric disturbances due to the motion of plasma under the action of acoustic gravity waves (AGW) has been considered. It is shown that for the typical values of AGW parameters the characteristic time of relaxation of the scattered signal amounts (1÷10)s.

УДК 537.874

ОТРАЖЕНИЕ РАДИОВОЛН ОТ НЕМОНОТОННЫХ ИОНОСФЕРНЫХ СЛОЕВ

В. Е. Куницын, А. Б. Усачев

На основе предложенного решения задачи отражения радиоволн от слоистой изотропной ионосферы разработан алгоритм расчета комплексного коэффициента отражения от произвольных немонотонных ионосферных профилей. Даны оценки области применимости подхода, проделаны тестовые расчеты. Рассчитаны фазы коэффициента отражения от немонотонного модельного профиля с E_s - F -долиной и экспериментально зарегистрированного профиля с E_s - F -долиной, хорошо видны следствия волновых явлений, связанных с туннельным эффектом и надбарьерным отражением зондирующих волн. Получены ионограммы отраженных от указанных слоев зондирующих импульсов, на которых имеются следы отражений от E - и F -слоев, а также отражения M -типа. Обсуждается возможность регистрации эффекта «резонансов групповых задержек».

Многочисленные исследования регулярной структуры ионосферы как ракетными, так и радиометодами показывают, что во многих случаях наблюдаемая зависимость электронной концентрации от высоты $N(z)$ имеет немонотонный характер. В области высот между E - и F -слоями нередко находится «долина» с минимумом электронной концентрации, кроме того, возможен немонотонный ход $N(z)$ и при наличии $F1$ - и $F2$ -слоев, а также спорадического слоя E_s [1-3]. Изучение отражения радиоволн от области «долины» в рамках традиционных методов анализа ионограмм на основе приближения геометрической оптики провести нельзя, поскольку здесь существенны волновые эффекты. Традиционная геометрическая оптика не учитывает ни туннельное прохождение волн сквозь область E на частотах зондирования $f < f_{сЕ}$, ни «надбарьерное отражение» зондирующих волн при $f > f_{сЕ}$, где $f_{сЕ}$ — критическая частота слоя E . Для E - F -долины упомянутые волновые эффекты влияют на отражение радиоволн в полосе частот $\sim 10^4 \div 10^5$ Гц вблизи $f_{сЕ}$. При наличии спорадического слоя E_s диапазон полупрозрачности, где неприменима геометрическая оптика, может достигать мегагерца и более [4, 5]. Таким образом, во многих практически интересных случаях для описания распространения радиоволн необходим метод расчета характеристик радиосигналов, отраженных от немонотонного ионосферного слоя $N(z)$. В настоящей работе предлагается алгоритм расчета комплексного коэффициента отражения радиоволн от ионосферы с произвольным немонотонным профилем $N(z)$ в рамках общепринятого приближения изотропной ионосферы.

Поле E радиоволны в этом случае удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 \varepsilon(z, f) E \equiv \Delta E + k^2 E - \alpha N(z) E = 0. \quad (1)$$

Здесь Δ — лапласиан, $\varepsilon(z, f) = 1 - \frac{e^2 N(z)}{4\pi^2 \varepsilon_0 m f^2}$ — диэлектрическая проницаемость ионосферы, $k = 2\pi f/c$, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, c — скорость света, e и m — заряд и масса электрона, $\alpha = e^2/c^2 \varepsilon_0 m$. При вертикальном зондировании уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E - \alpha N(z) E = 0. \quad (2)$$

Случай наклонного зондирования под углом θ к вертикали соответствует замене в (2) $k \rightarrow k_z = k \cos \theta$.

Широко известные модельные профили $N(z)$, для которых можно найти точное решение (2), не содержат долины [6]. В некоторых частных случаях уравнение (2) с неунимодальным слоем сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, решение которого выражается через функции Уиттекера [7]. Однако расчет частотной зависимости коэффициента отражения и в этом случае представляет собой отдельную сложную численную задачу. Поскольку большинство эмпирических моделей распределения электронной концентрации в ионосфере [1, 2, 8, 9] содержат достаточно сложные зависимости $N(z)$, для которых не существует простых точных решений, целесообразно разработать численный метод расчета комплексного коэффициента отражения радиоволн от ионосферы.

Путем замены переменной $V = (dE/dz)/E$ уравнение (2) сводится к уравнению Риккати

$$\frac{dV}{dz} + V^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(z, \omega) = 0. \quad (3)$$

При этом, поскольку при координатах z , превышающих верхнюю границу ионосферы z_u , $E \sim \exp(ikz)$, то в точке $z = z_u$ можно поставить граничное условие $V(z_u) = ik$ для уравнения (3). Комплексный коэффициент отражения от слоя выражается через значение V на нижней границе ионосферы z_d [10]:

$$r = \exp(2ikz_d) \frac{ik - V(z_d)}{ik + V(z_d)}. \quad (4)$$

Здесь фаза коэффициента отражения «привязана» к координате приемопередающего устройства $z = 0$. Для расчета r в случае произвольного финитного ионосферного слоя нужно численно решить уравнение (3) с граничным условием $V(z_u) = ik$. В работе [10] приведены примеры расчетов $r(f)$ для унимодальных слоев.

На частотах зондирования меньше критической частоты главного максимума ионосферы численные расчеты будут неустойчивыми, так как коэффициент прохождения экспоненциально мал, а модуль коэффициента отражения экспоненциально мало отличается от единицы. Как следует из формулы (4), это приведет к резкому возрастанию V в ряде точек внутри слоя, поэтому задача восстановления отраженного от слоя волнового поля по экспоненциально малому полю, проникшему сквозь слой, будет неустойчивой. При почти полном отражении волны от слоя целесообразно изменить математическую постановку задачи. Пренебрегая экспоненциально малым просачиванием сквозь слой, заменим профиль за геометрикооптической точкой отражения z_0 от главного максимума ($\epsilon(z_0, f) = 0$) линейно растущим слоем с соответствующей производной dN/dz ($z = z_0$). Тогда убывающее на бесконечности решение уравнения (2) в области $z > z_0$ пропорционально функции Эйри Ai :

$$E \sim Ai(\gamma^{1/3}z - k^2\gamma^{-2/3}),$$

где $\gamma = \alpha(dN/dz)|_{z=z_0}$. Отсюда следует граничное условие для V в точке отражения z_0 :

$$V(z_0) = \gamma^{1/3} \frac{Ai'(0)}{Ai(0)} = -0,72056\gamma^{1/3} = -0,72056 \left(\alpha \frac{dN}{dz} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

Далее удобно разбить V на действительную и мнимую части $V = V_r + iV_i$, при этом комплексное уравнение Риккати разделяется на пару уравнений:

$$\frac{dV_r}{dz} + V_r^2 - V_i^2 + k^2 - \alpha N(z) = 0, \quad V_r(z_0) = -0,72056 \left(\alpha \frac{dN}{dz} \Big|_{z=z_0} \right)^{1/3},$$

$$\frac{dV_i}{dz} + 2V_r V_i = 0, \quad V_i(z_0) = 0.$$

Из второго уравнения системы следует, что $V_i \equiv 0$ и задача определения коэффициента отражения сводится к решению одного уравнения:

$$\frac{dV_r}{dz} + V_r^2 + k^2 - \alpha N(z) = 0, \quad V_r(z_0) = -0,72056 \left(\alpha \frac{dN}{dz} \Big|_{z=z_0} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

В силу условия $V_i \equiv 0$ из (4) следует равенство $|r| \equiv 1$, что является следствием пренебрежения просачиванием сквозь слой и замены реального слоя линейно растущим.

Оценим, при каких условиях можно пренебречь последующим членом разложения $N(z)$ в точке отражения z_0 , иными словами, при каких условиях справедливо граничное условие (5). Пусть

$$N(z) \simeq N(z_0) + N'(z-z_0) + \frac{N''}{2}(z-z_0)^2 = N_0 + \frac{|N''|b^2}{2} - \frac{|N''|}{2}(z-z_m)^2.$$

Здесь $b = N'/|N''|$ (для определенности $N'' < 0$), $z_m = z_0 + b$. Переходя к координате $z' = z - z_m$, получаем, что слой $N(z')$ имеет вид $N(z') = N_m(1 - z'^2/y_m^2)$; $N_m = N_0 + |N''|b^2/2 \equiv k_c^2/\alpha$; $y_m^2 = 2N_0/|N''| + b^2$, где $k_c = 2\pi f_c/c$ — волновое число, соответствующее критической частоте f_c ; y_m — полутолщина параболического слоя. Далее, вводя координату $\zeta = \sqrt{\frac{2k_c}{y_m}} z'$ и параметр $a = \frac{k_c y_m}{2} \left(\frac{k_c^2 - k^2}{k_c^2} \right)$, перейдем от (2) к уравнению для функций параболического цилиндра

$$\frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \left(\frac{\zeta^2}{4} - a \right) E = 0.$$

Стандартными решениями данного уравнения являются функции $W(a, \pm \zeta)$ [11]. Общее решение представляет собой комбинацию фундаментальных решений с произвольными константами A и B :

$$E = AW(a, \zeta) + BW(a, -\zeta).$$

Если частота заметно отличается от критической и толщина слоя превышает длину волны, т. е. $a \gg 1$, то в точке отражения (когда $\zeta^2/4 - a = 0$) справедливы следующие асимптотические представления, содержащие функции Эйри [11]:

$$W(a, \zeta) \sim e^{-\pi a/2} \text{Bi}(0), \quad W(a, -\zeta) \sim e^{\pi a/2} \text{Ai}(0).$$

Тогда граничное условие имеет вид (5) с точностью до экспоненциального члена

$$V(z_0) \simeq \gamma^{1/3} \frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} (1 + O(e^{-\pi a})).$$

Поэтому условием применимости (5) будет неравенство $\pi a \gg 1$, иначе

$$\left| \frac{d^2 N}{dz^2} \right| \ll \alpha^{1/3} \left| \frac{dN}{dz} \right|^{4/3}.$$

Выражая производные электронной концентрации через параметры параболического слоя $\alpha N(z) = k_c^2(1 - z^2/y_m^2)$, получим ограничение на координату точки отражения

$$|z| \gg \frac{y_m}{\sqrt{k_c y_m}} = \sqrt{y_m/k_c}$$

или условие на расстройку частоты зондирования от критической

$$\Delta f \equiv \frac{c}{2\pi} (k_c - k) \gg \frac{c}{2\pi^2 y_m}.$$

При значениях $y_m = 100$ км, $f_c = 10$ МГц имеем ограничения $|z| \gg 1$ км, $\Delta f \gg 150$ Гц, т. е. вплоть до расстроек порядка 0,2 кГц от критической граничное условие (5) и, следовательно, решение системы (6) имеют высокую точность.

Для проверки точности алгоритма были проведены тестовые расчеты с профилем $N(z) = \frac{k_0^2 z^2}{\alpha z_0^2}$ ($z > 0$) и $N(z) = 0$ ($z < 0$), имеющим точное решение. Нетрудно показать, что уравнение (2) в этом случае сводится к виду $\frac{d^2 E}{dz^2} - \left(a - \frac{\zeta^2}{4}\right) E = 0$, где $a = -\frac{k^2 z_0}{2k_0}$, $\zeta = \sqrt{\frac{2k_0}{z_0}} z$. Убывающим на бесконечности решением этого уравнения являются функции Вебера $U(a, \zeta)$. Из (4) следует формула для коэффициента отражения в точке $z = 0$:

$$r(f) = \left(ik - \sqrt{\frac{2k_0}{z_0}} \frac{U'(a, 0)}{U(a, 0)} \right) / \left(ik + \sqrt{\frac{2k_0}{z_0}} \frac{U'(a, 0)}{U(a, 0)} \right).$$

Используя выражения для функции $U(a, \zeta)$ и ее производной при $\zeta = 0$ через гамма-функцию [11], получим соотношение для фазы коэффициента отражения:

$$\varphi(k) = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{k}{2} \sqrt{\frac{z_0}{k_0}} \frac{\Gamma(1/4 + k^2 z_0 / 4k_0)}{\Gamma(3/4 + k^2 z_0 / 4k_0)} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k^2 z_0}{4k_0} \right) \right].$$

Когда $k \rightarrow \infty$, асимптотика фазы имеет вид $\varphi \approx \pi/2 + \pi z_0 k^2 / 2k_0$, причем второе слагаемое, естественно, соответствует геометрической фазе. В табл. 1 приведены значения фазы для профиля с $z_0 = 100$ км, $f_0 \equiv (c/2\pi)k_0 = 5$ МГц. Видно, что за исключением окрестности начала слоя, где $dN/dz \rightarrow 0$, на частотах $f \gtrsim 70$ кГц численные расчеты фазы отличаются от точного решения менее чем на 0,1 рад, далее с ростом частоты погрешность вычисления уменьшается. На рис. 1 приведены действующие высоты отражения $h'(f) = (c/4\pi) (\partial\varphi/\partial f)$ от такого профиля (сплошная линия — численное решение, штриховая линия — точное решение).

Таблица 1

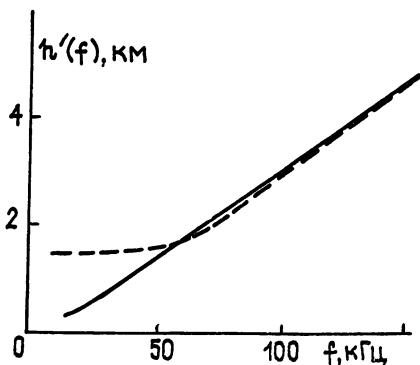


Рис. 1.

Частота, кГц	Фаза, точное решение, рад	Фаза, рассчитанная в соответствии с (6), рад
60	3,998	4,153
70	4,840	4,935
80	5,795	5,874
90	6,890	6,977
100	8,138	8,233
150	16,377	16,432
200	27,889	27,932
250	42,694	42,729

Описанный алгоритм был применен к различным ионосферным слоям, содержащим немонотонную зависимость $N(z)$. В качестве примера ионосферного профиля с долиной между областями E и F было

взято распределение электронной концентрации из работы [1], с. 31, соответствующее характерному состоянию ионосферы на широте 50° в дневное время (рис. 2а), профиль включает области D, E и F.

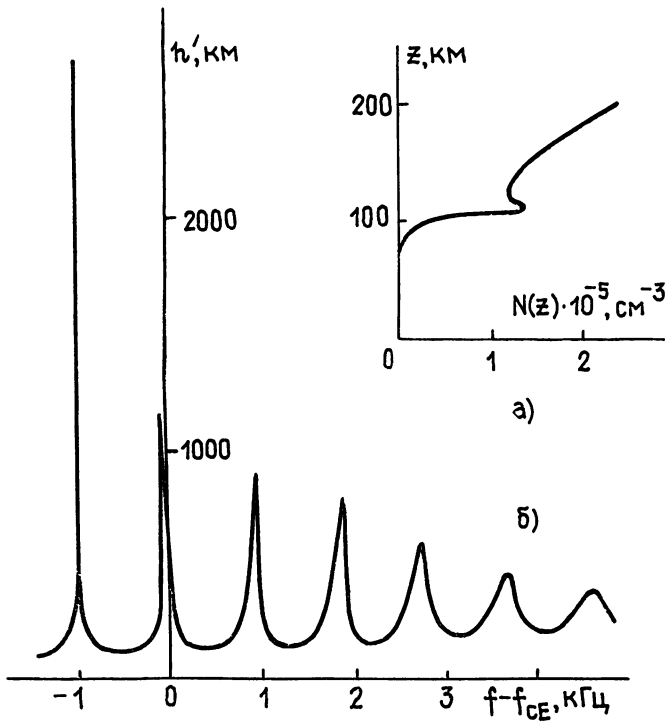


Рис. 2.

На рис. 2б изображена частотная зависимость действующей высоты $h'(f)$ пропорциональной производной фазы коэффициента отражения по частоте $h'(f) = \frac{c}{4\pi} \frac{d\varphi}{df}(f)$ в области частот вблизи f_{CE} . Здесь для на-

глядности результатов целесообразно приводить не зависимость фазы коэффициента отражения как функции частоты, а величину $h'(f)$, поскольку физический смысл $h'(f)$ — групповой путь квазимонохроматического импульса с частотой f . Напомним, что $|r(f)| \equiv 1$. Зависимость $h'(f)$ сильно немонотонна. Такой характер $h'(f)$ объясняется интерференционными эффектами: при $f > f_{CE}$ волна испытывает надбарьерное отражение, а при $f < f_{CE}$ просачивается сквозь барьер (туннельный эффект), и если на пути в долине укладывается целое число длин волн, то происходит «задержка», как бы резонансный «захват» или «звон» волны в долине. Поскольку в случае туннельного прохождения при каждом проходе долины туда и обратно выходит экспоненциально малая часть энергии, то при $f < f_{CE}$ наблюдаются узкие и высокие пики $h'(f)$. Причем их высота экспоненциально растет. На частотах $f > f_{CE}$ по мере уменьшения надбарьерного отражения (по степенному закону для профиля конечной гладкости) амплитуда пиков убывает. Частотный масштаб осцилляций определяется набегом фазы волны, прошедшей долину, т. е. главным образом протяженностью и глубиной долины.

При зондировании ионосферного профиля радиопульсами с шириной спектра, значительно превышающей масштаб осцилляций $h'(f)$, происходит характерное расщепление отраженных сигналов. Искажения радиопульсов, отраженных от ионосферного слоя с известным коэффициентом $r(f)$, рассчитываются с помощью преобразования Фурье: спектр сигнала домножается на $r(f)$, и вычисляется обратное преобразование. Диапазон полупрозрачности упомянутого E—F-слоя сравнительно мал, поэтому, чтобы волновые эффекты были более заметны,

расчеты проводились для узкополосных зондирующих импульсов с гауссовой огибающей длительностью 200 мкс по уровню интенсивности 0,5 и шириной спектра ~ 10 кГц. На рис. 3 приведена рассчитанная амплитудная ионограмма для плоских зондирующих волн, на которой приведены на разных частотах с шагом 3 кГц временные развертки приходящих импульсов, по традиции пересчитанные на действующую высоту. Групповые задержки отраженных импульсов соответствуют отражениям от E - и F -областей, а также отражениям M -типа [12], обусловленным обратным рассеянием на нижнем максимуме электронной концентрации.

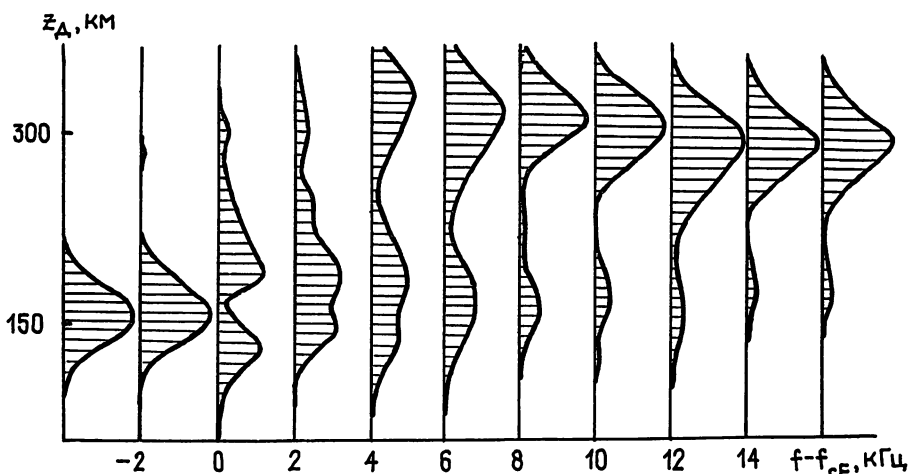


Рис. 3.

Отметим, что, если посылать на такой слой импульсы с полосой, не превышающей 200 Гц, в соответствии с рассчитанными данными $h'(f)$ (рис. 2) будет наблюдаться своеобразный эффект «резонансов групповых задержек», причем групповые задержки на некоторых частотах будут достигать тысяч километров. Импульсы с такой шириной спектра имеют пространственную протяженность более 1000 км, и провести непосредственную регистрацию временных задержек при вертикальном зондировании нельзя, однако существует возможность регистрировать производную фазы сигнала по частоте $d\varphi/df$, пропорциональную групповой задержке.

Сравнительно небольшой диапазон полупрозрачности невозмущенного слоя E объясняется тем, что его характерная толщина достаточно велика: ~ 10 — 20 км. Иная ситуация имеет место при наличии в области E спорадического E_s -слоя с характерной толщиной $\sim 0,5$ — 3 км и градиентом $dN/dz \sim 10^5 \div 10^6 \text{ см}^{-3} \cdot \text{км}^{-1}$ на нижнем склоне. При этом диапазон полупрозрачности может достигать 1 МГц и более. В работе [5] приводятся экспериментальные данные об отражении от спорадического слоя E_s на частотах, вдвое и более превышающих частоту экранирования f_{bE_s} . При этом значительный вклад в отражение на частотах $f \gg f_{bE_s}$ вносит отражение от градиента $N(z)$ на нижнем склоне слоя. На рис. 4а изображен экспериментально зарегистрированный при ракетном зондировании ионосферный профиль, содержащий E_s -слой ([4], стр. 68). Толщина E_s -слоя ~ 600 м, $f_{cE} = 5,116$ МГц.

На рис. 4б приведена зависимость $h'(f)$ для этого профиля. Функция $h'(f)$ имеет те же основные особенности, что и зависимость на рис. 2. Но поскольку диапазон полупрозрачности здесь значительно больше, чем в невозмущенной ионосфере, убывание амплитуды осциллирующей $h'(f)$ более медленное. Такой вид зависимости $h'(f)$ приводит к тому, что при сохранении расщепления зондирующего импульса на несколько отраженных форма отраженных импульсов ближе к исходной колоколообразной форме. На рис. 5 приведена рассчитанная амплитуд-

ная ионограмма для зондирующих импульсов длительностью 100 мкс. Здесь, так же как и на рис. 3, четко видны отражения от E_s - и F -слоев и отражения M -типа. Хорошо заметно уменьшение амплитуды сигналов, отраженных от слоя E_s , и увеличение амплитуды F -отражений с ростом частоты.

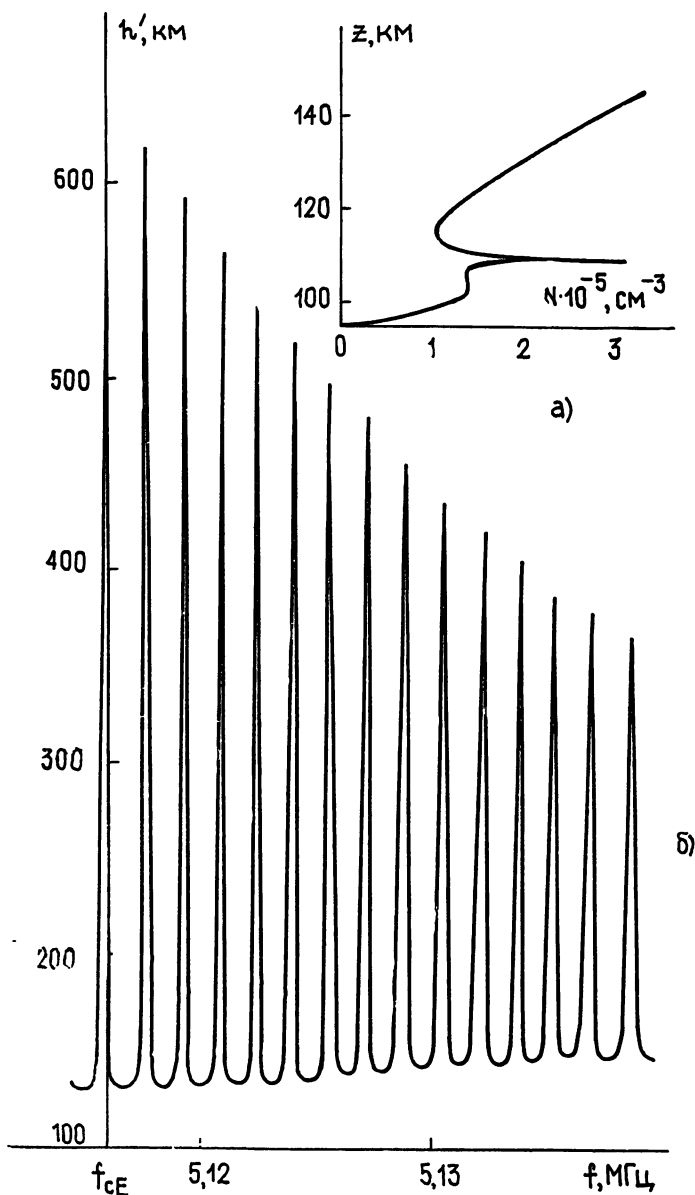


Рис. 4.

Алгоритмы численного решения уравнения (6) основаны на методах типа прогноза и коррекции. Использовались методы четвертого порядка типа Адамса—Башфорта, Хемминга и др., дающие близкие результаты. При полном отражении от слоя вычисляемая функция сингулярна в узлах стоячей волны. Для обеспечения сходимости в таких областях функция заменялась на обратную. Время расчета на ЭВМ ЕС-1045 коэффициента отражения на одной частоте определяется толщиной слоя и шагом в численных расчетах, для слоев, показанных на рис. 2а и 4а, оно составляло 1—3 минуты.

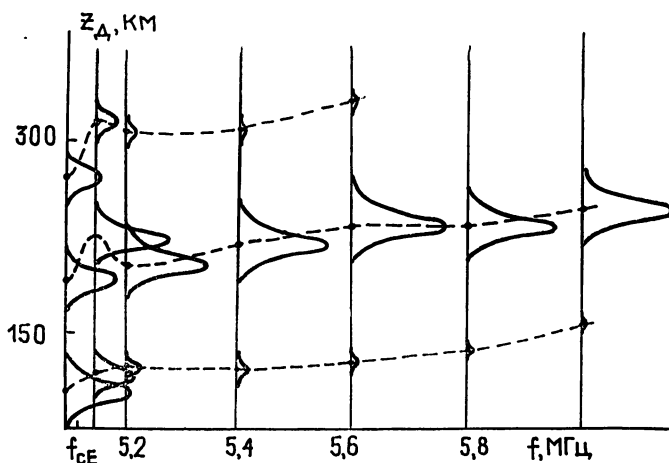


Рис. 5.

Предложенный подход к задаче отражения радиоволн от ионосферы и разработанный на его основе численный алгоритм позволяют рассчитывать комплексный коэффициент отражения для произвольных немонотонных профилей при комплексном ϵ . Знание комплексного коэффициента отражения в широком диапазоне частот дает возможность рассчитывать искажения зондирующих импульсов и поля отраженных зондирующих волн. Полученные результаты позволяют объяснить ряд волновых явлений, возникающих при отражении радиоволн от ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. В., Фишук Д. И., Цедилина Е. Е. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1973. Т. 13. № 1. С. 31.
2. Bradley P. A., Dudeney J. R. // J. Atm. Terr. Res. 1973. V. 35. № 12. P. 2131.
3. Becker W. // Radio Sci. 1967. V. 2. № 10. P. 1205.
4. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышева С. П. и др. Среднеширотный спорадический слой E ионосферы. — М.: Наука, 1975. — 120 с.
5. Овезгельдыев О., Келов Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 12. С. 1794.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 423 с.
7. Годин О. А. // В сб.: Вопросы дифракции электромагнитных волн. — М.: МФТИ, 1982. С. 107.
8. Ching V. K., Chiu J. T. // J. Atm. Terr. Res. 1973. V. 35. № 9. P. 1615.
9. Зеленова Т. И., Боеenkova Н. М., Легенька А. Д. // В сб.: Ионосферные модели. — М.: Наука, 1975. С. 70.
10. Куницын В. Е., Смородинов В. А., Усачев А. Б. // Радиотехника. 1987. № 9. С. 61.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и М. Стигана. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
12. Руководство URSI по интерпретации и обработке ионограмм: Перевод с англ.—М.: Наука, 1978. — 341 с.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
19 мая 1988 г.

REFLECTION OF RADIO WAVES FROM NONMONOTONOUS IONOSPHERIC LAYER

V. E. Kunitsyn, A. B. Usachev

Algorithm of calculation of complex reflection coefficient from arbitrary nonmonotonous ionospheric profiles is worked out on the basis of suggested solution of radio wave reflection problem by layered isotropic ionosphere. Evaluations of regions of applicability of this method are presented, test calculations are made. Phases of reflection coefficient are calculated for nonmonotonous model layer with E—F-valley and for experimentally registered profile with E_s —F-valley. One can see results of wave phenomena, connected with tunneling effect and overbarrier reflection of sounding waves. There are tracks of reflections from E- and F-regions and M-type tracks on ionograms for sounding impulses, reflected from layers mentioned above. Ability of registration «resonances of group delay» effect is discussed.

УДК 621.371:551

ВЛИЯНИЕ НЕСФЕРИЧНОСТИ ЧАСТИЦ ГИДРОМЕТЕОРОВ НА ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

А. С. Захаров, В. А. Тимофеев

На основе первого приближения теории многократного рассеяния рассмотрены флуктуации миллиметровых радиоволн, возникающие при распространении излучения через слой несферических рассеивателей гидрометеоров. Показано, что для дождя учет формы частиц, их ориентации в пространстве позволяет качественно объяснить несоответствие между экспериментальными данными, полученными при измерениях в этом диапазоне.

При исследовании распространения миллиметровых волн в атмосфере с гидрометеорами основное внимание уделялось изучению ослабления и обратного рассеяния. Однако в связи с развитием техники этого диапазона появилась необходимость в исследовании статистических характеристик излучения, рассеянного совокупностью большого числа движущихся, хаотически распределенных частиц. Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные о флуктуациях миллиметровых волн в осадках немногочисленны [1, 2, 3] и значительно расходятся как между собой, так и с теоретическими оценками, выполненными в приближении однократного рассеяния для сферических частиц [1, 4]. Объяснение несовпадения расчетов с результатами эксперимента, данное в [1], за счет вклада многократного рассеяния является, по-видимому, необоснованным вследствие того, что экспериментальные значения превышали теоретические в несколько раз даже в тех случаях, когда условие применимости однократного рассеяния выполнялось.

Данная работа посвящена изучению влияния несферичности частиц гидрометеоров на флуктуации пучка миллиметровых волн.

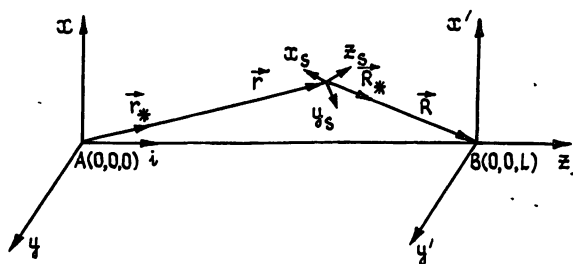


Рис. 1.

Теоретические исследования [5, 6], выполненные на основе численного решения уравнения переноса излучения, показали, что в дождях для миллиметрового диапазона волн в случае использования антенн с узкими диаграммами направленности (\sim единиц градусов) доля некогерентно рассеянного излучения в принятой интенсивности мала. Поэтому для оценки вклада несферичности частиц в величину флуктуаций сигнала, прошедшего слой таких рассеивателей, было использовано первое приближение теории многократного рассеяния [7]. Геометрия задачи распространения пучка через слой гидрометеоров представлена на рис. 1. Передающая антенна расположена в точке A с координатами

натами $(0, 0, 0)$, приемная — в точке $B(0, 0, L)$. Анализ влияния несферичности рассеивателей на флуктуации излучения был выполнен для относительной дисперсии поля $\xi^2 = \sigma_E^2 / |E_{\text{ког}}|^2$. Здесь $E_{\text{ког}}$ — когерентное (среднее) поле. Такие характеристики флуктуаций, как глубина хаотической модуляции интенсивности, относительная дисперсия амплитуды и фазы волны, которые обычно измеряются при экспериментальных исследованиях, могут быть получены на основе ξ^2 .

В рамках первого приближения теории многократного рассеяния дисперсия флуктуаций поля σ_E^2 определяется некогерентной интенсивностью. Формулируя задачу в терминах вектор-параметров Стокса, решение ее, по аналогии со скалярным приближением в рамках принятой модели [7], можно свести к суммированию значений вектор-параметров отдельных элементарных потоков излучения, испытывающих, прежде чем они попадут на приемную антенну, ослабление и один акт рассеяния в объеме дождя. В результате выражение для ξ^2 может быть представлено в виде

$$\xi^2 = \iint_V \frac{L^2 G_t(\mathbf{r}_*) G_r(\mathbf{R}_*) \lambda^2}{8\pi^2 r^2 R^2} \exp(-\gamma_r - \gamma_R + \gamma_L) \times \hat{P}_r^T(\mathbf{R}_*) \hat{S}(\mathbf{r}_*, \mathbf{R}_*, r, m, \lambda) \hat{P}_t(\mathbf{r}_*) n(\mathbf{r}, m) dV dm, \quad (1)$$

где $G_r(\mathbf{R}_*)$, $G_t(\mathbf{r}_*)$ — нормированные диаграммы направленности приемной и передающей антенн (по мощности), \mathbf{R}_* , \mathbf{r}_* — единичные векторы в направлении \mathbf{R} и \mathbf{r} , $n(\mathbf{r}, m)$ — функция, описывающая распределение частиц в единице объема по размерам, форме, ориентации и т. п. (обобщенная переменная m), $\hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_*, r, m, \lambda)$ — матрица рассеяния [8] частицы, имеющей параметры m и находящейся в точке \mathbf{r} , $\hat{P}_r(\mathbf{R}_*)$, $\hat{P}_t(\mathbf{r}_*)$ — векторы Стокса (нормированные) приемной и передающей антенн [9], λ — длина волны излучения, γ_L — интегральное ослабление, испытываемое волной при прохождении расстояния L (зависит от поляризации излучения), τ — знак транспонирования.

Для численных оценок целесообразно ввести ряд упрощений, которые позволяют выявить основные закономерности и существенно сократить объем вычислений, так как выражение (1) является достаточно общим и определяет дисперсию флуктуаций поля в случае произвольных параметров гидрометеоров и поляризационных характеристик антенн.

Дальнейший анализ статистических характеристик излучения выполнен для пространственно-однородного дождя. Теоретическое исследование флуктуаций сигнала в снегопадах выполнить в настоящее время не представляется возможным вследствие трудностей, связанных с корректным описанием рассеивающих свойств многообразных форм встречающихся в естественных условиях снежинок, и недостатка информации об их микрофизических характеристиках.

Как показали эксперименты, капли дождя, главным образом крупные (радиусом более 1 мм), при падении в воздухе имеют форму, отличающуюся от сферической [10], что приводит к поляризационной за-

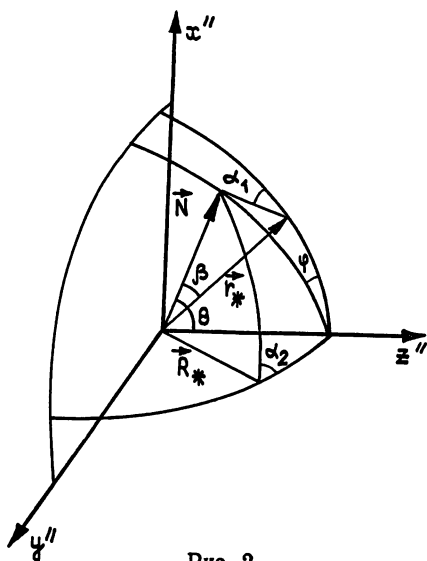


Рис. 2.

личающуюся от сферической [10], что приводит к поляризационной за-

висимости рассеяния и изменению первоначального состояния поляризации. Обычно при расчетах деполаризации в дожде используют модель сплюснутого сфероида или сплюснутого сфероида с уплощенным основанием (так называемая форма Пруппахера—Питера). В [10] дан обзор методов расчета характеристик рассеяния для таких несферических частиц. Ориентация отдельной капли, характеризующая ее осью симметрии N , определяется углами θ , φ (см. рис. 2). В естественных условиях существует множество причин, вызывающих отклонение оси симметрии от вертикали, и к настоящему времени не существует общепринятой теории, позволяющей аналитически определить значение θ , φ . Однако для дальнейшего анализа целесообразно использовать модель, обычно применяемую при оценках деполаризации в дожде [10]. Согласно этой модели угол наклона не зависит от размеров капель, а распределения θ и φ взаимонезависимы и подчиняются нормальному закону со средними θ_0 и φ_0 и дисперсиями σ_θ^2 и σ_φ^2 .

Необходимо отметить, что обычно процесс рассеяния электромагнитной волны частицей описывают в системе координат, связанной с самой частицей (x_s, y_s, z_s) . В этом случае матрица рассеяния $\hat{S}(\mathbf{r}_*, \mathbf{R}_*, m, \lambda)$ в исходной системе координат может быть представлена в виде

$$\hat{S} = \hat{K}(-\alpha_2) \hat{S}_s \hat{K}(\alpha_1 - \pi). \quad (2)$$

Здесь \hat{S}_s — матрица рассеяния в системе (x_s, y_s, z_s) , α_1 и α_2 — углы поворота, определяющие преобразование систем координат (см. рис. 2), $\hat{K}(\alpha)$ — матрица поворота:

$$\hat{K}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Элементы матрицы $\hat{S}_s(\mathbf{r}_*, \mathbf{R}_*, m, \lambda)$ выражаются через амплитуду рассеяния $f(\mathbf{r}_*, \mathbf{R}_*, m, \lambda)$, которая описывает амплитуду, фазу и поляризацию рассеянной волны [8].

Так как обычно в миллиметровом диапазоне применяют антенны с узкими диаграммами направленности (размер апертур $\sim 20 \div 300 \lambda$), а характерная ширина дифференциального сечения рассеяния элемента объема дождя $\lambda^2 \int_m \hat{S}_s(\mathbf{r}_*, \mathbf{R}_*, m, \lambda) n(m) dm / (4\pi^2)$ значительно больше ширины диаграммы направленности [10, 11], то при оценке было использовано приближение $\hat{S}_s(\mathbf{r}_*, \mathbf{R}_*, m, \lambda) \approx \hat{S}_s(\mathbf{i}, \mathbf{i}, m, \lambda)$. После статистического усреднения θ , φ , с учетом сделанных выше предположений, для относительной дисперсии флуктуаций поля в случае различной взаимной ориентации \hat{P}_i и \hat{P}_r для вертикальной и горизонтальной поляризации излучения из (1) получим следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} \xi_{HH}^2 & \xi_{HV}^2 \\ \xi_{VH}^2 & \xi_{VV}^2 \end{pmatrix} = \int_V J(G_t, G_r, L) \int_a \begin{pmatrix} M_{HH} & M_{HV} \\ M_{VH} & M_{VV} \end{pmatrix} n(a) da dV, \quad (4)$$

где

$$J(G_t, G_r, L) = L^2 G_t(\mathbf{r}_*) G_r(\mathbf{R}_*) / r^3 R^2,$$

$$\begin{aligned} M_{VV}^{HH} = & \{g_1 |f(0, a, \lambda)|^2 + g_2 [q_1 |f_V^H(\pi/2, a, \lambda)|^2 + q_2 |f_H^V(\pi/2, a, \lambda)|^2 + \\ & + u \operatorname{Re}(f_V^H(\pi/2, a, \lambda) f_H^{*V}(\pi/2, a, \lambda))] + v \operatorname{Re}[p_1(f(0, a, \lambda) f_V^{*H}(\pi/2, a, \lambda)) + \\ & + p_2(f(0, a, \lambda) f_H^{*V}(\pi/2, a, \lambda))] \} \exp(-\gamma_V^H(L)(r + R - L)), \end{aligned}$$

$$M_{VH}^{HV} = (u/2)g_2 |f_H(\pi/2, a, \lambda) - f_V(\pi/2, a, \lambda)|^2 \exp(-\gamma_{*H}^V(I)(r-L) - \gamma_{*V}^H(I)R),$$

$$g_{1,2} = (1/8)(3 \pm 4 \cos 2\theta_0 \exp(-2\sigma_0^2) + \cos 4\theta_0 \exp(-8\sigma_0^2)),$$

$$g_{1,2} = (1/8)(3 \pm 4 \cos 2\varphi_0 \exp(-2\sigma_0^2) + \cos 4\varphi_0 \exp(-8\sigma_0^2)),$$

$$p_{1,2} = 1 \pm \cos 2\varphi_0 \exp(-2\sigma_0^2), \quad v = (1/8)(1 - \cos 4\theta_0 \exp(-8\sigma_0^2)),$$

$$u = (1/4)(1 - \cos 4\varphi_0 \exp(-8\sigma_0^2)),$$

$\gamma_*(I)$ — удельное ослабление излучения в дожде интенсивностью I для волны соответствующей поляризации, $f_V^H(\beta, a, \lambda)$ — амплитуда рассеяния отдельной частицы с эквивалентным радиусом a при падении волны с вертикальной или горизонтальной поляризацией под углом β относительно направления ее оси симметрии N , * — знак комплексного сопряжения.

Величины ξ_{HH}^2 и ξ_{VV}^2 соответствуют случаю совпадения поляризационных характеристик антенн приемника и передатчика, а ξ_{HV}^2 и ξ_{VH}^2 — ортогональной ориентации \hat{P}_r и \hat{P}_t и характеризуют флуктуации сигнала (шум), возникающие при работе радиосистем с поляризационным разделением каналов.

При использовании круговой поляризации (вне зависимости от направления вращения вектора поля) ξ^2 определяется лишь статистикой угла θ и может быть представлена следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} \xi_{CC}^2 \\ \xi_{CR}^2 \end{pmatrix} = \int_V J(G_t, G_r, L) \int_a \begin{pmatrix} M_{CC} \\ M_{CR} \end{pmatrix} n(a) da dV. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{CC} = & \{g_1 |f(0, a, \lambda)|^2 + (g_2/4)(f_H(\pi/2, a, \lambda) + f_V(\pi/2, a, \lambda))^2 + \\ & + v \operatorname{Re}[f(0, a, \lambda)(f_H^*(\pi/2, a, \lambda) + f_V^*(\pi/2, a, \lambda))]\} \times \\ & \times \exp(-\gamma_{*C}(I)(r+R-L)), \end{aligned}$$

$$M_{CR} = (g_2/4)(f_H(\pi/2, a, \lambda) - f_V(\pi/2, a, \lambda))^2 \exp(-\gamma_{*C}(I)(R+r-L)).$$

Для оценки влияния несферичности рассеивателей на флуктуации пучка миллиметровых радиоволн в случае совпадения поляризаций передатчика и приемника рассмотрим величину

$$\Delta_j = (\xi_{jj}^2 - \xi_0^2)/\xi_0^2. \quad (6)$$

При ортогональной ориентации \hat{P}_t и \hat{P}_r флуктуации сигнала, возникающие вследствие отличия формы частиц осадков от сферы, можно характеризовать отношением

$$\delta_{ij} = \xi_{ij}^2/\xi_0^2. \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) ξ_0^2 — относительная дисперсия флуктуаций поля для случая сферических рассеивателей, а индексы i и j обозначают поляризацию. Численные оценки Δ_j и δ_{ij} были выполнены в предположении о распределении капель по размерам по Бесту. При вычислениях величин, описывающих взаимодействие электромагнитного излучения с несферическими частицами осадков, были использованы результаты работ [12, 13], а в случае сферических — формулы Ми [8]. Диаграммы направленности $G_t(\mathbf{r}_*)$ и $G_r(\mathbf{R}_*)$ аппроксимировались гауссовыми функциями [7] с параметрами, характерными для антенн реально используемых в миллиметровом диапазоне волн.

Анализ выполненных численных расчетов показал, что на наземных трассах, представляющих практический интерес ($L \leq 30$ км), наблюдается слабая зависимость результатов от протяженности осадков (относительная ошибка $\leq 1\%$). Приводимые ниже величины Δ_j и δ_j получены для дождя протяженностью 1 км.

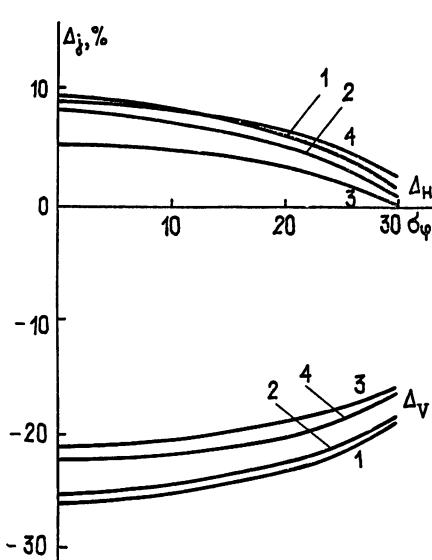


Рис. 3.

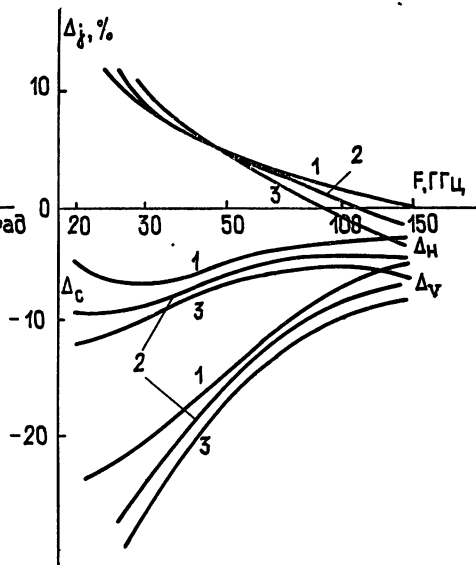


Рис. 4.

В результате вычислений установлено, что наиболее сильное влияние несферичности частиц наблюдается в длинноволновой части миллиметрового диапазона. Величина δ_j не превышает 2%, причем максимум имеет место в случае осадков интенсивностью $I = 100$ мм/ч при следующих значениях параметров распределения углов наклона: $\theta_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi = 0$. На рис. 3 приведены результаты расчетов Δ_j , полученные на частоте $F = 30$ ГГц при $I = 25$ мм/ч, в зависимости от статистических характеристик ориентации рассеивателей. Кривая 1 соответствует $\varphi_0 = \sigma_\theta = 0$, $\theta_0 = 90^\circ$; 2— $\varphi_0 = 10^\circ$, $\sigma_\theta = 0$, $\theta_0 = 90^\circ$; 3— $\varphi_0 = 20^\circ$, $\sigma_\theta = 0$, $\theta_0 = 80^\circ$; 4— $\varphi_0 = 10^\circ$, $\sigma_\theta = 10^\circ$, $\theta_0 = 80^\circ$. Параметры распределений θ и φ выбраны исходя из диапазона экспериментально измеренных значений углов наклона капель [10]. Максимальное отличие от оценок, полученных в предположении о сферичности капель дождя, наблюдается для вертикальной поляризации антенны на приеме и передаче в случае, когда все частицы имеют одинаковую ориентацию и $\theta_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = \sigma_\varphi = \sigma_\theta = 0$. По мере роста σ_φ это различие монотонно уменьшается. Аналогичное поведение наблюдается и в случае увеличения дисперсии по углу θ .

На рис. 4 представлены частотные зависимости Δ_j для трех значений интенсивности дождя при $\theta_0 = 90^\circ$, $\sigma_\theta = 0$, $\varphi_0 = 5^\circ$, $\sigma_\varphi = 10^\circ$. Кривая 1 соответствует $I = 5$ мм/ч, 2— $I = 25$ мм/ч, 3— $I = 100$ мм/ч. С ростом F расхождение с расчетами, выполненными в предположении о сферичности формы капель дождя, уменьшается, а величина $|\Delta_V|$ для случая вертикальной поляризации несколько больше, чем для горизонтальной во всем рассматриваемом диапазоне. Это связано с поляризационными особенностями рассеивающих свойств частиц. Мнимая часть амплитуды рассеяния f в направлении падающего излучения для частиц с параметрами, характерными для дождя, в миллиметровом диапазоне волн на горизонтальной поляризации больше, чем на вертикальной, а ее действительная часть имеет максимум. Поскольку электрический размер сплюснутых сфероидальных капель для вертикальной поляризации меньше, чем для горизонтальной [10], максимум амплитуды

рассеяния (а следовательно, и дифференциального сечения рассеяния) в первом случае будет иметь место для более крупных (геометрически) частиц. Этим же можно объяснить различное поведение кривых в зависимости от I осадков. С ростом интенсивности дождя увеличивается число крупных капель, что приводит к увеличению величины $|\Delta_V|$ и $|\Delta_C|$ для вертикальной и круговой поляризации. Характер изменения для горизонтальной поляризации зависит от частоты излучения: в длинноволновой части диапазона Δ_H растет с ростом I , а в коротковолновой падает.

Полученные теоретические оценки свидетельствуют о том, что несферичность рассеивателей гидрометеоров влияет на статистические характеристики миллиметрового излучения (особенно в длинноволновой части диапазона, где максимальное значение разности между относительными дисперсиями поля для горизонтальной и вертикальной поляризации ($\Delta_H - \Delta_V$) может достигать $\approx 40\%$), однако представленные расчеты дают лишь качественное объяснение экспериментальных данных, полученных разными авторами. Одной из возможных причин расхождения результатов теории и эксперимента могут являться флуктуации углов прихода, которые в случае остронаправленных передающих и приемных антенн будут вызывать дополнительное увеличение флуктуаций амплитуды принимаемого сигнала [2]. В работе [14] на основании теоретических расчетов, выполненных в миллиметровом диапазоне с учетом несферичности капель, показано, что в дожде могут иметь место значительные изменения направления распространения. Однако для подтверждения этого предположения необходимы специальные исследования, так как выполненные в [2] наблюдения позволяют лишь косвенно судить о наличии флуктуаций углов прихода из-за мультипликативной помехи в виде амплитудных флуктуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваксер И. Х., Комяк В. А., Малышенко Ю. И., Шарапов Л. И. // Тезисы докл. XI Всесоюзной конференции по распространению радиоволн.—Казань: Гос. ун-т, 1975. Ч. 2. С. 36.
2. Андреев Г. А., Захаров А. С., Тимофеев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 10. С. 1341.
3. Herben M. H. A. // AEU. 1986. V. 40. № 3. P. 180.
4. Сухонин Е. В. // Тезисы докл. на Всесоюзном симпозиуме по распространению субмиллиметровых и миллиметровых волн в атмосфере Земли и планет. — М.: Наука, 1974. С. 51.
5. Загорин Г. К., Соколов А. В. // Сб.: Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве. — М.: Наука, 1986. С. 75.
6. Oguchi T. // Radio Sci. 1986. V. 21. № 4. P. 717.
7. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. Т. 1.
8. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М.: Мир, 1986.
9. Краус Д. Д. Радиоастрономия. — М.: Сов. радио, 1973.
10. Огути Т. // ТИИЭР. 1983. Т. 71. № 9. С. 6.
11. A w a k a J., O g u c h i T. // Radio Sci. 1982. V. 17. № 1. P. 269.
12. M a g g i o r i D. // Alta Frequenza. 1981. V. 50. № 5. P. 262.
13. M o r r i s o n J. A., C r o s s M. J. // Bell Syst. Tech. J. 1974. V. 53. № 6. P. 955.
14. T r o u g h t o n J., E v a n s B. G. // Electron. Lett. 1976. V. 12. № 3. P. 68.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию
8 августа 1988 г.

THE EFFECT OF NONSPHERICITY OF HYDROMETEOR PARTICLES ON THE SCINTILLATIONS IN THE MILLIMETER WAVE RANGE

A. S. Zakharov, V. A. Timofeev

The millimeter radiowave fluctuations arising from the propagation of radiation through a layer of the nonspherical scatterers of hydrometeors are considered on the basis of the first order approximation of the multiple scattering theory. It is shown, that the disagreement between the experimental results obtained during the investigations in this range can be qualitatively explained by taking into account the nonspherical form and space orientation of rain drops.

УДК 539.1

МЕТОД ОПИСАНИЯ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ДВУХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ

А. В. Буренин, М. Ю. Рябикин

Развит предложенный в [2] подход к расчету колебательно-вращательного спектра двухатомной молекулы, позволяющий учесть влияние поведения потенциала взаимодействия ядер при больших отклонениях от равновесия. В нулевом приближении взаимодействие ядер описывается с помощью потенциала Кратцера $U(r) = A/r^2 - B/r$, а возмущение представлено в виде $V(r) = \sum_n D_n/r^n$. Излагается процедура алгебраизации построения

ряда теории возмущений с помощью развитой ранее авторами техники [3, 4]. Полученный ряд для энергии колебательно-вращательного движения преобразуется в очень простой быстросходящийся ряд, каждый член которого обладает качественно правильным асимптотическим поведением при больших значениях квантовых чисел. Спектроскопические параметры этого ряда могут быть интерпретированы через параметры A, B, D_n , характеризующие потенциал взаимодействия ядер во всем интервале межъядерных расстояний.

Введение. Наиболее распространенный подход к расчету колебательно-вращательного молекулярного спектра в приближении Борна—Оппенгеймера связан с построением ряда теории возмущений (ТВ), основанной на предположении о малости взаимодействия между колебательным и вращательным молекулярными движениями, для исходного описания которых обычно используются модели гармонического осциллятора и жесткого волчка. При этом оператор Гамильтона представляется в виде конечного отрезка ряда Тейлора по динамическим переменным. В частном случае двухатомной молекулы такое рассмотрение позволяет написать следующее выражение для энергии колебательно-вращательного движения:

$$E(v, J) = \sum_{m, n} Y_{mn} (v+1/2)^m [J(J+1)]^n, \quad (1)$$

которое было получено Данхэмом [1] (v и J — колебательное и вращательное квантовые числа). Интерпретация спектроскопических параметров Y_{mn} проводится в терминах производных от силового поля по колебательной координате в точке равновесия. Основной недостаток такого подхода связан с очень далеким от реальности поведением выбранного нулевого приближения при больших отклонениях от равновесной конфигурации молекулы. В конечном итоге это приводит к плохой сходимости построенного ряда ТВ для высоковозбужденных состояний и к очень громоздким выражениям для спектроскопических параметров, необходимых для описания современных экспериментальных данных.

В связи с этим в работе [2] (дальнейшее развитие в работах [3, 4]) было предложено взаимодействие ядер в нулевом приближении описывать с помощью потенциала Кратцера, который 1) качественно правильно передает асимптотическое поведение реального потенциала взаимодействия ядер; 2) дает возможность построения ряда ТВ при представлении потенциала возмущения в очень естественном виде — в виде разложения по обратным степеням межъядерного расстояния; 3) позволяет при таком выборе возмущения свести к решению конечного числа

линейных алгебраических уравнений процедуру вычисления поправок к энергии и волновой функции произвольного уровня в любом конечном порядке ТВ. В настоящей работе излагается процедура алгебраизации вычислений в произвольном порядке ТВ с помощью техники, развитой в работе [3]. Предложен эффективный для данной задачи метод суммирования ряда ТВ, позволяющий избежать трудностей, выявленных в работе [4] при практическом использовании этого подхода для обработки данных о частотах колебательно-вращательных переходов двухатомных молекул.

Конечное выражение для энергии колебательно-вращательного движения двухатомной молекулы представлено в виде очень простого по форме быстросходящегося ряда, который в отличие от ряда Данхэма качественно верно передает асимптотическое поведение спектра при больших квантовых числах. Интерпретация спектроскопических параметров этого ряда может быть проведена через параметры потенциала нулевого приближения и возмущения, которые характеризуют потенциал взаимодействия ядер во всем интервале изменения межъядерного расстояния.

1. Построение ряда теории возмущений. Следуя работе [2], взаимодействие ядер в нулевом приближении будем описывать с помощью потенциала Кратцера

$$U(r) = A/r^2 - B/r, \quad (2)$$

а возмущение представим в виде разложения

$$V(r) = \sum_n D_n/r^n. \quad (3)$$

При этом радиальное уравнение Шредингера имеет вид

$$R'' + \frac{2}{x} R' + \left[e - \frac{s(s+1)}{x^2} + \frac{2}{x} - \sum_n \frac{d_n}{x^n} \right] R = 0, \quad (4)$$

где R — радиальная волновая функция, $x = r/r_0$, $r_0 = \hbar^2/mB$, m — приведенная масса молекулы, $e = 2mr_0^2 E/\hbar^2$ — безразмерная энергия,

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{1}{4} + J(J+1)}, \quad d_n = \frac{2mD_n}{\hbar^2 r_0^{n-2}}$$

— безразмерные параметры возмущения.

Точное решение невозмущенной задачи хорошо известно [5]:

$$R_0 = Cx^s F\left(-v, 2s+2, \frac{2x}{s+v+1}\right) \exp\left(-\frac{x}{s+v+1}\right), \quad e_0 = -\frac{1}{(s+v+1)^2}. \quad (5)$$

Здесь $F(-v, 2s+2, 2x/(s+v+1)) = \sum_{i=0}^v \alpha_i x^i$ — вырожденная гипергеометрическая функция, где

$$\alpha_i = \frac{(-v)_i}{(2s+2)_i i!} \left(\frac{2}{s+v+1}\right)^i, \quad (a)_i = a(a+1) \dots (a+i-1).$$

Нахождение поправок к (5) с помощью обычной теории возмущений Рэлея—Шредингера связано с большими техническими трудностями из-за необходимости знания всей матрицы оператора возмущения в базисе нулевого приближения и вычисления бесконечных сумм во всех порядках ТВ начиная со второго. Поэтому в работе [2] для построения ряда ТВ был использован развитый в последнее время метод «нелинейаризации» (см. обзор [6]), в рамках которого поправка любого порядка к ра-

диальной функции $w(x) = -\frac{d}{dx} \ln xR(x)$ и энергии e заданного уровня

выражаются в виде квадратур, зависящих от волновой функции нулевого приближения только этого уровня.

Основные технические трудности при нахождении поправок во всех порядках ТВ, начиная со второго, связаны с вычислением интегралов, которые в случае возбужденных колебательных состояний содержат особенности из-за трансформации нулей волновой функции в полюсы логарифмической производной. В работе [2] было показано, что для рассматриваемой нами задачи проблему построения ряда ТВ можно свести к чисто алгебраической. Простой анализ исходных уравнений позволяет сразу записать общий вид поправки к волновой функции с точностью до неизвестных коэффициентов. Однако предложенная в [2] схема вычисления требует для своей реализации знания нулей невозмущенной волновой функции, для которых в данном случае отсутствуют аналитические выражения. Ясно, что это существенно усложняет процедуру нахождения поправок ТВ для возбужденных колебательных состояний. Данная проблема была решена с помощью модификации метода «нелинеаризации», предложенной в работе [7]. Как было показано нами в работе [3], использование этой модификации также позволяет провести алгебраизацию вычислений в рассматриваемой здесь задаче, но теперь для этого требуется знание коэффициентов предэкспоненциального полинома в невозмущенной волновой функции (5). Для этих коэффициентов мы имеем простые аналитические выражения. В [3] были получены строгие выражения для первой и второй поправки к энергии и волновой функции нулевого приближения для произвольного колебательно-вращательного состояния.

Мы изложим здесь процедуру алгебраизации вычислений в произвольном порядке ТВ. Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$R(x) = Cx^s f(x) \exp(-\varphi(x)), \quad (6)$$

где $f(x)$ — полином степени v , а функция $\varphi(x)$ не имеет особенностей при конечных x . Подставляя (6) в (4) и вводя функцию $g(x) = \varphi'(x)$, получаем следующее нелинейное по g уравнение:

$$f'' + 2\left(\frac{s+1}{x} - g\right)f' + \left[-g' + g^2 - \frac{2(s+1)}{x}g + e + \frac{2}{x} - V(x)\right]f = 0. \quad (7)$$

Вводя разложения по параметру возмущения

$$f = \sum_m f_m, \quad g = \sum_m g_m, \quad e = \sum_m e_m,$$

приходим к цепочке линейных неоднородных уравнений

$$f_m'' + 2\left(\frac{s+1}{x} - \frac{1}{s+v+1}\right)f_m' + \frac{2v}{(s+v+1)x}f_m = \\ = 2g_m f_0' + \left[g_m' + 2\left(\frac{s+1}{x} - \frac{1}{s+v+1}\right)g_m - e_m + \tilde{V}_m\right]f_0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{V}_m = - \sum_{i=1}^{m-1} g_i g_{m-i} + \frac{1}{f_0} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \left[2g_i f_{m-i}' + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(g_i' - \sum_{k=0}^i g_k g_{i-k} + \frac{2(s+1)}{x} g_i - e_i \right) f_{m-i} \right] + V f_{m-1} \right\},$$

Покажем, что в любом порядке m ТВ поправку $e_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}$, пропорциональную $d_{n_1} d_{n_2} \dots d_{n_m}$, можно найти чисто алгебраическим способом*. Будем исходить из требования, что поправка $f_m^{(n_1, \dots, n_m)}$ должна быть полиномом степени v :

$$f_m^{(n_1, \dots, n_m)} = \sum_{i=0}^v \alpha_i^{(n_1, \dots, n_m)} x^i. \quad (9)$$

Это требование выполнимо, если $g_m^{(n_1, \dots, n_m)}$ представляет собой следующую сумму по обратным степеням x :

$$g_m^{(n_1, \dots, n_m)} = \sum_{k=1}^{n_1 + \dots + n_m} \frac{a_k^{(n_1, \dots, n_m)}}{x^{n_1 + \dots + n_m - k}}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (8), получаем следующую цепочку алгебраических уравнений для $a_k^{(n_1, \dots, n_m)}$ и $e_m^{(n_1, \dots, n_m)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{l-1} \left[(2s+2-n_1 - \dots - n_m + l + j) \alpha_j - \frac{2\alpha_{j-1}}{s+v+1} \right] a_{l-j}^{(n_1, \dots, n_m)} &= \\ &= C_l^{(n_1, \dots, n_m)} \quad (1 \leq l \leq n_1 + \dots + n_m - 1), \\ 2(s+v+1) a_{n_1 + \dots + n_m}^{(n_1, \dots, n_m)} - \frac{2}{s+v+1} a_{n_1 + \dots + n_m - 1}^{(n_1, \dots, n_m)} &= \\ = \sum_{i=1}^{m-1} \left(a_{n_1 + \dots + n_i - 1}^{(n_1, \dots, n_i)} a_{n_{i+1} + \dots + n_m}^{(n_{i+1}, \dots, n_m)} + a_{n_1 + \dots + n_i}^{(n_1, \dots, n_i)} a_{n_{i+1} + \dots + n_m - 1}^{(n_{i+1}, \dots, n_m)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$l_m^{(n_1, \dots, n_m)} + \frac{2}{s+v+1} a_{n_1 + \dots + n_m}^{(n_1, \dots, n_m)} = - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n_1 + \dots + n_i}^{(n_1, \dots, n_i)} a_{n_{i+1} + \dots + n_m}^{(n_{i+1}, \dots, n_m)},$$

где

$$\begin{aligned} C_l^{(n_1, \dots, n_m)} &= \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j \sum_p a_p^{(n_1, \dots, n_i)} a_{l-j-1-p}^{(n_{i+1}, \dots, n_m)} - \right. \\ &- \sum_{j=0}^{l-n_{i+1} - \dots - n_m - 1} \left[(2s+2-n_1 - \dots - n_m + l + j) \alpha_j^{(n_{i+1}, \dots, n_m)} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\alpha_{j-1}^{(n_{i+1}, \dots, n_m)}}{s+v+1} \right] a_{l-n_{i+1} - \dots - n_m - j} \right\} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{i'=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{l-n_{i+1} - \dots - n_m - 1} \alpha_j^{(n_{i+1}, \dots, n_m)} \sum_p a_p^{(n_1, \dots, n_{i'})} a_{l-j-1-n_{i+1} - \dots - n_m - p} - \\ &- d_{n_1} a_{l-n_2 - \dots - n_m - 1}^{(n_2, \dots, n_m)}. \end{aligned}$$

* Для нахождения полной поправки m -го порядка необходимо окончательное выражение для $e^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}$ отсуммировать по возможным значениям индексов n_1, n_2, \dots, n_m .

Здесь и ниже пределы суммирования по индексу p определяются из условия, чтобы значение нижнего индекса у коэффициента $a_k^{n_i, n_{i+1}, \dots, n_j}$ лежало в пределах $1 \leq k \leq n_i + n_{i+1} + \dots + n_j$.

Еще одна цепочка уравнений получается для поправок к коэффициентам предэкспоненциального полинома в волновой функции:

$$(i+1)(2s+2+i)\alpha_{i+1}^{(n_1, \dots, n_m)} + \frac{2(v-i)}{s+v+1} \alpha_i^{(n_1, \dots, n_m)} = h_i^{(n_1, \dots, n_m)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} h_i^{(n_1, \dots, n_m)} = & 2(s+v+1)\alpha_i a_{n_1+\dots+n_m}^{(n_1, \dots, n_m)} + \\ & + \sum_{k=1}^{n_1+\dots+n_m-1} \left[(2s+2+2i+k)\alpha_{i+k} - \frac{2}{s+v+1} \alpha_{i+k-1} \right] \times \\ & \times a_{n_1+\dots+n_m-k}^{(n_1, \dots, n_m)} + \sum_{i'=1}^{m-1} \left\{ - \sum_{k=1}^{n_1+\dots+n_m-2} \sum_p a_p^{n_1, \dots, n_{i'}} \times \right. \\ & \times a_{n_1+\dots+n_m-k-p}^{(n_{i'+1}, \dots, n_m)} \alpha_{i+k-1} + 2(s+1+i)\alpha_i^{(n_{i'+1}, \dots, n_m)} \times \\ & \times a_{n_1+\dots+n_{i'}}^{(n_1, \dots, n_{i'})} + \sum_{k=1}^{n_1+\dots+n_{i'}-1} \left[(2s+2+2i+k)\alpha_{i+k}^{(n_{i'+1}, \dots, n_m)} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{s+v+1} \alpha_{i+k-1}^{(n_{i'+1}, \dots, n_m)} \right] a_{n_1+\dots+n_{i'}-k}^{(n_1, \dots, n_{i'})} - \\ & \left. - \sum_{i''=1}^{i'-1} \sum_{k=1}^{n_1+\dots+n_{i''}-2} \sum_p a_p^{(n_1, \dots, n_{i''})} a_{n_1+\dots+n_{i''}-k-p}^{(n_{i'+1}, \dots, n_{i'})} \alpha_{i+k-1}^{(n_{i'+1}, \dots, n_m)} \right\} + \\ & + d_{n_1} \alpha_{i+n_1-1}^{(n_1, \dots, n_m)}. \end{aligned}$$

Правые части уравнений (11) и (12) являются функциями от коэффициентов $a_k^{(n_1, \dots, n_i)}$ и $\alpha_k^{(n_1, \dots, n_i)}$, вычисленных в предыдущих порядках ТВ. Подчеркнем, что для вычисления m -й поправки к энергии необходимо знать m -ю поправку к коэффициентам a_k и только $(m-1)$ -ю поправку к коэффициентам α_k .

Система уравнений (12) содержит на один неизвестный коэффициент больше, чем число уравнений. Мы можем выбрать нормировку таким образом, чтобы коэффициент $\alpha_v^{(n_1, \dots, n_m)}$ обращался в нуль. Тогда решение имеет следующий простой вид:

$$\alpha_i^{(n_1, \dots, n_m)} = \frac{(s+v+1)\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^{v-1} \frac{h_j^{(n_1, \dots, n_m)}}{(v-j)\alpha_j}. \quad (13)$$

Решение системы (11) также может быть получено в аналитическом виде, так как матрица коэффициентов этой системы является треугольной. Однако при произвольных значениях индексов « n » и « m » это решение является очень громоздким, и поэтому с системой (11) удобнее работать численно. При малых значениях этих индексов поправки к энергии довольно легко записываются в явном виде, например,

$$e_1^{(3)} = \frac{d_3}{(2s)_3} \left(\frac{2}{s+v+1} \right)^3, \quad e_1^{(4)} = \frac{2d_4}{(2s-1)_5} \left(\frac{2}{s+v+1} \right)^3 \left[3 - \frac{s(s+1)}{(s+v+1)^2} \right],$$

$$e_1^{(5)} = \frac{8d_3}{(2s-2)_7} \left(\frac{2}{s+v+1} \right)^3 \left[5 - \frac{3s^2+3s-1}{(s+v+1)^2} \right], \quad (14)$$

$$e_2^{(3,3)} = - \frac{4d_3^2}{(s+v+1)^3} \left[\frac{16(60s^4+120s^3+55s^2-5s-3)}{(2s-1)_5(2s)_3(2s)_3} + \frac{12}{(2s)_3(2s)_3(s+v+1)} - \frac{3}{(2s-1)_5(s+v+1)^2} \right].$$

2. Проблема суммирования ряда ТВ. Перейдем к обсуждению вопросов, касающихся сходимости и способов суммирования построенного нами ряда ТВ. Исходя из «аргумента Дайсона» [8] (см. также [6]) представляется естественным для построения сходящегося ряда ТВ при описании спектра частицы в потенциале $U(x)+V(x)$ так выбирать потенциал нулевого приближения $U(x)$, чтобы выполнялось условие $V(x)/U(x) \rightarrow 0$ в асимптотических точках и точках сингулярностей. Используемое в данной работе представление потенциала (2), (3) удовлетворяет этому условию при $x \rightarrow \infty$ (более того, для молекул с ионной связью эта асимптотика моделируется строго). Однако при $x \rightarrow 0$ это условие не выполняется, вследствие чего построенный ряд ТВ оказывается асимптотическим. Заметим, что ряд становится сходящимся при любом отличном от нуля сдвиге r_c потенциала нулевого приближения:

$$U(r) = \frac{A}{(r-r_c)^2} - \frac{B}{r-r_c}. \quad (15)$$

В работе [4] отмечалось, что при $nm < v_e/2B_e$ (n — номер члена в разложении (3), m — номер порядка ТВ, v_e, B_e — гармоническая частота и вращательная постоянная, $v_e/2B_e \sim 10^2 \div 10^3$ в зависимости от молекулы) члены асимптотического ряда дают главный вклад в члены сходящегося ряда при малом значении r_c . Тем не менее остается проблема медленной сходимости. И связана она с тем, что в реальных молекулах сильное отталкивание ядер происходит на расстояниях порядка атомных размеров. Потенциал Кратцера этот эффект не учитывает, и мы вынуждены его моделировать с помощью возмущения. В результате значения безразмерных параметров возмущения $\delta_n = \frac{D_n}{A} \left(\frac{B}{2A} \right)^{n-2}$ оказываются довольно большими и требуется учет значительного числа членов в ряду ТВ*. В работе [4] было предложено использовать для вычисления суммы построенного ряда ТВ технику частичного суммирования.

Конкретно сумма представлялась в классе дробно-рациональных функций [10] (см. также [11]). В частности, для одного параметра возмущения δ_n имеем

$$e = \Phi[k/m, \delta_n] = e_0 \frac{1 + \eta \sum_{i=1}^k b_i \delta_n^i}{1 + \sum_{i=1}^m b_i \delta_n^i}. \quad (16)$$

Коэффициенты b_i определяются исходя из требования совпадения первых m членов разложения аппроксиманты $\Phi[k/m, \delta_n]$ по параметру δ_n

* Решение этой проблемы, в принципе, может быть достигнуто путем использования в нулевом приближении потенциала (15) с r_c порядка размера электронной оболочки атома. Однако для этого потенциала известно лишь приближенное решение [9] уравнения Шредингера (это решение было использовано в [9] для грубого описания спектров гетерополярных молекул вплоть до границы диссоциации), что значительно усложняет построение ряда ТВ.

с первыми m членами исходного ряда Тейлора. Форма (16), построенная с учетом первых трех порядков ТВ, была применена в [4] для обработки данных о частотах колебательно-вращательных переходов молекулы H^{127}I в основном электронном состоянии. Из результатов этой работы видно, что учет возмущения D_n/r^n ($n \sim 8$) при частичном суммировании ряда ТВ позволяет хорошо смоделировать область отталкивания на расстояниях порядка размеров электронной оболочки атома. Заметим еще, что точность описания экспериментальных данных при этом выше и по сравнению с моделью Кратцера со сдвигом, и по сравнению с моделью Данхэма с тремя параметрами (оптимальный набор Y_{10}, Y_{01}, Y_{20}). Однако при трех модельных параметрах точность описания еще очень далека от точности экспериментальных данных. К сожалению, увеличение числа модельных параметров в потенциале возмущения сталкивается с рядом трудностей при проведении частичного суммирования. В связи с этим важное значение приобретают поиски альтернативных подходов к проблеме суммирования рассматриваемого ряда ТВ.

3. Перегруппировка ряда ТВ. Описанная в первой части процедура построения ряда ТВ очень проста, так как все вычисления сводятся к решению конечных систем алгебраических уравнений с треугольными матрицами коэффициентов. Однако объем вычислений с ростом порядка ТВ и степени в разложении потенциала возмущения резко нарастает, а сами выражения для поправок становятся очень громоздкими. Оказывается, вид ряда ТВ можно существенно упростить, если обратить внимание на следующее обстоятельство [2]:

$$s > s_{\min} = s(J=0) = s_0 \approx v_e/2B_e \gg 1.$$

Это позволяет в цепочке уравнений для поправок провести разложение по малому параметру $1/s^*$. В результате

$$E = \frac{K_{20}}{(s+v+1)^2} + \sum_{i,j=3}^{\infty} \frac{K_{ij}}{(s+v+1)^i s^j}. \quad (17)$$

Входящие в этот ряд параметры K_{ij} не зависят от квантовых чисел и могут быть интерпретированы через параметры A, B, D_n модельного потенциала (естественно, что интерпретация параметров K_{ij} может быть получена и непосредственно из разложения решений типа (14) в ряд по $1/s$). Хотя ряд (17) и имеет очень простой вид, но его использование фактически затрудняется теми же причинами, что и для исходного ряда ТВ: 1) наличие плохой сходимости; 2) отсутствие четкой линейной независимости отдельных членов ряда как функций квантовых чисел, что приводит к некорректности обратной задачи. Тем не менее простая структура ряда позволяет перегруппировать его таким образом, что данные недостатки устраняются. В основу перегруппировки положено разделение вкладов, соответствующих основному состоянию и возбуждению над ним. Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \frac{1}{s} \frac{(s-s_0)}{s_0}.$$

Тогда $\frac{1}{s^i} = \sum_{k=0}^i A_{ik} \frac{1}{s^{i-k}} \left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^{i-k}$, где $A_{ik} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{(-1)^{i-k}}{s_0^k}$.

* Для величины s_0 можно также получить следующую более грубую оценку. Равновесное межъядерное расстояние в модели Кратцера равно $r_e = 2A/B$. Учитывая, что $r_e \sim r_B = \hbar^2/m_e e^2$ (m_e, e — масса и заряд электрона) и $B \sim e^2$, получаем $s_0 \approx \sqrt{m/m_e} \gg 1$.

Аналогично,

$$\frac{1}{(s+v+1)^i} = \sum_{k=0}^i A_{ik} \frac{1}{(s+v+1)^{i-k}} \left(\frac{s-s_0+v+1}{s_0} \right)^{i-k}.$$

В результате получаем следующее выражение для энергии колебательно-вращательного движения:

$$E(v, J) = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_{ij}}{(s+v+1)^i s^j} \left(\frac{s-s_0+v+1}{s_0} \right)^{i-2} \left(\frac{s-s_0}{s_0} \right)^j, \quad (18)$$

где $L_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} K_{i+k, j+l} A_{i-2+k, k} A_{j+l, l}$ — перенормированные спектроскопические параметры. Относительно выражения (18) необходимо сделать следующие замечания: 1) из-за наличия единицы в выражении $s-s_0+v+1$ члены с $i > 2, j = 0$ содержат малые поправки по параметру $1/s$ в основное состояние. Хотя этот факт и не существен, его легко можно устранить путем перехода от величины s к величине $s' = s+1$; 2) при выводе формулы (18) ряд (17) представлялся в виде $\frac{K_{20}}{(s \cdot v+1)^2} F(v, s)$, где первый сомножитель есть энергия нулевого приближения, и перегруппировка проводилась только для величины F . Если энергию нулевого приближения за скобку не выносить, то вместо (18) будем иметь

$$E(v, J) = \sum_{i, j=0}^{\infty} \frac{L_{ij}^*}{(s+v+1)^i s^j} \left(\frac{s-s_0+v+1}{s_0} \right)^i \left(\frac{s-s_0}{s_0} \right)^j, \quad (19)$$

где $L_{ij}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} K_{i+k, j+l} A_{i+k, k} A_{j+l, l}$.

В заключение этой части заметим, что любой конечный отрезок построенного нами ряда (18) (или (19)) переходит в конечный отрезок ряда Данхэма (с точностью до замены $v+1$ на $v+1/2$) в предельном случае $s_0 \rightarrow \infty^*$. В частности, для параметров ряда (18) в этом предельном случае получаем следующую связь с параметрами ряда Данхэма:

$$\frac{L_{ij}}{2^j s_0^{2i+3j-2}} \rightarrow Y_{i-2, j}. \quad (20)$$

4. Изотопическая зависимость спектроскопических параметров. Параметры L_{ij} не являются изотопически инвариантными. Рассмотрим их зависимость от приведенной массы молекулы в главном порядке по параметру $1/s_0$ (или по параметру $\mu = \sqrt{m_e/m}$). Из уравнений (11)—(13) в главном порядке по параметру $1/s_0$ получаем

$$e_0 \approx -\frac{1}{s_0^2}, \quad e_1^{(n)} \approx \frac{d_n}{s_0^{2n}}, \quad e_2^{(n_1, n_2)} \approx -\frac{n_1 n_2}{4} \frac{d_{n_1} d_{n_2}}{s_0^{2(n_1+n_2-1)}},$$

$$e_3^{(n_1, n_2, n_3)} \approx \frac{n_1 n_2 n_3 (n_2 + n_3 - 2)}{16} \frac{d_{n_1} d_{n_2} d_{n_3}}{s_0^{2(n_1+n_2+n_3-2)}} \text{ и т. д.}$$

В произвольном порядке ТВ имеем

$$e_m^{(n_1, \dots, n_m)} \approx C^{(n_1, \dots, n_m)} \frac{d_{n_1} \dots d_{n_m}}{s_0^{2(n_1+\dots+n_m+1-m)}}. \quad (21)$$

* Условие $s_0 \rightarrow \infty$ можно интерпретировать как $m_e/m \rightarrow 0$.

Соответственно для коэффициентов K_{ij} при $i+j=2p$ имеем

$$K_{ij} \approx \mu^{-2} \sum_{n_1+\dots+n_m+1-m=p} F_{ij}^{(n_1, \dots, n_m)} d_{n_1} \dots d_{n_m}, \quad (22)$$

где $F_{ij}^{(n_1, \dots, n_m)}$ — изотопически инвариантные параметры. Учитывая, что $d_n \sim \mu^{-2(n-1)}$, получаем $K_{ij} \sim \mu^{-2p} = \mu^{-(i+j)}$. Коэффициенты K_{ij} при $i+j=2p+1$ определяются следующим порядком в разложении по $1/s_0$ и пропорциональны $\mu^{-(i+j)+1}$. Следовательно, основной вклад по μ в параметры L_{ij} определяется параметрами $K_{i+k, j+l}$ с четной суммой индексов. В результате получаем в главном порядке по μ

$$L_{ij} = \mu^{-(i+j)} W_{ij}, \quad (23)$$

где W_{ij} — изотопически инвариантные параметры. Эта зависимость согласуется с предельным переходом (20), если учесть изотопическую зависимость параметров ряда Данхэма в главном порядке по μ : $Y_{mn} = \mu^{m+2n} U_{mn}$. Естественно, при получении поправок к выражению (23) необходимо учитывать нарушение приближения Борна—Оппенгеймера.

Использование ряда (19) при обработке колебательно-вращательных спектров галогеноводородов продемонстрировало более быструю его сходимость по сравнению с рядом Данхэма даже в области уверенной работы последнего (результаты будут опубликованы отдельно). Используемый в работе подход может быть распространен на случай простых многоатомных молекул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dunham J. L. // Phys. Rev. 1932. V. 41. P. 721.
2. Буренин А. В. // Опт. и спектр. 1983. Т. 55. С. 638.
3. Буренин А. В., Дягилев С. А., Рябикин М. Ю. Микроволновая спектроскопия и ее применения. — М.: Совет по спектроскопии АН СССР, 1985. С. 185.
4. Буренин А. В., Рябикин М. Ю. Спектроскопия высокого разрешения малых молекул. — М.: Совет по спектроскопии АН СССР, 1988. С. 234.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974. С. 157.
6. Турбинер А. В. // УФН. 1984. Т. 144. С. 35.
7. Турбинер А. В. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 1719.
8. Dyson F. // Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 631.
9. Tugov I. I. // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 612.
10. Буренин А. В. Спектроскопия высокого разрешения малых молекул. — М.: Совет по спектроскопии АН СССР, 1988. С. 131.
11. Burenin A. V. // J. Mol. Spectrosc. 1986. V. 115. P. 163.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
26 июля 1988 г.

THE METHOD FOR TREATMENT OF HIGHLY EXCITED VIBRATION-ROTATIONAL STATES OF DIATOMIC MOLECULES

A. V. Burenin, M. Yu. Ryabikin

An approach for calculating the vibration-rotational spectrum of a diatomic molecule suggested by one of the authors [2] is developed taking into account the influence of the behavior of the internuclear interaction potential at large deviations from equilibrium. The internuclear interaction is treated in the zero-order approximation by a Kratzer potential $U(r) = A/r^2 - B/r$ while perturbation is given as $V(r) = \sum D_n/r^n$.

The procedure of algebraic construction of a perturbation series employing the method developed by the authors [3, 4] is presented. The series obtained for the energy of vibration-rotational motion is transformed in a simple rapidly converging series, each term of which has qualitatively correct asymptotic behavior at large quantum numbers. The spectroscopic parameters of this series can be treated through the parameters A , B , D_n characterizing the nuclear interaction potential throughout the interval of internuclear distances.

УДК 539.143.43

СИГНАЛЫ ПОГЛОЩЕНИЯ СВЧ ПОЛЯ В УСЛОВИЯХ НАСЫЩЕНИЯ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ УРОВНЕЙ ($S=3/2$) ПАРАМАГНЕТИКОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Н. П. Фокина, Л. Т. Челидзе

Получены теоретические выражения для сигналов поглощения $\chi''(\omega, \Omega)$ детектирующего СВЧ поля частоты ω при насыщении пары уровней неэквидистантного спектра парамагнетика ($S=3/2$) СВЧ полем частоты Ω при низких температурах в условиях, когда диполь-дипольный резервуар спинов не находится в равновесии с решеткой. При сильном низкотемпературном сдвиге частоты насыщаемого перехода описано ожидаемое поведение $\chi''(\omega, \Omega)$, в частности скачок в положении сигнала поглощения в точке бифуркации $\Omega=\Omega_6$, а также возможные при определенных условиях скачки из метастабильного состояния равновесия в устойчивое при $\Omega>\Omega_6$.

В последние годы возник интерес к вопросу о термодинамическом описании поведения спиновой системы под действием переменного поля или спин-решеточной релаксации при низких температурах [1-4]. Проверить истинность той или иной теории на эксперименте оказалось затруднительным, так как для выполнения условия низких температур $T_L < \omega_z$ (где T_L — температура решетки, ω_z — зеемановская частота спинов, $\hbar=1$, $k_B=1$) даже в сильных полях требуется $T_L \sim 1$ К. Однако существуют образцы с большим начальным расщеплением уровней кристаллическим полем, где высокотемпературное приближение (ВТП) становится несправедливым уже при гелиевых температурах. С другой стороны, один из подходов к термодинамическому описанию низкотемпературной спиновой динамики, а именно переопределение подсистем, введенное в [5] для $S=1/2$, имело своим следствием зависимость расстройки резонансной частоты спинов относительно Ω через низкотемпературный сдвиг частоты (НТСЧ) от мгновенного значения их зеемановской температуры. Это привело к нелинейным уравнениям, которые аналогично [5-8] предсказывают спиновую бистабильность. В силу вышесказанного представляет интерес рассмотрение насыщения неэквидистантных уровней спиновой системы с большим начальным расщеплением $D > T_L$ и описание ожидаемых нелинейных эффектов, связанных с НТСЧ, как наиболее ярких качественных явлений, позволяющих судить об адекватности той или иной теории насыщения магнитного резонанса при низких температурах*.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ НТСЧ

Для примера неэквидистантного спектра магнитного резонанса рассмотрим спин-систему ($S=3/2$) с квадрупольным расщеплением уровней (в данной работе мы имеем в виду ЭПР в регулярном парамагнитном кристалле, однако все результаты справедливы и для ядерного квадрупольного резонанса), находящуюся в постоянном магнитном поле H_0 , на которую действует СВЧ поле. При аксиальной симметрии задачи гамильтониан системы имеет вид

* Отметим, что в ВТП уравнения, описывающие насыщение пары уровней в неэквидистантном спектре с учетом сдвига от равновесия диполь-дипольного резервуара, были выведены в [9].

$$H = \dot{H}_Q + \dot{H}_z + \dot{H}'_d + \dot{H}',$$

$$H_Q = D \sum_i \left\{ (S_z^i)^2 - \frac{S(S+1)}{3} \right\} = D(\sigma_{az} - \sigma_{bz}),$$

$$H_z = \omega_z S_z = \frac{\omega_z}{2} (\sigma_{az} + 2\varepsilon_a + \sigma_{bz} - 2\varepsilon_b),$$

$$H'_d = \sum_{\substack{j, l \\ (j \neq l)}} \left\{ \frac{1}{2} A_{ij} S_z^i S_z^j + B_{ij} \left[\frac{3}{4} (\sigma_{a+}^i \sigma_{a-}^j + \sigma_{b+}^i \sigma_{b-}^j) + \sigma_{a-}^i \sigma_{l+}^j \right] \right\}, \quad (1)$$

$$A_{ij} = -2B_{ij} = \gamma^2 (1 - 3 \cos^2 \theta_{ij}) r_{ij}^{-3},$$

$$H' = \frac{1}{2} (h^+ S^- + h^- S^+) = H'_{3/2 \ 1/2} + H'_{-3/2 \ -1/2} + H'_{1/2 \ -1/2},$$

$$H'_{\pm 3/2 \ \pm 1/2} = \frac{\sqrt{3}}{4} (h^+ \sigma_{b-} + h^- \sigma_{b+}),$$

$$H'_{1/2 \ -1/2} = \frac{1}{2} (h^+ \sigma_{a-} + h^- \sigma_{l+}),$$

где $\omega_z = \gamma H_0$, D — постоянная квадрупольного расщепления, h^\pm — операторы СВЧ поля, H'_d — секулярная по отношению к $H_Q + H_z$ часть диполь-дипольного (dd) взаимодействия спинов; для ее нахождения использован результат [10] (там же см. расшифровку операторов σ и ε). При выборе квазитермодинамических макроскопических параметров, описывающих поведение спин-системы, будем исходить из следующих соображений. Секулярное dd взаимодействие H'_d содержит регулярную часть, обуславливающую однородный сдвиг прецессии спинов (эта часть есть $(H'_d)_{k=0}$ * — соответствующая значению $k=0$ компонента пространственного фурье-представления H'_d), и флуктуационную часть, определяющую динамику установления квазиравновесия. При высоких температурах H'_d фактически представляет собой флуктуационную часть, которой согласно теории Провоторова приписывается отдельная температура — температура диполь-дипольного резервуара (ДДР). При низких температурах роль регулярной части возрастает, поэтому, сохраняя общие идеи теории Провоторова, естественно представляется отделить регулярную часть от H'_d и затем приписать термодинамический параметр чисто флуктуационной части dd взаимодействия $H'_d = H'_d - (H'_d)_{k=0}$. В случае спина $1/2$ было предложено [3] приписать зеemanовскую температуру подсистеме зеemanовских уровней H'_z , сдвинутых регулярной частью H'_d . H'_d отвечает за установление равновесия в переопределенной зеemanовской подсистеме H'_z . Как было отмечено в [3], такое переопределение обеспечивает медленную (по сравнению с малым масштабом времени T_2) эволюцию макроскопических параметров. В рассматриваемом в данной работе случае неэквидистантного спектра мы также выделим флуктуационную часть, которая за счет флип-флопов, происходящих с сохранением энергии, устанавливает равновесие в подсистемах, связанных с тремя магниторезонансными переходами. Этой части припишем температуру,

* $(H'_d)_{k=0}$ имеет тот же вид, что и H'_d из (1), но с заменой $A_{ij} \rightarrow N^{-2} \sum_{ij} A_{ij} = 2N^{-1} \bar{a}$, $B_{ij} \rightarrow -(2N)^{-1} \bar{a}$, где $\bar{a} = (2N)^{-1} \sum_{ij} A_{ij}$ — среднее дипольное поле [11].

она играет роль ДДР. Добавление же регулярной части $(H'_d)_{k=0}$ к $H_Q + H_z$ должно привести к сдвигу всех трех частот переходов (см. ниже). Введем аналогично [12] заселенность N_m m -го уровня, определяемую как $\sum_j \langle m | p_j^m | m \rangle$, где p_j^m — проекционный оператор j -го спина на состояние m ($m = \pm 3/2, \pm 1/2$). Рассматривая H' как возмущение, можно вывести следующую систему уравнений для эволюции под действием СВЧ поля разностей заселенностей уровней $\Delta N_{mn} = N_m - N_n$ и обратной температуры ДДР β_d :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N_{1/2\ 3/2}}{dt} &= - \sum_{r=\pm 1} \{3X_{1/2\ 3/2}(E_{3/2\ 1/2} + r\Omega) + 2X_{1/2\ -1/2}(E_{-1/2\ 1/2} + r\Omega)\}, \\ \frac{d\Delta N_{-1/2\ -3/2}}{dt} &= \sum_{r=\pm 1} \{3X_{-3/2\ -1/2}(E_{-1/2\ -3/2} + r\Omega) + 2X_{1/2\ -1/2}(E_{-1/2\ 1/2} + r\Omega)\}, \\ \frac{d\Delta N_{-1/2\ 1/2}}{dt} &= \sum_{r=\pm 1} \{(3/2)X_{1/2\ 3/2}(E_{3/2\ 1/2} + r\Omega) + \\ &+ (3/2)X_{-3/2\ -1/2}(E_{-1/2\ -3/2} + r\Omega) + 4X_{1/2\ -1/2}(E_{-1/2\ 1/2} + r\Omega)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \langle (H'_d)^2 \rangle \frac{d\beta_d}{dt} &= - \sum_r \{(3/2)(E_{3/2\ 1/2} + r\Omega)X_{1/2\ 3/2}(E_{3/2\ 1/2} + r\Omega) + \\ &+ (3/2)(E_{-1/2\ -3/2} + r\Omega)X_{-3/2\ -1/2}(E_{-1/2\ -3/2} + r\Omega) + \\ &+ 2(E_{-1/2\ 1/2} + r\Omega)X_{1/2\ -1/2}(E_{-1/2\ 1/2} + r\Omega)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_{mn}(E_{nm} + r\Omega) &= (N_m + N_n) 2W_{mn}(E_{nm} + r\Omega) \times \\ &\times \frac{\Delta N_{mn} - (N_m + N_n) \text{th}[(E_{nm} + r\Omega)\beta_d/2]}{N_m + N_n - \Delta N_{mn} \text{th}[(E_{nm} + r\Omega)\beta_d/2]}. \end{aligned}$$

Здесь сумма по r позволяет рассматривать насыщение уровней как с положительным, так и с отрицательным D , $N_m + N_n$ легко можно выразить через ΔN_{mn} :

$$\begin{aligned} N_{3/2} + N_{1/2} &= (1/2)(N - \Delta N_{1/2\ 3/2} + \Delta N_{-1/2\ -3/2} - 2\Delta N_{-1/2\ 1/2}), \\ N_{-3/2} + N_{-1/2} &= (1/2)(N + \Delta N_{1/2\ 3/2} - \Delta N_{-1/2\ -3/2} + 2\Delta N_{-1/2\ 1/2}), \\ N_{1/2} + N_{-1/2} &= (1/2)(N + \Delta N_{1/2\ 3/2} + \Delta N_{-1/2\ -3/2}), \end{aligned}$$

где N — полное число спинов; $E_{nm} = E_n - E_m$ — разности энергий уровней с учетом НТСЧ в единицах частоты*:

$$\begin{aligned} E_{3/2\ 1/2} &= 2D + \omega_z + \left(\langle S_z^k \rangle - \frac{3}{4} \frac{\Delta N_{1/2\ 3/2}}{N} \right) 2\bar{a}, \\ E_{-3/2\ -1/2} &= 2D - \omega_z - \left(\langle S_z^k \rangle + \frac{3}{4} \frac{\Delta N_{-1/2\ -3/2}}{N} \right) 2\bar{a}, \\ E_{1/2\ -1/2} &= \omega_z - \left(\langle S_z^k \rangle - \frac{\Delta N_{-1/2\ 1/2}}{N} \right) 2\bar{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

* НТСЧ (3) аналогичны полученным в [13] для $S=1$ динамическим сдвигам частот квадрупольно расщепленного спектра ЯМР ферромагнетика с тем отличием, что в [13] нет члена $\langle S_z^i \rangle$, так как в сул-накамуровском взаимодействии нет членов $S_z^i S_z^j$.

Не приводя громоздких вычислений, отметим, что E_{nm} имеют вид (3) в конечном итоге благодаря тому, что уравнения движения для спиновых операторов, определяющие спектр, ошущаемый СВЧ полем, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{b+}^{a+}}{dt} &= \frac{1}{i} [\sigma_{b+}^{a+}, (H_Q + H_z + H'_{d, k=0})] = \\ &= i \left\{ (\omega_z \pm 2D) \sigma_{b+}^{a+} + \sum_{i,j} (S_z^i + (3/4) \sigma_{bz}^i) 2\bar{a} \sigma_{b+}^{a+j} \right\}, \\ \frac{d\sigma_{l+}}{dt} &= \frac{1}{i} [\sigma_{l+}, (H_Q + H_z + H'_{d, k=0})] = \\ &= i \left\{ \omega_z \sigma_{l+} - \sum_{ij} (S_z^i + (1/2) (\sigma_{az} - \varepsilon_a + \sigma_{bz} + \varepsilon_b))^i 2\bar{a} \sigma_{e+}^j \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе уравнений (2) соотношения (4) были линеаризованы путем замены диагональных операторов их средним значением аналогично вычислению динамического сдвига частоты ЯМР в магнетиках [14]:

$$\begin{aligned} S_z^i &\rightarrow \langle S_z^i \rangle = (2N)^{-1} (3\Delta N_{-1/2 -3/2} - 3\Delta N_{1/2 3/2} - 4\Delta N_{-1/2 1/2}), \\ \sigma_{az}^i &\rightarrow \langle \sigma_{az}^i \rangle = -N^{-1} \Delta N_{1/2 3/2}, \quad \sigma_{bz}^i \rightarrow \langle \sigma_{bz}^i \rangle = N^{-1} \Delta N_{-1/2 -3/2}, \\ 1/2 (\sigma_{az} - \varepsilon_a + \sigma_{bz} + \varepsilon_b)^i &\rightarrow -N^{-1} \Delta N_{-1/2 1/2}. \end{aligned}$$

Такая линеаризация возможна при НТСЧ, превышающих ширину резонансной линии, когда и имеет смысл предлагаемое рассмотрение низкотемпературной спиновой динамики. Вероятности переходов W_{mn} определяются корреляторами *

$$\left\langle \left\langle \begin{matrix} \sigma_{a+}^{a-}(t) & \sigma_{a-}^{a-} \\ \sigma_{b+}^{b-} & \sigma_{b-}^{b-} \\ \sigma_{l+} & \sigma_{l-} \end{matrix} \right\rangle \right\rangle,$$

где фигурные скобки обозначают симметризованное произведение,

$$\sigma(t) = \exp(iH_d^* t) \sigma \exp(-iH_d^* t). \quad (5)$$

Первые моменты W_{mn} равны нулю. Если же в (5) H_d^* заменить на H'_d , то у W_{mn} появятся первые моменты $(M_1)_{mn}$, равные НТСЧ соответствующих переходов (3). Этот факт послужил причиной того, что в ранних работах [3] добавление $(H'_d)_{k=0}$ к H_z заменялось добавлением однородного сдвига в виде $M_1 S_z^2$. В данной работе такая замена не производится. Однако отметим, что наше рассмотрение проводится в приближении, когда пренебрегается нечетными моментами резонансной линии порядка выше первого. Величина $\langle (H_d^*)^2 \rangle$, фигурирующая в четвертом уравнении (2), равна

$$\begin{aligned} \langle (H_d^*)^2 \rangle &= \left(\sum_{i,j} A_{ij}^2 \right) \left\{ (1/2) [\langle S_z^i \rangle^2 - \langle (S_z^i)^2 \rangle] + \right. \\ &+ \frac{9}{16N^2} (N_{3/2} N_{1/2} + N_{-3/2} N_{-1/2}) + \frac{1}{N^2} N_{1/2} N_{-1/2} \left. \right\} + \\ &+ 4N \bar{\Delta} a^2 \langle S_z^i \rangle^3 [\langle (S_z^i)^2 \rangle - \langle S_z^i \rangle^2], \end{aligned} \quad (6)$$

* При $\omega_z = 0$ форма линии определяется коррелятором $\langle \{ \sigma_{a+}(t) \sigma_{a-} \} + \{ \sigma_{b+}(t) \sigma_{b-} \} \rangle$, который имеет равный нулю НТСЧ, при этом сдвиги в усредненных соотношениях (4) компенсируют друг друга.

где

$$\overline{\Delta a^2} = \overline{a_i^2} - (\overline{a})^2, \quad a_i = (1/2) \sum_j A_{ij}.$$

В ВТП выражение (6) сводится к (40/117) $\sum_{ij} A_{ij}^2$, что совпадает с результатом работы [15] для $S=3/2$.

2. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СИГНАЛА ПОГЛОЩЕНИЯ И СПИНОВАЯ БИСТАБИЛЬНОСТЬ

Перейдем к изучению особенностей поведения сигналов поглощения СВЧ поля рассматриваемой спин-системой, для чего найдем мнимую часть комплексной магнитной восприимчивости χ'' к слабому детектирующему полю с полуамплитудой h_1 и с частотой ω . Вычисляя среднюю энергию Q , поглощаемую спинами от детектирующего поля, и переходя к χ'' по формуле $Q=2\omega h_1^2 \chi''$, получаем:

$$\chi'' = -\frac{1}{2h_1^2} \sum_r r \left\{ \frac{3}{2} X_{1/2 \ 3/2} (E_{3/2 \ 1/2} + r\omega) + \frac{3}{2} X_{-3/2 \ -1/2} (E_{-1/2 \ -3/2} + r\omega) + 2X_{1/2 \ -1/2} (E_{-1/2 \ 1/2} + r\omega) \right\}. \quad (7)$$

Рассмотрим зависимость χ'' от ω и Ω при квазистационарном насыщении одного из переходов (допустим, $3/2 \leftrightarrow 1/2$). Если $D > 0$ и $\Omega \approx E_{3/2 \ 1/2}$, система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N_{1/2 \ 3/2}}{dt} &= -3(N_{1/2} + N_{3/2}) 2W_{1/2 \ 3/2} (E_{3/2 \ 1/2} - \Omega) \times \\ &\times \frac{\Delta N_{1/2 \ 3/2} - (N_{1/2} + N_{3/2}) \text{th}[(E_{3/2 \ 1/2} - \Omega) \beta_d/2]}{(N_{1/2} + N_{3/2}) - \Delta N_{1/2 \ 3/2} \text{th}[(E_{3/2 \ 1/2} - \Omega) \beta_d/2]}, \\ \frac{d\Delta N_{-1/2 \ 1/2}}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{d\Delta N_{1/2 \ 3/2}}{dt}, \quad \frac{d\Delta N_{-1/2 \ -3/2}}{dt} = 0, \\ \langle (H_d^*)^2 \rangle \frac{d\beta_d}{dt} &= -\frac{(E_{3/2 \ 1/2} - \Omega)}{2} \frac{d\Delta N_{1/2 \ 3/2}}{dt}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$E_{3/2 \ 1/2} = 2D + \omega_z + N^{-1} (\Delta N_{-1/2 \ -3/2} - 4\Delta N_{-1/2 \ 1/2} - (9/2)\Delta N_{1/2 \ 3/2}) \overline{a}. \quad (9)$$

Для простоты будем считать $\langle (H_d^*)^2 \rangle$ не зависящим от ΔN_{mn} и введем обозначение $\langle (H_d^*)^2 \rangle = (N/4) \omega_d^2$, однако будем помнить, что согласно (6) ω_d^2 может быть гораздо меньше своего высокотемпературного значения. Из (8) и (9) следует, что

1) сдвинутая резонансная частота перехода $3/2 \leftrightarrow 1/2$, ощущаемая СВЧ полем в процессе квазистационарного насыщения, равна

$$E_{3/2 \ 1/2} = 2D + \omega_z + (\Delta N' - (5/2)\Delta N_{1/2 \ 3/2}) N^{-1} \overline{a}, \quad (10)$$

где

$$\Delta N' = 3\Delta N_{-1/2 \ -3/2}^0 - 4\Delta N_{-1/2 \ 1/2}^0 - 2\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0,$$

индексом «0» обозначены равновесные начальные значения ΔN_{mn} ;

2) при насыщении выполняется следующее соотношение:

$$\frac{N}{4} \omega_d^2 (\beta_d - \beta_L) + \frac{\Delta}{2} (\Delta N_{1/2 \ 3/2} - \Delta N_{1/2 \ 3/2}^0) +$$

$$+ \frac{5\bar{a}}{8N} [(\Delta N_{1/2 \ 3/2})^2 - (\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0)^2] = 0,$$

где

$$\Delta = \omega_z + 2D + \Delta N' N^{-1} \bar{a} - \Omega.$$

Подстановка β_d из (11) в первое уравнение (9) в случае, когда

$$\text{th} \frac{(E_{3/2 \ 1/2} - \Omega) \beta_d}{2} \approx \frac{(E_{3/2 \ 1/2} - \Omega) \beta_d}{2},$$

приводит к следующему уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = -3 \frac{(5\bar{a}/2)^2}{2\omega_d^2} \frac{N_{1/2}^0 + N_{3/2}^0}{N} [x^3 + q_1 x + q_2] 2W_{1/2 \ 3/2} (E_{3/2 \ 1/2} - \Omega), \quad (12)$$

где

$$x = \left[\Delta - \frac{5\bar{a}}{2} \frac{\Delta N_{1/2 \ 3/2}}{N} \right] \left[\frac{5\bar{a}}{2} \right]^{-1}$$

— безразмерная расстройка частоты Ω относительно частоты (10);

$$q_1 = \left[\frac{2N\omega_d^2}{N_{1/2}^0 + N_{3/2}^0} - \left(\Delta - \frac{5\bar{a}}{2} \frac{\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0}{N} \right)^2 \right] \left(\frac{5\bar{a}}{2} \right)^{-2},$$

$$q_2 = - \frac{N}{N_{1/2}^0 + N_{3/2}^0} 2\omega_d^2 \Delta \left(\frac{5\bar{a}}{2} \right)^{-3}.$$

Уравнение (12) описывает установление квазистационарного состояния при воздействии одного насыщающего импульса СВЧ поля. Оно нелинейно и предсказывает явление спиновой бистабильности [5-8] (т.е. существования двух устойчивых состояний спин-системы при одном и том же значении параметров), если имеют место сильные НТСЧ, когда

$$\sigma' \equiv \frac{2N\omega_d^2}{N_{1/2}^0 + N_{3/2}^0} \left[\frac{5\bar{a}}{2} \frac{\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0}{N} \right]^{-2} \ll 1.$$

При форме образца, сильно отличающейся от сферической (большие \bar{a}), и достаточно низких температурах (большие $\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0/N$ и $\omega_d^2 \ll \ll (\omega_d^2)^{\text{ВТП}}$) выполнение этого неравенства реально (очевидно, подходящими образцами могут служить неразбавленные парамагнитные соли [16]). Допустим, что на спин-систему, находящуюся в равновесии с решеткой, действует насыщающий импульс СВЧ поля, затем через промежуток времени, достаточный для того, чтобы спин-система пришла в равновесие с решеткой, действует СВЧ импульс на слегка измененной частоте и т.д. Исследуем уравнение (12) при различных Δ аналогично [6] методом топологически эквивалентного потенциала. Включение СВЧ поля с расстройкой

$$0 < \Delta < \frac{5\bar{a}}{4} \frac{\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0}{N}$$

(т.е. на высокочастотном крыле равновесной линии) приводит к тому, что спин-система оказывается в области притяжения локального минимума потенциала (метастабильного состояния равновесия). На этом этапе для выяснения поведения спин-системы необходимо ввести два масштаба времени [17]: T_q — время, за которое система из области притяжения локального минимума потенциала окажется в локальном

минимуме, и $T_{\text{диф}}$ — время диффузии из локального минимума в глобальный. Время T_q фактически представляет собой время установления квазистационарного метастабильного состояния спин-системы; $T_{\text{диф}}$ обусловлено флуктуациями, которые дают спинам информацию о наличии глобального минимума (второго устойчивого решения); $T_{\text{диф}}$ уменьшается с уменьшением высоты потенциального барьера между минимумами [17]. Если $T_q < T_1 < T_{\text{диф}}$ (где T_1 — время спин-решеточной релаксации), то насыщаемая спин-система, оказавшись в области притяжения локального минимума, релаксирует в локальный минимум и будет находиться в нем, пока не вступит в силу спин-решеточная релаксация. Если же $T_q < T_{\text{диф}} < T_1$, то спин-система, обнаружив с помощью флуктуаций глобальный минимум, совершит скачок из метастабильного состояния в более устойчивое состояние (с ветви EF на ветвь АВ на рис. 1 из [6]). Если $T_{\text{диф}} < T_q < T_1$, то при воздействии импульсов с любым Δ система оказывается в глобальном минимуме. Допустим, что имеет место неравенство

$T_q < T_1 < T_{\text{диф}}$. Тогда импульсы с $\Delta < \Delta_6$, где

$$\Delta_6 = \frac{5\bar{a}}{2} \frac{\Delta N_{1/2}^0}{N} (1 - \sqrt[3]{\frac{3}{\sigma'/2}}),$$

не будут приводить к значительному изменению $\Delta N_{1/2}^{3/2}$. При $\Delta = \Delta_6$ локальный минимум исчезает, система оказывается в глобальном минимуме, поэтому СВЧ импульс с $\Delta = \Delta_6$ приведет к скачкообразному уменьшению $\Delta N_{1/2}^{3/2}$ по сравнению с результатом воздействия импульса с $\Delta \leq \Delta_6$:

$$(\Delta N_{1/2}^{3/2})_{\text{неуст}} = \Delta N_{1/2}^0 \left\{ 1 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2} \right)^{3\sqrt{\sigma'/2}} \right\}.$$

При этом расстройка изменяет свой знак на противоположный:

$$(x)_{\text{неуст}} = \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{\Delta N_{1/2}^0}{N} \sqrt[3]{\sigma'/2},$$

т. е. насыщающая частота Ω , действовавшая при $\Delta \leq \Delta_6$ на высокочастотное крыло линии, при насыщении с $\Delta = \Delta_6$ из-за скачка резонансной частоты оказывается на ее низкочастотном крыле. СВЧ импульсы с $\Delta > \Delta_6$ будут создавать $\Delta N_{1/2}^{3/2}$, монотонно увеличивающиеся с ростом Δ . Рассмотрим, как описанное поведение $\Delta N_{1/2}^{3/2}$ проявится в сигнале χ'' . В предположениях этого пункта выражение для χ'' вблизи насыщаемого перехода сводится к виду

$$\chi''(\Omega \approx E_{3/2, 1/2}, \omega \approx E_{3/2, 1/2}) \approx \frac{3N}{4h_1^2} \times$$

* Утверждение о возможности гистерезиса в ситуации работы [6] неверно. Аналогично данной работе там имеет место спиновая бистабильность и скачки.

$$\times \frac{(\omega - \Omega) (\Delta N_{1/2 \ 3/2} / N)}{x(5\bar{a}/2)} 2W_{3/2 \ 1/2} (E_{3/2 \ 1/2} - \omega).$$

Детектирующее поле будет поглощаться на резонансной частоте, которая может значительно (на частотное расстояние порядка НТСЧ) удалиться от своего равновесного положения. Сигналы в окрестности резонансной частоты являются асимметричными, что обусловлено сдвигом от равновесия ДДР. Ожидаемое положение сигналов поглощения детектирующего поля частоты $\omega = \Delta + \Omega - \beta(5\bar{a}/2)$ в случае, когда $\sigma' = 0,01$ и $(\Delta N_{1/2 \ 3/2}^0 / N) = 0,5$, при изменении Δ от $0,1(5\bar{a}/2)$ до $0,5(5\bar{a}/2)$ изображено на рис. 1 последовательностью кривых 1—6 (пунктиром изображено равновесное положение χ'' , $\alpha = \Delta / (5\bar{a}/2)$, масштаб β указан на графике для $\alpha = 0,3$). При $\Delta = \Delta_6$ ($\alpha = 0,3$) происходит скачок наблюдаемой линии в другое положение (кривые 3, 4). Предположим теперь, что $T_q < T_{\text{диф}} < T_1$. Тогда воздействие СВЧ поля с $\alpha = 0,1$ приведет к $\chi''(1)$, которое скачком переходит в положение $1'$, с $\alpha = 0,2$ — к скачку $2-2'$, при $\alpha \geq 0,3$ поведение системы не зависит от соотношения $T_{\text{диф}}$ и T_q . Если же $T_{\text{диф}}$ — самое короткое время, то при изменении α от 0,1 до 0,5 сигнал поглощения будет последовательно занимать положения $1'-2'-4-5-6$. Специфика неэквидистантного спектра заключается в том, что аналогичные описанным явления должны наблюдаться и на других переходах, даже не имеющих общего уровня с насыщаемым, из-за бистабильности значения температуры общего ДДР.

В случае неэквидистантного квадрупольно расщепленного спектра спинов $S = 3/2$ резонансные линии, соответствующие трем переходам, при низких температурах сдвигаются на различную величину по сравнению с их положением при высоких температурах. Если НТСЧ велики по сравнению со «средним квантом» переопределенного ДДР, то при квазистационарном насыщении одного из переходов возможно явление спиновой бистабильности. В сигналах поглощения детектирующего СВЧ поля это явление может проявиться в скачке наблюдаемой линии в другое положение при $\Omega = \Omega_6$, если $T_q < T_1 < T_{\text{диф}}$. Если же $T_q < T_{\text{диф}} < T_1$, то скачки возможны и при $\Omega > \Omega_6$ *.

В заключение авторы выражают благодарность Л. Л. Буишвили за обсуждение работы и ценные замечания, относящиеся к переопределению подсистем при низких температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочелаев Б. И., Нигматуллин Р. Р. // ФТТ. 1972. Т. 14. № 11. С. 3414.
2. De Haas L. J., Wenckenbach W. Th., Poullis N. J. // Physica. 1981. V. 111B. P. 219.
3. Буишвили Л. Л., Фокина Н. П. // ФТТ. 1983. Т. 25. № 2. С. 381; № 6, С. 1761.
4. Джебаров Ф. С., Хеннер Е. К. Препринт ИТЭФ АН СССР № 10. М., 1987.
5. Буишвили Л. Л., Фокина Н. П. // ФММ. 1984. Т. 58. № 2. С. 257.
6. Буишвили Л. Л., Фокина Н. П. // Межвуз. сб. Радиоспектроскопия. — Пермь, 1988. Вып. 18. С. 31.
7. Rukhlov V. S., Teitelbaum G. B. // Phys. stat. sol (b). 1984. V. 125. K. 121.
8. Luczka L. // Physica. 1983. V. 120A. P. 219.
9. Родак М. И. // ФТТ. 1973. Т. 15. № 2. С. 404.
10. Lerpelmeir C. W., Hahn E. L. // Phys. Rev. 1966. V. 142. P. 179.
11. Абрагам А., Гольдман М. Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок. — М.: Мир, 1984. Т. 2. С. 13.
12. Гольдман М. Спиновая температура и ЯМР в твердых телах. — М.: Мир, 1972. С. 33.
13. Цифринович В. И. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. Вып. 4. С. 1394.

* Отметим, что уравнения для макроскопических параметров, характеризующих переопределенные подсистемы, не предсказывают спиновой бистабильности при квазистационарном насыщении.

14. Туров Е. А., Петров М. П. Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1969. С. 88.
15. Волгина Г. А., Звиададзе М. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 7. С. 958.
16. Svare I., Seidel G. // Phys. Rev. 1964. V. 134A. P. 172.
17. Gilmore R. // Phys. Rev. 1979. V. 20A. P. 2510.

Тбилисский государственный
университет

Поступила в редакцию
8 августа 1988 г.

MICROWAVE FIELD ABSORPTION SIGNALS UNDER THE CONDITIONS OF THE PARAMAGNETS NONEQUIDISTENT LEVELS ($S=3/2$) SATURATION AT LOW TEMPERATURES

N. P. Fokina, L. T. Chelidze

A theoretical expression for detecting ω -frequency microwave field absorption signals $\chi''(\omega, \Omega)$ at the saturation by Ω -frequency microwave field of the nonequidistant levels of paramagnets ($S=3/2$) at low temperatures are received under the conditions, when spin dipole-dipole reservoir is not in equilibrium with the lattice. The expected behaviour of $\chi''(\omega, \Omega)$ is described at strong low temperature frequency shift of the transition under saturation. Particularly, jump in absorption signal position at bifurcation point $\Omega=\Omega_b$ and possible jumps from metastable to stable state at $\Omega>\Omega_b$ are described.

Аннотации депонированных статей

УДК 621.372.829

РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН ВОЛН ТИПА H ПРИ ДЕФОРМАЦИИ СЕЧЕНИЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ

В. М. Онуфриенко, В. П. Чумаченко

Эффективность численной реализации известных в настоящее время методов решения задачи и расчета критических частот и структуры полей сложных волноводов (см. обзоры литературы в [1-4]) в большинстве случаев зависит от выбранного математического аппарата, позволяющего с большей или меньшей степенью гибкости учитывать конфигурационные особенности границы поперечного сечения волноводов и использовать эти данные для достаточно точного и быстрого численного алгоритма для ЭВМ (критерии для таких методов и алгоритмов сформулированы Дэвисом в [5]).

В работе приведены результаты численного расчета критических длин волн типа H в регулярных сложных четырехугольных волноводах, полученные на основе единого алгоритмического подхода, аналогичного описанному в [6]. В идею метода заложена попытка разработки численного алгоритма, вытекающего из способа топологического описания границы области с учетом поведения решения на этой границе.

Сложный контур поперечного сечения волновода рассматривается как объединение линейных звеньев US_i ($i = 1, \bar{N}$), представляющих собой вырожденные эллипсы $S_i = \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$. Поле внутри области также ищется в виде объединения решений u_i уравнения Гельмгольца — предельных значений их интегрального представления по второй формуле Грина для внешней области по отношению к указанным эллипсам. Полученная при этом система интегродифференциальных уравнений

$$u_i = - \int_0^\pi \left(\sum_{j \neq i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i'} \right) \sigma_i^+ G_i d\eta_i$$

(G_i — функция Грина внешней части i -го эллипса, описанного в эллиптических координатах ξ_i, η_i) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов в разложении поля в ряды по собственным функциям указанных областей. Поиск собственных значений матрицы полученной системы уравнений, соответствующих критическим длинам волн типа для данной конфигурации контура области, завершает численный алгоритм.

(Окончание см. с. 314)

УДК 535.211+533.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ЭФФЕКТА ТЕПЛООВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДОЗВУКОВОМ И СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ

А. Н. Кучеров, Е. В. Устинов

Изучен стационарный эффект теплового самовоздействия в однородном потоке слабопоглощающего газа, движущегося со скоростью, соизмеримой со скоростью звука.

Изучение эффекта теплового самовоздействия оптического пучка в движущейся газовой среде имеет многолетнюю историю. Физическая сущность эффекта теплового самовоздействия изложена в работах [1-3]. Уравнения нелинейной параксиальной оптики, описывающие рассматриваемое явление, уже вошли в монографии и учебники [4-6]. В однородном поперечном к пучку потоке слабопоглощающего газа существуют шесть газодинамических режимов эффекта самовоздействия [7,8]: теплопроводный, конвективный, дозвуковой, трансзвуковой, сверхзвуковой, гиперзвуковой. Соответствующие уравнения газодинамики, описывающие главные члены возмущенных газодинамических величин, приведены в [9]. Ранее исследовались с различной степенью полноты стационарные конвективный [10], теплопроводный [11-13], дозвуковой [14-16] и сверхзвуковой [17,18] режимы. В настоящей работе продолжено исследование стационарных режимов теплового самовоздействия в потоке газа, скорость которого соизмерима со скоростью звука, — дозвукового и сверхзвукового. Приведены некоторые результаты и выводы, касающиеся конвективного и предельного ($M \rightarrow \infty$) режимов.

Распространение параксиального пучка в однородном потоке слабопоглощающего газа описывается следующей системой безразмерных уравнений оптики и газодинамики (с соответствующими начальными и краевыми условиями):

$$2F \frac{\partial u}{\partial z} + i \nabla_{\perp}^2 u = -[i2F^2 N \rho_1(I; M) + FN_{\alpha}] u; \tag{1}$$

$$u|_{z=0} = u_0(x, y); \tag{2}$$

$$u|_{x, y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + (\nabla_{\perp}, V_1) = 0, \quad \nabla_{\perp} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \nabla_{\perp} p_1 = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (M^2 p_1 - \rho_1) = I(x, y, z); \tag{6}$$

$$\rho_1, V_1, p_1 \Big|_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \pm\infty}} \rightarrow 0. \tag{7}$$

Здесь u — комплексная функция поля, $I = uu^*$ — интенсивность излучения (отнесенная к характерной интенсивности I_0), $F = 2\pi n_0 a^2 / \lambda L$ —

число Френеля, λ — длина волны излучения, a — эффективный радиус пучка, L — характерная длина трассы пучка, $N_\alpha = \alpha L$ — параметр поглощения, α — коэффициент поглощения излучения, $N = (L/z_T)^2$ — параметр нелинейности (теплового самовоздействия), n_0 — показатель преломления невозмущенного газа, $\varepsilon = \alpha I_0 a / \rho_0 V_0 h_0$ — масштаб возмущения газодинамических величин, ρ_0 — плотность, V_0 — скорость потока (направлена вдоль координаты x), h_0 — энтальпия невозмущенного газа, $M = V_0/c$ — число Маха, c — скорость звука в невозмущенном газе, ρ_1, V_1, p_1 — главные члены возмущений плотности, скорости и давления ($\rho/\rho_0 = 1 + \varepsilon \rho_1 + \dots$, $V/V_0 = i + \varepsilon V_1 + \dots$, $p/p_0 = 1 + \varepsilon M^2 \rho_1 + \dots$, p_0 — давление невозмущенного газа, κ — показатель адиабаты), $z_T = a/\sqrt{\varepsilon(n_0-1)}/n_0$ — длина теплового самовоздействия.

Поперечные пучку координаты x, y отнесены к радиусу a , продольная координата z отнесена к L . Напомним, что $a/L \ll 1$. Кроме упомянутых четырех параметров подобия (N, F, N_α, M) задача может содержать, как увидим далее, дополнительные параметры подобия, например, входящие в безразмерную функцию начального распределения интенсивности $u_0(x, y)$.

Примем, что параметр нелинейности равен $N=1$, т. е. будем рассматривать распространение пучка на расстоянии порядка длины теплового самовоздействия: $L=z_T$. Начальное распределение интенсивности выберем гауссовым: $u_0 = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$.

В конвективном и сверхзвуковом режимах из системы уравнений газодинамики (4)–(6) можно получить следующие связи между функцией возмущения плотности ρ_1 и интенсивностью излучения I :

$$\rho_1 = -\int_{-\infty}^x I(x', y, z) dx', \quad \text{Kn} \ll M \ll 1 \quad (M \approx 0); \quad (8)$$

$$\rho_1 = \int_{-\infty}^x \left\{ -I(x', y, z) + \frac{M^2}{2\beta^2} \left[I\left(x', y - \frac{x-x'}{\beta}, z\right) + I\left(x', y + \frac{x-x'}{\beta}, z\right) \right] \right\} dx', \quad \beta^2 = M^2 - 1 \quad (M > 1). \quad (9)$$

Здесь $\text{Kn} = l/a$ — число Кнудсена, l — длина свободного пробега молекул газа. Вычисление интегралов (8) и (9) можно выполнить по стандартным алгоритмам, если использовать при необходимости интерполяцию функции интенсивности $I(x, y, z)$ между узлами расчетной сетки.

На дозвуковом режиме для производной от функции плотности трудно получить из системы (4)–(6) уравнение Пуассона:

$$\left[(1 - M^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -\nabla_{\perp}^2 I(x, y, z); \quad (10)$$

$$\rho_1 \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{x, y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0 \quad (M < 1). \quad (11)$$

Задача (10), (11) была решена с помощью метода разложения искомых функций в дискретные ряды Фурье с применением быстрого фурье-преобразования. Реализованы два варианта: разложение по комплексным экспонентам и по действительным тригонометрическим (синус и косинус) функциям, причем при числах M , близких к единице, использовалось приближенное решение работы [19]. Аналогичный алгоритм был использован для получения решения нелинейного уравнения распространения (1). Для контроля точности были реализованы на

ЭВМ три варианта: схема второго порядка аппроксимации работы [15], упрощенный вариант, описанный в работе [20], и итерационный алгоритм работы [21]. Во всех рассмотренных случаях получено хорошее соответствие в пределах погрешности аппроксимации.

Полученные результаты позволяют провести сравнительный анализ поведения пучка в различных газодинамических режимах на расстояниях порядка длины самовоздействия в дальнем поле подобно анализу, который был выполнен ранее [8] для ближнего поля гауссова пучка с помощью линеаризованного решения уравнения распространения.

На рис. 1 показана динамика изменения картин изохор и изофот по мере увеличения числа M от нуля до $M=3$.

При $M=0$ точнее, $M \rightarrow 0$ — конвективный режим) возмущения плотности отрицательны (разрежение газа, показано слева штриховыми контурами, $\rho_1=0,75, 0,5$ и $0,25 \rho_{1\min}$), контуры равной интенсивности (справа, $I=0,9, 0,75, 0,5, 0,25$ и $0,1 I_{\max}$) приобретают месяцеобразную форму, пик интенсивности смещается вверх по потоку газа и, как правило, уменьшается по сравнению с первоначальным значением. Положение пика интенсивности показано крестиком «X», значение I_{\max} приведено в левом верхнем углу.

При $M=0,8$ (дозвуковой режим) кроме теплового следа появляется область положительных возмущений плотности (сплошные кривые, $\rho_1=0,75 \rho_{1\max}, 0,5 \rho_{1\max}, 0,25 \rho_{1\max}$, жирная кривая — $\rho_1=0$) в наветренной части пучка. Фокусирующее действие этой области, как правило, приводит к увеличению пика интенсивности выше первоначального значения. Усиливается его смещение навстречу потоку газа. Контуров равной интенсивности располагаются ближе друг к другу (пик интенсивности является более крутым), вытеснение излучения из области теплового следа усиливается. На рис. 5 приведена зависимость $I_{\max}(z)$ для рассматриваемого варианта теплового самовоздействия гауссова пучка. Как и для сверхзвукового режима, что было показано ранее [17, 18], существует сечение по ходу пучка (фокальное), в котором пик интенсивности достигает абсолютного максимума, а за этим сечением быстро убывает. В данном примере фокусное расстояние составляет $z_{\text{физ}} \approx 1,15 z_T$.

В сверхзвуковом потоке (два нижних ряда на рис. 1) появляются области положительных возмущений плотности вдоль линий Маха, смещенные вниз по потоку от центра первоначального распределения интенсивности. Пик интенсивности, как правило, увеличивается и слабо смещается вниз по потоку газа. «Крылья полумесяцев» изофот вытягиваются преимущественно в направлении линий Маха. Вытесняющее действие теплового следа ослаблено тем, что он смещен к подветренному краю пучка. По мере увеличения числа M направления линий Маха приближаются к направлению движения потока газа, что проявляется как в изменении картины изохор, так и в эволюции изофот. Заметим, что при $M=3$ ($\kappa M^2=12,6$) результаты, полученные по формулам сверхзвукового режима, достаточно близки к предельному режиму ($M \rightarrow \infty$), потому что степень близости сверхзвукового режима к предельному характеризуется величиной, пропорциональной M^2 [9]. Детальное исследование предельного режима в настоящей работе не проводится.

Таким образом, в соответствии с предсказаниями на основе линеаризованного решения уравнения распространения [8] пучок с куполообразным распределением интенсивности дефокусируется при медленном поперечном относительном движении луча и среды ($M \ll 1$, конвективный и теплопроводный режимы) и фокусируется при скоростях, соизмеримых или существенно превышающих скорость звука (дозвуковой, сверхзвуковой и предельный режимы). Пик интенсивности в дальнем поле смещается навстречу потоку газа в конвективном и наиболее сильно в дозвуковом режимах, смещается незначительно вниз по потоку газа в сверхзвуковом режиме и практически остается на прежнем месте в предельном ($M \rightarrow \infty$) режиме,

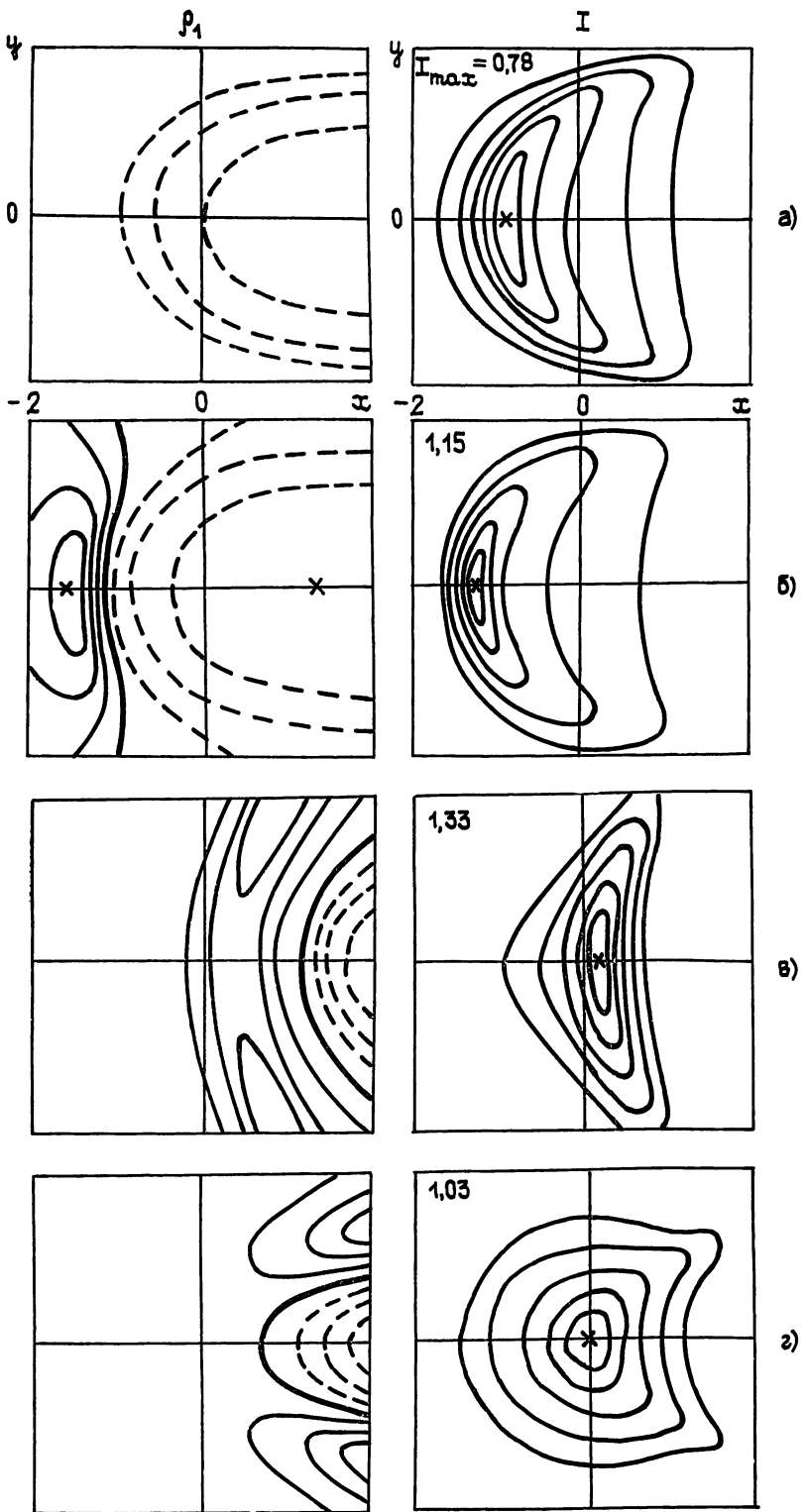


Рис. 1. Изохоры (слева) и изофоты (справа) на расстояниях порядка длины теплового самовоздействия: а) на конвективном ($M=0$, $F=10$, $N_\alpha=0$, $N=1$, $z=1$); б) дозвуковом ($M=0,8$, $F=5$, $N_\alpha=0$, $N=1$, $z=1$); в), г) сверхзвуковом ($M=1,1$, $F=2$, $N_\alpha=0,1$, $N=1$, $z=1$ и $M=3$, $F=10$, $N_\alpha=0$, $N=1$, $z=2$) газодинамических режимах.

Во всех рассмотренных режимах на трассе пучка имеется фокальное сечение на некотором расстоянии z_f , в котором пик интенсивности достигает абсолютного максимума, а за этим сечением быстро убывает. На рис. 2 представлены зависимости фокусного расстояния z_f и максимального фокусного значения интенсивности $I_A = I_{\max}|_{z=z_f}$ в исследованном диапазоне чисел M от нуля до $M=3$, исключая узкую область трансзвукового режима. В этой области, согласно оценкам [8], длина самовоздействия (следовательно, и фокусное расстояние) меньше по порядку величины, чем в соседних дозвуковой и сверхзвуковой областях.

При изучении эффекта теплового самовоздействия очень важно выделить те ситуации, в которых самофокусировка оказывает достаточно ощутимое воздействие на процесс распространения пучка, например, пик интенсивности хотя бы на небольшом участке трассы может превысить первоначальное значение. Для определения в пространстве параметров подобия « $M-F-N_\alpha$ » таких областей фокусировки и дефокусировки проведены трудоемкие массовые параметрические расчеты в широком диапазоне чисел Маха от нуля до $M=3$, чисел Френеля от единицы до $F=15$, параметра поглощения от нуля до $N_\alpha=0,5$.

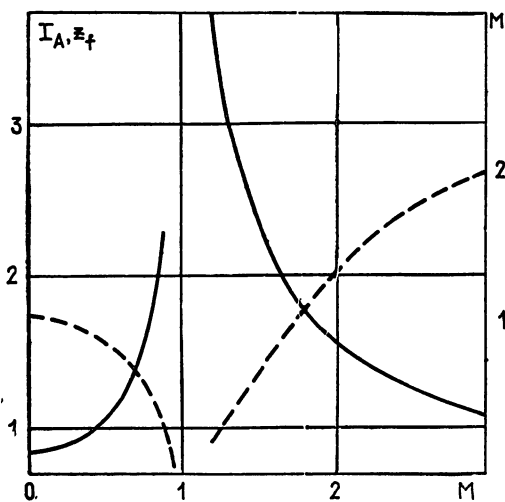


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимости фокусного расстояния z_f (штриховая) и максимального значения интенсивности в фокусе $I_A = I_{\max}(z_f)$ (сплошная кривая) от числа M потока газа. Число Френеля $F=10$, параметр поглощения $N_\alpha=0,1$, параметр нелинейности $N=1$.

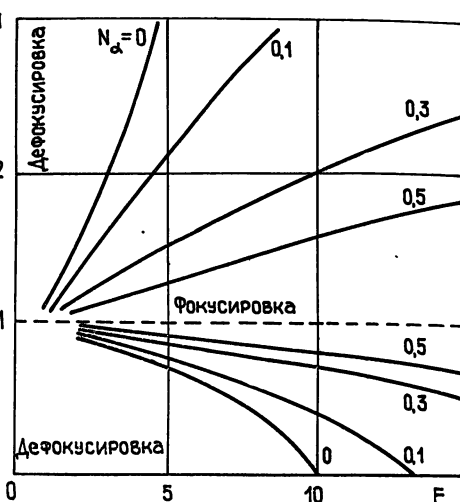


Рис. 3.

Рис. 3. Области фокусировки и дефокусировки первоначально гауссова пучка в пространстве параметров подобия «число Маха — число Френеля — параметр поглощения», построенные по признаку превышения пиком интенсивности в фокусе первоначального значения. Параметр нелинейности равен $N=1$.

В сверхзвуковой области существенно расширены результаты, полученные ранее с помощью явной конечно-разностной схемы [17, 18]. Контрольное сравнение, выполненное при одинаковых значениях параметров подобия, показало хорошее совпадение зависимости пика интенсивности от длины трассы, положения фокального сечения и картин изофот (изохоры рассчитывались с помощью идентичной подпрограммы). К сожалению, в работах [14–16], в которых рассматривался дозвуковой режим, результаты приводятся недостаточно полно, не приведен полный набор физических параметров (равно как не приведен и полный набор параметров подобия), что не позволяет выполнить сравнение. Этим, сообразно, продиктована была необходимость реализовать несколько алгоритмов решения задачи теплового самовоздействия, о чем упоминалось выше.

Результаты расчетов представлены на рис. 3. На плоскости «число Маха — число Френеля» построена сетка кривых при различных значениях параметра поглощения N_α .

Сплошные кривые соответствуют граничным ситуациям или «критическим» наборам параметров подобия, при которых пик интенсивности достигает первоначального значения (единицы) хотя бы в одной точке трассы (в фокусе). Горизонтальная пунктирная прямая соответствует трансзвуковой области и разделяет дозвуковую и сверхзвуковую области в пространстве параметров подобия. Если в сверхзвуковой области набор параметров таков, что соответствующая им точка располагается выше соответствующей построенной граничной кривой, то преобладают факторы, приводящие к уменьшению концентрации излучения и уменьшению пика интенсивности (дифракционное расплывание) и поглощение). Если ситуация такова, что соответствующая ей точка расположена ниже соответствующей граничной кривой $N_\alpha = \text{const}$, то преобладает фокусирующее влияние эффекта теплового самовоздействия.

Для дозвукового диапазона можно говорить о преобладании фокусировки, если попадаем выше соответствующей граничной кривой, и о преобладании дефокусировки в противном случае. Область преобладающей фокусировки примыкает к области трансзвукового режима. Она тем шире, чем меньше параметр поглощения.

Интересно отметить, что в конвективном режиме при достаточно больших числах Френеля в дальнем поле преобладает фокусировка.

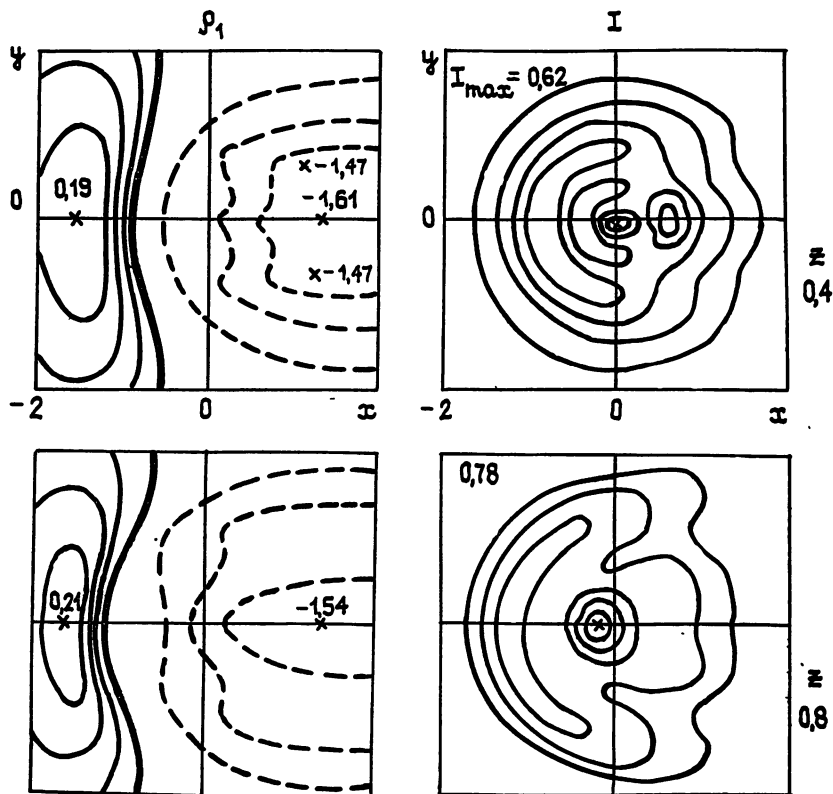


Рис. 4 Изохоры и изофоты при самовоздействии кольцевого пучка в дозвуковом потоке газа. Число $M=0,8$, число Френеля $F=5$, параметр поглощения $N_\alpha=0$, параметр нелинейности $N=1$, относительное отверстие кольца $\bar{a}=0,25$.

Итак, мы рассмотрели распространение пучка с гауссовым распределением интенсивности и с плоским волновым фронтом в начальном сечении. Это далеко не единственный типичный вид начального распределения. Среди множества возможных распределений $u_0(x, y)$ необходимо выделить кольцевое, при котором пучок фокусируется в нелинейной среде, дефокусирующей пучки с колоколообразным распреде-

нием интенсивности типа гауссова [1]. В конвективном режиме самовоздействия кольцевого пучка рассматривалось в [22], на сверхзвуковом газодинамическом режиме — в работе [17]. Остановимся на дозвуковом режиме.

Выберем кольцевое распределение в виде разности двух гауссовых распределений: $u_0 = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\bar{a}}\right)$. Здесь $\bar{a} =$

$= a_0/a$, где a_0 — экспоненциальный радиус отверстия кольца. На рис. 4 представлены результаты расчетов при $\bar{a}=0,25$, $M=0,8$, $F=5$, $N_\alpha=0$, $N=1$. Построены изохоры (слева) и изофоты в сечениях $z=0,4$ (вверху) и $z=0,8$. Картины распределения функции возмущения плотности ρ_1 качественно соответствуют картинам изохор при гауссовом распределении интенсивности: имеется область уплотнения газа в наветренной части пучка и область сильного разрежения в тепловом следе. Картины изофот более сложные. Пик интенсивности на некотором расстоянии по ходу луча устанавливается в центре (был распределен по кольцу), затем смещается слегка в наветренную часть пучка. Его значение всюду по длине трассы выше, чем соответствующее значение в вакууме.

На рис. 5 представлены зависимости $I_{\max}(z)$ при относительном отверстии кольца, равном $\bar{a}=0,5$, $0,25$. В выбранных ситуациях влияние дифракции достаточно велико, увеличение максимума интенсивности по сравнению с первоначальным незначительно. Важным для нас является тот факт, что в дозвуковом режиме, как и в конвективном [22] и сверхзвуковом [17] режимах, кольцевые пучки испытывают благоприятное влияние эффекта теплового самовоздействия.

Рассмотрим гауссов пучок в условиях кинетического охлаждения,

которое имеет место, например, в воздухе для излучения с длиной волны $\lambda=10,6$ мкм. Воспользуемся моделью явления работы [23], которая применялась для исследования теплового самовоздействия в конвективном [24] и сверхзвуковом [17] режимах. В задаче появляются дополнительные параметры подобия: $\bar{\tau} = \tau V_0/a$ — релаксационный параметр, где τ — время релаксации, а также параметр δ (постоянная, пропорциональная отношению коэффициента поглощения углекислого газа к полному коэффициенту поглощения смеси, $\delta \approx 0,7$ на уровне моря в теплый влажный день и $\delta \approx 2,44$ на высотах более трех километров при любой влажности [23, 24]). Примем, что релаксационный параметр $\bar{\tau}$ значительно больше единицы, что означает, что эффект кинетического охлаждения успевает в полной мере реализоваться за время пролета жидкой (газовой) частицей расстояния, равного поперечному размеру пучка. Параметр δ примем равным 2,44. Расчеты показали сильную фокусировку пучка и смещение пика интенсивности в подветренную область, что обусловлено тем, что области уплотнения и разрежения газа поменялись местами (см. рис. 6). Фокусировка наблюдается даже при

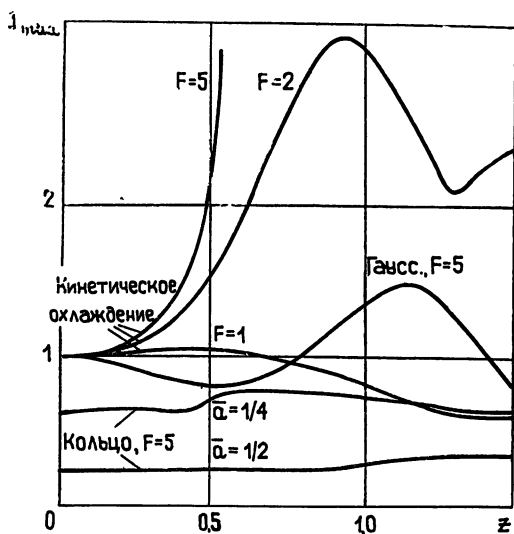


Рис. 5. Зависимости $I_{\max}(z)$ для гауссова пучка без кинетического охлаждения и с учетом кинетического охлаждения и для кольцевого пучка. Число $M=0,8$, параметр нелинейности $N=1$, параметр поглощения $N_\alpha=0$.

относительно малых числах Френеля $F \gg 2$, и только при $F=1$ дифракционное расплывание оказывает доминирующее ослабляющее влияние, как показывают зависимости $I_{\max}(z)$, приведенные на рис. 5.

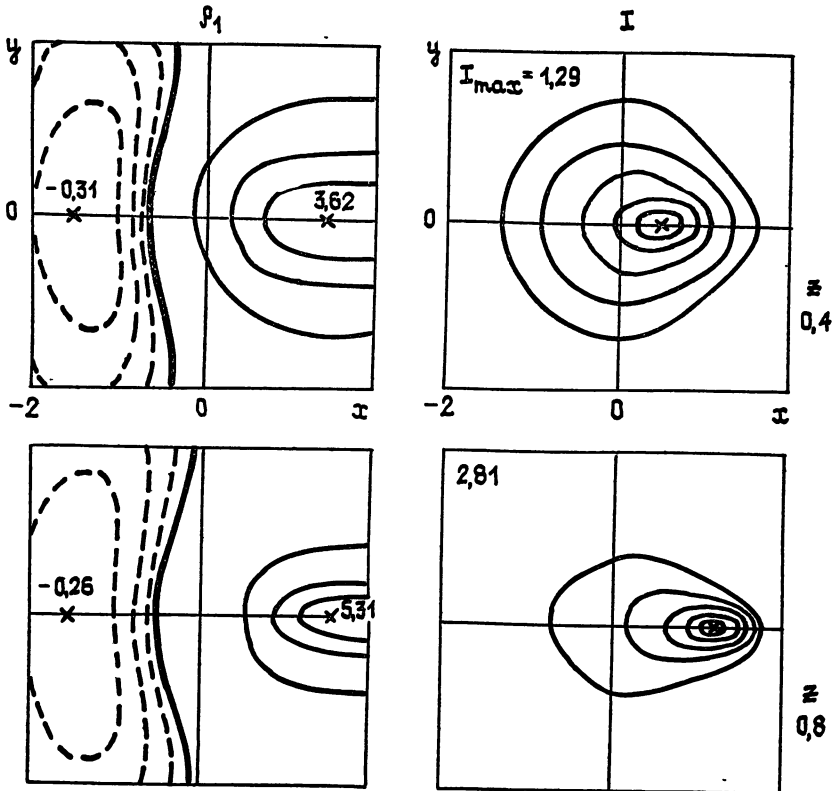


Рис. 6. Изохоры (слева) и изотопы при самовоздействии гауссова пучка в условиях сильного кинетического охлаждения. Релаксационный параметр $\tau \gg 1$, число Маха $M=0,8$, число Френеля $F=2$, параметр самовоздействия $N=1$, параметр поглощения $N_a=0$.

В заключение приведем некоторые соображения относительно характера самовоздействия пучков с колоколообразным начальным распределением интенсивности в трансзвуковом газодинамическом режиме (число Маха достаточно близко к единице, так что $|M-1| \leq Q^{2/3}$, где $Q = \alpha l_0 a / \rho_0 h_0 c$, длина теплового самовоздействия по порядку величины составляет $z_T = a / \sqrt{\varepsilon(n_0 - 1)} / n_0$, где $\varepsilon = Q^{2/3}$). Этот режим является одним из наиболее трудных для численных расчетов среди перечисленных во вводной части шести газодинамических режимов, так как возмущения плотности в таком режиме описываются нелинейным уравнением [9]. Анализ результатов в околозвуковой области (со стороны дозвукового и сверхзвукового режимов), полученных с помощью линеаризованного решения и численных расчетов, позволяет сделать следующие выводы. Пучок будет самофокусироваться и пик интенсивности будет выше первоначального при числах Френеля $F > 1 \div 2$ (в зависимости от параметра поглощения N_a и трансзвукового параметра подобия $K = (1 - M^2) / Q^{2/3}$). Отклонение пика интенсивности навстречу потоку будет максимальным в трансзвуковом режиме со стороны дозвукового режима. Тот факт, что качественные изменения (отклонение — неотклонение пика интенсивности, возникновение скачков уплотнения [9] и т. д.) в трансзвуковой области происходят при малых изменениях числа M , оставляет задачу количественного расчета несмотря на сделанные выводы необходимой и важной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскарьян Г. А. // УФН. 1973. Т. 111. Вып. 2. С. 250.
2. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // УФН. 1967. Т. 93. Вып. 1. С. 19.
3. Луговой В. Н., Прохоров А. М. // УФН. 1973. Т. 111. Вып. 2. С. 203.
4. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
5. Зуев В. Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере. — М.: Радио и связь, 1981.
6. Распространение лазерного пучка в атмосфере / Под ред. Д. Стробена. — М.: Мир, 1981.
7. Коган М. Н., Кучеров А. Н. // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 3. С. 575.
8. Коган М. Н., Кучеров А. Н. // Изв. вузов. Физика. 1983. № 2. С. 103.
9. Коган М. Н., Кучеров А. Н., Михайлов В. В., Фонарев А. С. // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1978. № 5. С. 95.
10. Smith D. C. // Proc. IEEE. 1977. V. 65. № 12. P. 1679.
11. Выслоух В. А., Егоров К. Д., Кандидов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 4. С. 434.
12. Выслоух В. А., Чесноков С. С. // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1979. Т. 20. № 4. С. 104.
13. Выслоух В. А., Егоров К. Д., Кандидов В. П. // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1980. Т. 21. № 2. С. 16.
14. Wallace J., Pasciak J. // Appl. Optics. 1976. V. 15. № 1. P. 218.
15. Fleck J. A., Morris J. R., Feit M. D. // Appl. Phys. 1976. V. 10. № 2. P. 129.
16. Егоров К. Д. // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1979. Т. 20. № 4. С. 105.
17. Коган М. Н., Кучеров А. Н. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 3. С. 465.
18. Кучеров А. Н. // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 309.
19. Воробьев В. В. // Квантовая электроника. 1976. Т. 3. С. 605.
20. Чесноков С. С. // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1980. Т. 21. № 6. С. 27.
21. Карамзин Ю. Н. Препринт ИПМ АН СССР. № 73. 1982.
22. Воробьев В. В., Муравьев Н. И., Сорокин Ю. М., Шеметов В. В. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. № 11. С. 2330.
23. Wallace J., Samas M. // J. Opt. Soc. America. 1970. V. 60. № 12. P. 1587.
24. Wallace J. // J. Opt. Soc. America. 1972. V. 62. № 3. P. 373.

Поступила в редакцию
12 августа 1988 г.

INVESTIGATION OF STATIONARY EFFECT OF THERMAL BLOOMING FOR SUBSONIC AND SUPERSONIC GASDYNAMIC REGIMES

A. N. Kucherov, E. V. Ustinov

Thermal blooming effect of an optical beam in a weak absorbing gas flow is investigated. The velocity of a gas flow is of the order of the sound velocity.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк. (вузы и техникумы), 1990 (II кв.). — 19 л.

В пособии дается изложение классической электродинамики. Помимо традиционных вопросов рассмотрены явления сверхпроводимости, магнитогазодинамические волны, магнитная коммуляция, излучение Вавилова—Черенкова. Раскрываются релятивистские представления о пространстве-времени, обсуждаются релятивистская формулировка законов сохранения, вопросы полевой теории массы, теории тахионов и др. В пособии много оригинальных задач, углубляющих и дополняющих изучаемый материал.

Второе издание (1-е — 1980 г.) существенно переработано.
Для студентов физических специальностей университетов.

Владимиров С. Н., Майдановский А. С., Новиков С. С. Нелинейные колебания в многочастотных автоколебательных системах. — Томск: Радио и связь. Томск. отд-ние, 1990 (I кв.). — 14 л.

Рассмотрены нелинейные колебания в автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью и в системах суммирования мощностей многих взаимосинхронизированных автогенераторов. Изложен разработанный спектрально-временной метод анализа подобных систем, исследованы переходные и стационарные процессы, процессы синхронизации, естественные флуктуации в одночастотной зоне, динамика многочисленных режимов. Приведены результаты экспериментальных исследований автоколебательных систем и систем суммирования в СВЧ диапазоне.

Для научных сотрудников; может быть полезна инженерам, аспирантам и студентам радиоспециальностей вузов.

УДК 517.926

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С. А. Кащенко

На основе специальных асимптотических методов исследуются сложные установившиеся режимы в системе, состоящей из двух диффузионно-связанных автогенераторов с запаздыванием, содержащих «большой» параметр. Особое внимание уделено изучению влияния различных диффузионных связей на динамику систем.

1. Анализ сложной динамики связанных автогенераторов занимает важное место в теории динамических систем, в том числе применительно к конкретным радиофизическим задачам [1-4]. Особую роль играет изучение моделей, в которых фигурируют одинаковые автогенераторы. Исследование неоднородных режимов в таких системах тесно связано с известной проблемой самоорганизации. Важным являются и вопросы математического описания связей между генераторами. По-видимому, наибольший интерес представляет изучение систем с линейными связями диффузионного типа (см., например, [3]). Одной из целей настоящей работы является проведение комплексного исследования (в рамках предлагаемого ниже метода) динамики системы из двух связанных автогенераторов при достаточно широком классе связей указанного типа.

В качестве базовой математической модели генератора рассматривается автономное уравнение второго порядка с запаздыванием. Исследование основано на использовании специальных асимптотических методов, развитых в работах [7-9]. Путь к применению этих методов связан с естественным введением в модель «большого» параметра. На основе строгих математических результатов удалось свести задачу изучения динамики системы дифференциально-разностных уравнений с большим параметром к существенно более простой задаче о динамических свойствах некоторых универсальных отображений.

Несколько слов о самой методике исследования. Суть ее такова. В фазовом пространстве исходной системы выделяется некоторое множество S , и в дальнейшем изучается асимптотика решений с начальными условиями из этого множества. Процедура такого выделения не обладает универсальностью и довольно специфична для каждой задачи (см., например, [7-9]). Построив асимптотику решений, удается сконструировать оператор последования, который множество S отображает в себя (или в множество «того же типа»). Как оказывается, структура оператора последования определяется некоторым конечномерным отображением, причем периодическим траекториям такого отображения отвечает периодическое решение определенной структуры исходной системы.

Итак, в качестве основной модели автогенератора с запаздыванием примем уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = MF(x(t - T)), \quad (1)$$

где $\delta^{-1} > 0$ — добротность, $T > 0$ — время запаздывания. Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая низкодобротного фильтра,

когда $\delta > 1$. Относительно нелинейной функции $F(x)$ предполагаем, что носитель ее конечен:

$$F(x) = 0 \quad \text{при } |x| \geq A. \quad (2)$$

Именно это условие, сводящее уравнение (1) к линейному при больших значениях $|x(t-T)|$, позволит в дальнейшем провести достаточно полный математический анализ и выписать явные асимптотические формулы для установившихся режимов. Сразу отметим, что это ограничение на $F(x)$ является излишне жестким. В качественном (но не в количественном) плане ситуация не меняется, когда на $F(x)$ наложено лишь естественное условие достаточно быстрого убывания при $|x| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим систему, описывающую работу двух одинаковых генераторов вида (1), в предположении, что связь между ними линейная и имеет диффузионный тип:

$$\dot{x}_1 = y_1 + d(x_2 - x_1), \quad \dot{y}_1 = -x_1 - 2\delta y_1 + MF(x_1(t-T)) + c(y_2 - y_1); \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = y_2 + d(x_1 - x_2), \quad \dot{y}_2 = -x_2 - 2\delta y_2 + MF(x_2(t-T)) + c(y_1 - y_2). \quad (4)$$

Коэффициенты диффузии c и d неотрицательны. Основное предположение, открывающее путь к применению специальных асимптотических методов [8, 9] для изучения динамики системы (3), (4), состоит в том, что параметр M считается достаточно большим.

Ниже будет показано, что динамика системы (3), (4) во многом зависит от коэффициентов диффузии c и d . Особый интерес представляет изучение ситуации, когда коэффициенты c и d достаточно малы. Здесь удастся определить пороговые значения (их два) этих величин, при которых происходят интересные и существенные перестройки фазовых портретов, и аналитически описать динамику происходящих процессов.

В разд. 2 приведены результаты расчета структур аттрактора системы (3), (4) при условии $d+c > 0$, а в разд. 3 и 4 рассмотрены последовательно две основные перестройки фазовых портретов при «малых» (вместе с M^{-1}) коэффициентах диффузии.

2. Обозначим через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения (1) при $F=0$, и пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. В [9] показано, что при достаточно больших M уравнение (1) имеет либо одно, либо два экспоненциально орбитально устойчивых периодических решения. Периоды их имеют порядок $\ln M$, а наибольшее значение их модуля — $O(M)$. Так, при условии $xF(x) \geq 0$ имеется одно положительное и одно отрицательное, а при $xF(x) \leq 0$ — одно знакопеременное периодическое решение. Периодические решения, о которых здесь говорится (одно или оба) ниже будем обозначать через $x_0(t)$. Пусть, для определенности, $x_0(0) = A$, $x_0(0) < 0$. На асимптотически большом промежутке времени, примыкающем слева к точке $t=0$, и при $t \in [0, T]$ функция $x_0(t)$ близка к $A \exp(\lambda_1 t)$. При $t \in [T, 2T]$ происходит резкий всплеск значений $x_0(t)$ до величин порядка M . Так, $x_0(2T) = M \left[\int_0^T K_0(t-\tau) F[A \exp(\lambda_1 \tau)] \times \right. \\ \left. \times d\tau + o(1) \right]$, где $K_0(t) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)]$. При дальнейшем увеличении t поведение $x_0(t)$ определяется решением линейного уравнения (1) (при $F=0$). При достаточном увеличении t функция $x_0(t)$ определяется, в основном, лишь экспонентой с показателем λ_1 , монотонно убывает (по модулю), достигает значения $\pm A$, после чего ситуация повторяется.

Очевидно, что система (3), (4) имеет периодическое решение $x_1 \equiv x_2 \equiv x_0(t)$. Характер устойчивости этого решения зависит от значений коэффициентов диффузии.

Сформулируем первый важный вывод. Пусть выполнено условие $\text{Re } p(c, d) < 0$, где $p(c, d) = -(c+d) - \sqrt{\delta^2 - 1} + \sqrt{(\delta+c+d)^2 - 4d(\delta+c)}$.

Тогда однородное периодическое решение $x_1 \equiv x_2 \equiv x_0(t)$ системы (3), (4) устойчиво. Например, это условие выполнено при $c=d>0$, а также при $c=0, d>0$.

Предположим затем, что коэффициенты c и d удовлетворяют неравенству

$$\rho(c, d) > 0, \quad \text{Im } \rho(c, d) = 0. \quad (5)$$

Периодическое решение $x_1 \equiv x_2 \equiv x_0(t)$ при этом неустойчиво (для достаточно больших M). Покажем, что аттрактором здесь является одно или два (с точностью до фазового сдвига) других периодических решения $x_1 = x_{01}(t), x_2 = x_{02}(t)$ и $x_1 = x_{02}(t), x_2 = x_{01}(t)$. Введем сначала несколько обозначений. Через $\lambda_0(c, d)$ и $\lambda^0(c, d)$ обозначим корни уравнения $\lambda^2 + 2(\delta + c + d)\lambda + 1 + 4d(\delta + c)$, и пусть при этом $\text{Re } \lambda_0(c, d) \geq \text{Re } \lambda^0(c, d)$. Неравенство (5) означает, что $\lambda_0(c, d) > \lambda_1$. Основным моментом является выделение специального множества начальных условий. Обозначим через $S_0(\gamma)$ множество функций $\varphi(\tau) \in C_{[0, T]}$, которые удовлетворяют условиям $|\varphi(\tau) - A \exp[\lambda_0(c, d)\tau]| \leq \gamma$, а через $s_0(\gamma)$ — отрезок числовой оси $[-\gamma + A\lambda_0(c, d) \exp[\lambda_0(c, d)T], \gamma + A\lambda_0(c, d) \exp[\lambda_0(c, d)T]]$.

Рассмотрим, наконец, множество «начальных условий» системы (3), (4): $S^\pm(\gamma) = \{\pm S_0(\gamma), \pm s_0(\gamma), \mp S_0(\gamma), \mp s_0(\gamma)\}$. В дальнейшем параметр γ предполагается достаточно малым (независимо от M). Пусть $x_j(t), y_j(t)$ ($j=1, 2$) — решение системы (3), (4) с начальным условием из $S^\pm(\gamma)$, заданным при $t \leq T$, т. е. $x_1(\tau) \in \pm S_0(\gamma), y_1(T) \in \pm s_0(\gamma), x_2(\tau) \in \mp S_0(\gamma), y_2(T) \in \mp s_0(\gamma)$. Для определения $x_j(t), y_j(t)$ при $t \in [T, 2T]$ необходимо решить систему линейных неоднородных уравнений. В результате получаем, что в этом интервале асимптотически (при $M \rightarrow \infty$) короткого отрезка времени значения $x_j(t)$ могут лежать в интервале $(-A, A)$ и, в частности,

$$\begin{pmatrix} x_1(2T) \\ x_2(2T) \end{pmatrix} = M \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + O(\gamma + M^{-1}) \right], \quad \begin{pmatrix} y_1(2T) \\ y_2(2T) \end{pmatrix} = M \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + O(\gamma + M^{-1}) \right], \quad (6)$$

где

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \int_0^T \dot{K}(T - \tau) \begin{pmatrix} F(\pm A \exp[\lambda_0(c, d)\tau]) \\ F(\mp A \exp[\lambda_0(c, d)\tau]) \end{pmatrix} d\tau,$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \int_0^T \dot{K}(T - \tau) \begin{pmatrix} F(\pm A \exp[\lambda_0(c, d)\tau]) \\ F(\mp A \exp[\lambda_0(c, d)\tau]) \end{pmatrix} d\tau,$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} K_0(t) + K^0(t), K_0(t) - K^0(t) \\ K_0(t) - K^0(t), K_0(t) + K^0(t) \end{pmatrix},$$

$$K^0(t) = \frac{\exp[\lambda_0(c, d)t] - \exp[\lambda^0(c, d)t]}{\lambda_0(c, d) - \lambda^0(c, d)}.$$

При $t \in [2T, 3T]$ рассматриваемое решение близко (при $M \rightarrow \infty$), а при $t > 3T$ (пока $|x_j(t)| > A$) в точности является решением линейной системы (3), (4) для $F=0$.

Учитывая формулу (6), легко написать решение в явном виде. Это решение в течение асимптотически большого (порядка $\ln M$) отрезка времени убывает (по норме) от значений порядка M до $x_j(t) = \pm A$. Ясно, что порядок такого убывания определяется, в основном, экспоненциальным показателем $\lambda_0(c, d)$. Собственный вектор, отвечающий этому показателю, равен $(1, \lambda_0(c, d))$. Таким образом, при достаточно больших t верна формула

$$x_j(t) = \pm (M/2) [B(-1)^{j+1} + o(1)] \exp[\lambda_0(c, d)(t - 2T)], \quad (7)$$

где

$$B = [\lambda_0(c, d) - \lambda^0(c, d)]^{-1} [a_1 - b_1 - \lambda_1(a - b)].$$

Необходимо, конечно, сделать предположение о невырожденности: $B \neq 0$.

Из (7) видно, что, во-первых, найдется такой момент $t(M) \approx (\lambda_0(c, d))^{-1} \ln M$, что $\max_{j=1,2} |x_j(t(M))| = A$, и, во-вторых, имеют место включения $x_j(\tau + t(M)) \in \pm S_0(\gamma)$, $y_j(T + t(M)) \in \pm s_0(\gamma)$ ($j=1, 2$). Оператор последования Π , определенный по правилу $\Pi(x_j(\tau), y_j(T)) = [x_j(\tau + t(M)), y_j(T + t(M))]$, множество $S^+(S^-)$ преобразует либо само в себя, либо в $S^-(S^+)$ (это зависит от знака числа B). Отсюда уже легко сделать вывод о существовании в S^\pm неподвижной точки оператора Π (или Π^2), которой отвечает периодическое решение $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$ системы (3), (4). Вопрос об устойчивости $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$ связан с изучением асимптотики при $M \rightarrow \infty$ мультипликаторов линеаризованной на x_{0j} , y_{0j} системы. На этом пути удается показать, что при условии (5) построенное периодическое решение экспоненциально орбитально устойчиво. Отметим, что в случае нечетной $F(x)$ периодическое решение $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$ существует и при условии $\operatorname{Re} p(c, d) < 0$, но неустойчиво.

Обратим внимание еще на один важный факт. При условии (5) для периода $t_0(M)$ решения $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$ верна формула $t_0(M) = \nu |\lambda_0(c, d)|^{-1} (1 + o(1)) \ln M$, где $\nu = 1$ при $B > 0$ и $\nu = 2$ при $B < 0$. Тем самым период $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$ больше, чем у функций $x_0(t)$, $y_0(t) = x_0(t)$.

Итак, в этом пункте проиллюстрировано явление диффузионной неустойчивости (задаваемое неравенством (5)) однородного цикла и выявлены устойчивые неоднородные режимы, обусловленные взаимодействием двух автогенераторов. Эти режимы периодические и имеют релаксационную структуру.

3. Случай малой диффузии. Первая перестройка. Выводы, полученные в предыдущем пункте, перестают быть верными в ситуациях, когда вместе с параметром M^{-1} малыми являются коэффициенты диффузии c и d . Дело в том, что в этих случаях оказываются близкими значения λ_1 и $\lambda_0(c, d)$, а значит, теряется однозначность в определении асимптотики решения типа $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$ на участке медленного (и долгого) убывания. Учитывая, что порядок наибольших значений функций $|x_{0j}(t)|$ равен M , а время убывания — $\ln M$, заключаем, что наибольший порядок убывания коэффициентов диффузии, при которых можно ожидать существенное влияние этих коэффициентов на динамику системы, равен $(\ln M)^{-1}$. В связи с этим в системе (3), (4) удобно положить

$$d = \tilde{d} / \ln M, \quad c = \tilde{c} / \ln M, \quad (8)$$

где $\tilde{d} > 0$, $\tilde{c} > 0$. При этих условиях рассмотрим вопрос о динамике системы (3), (4).

Для того чтобы сформулировать основной результат, введем несколько обозначений. Сначала положим $\sigma = \lambda_{01} / |\lambda_1|$, где $\lambda_{01} = -(\delta + \lambda_1)^{-1} [(\tilde{c} + \tilde{d})\lambda_1 + 2d\delta]$. Тогда $\lambda_0(c, d) = \lambda_1 + \lambda_{01} (\ln M)^{-1} + o((\ln M)^{-1})$. Через $\beta(z)$ обозначим определенную при $|z| > 1$ функцию параметра z ,

$$\beta(z) = \begin{cases} |\lambda_1|^{-1} \ln |z|, & 1 < |z| \leq \exp(|\lambda_1|T) \\ T, & |z| > \exp(|\lambda_1|T) \end{cases},$$

и рассмотрим величины $a = a(\alpha)$, $b = b(z)$, $a_1 = a_1(\alpha)$, $b_1 = b_1(z)$, задаваемые равенствами

$$a = \int_0^T K_0(T - \tau) F(A\alpha \exp(\lambda_1 \tau)) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 b &= \int_{\beta(z)}^T K_0(T-\tau) F(Az \exp(\lambda_1 \tau)) d\tau; \\
 a_1 &= \int_0^T \dot{K}_0(T-\tau) F(A\alpha \exp(\lambda_1 \tau)) d\tau, \\
 b_1 &= \int_{\beta(z)}^T \dot{K}_0(T-\tau) F(Az \exp(\lambda_1 \tau)) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Введем затем еще две вспомогательные величины $B_j = B_j(\alpha, z)$:

$$B_j = (a+b)\lambda_2 - (a_1+b_1) + (-1)^j [(a-b)\lambda_2 - (a_1-b_1)] \exp(\sigma). \tag{11}$$

Приступим к определению центральной конструкции этого пункта. Через Γ_1 и Γ_2 обозначим множества лучей на двумерной плоскости вида $\Gamma_1 = \{(\alpha, z), \text{ где } \alpha = \pm 1, |z| \geq 1\}$, $\Gamma_2 = \{(z, \alpha), \text{ где } \alpha = \pm 1, |z| \geq 1\}$ и положим $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Далее, каждому элементу $(\alpha, z) \in \Gamma_1$ ($(z, \alpha) \in \Gamma_2$) поставим в соответствие элемент $(\bar{\alpha}, \bar{z})$ или $(\bar{z}, \bar{\alpha})$ множества Γ по правилу φ :

$$\varphi(\alpha, z) = \begin{cases} (\bar{\alpha}, \bar{z}), & |\bar{z}| \geq 1 \\ (\bar{z}^{-1}, \bar{\alpha}), & |\bar{z}| < 1 \end{cases}, \quad \varphi(z, \alpha) = \begin{cases} (\bar{z}, \bar{\alpha}), & |\bar{z}| \geq 1 \\ (\bar{\alpha}, \bar{z}^{-1}), & |\bar{z}| < 1 \end{cases}. \tag{12}$$

Здесь значения $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\alpha, z)$ и $\bar{z} = \bar{z}(\alpha, z)$ определяются формулами

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} -\text{sing } B_{2_2}, & |B_2 B_1^{-1}| \geq 1 \\ -\text{sing } B_{1_1}, & |B_2 B_1^{-1}| < 1 \end{cases}, \quad \bar{z} = \bar{\alpha} B_2 B_1^{-1}. \tag{13}$$

Таким образом определено отображение φ одномерного множества (состоящего из восьми попарно исходящих из одной точки лучей на плоскости в R^2) в себя. Основным результатом заключается в том, что динамика этого одномерного отображения полностью определяет структуру аттрактора системы (3), (4). Грубым установившимся траекториям одномерного отображения отвечает грубый установившийся режим системы дифференциально-разностных уравнений (3), (4). Например, периодическим траекториям отвечают периодические решения той же устойчивости. При определенных ограничениях на $F(x)$ могут существовать аттракторы отображения φ , расположенные на одном из лучей. В этом случае применима теория одномерных отображений [10]. Отсюда, в частности, приходим к выводу, что динамические свойства решений могут быть достаточно сложными.

Коротко остановимся на вопросах соответствия между траекториями отображения φ и решениями системы (3), (4). Фиксируем, например, элемент $(\alpha, z) \in \Gamma_1$. В терминах системы (3), (4) это означает, что рассматривается решение, начальное условие которого удовлетворяет соотношениям $x_1(\tau) \sim \alpha A \exp(\lambda_1 \tau)$, $y_1(0) \sim \alpha A \lambda_1$, $x_2(\tau) \sim z A \exp(\lambda_1 \tau)$, $y_2(0) \sim z A \lambda_1$, $\tau \in [0, T]$. После асимптотического интегрирования такого решения получаем, например, что $x_1(2T) \sim Ma$, $x_2(2T) \sim Mb$, $y_1(2T) \sim Ma_1$, $y_2(2T) \sim Mb_1$, а через время $t(M)$ порядка $\ln M$ на отрезке $[t(M), t(M) + T]$ приходим к соотношениям

$$x_1(t) \sim \bar{\alpha} A \exp\{\lambda_1 [t - t(M)]\}, \quad x_2(t) \sim \bar{z} A \exp\{\lambda_1 [t - t(M)]\}, \quad |\bar{z}| \geq 1,$$

$$x_1(t) \sim \bar{z}^{-1} A \exp\{\lambda_1 [t - t(M)]\}, \quad x_2(t) \sim \bar{\alpha} A \exp\{\lambda_1 [t - t(M)]\}, \quad |\bar{z}| < 1,$$

и ситуация повторяется с заменой $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$, $z \rightarrow \bar{z}$.

Отметим, что при достаточно больших σ устойчивым является периодическое решение $x_{0j}(t)$, $y_{0j}(t)$, а при больших отрицательных σ — решение $x_j(t) \equiv x_0(t)$. Всплески функций x_1 и x_2 при условии (8) разнесены во времени.

При $\sigma \sim 0$ в описанном здесь отображении φ имеется особенность, которая связана с возможным обращением в нуль величины B . Поэтому необходимо дополнительно предполагать, что $\sigma \neq 0$. Это условие, определяемое коэффициентами диффузии, имеет глубокий смысл. В следующем пункте будет показано, что при определенной малости (вместе с M^{-1}) параметра σ в исходной системе могут происходить существенные перестройки фазовых портретов, что еще больше подчеркивает важную роль малой диффузии в динамике системы (3), (4).

4. Вторая перестройка фазового портрета при уменьшении коэффициентов диффузии. Простой анализ показывает, что еще одно существенное изменение динамических свойств системы (3), (4) при изменении коэффициентов диффузии возможно лишь в том случае, когда величины c и d имеют порядок M^{-1} (при $M \rightarrow \infty$). В связи с этим удобно в (3), (4) положить

$$d = \bar{d}/M, \quad c = \bar{c}/M \quad (\bar{d} > 0, \bar{c} > 0). \quad (14)$$

В качестве основного результата построим отображение φ (одномерного) множества Γ в себя, которое определяет динамику рассматриваемой системы уравнений при условии (14). Для этого введем ряд обозначений. Положим сначала

$$p(t) = Az \exp(\lambda_1 t) + (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \int_T^t \{ \exp[\lambda_1(t - \tau)] \times \\ \times [\Delta + (t - \tau)\lambda_{01}] - \exp[\lambda_2(t - \tau)] [\Delta + (t - \tau)\lambda_{02}] \} \times \\ \times \int_0^\tau K_\delta(\tau - s) \Phi(s) ds d\tau,$$

где

$$\Phi(s) = \begin{cases} F(\alpha A \exp[\lambda_1(s - T)]), & s \leq 2T \\ 0, & s > 2T \end{cases},$$

$$\Delta = \lambda_{01} - \lambda_{02}, \quad \lambda_{0j} = (\delta + \lambda_j)^{-1} [(\bar{c} + \bar{d})\lambda_j + 2d\delta] \quad (j=1, 2).$$

Через $\beta = \beta(z)$ обозначим первый положительный корень уравнения $|p(t)| = A$. Определим затем аналоги величин (9), (10):

$$\kappa = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [(\lambda_1 - \lambda_2)a \exp(\lambda_1 \beta) + (\lambda_1 a - a_1) \exp(\lambda_2 \beta)],$$

$$\kappa_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [\lambda_1(a_1 - \lambda_2 a) \exp(\lambda_1 \beta) + \lambda_2(\lambda_1 a - a_1) \exp(\lambda_2 \beta)],$$

$$\theta = \int_\beta^{\beta+T} K_0(\beta + T - \tau) F(p(\tau)) d\tau, \quad \theta_1 = \int_\beta^{\beta+T} K'_0(\beta + T - \tau) F(p(\tau)) d\tau.$$

С помощью этих формул зададим еще две вспомогательные величины $B_j = B_j(\alpha, z)$:

$$B_1 = \theta_1 - \lambda_2 \theta, \quad B_2 = \kappa_1 - \lambda_2 \kappa. \quad (15)$$

Для завершения конструирования отображения $\varphi \Gamma \rightarrow \Gamma$ осталось лишь, учитывая равенства (15), воспользоваться формулами (12). Параметры α и z имеют для решений (3), (4) тот же смысл, что и в предыдущем пункте. В заключение отметим, что коэффициенты \bar{c} и \bar{d} играют важную роль при описании динамических свойств введенного отображения, а значит, и исходной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujisaka H., Yamada T. // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69. № 1. P. 32.
2. Анищенко В. С., Летафорд Г. Е., Сафонова М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 5. С. 565.
3. Афраймович В. С., Веричев Н. И., Рабинович М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1050.
4. Srogus O., Roth S., Seeling F. F. // Phisica D. 1987. V. 26. № 2. P. 215.
5. Дихтяр В. Б., Старков С. О. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 12. С. 2457.
6. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 12. С. 2389.
7. Дмитриев А. С., Кащенко С. А. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 12. С. 2381.
8. Кащенко С. А. // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 328.
9. Кащенко С. А. // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 327.
10. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка. 1986. — 279 с.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 сентября 1988 г.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE SYSTEM DYNAMICS FROM TWO COUPLED AUTOGENERATORS WITH DELAYED BACK COUPLING

S. A. Kashchenko

Using specific asymptotic methods we investigate complicated steady-state regimes in the system consisted of two diffusually coupled autogenerators with a delay containing a «large» parameter. Special attention is paid to the study of influence of different diffusion coupling on the system dynamics.

Аннотации депонированных статей (Окончание)

Представлены результаты численного расчета разности $\Delta_{кр} = a/\lambda_{кр}^0 - a/\lambda_{кр}^h$, где $a/\lambda_{кр}^0$ соответствует волноводу с волной типа H_{10} , а $a/\lambda_{кр}^h$ — четырехугольным волноводам при плавном изменении геометрического параметра деформации h (a — размер широкой стенки волновода, $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны).

Расчетные данные контролируются сопоставлением с известными точными, соответствующими простым начальным, промежуточным и конечным конфигурациям контура четырехугольного волновода, совпадение с точными значениями достигается с отклонением в 10^{-3} %.

Приведены рассчитанные на основе единого подхода графические зависимости $\Delta_{кр}$ от h для 1) прямоугольного волновода с односторонними и двусторонними усеечениями поперечного сечения, соответствующих переходу от прямоугольного к трапециoidalному с предельным случаем прямоугольного и равнобедренного треугольников; 2) ромбoidalного волновода с изменяющимися размерами диагоналей; 3) прямоугольного волновода с внутренними изломами широкой стенки типа Π -волновода с заостренным ребром.

Расчетные данные хорошо согласуются с результатами, приведенными в [3] и [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. // Зарубежная радиоэлектроника. 1977. № 5. С. 43.
2. Волноводы с поперечным сечением сложной формы / Под ред. В. М. Седых. — Харьков: Вища школа, 1979.
3. Заргано Г. Ф., Ляпин В. П., Михалевский В. С. и др. Волноводы сложных сечений. — М.: Радио и связь, 1986.
4. Каток В. Б., Лозяной В. И., Прохода И. Г. Полые металлические волноводы сложной формы. — Днепропетровск: Гос. ун-т, 1983.
5. Davies J. B. // Proc. IEE. 1972. V. 119. № 1. P. 33.
6. Чумаченко В. П. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 8. С. 1600.
7. Расчет характеристик линий передачи / В. Б. Каток, В. И. Лозяной, А. Б. Олексенко и др. — Днепропетровск: Гос. ун-т, 1985.

Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 7731-В89. Деп. от 28 декабря 1989 г.

УДК 538.56:519.25

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С СИЛЬНЫМИ НЕБЕЛЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

О. В. Музычук

Рассмотрена линейная стохастическая система n -го порядка с гауссовыми марковскими флуктуациями параметров. Установлено, что средняя (или эффективная) частотная характеристика такой системы может быть представлена в виде матричной цепной дроби. Расчет таких дробей нетрудно реализовать на ЭВМ. В качестве примера исследована эффективная частотная характеристика резонансной системы второго порядка с сильными не дельта-коррелированными флуктуациями собственной частоты и потерь. В рассмотренном примере сходимость цепных дробей имеет место во всей области устойчивости системы в среднем.

Как известно, для анализа динамических систем и радиотехнических устройств с гауссовыми флуктуациями параметров используется аппарат марковских процессов и процессов диффузионного типа [1, 2]. Если флуктуации не являются дельта-коррелированными или хотя бы широкополосными в некотором смысле, то трудности анализа существенно возрастают, поскольку приходится расширять пространство переменных, являющихся марковской совокупностью.

В работах [3, 4] (см. также библиографию в [4]) показано, что статистические средние выходного сигнала линейных систем с гауссовыми марковскими флуктуациями одного из параметров можно представить цепными дробями. Если стохастическая система имеет несколько случайных параметров, то, как можно показать, метод, использованный в [4], приводит к матричным цепным дробям. Ниже рассмотрено применение указанного метода для отыскания средней (или эффективной) частотной характеристики линейной стохастической системы довольно общего вида. Метод может быть реализован на ЭВМ и позволяет анализировать статистические средние в системах с сильными небелыми параметрическими воздействиями. В качестве примера исследовано влияние флуктуаций собственной частоты и потерь на эффективную частотную характеристику резонансной системы (стохастического осциллятора). Интенсивности и времена корреляции флуктуаций могут быть по существу произвольными (см. ниже).

Постановка задачи и общее решение. 1) Рассмотрим стохастическую систему, описываемую линейным дифференциальным оператором с флуктуирующими коэффициентами

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) + \tilde{L}\left(\frac{d}{dt}; t\right)y(t) = x(t), \quad (1)$$

x и y — соответственно входная и выходная переменные, L — регулярный, \tilde{L} — случайный операторы, например,

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k}, \quad \tilde{L}\left(\frac{d}{dt}; t\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k(t) \frac{d^k}{dt^k}, \quad (2)$$

где $\tilde{a}_k(t)$ — гауссовы случайные процессы с нулевыми средними. Зададим их вспомогательными стохастическими уравнениями

$$\dot{\tilde{a}}_k + \Pi_k \tilde{a}_k = \eta_k(t), \quad k=0 \div (n-1), \quad (3)$$

где $\eta_k(t)$ — гауссовы δ -коррелированные шумы:

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t-\tau) \rangle = D_{ij} \delta(\tau), \quad \langle \eta_i \rangle = 0.$$

Пусть для определенности входной сигнал гармонический, $x(t) = e^{i\omega t}$, тогда выходной можно представить в виде

$$y(t) = K(i\omega; t) e^{i\omega t},$$

где $K(i\omega; t)$ — стохастическая частотная характеристика системы. Поставим задачу отыскания среднего значения $\bar{K}(i\omega) = \langle K(i\omega; t) \rangle$, которое назовем эффективной частотной характеристикой системы. Заметим, что изложенный ниже метод справедлив и в случае произвольного стационарного входного воздействия.

Поскольку для линейного оператора справедлива формула

$$M\left(\frac{d}{dt}\right) z e^{vt} = e^{vt} M\left(\frac{d}{dt} + v\right) z(t), \quad (4)$$

стохастическое уравнение для $K(i\omega; t)$ можно записать в виде

$$L\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) K(i\omega; t) + \tilde{L}\left(\frac{d}{dt} + i\omega; t\right) K(i\omega; t) = 1. \quad (5)$$

Усредняя (5), на основании (2)–(4) получим для эффективной частотной характеристики следующее незамкнутое уравнение:

$$L(i\omega) \bar{K}(i\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} (i\omega + \Pi_k)^k \langle \tilde{a}_k(t) K(i\omega; t) \rangle = 1. \quad (6)$$

2) Нетрудно видеть, что записывая уравнение для смешанного среднего, входящего в (6), получим зацепление за смешанные кумулянты третьего порядка и т. д. Как показано в Приложении, рекуррентные соотношения для смешанных кумулянтов флуктуирующих параметров и стохастической частотной характеристики имеют вид*

$$L(i\omega + \Pi_{k_1} + \dots + \Pi_{k_m}) \langle \tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, K(i\omega; t) \rangle + \sum_{k_{m+1}} (i\omega + \Pi_{k_1} + \dots + \Pi_{k_m})^{k_{m+1}} \times \\ \times \langle \tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_{m+1}}, K(i\omega; t) \rangle + \sum_{k_{m+1}} \{C_{k_{m+1} k_s}(i\omega + \Pi_{k_1} + \dots + \Pi_{k_{s-1}} + \Pi_{k_{s+1}} + \\ \dots + \Pi_{k_m}) \langle \tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_{s-1}}, \tilde{a}_{k_{s+1}}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, K(i\omega; t) \rangle\}_s = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7a)$$

где $\{\dots\}_s$ — скобка симметризации по некому индексу s , содержащая m членов; $C_{ij} = \langle \tilde{a}_i \tilde{a}_j \rangle$ — совместные корреляционные коэффициенты флуктуаций параметров. В частности, если полосы всех флуктуаций одинаковы, обозначив для краткости

$$\langle \tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, K(i\omega; t) \rangle = K_{k_1, \dots, k_m}(i\omega; t), \quad \Pi_i = \Pi,$$

* Используем обозначение совместных кумулянтов с помощью кумулянтных скобок, введенных в монографии [9].

В формуле (11) минус первая степень означает обращение соответствующей матрицы.

4) Для реализации этого алгоритма на достаточно простых ЭВМ следует выделить в соответствующих выражениях действительные и мнимые части. Обозначив верхними индексами (0) и (1), соответственно, реальную и мнимую части матриц, запишем рекуррентную формулу (11) в виде

$$W_{m-1}^{(0)} = I_m R_m^{-1} C_m^{(0)} + J_m R_m^{-1} C_m^{(1)}, \quad W_{m-1}^{(1)} = I_m R_m^{-1} C_m^{(1)} - J_m R_m^{-1} C_m^{(0)}, \quad (13)$$

$$|\bar{K}| = [(L^{(0)} + W_1^{(0)})^2 + (L^{(1)} + W_1^{(1)})^2]^{-1,2}.$$

Здесь для краткости обозначено

$$I_m = B_{m-1}^{(0)}(A_m^{(0)} + W_m^{(0)}) + B_{m-1}^{(1)}(A_m^{(1)} + W_m^{(1)}), \quad (14)$$

$$J_m = B_{m-1}^{(0)}(A_m^{(1)} + W_m^{(1)}) - B_{m-1}^{(1)}(A_m^{(0)} + W_m^{(0)}),$$

$$R_m = (A_m^{(0)} + W_m^{(0)})^2 + (A_m^{(1)} + W_m^{(1)})^2,$$

минус первая степень означает обращение соответствующих матриц. Заметим, что для системы с одним флуктуирующим параметром все матрицы в (13), (14) превращаются в алгебраические выражения.

Эффективная частотная характеристика осциллятора с флуктуирующими параметрами. Рассмотрим в качестве примера, представляющего интерес для ряда задач статистической радиофизики, осциллятор с флуктуирующими параметрами

$$\ddot{y} + 2h(1 + \beta(t))\dot{y} + \Omega^2(1 + \alpha(t))y = \Omega^2 x(t).$$

Введя безразмерное время $\theta = \Omega t$, запишем последнее уравнение в виде ($\delta = 2h/\Omega = Q^{-1}$, Q — добротность)

$$y'' + \delta(1 + \beta)y' + (1 + \alpha)y = x. \quad (15)$$

Здесь и ниже штрих — производная по θ . Флуктуации собственной частоты и потерь зададим вспомогательными уравнениями

$$\alpha' + \nu_1 \alpha = \eta_1(\theta), \quad \beta' + \nu_2 \beta = \eta_2(\theta), \quad (16)$$

где $\nu_1 = \Pi_\alpha/\Omega$, $\nu_2 = \Pi_\beta/\Omega$ — нормированные полосы флуктуаций.

Рассмотрим для простоты влияние шумов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ по отдельности. На основании (10), (15), (16) находим цепную дробь для эффективной частотной характеристики системы с флуктуациями $\alpha(t)$:

$$\bar{K}(iv) = \frac{1}{L(iv) - \frac{D_1}{L(iv + \nu_1) - \frac{2D_1}{L(iv + 2\nu_1) - \frac{3D_1}{L(iv + 3\nu_1) - \dots}}}, \quad (17a)$$

где $D_1 = \langle \alpha^2 \rangle$ — интенсивность флуктуаций, $\nu = \Omega/\omega$ — нормированная частота, $L(z) = z^2 + \delta z + 1$.

Для системы с флуктуациями потерь $\beta(t)$ аналогично находим ($D_2 = \langle \beta^2 \rangle$)

$$\bar{K}(iv) = \frac{1}{L(iv) - \frac{D_2(iv)(iv+v_2)}{L(iv+v_2) - \frac{2D_2(iv+v_2)(iv+2v_2)}{L(iv+2v_2) - \frac{3D_2(iv+2v_2)(iv+3v_2)}{L(iv+3v_2) - \dots}}}} \quad (176)$$

Как показывает численный анализ, проведенный на ПЭВМ, действительные и мнимые части приведенных цепных дробей сходятся в области статистической устойчивости системы в среднем. Скорость сходимости замедляется с уменьшением ширины полос флуктуирующих параметров (см. табл. 1).

В табл. 1 указаны номера приближений N^* , обеспечивающие заданную абсолютную точность $\epsilon = 10^{-3}$ для значений модуля частотной характеристики системы с флуктуациями собственной частоты. Параметр $\mu_1 = Q \langle \alpha^2 \rangle v_1^{-1}$ пропорционален спектральной интенсивности флуктуаций (для случая белых шумов $\alpha(t)$ условия среднеквадратичной и средней устойчивости системы, соответственно, таковы: $\mu_1 < 1$ и $\mu_1 < 2$).

Таблица 1

$\mu_1 \backslash v_1$	0,5	1	2	3
4	2	3	4	5
1	3	3	4	5
0,25	4	4	5	6

На рис. 1 показана зависимость модуля нормированной частотной характеристики от параметров μ_1 и v_1 (K_0 — значение невозмущенной характеристики на резонансной частоте). Видно, что с ростом интенсивности и с уменьшением ширины спектра флуктуаций ухудшается эффективная добротность и смещается резонансная частота. Заметим, что низкочастотные флуктуации (кривая 3б) сильнее портят добротность, чем более широкополосные (кривая 3а), хотя смещение резонанса больше в случае широкополосных воздействий.

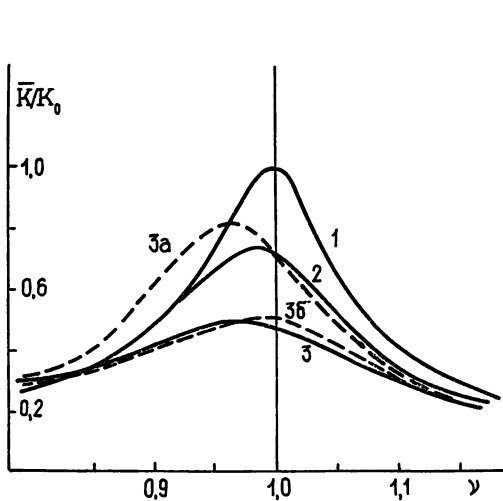


Рис. 1.

Рис. 1. Эффективная частотная характеристика осциллятора с флуктуациями собственной частоты (невозмущенная добротность $Q=10$):

Кривая 1 — $\mu_1=0$; кривая 2 и 3 — $v_1=1$, $\mu_1=1$ и $\mu_1=3$ соответственно; кривые 3а и 3б — $\mu_1=3$, $v_1=4$ и $v_1=0,25$ соответственно.

Рис. 2. Эффективная частотная характеристика осциллятора с флуктуациями потерь ($Q=10$):

Кривая 1 — $\mu_2=0$; кривые 2 и 3 — $v_2=1$, $\mu_2=1$ и $\mu_2=2$ соответственно. Кривые 2а и 2б — $\mu_2=1$, $v_2=4$ и $v_2=0,25$ соответственно.

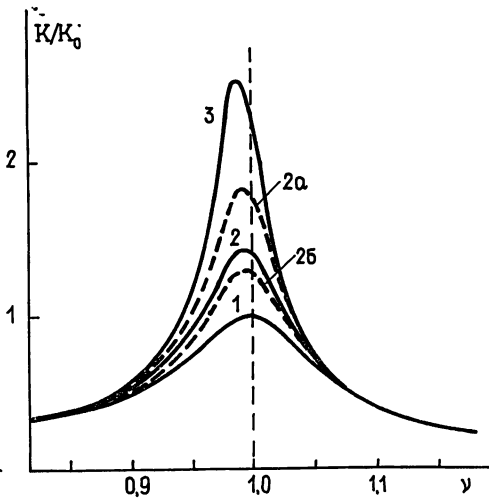


Рис. 2.

* Второе приближение в нашей терминологии есть известное приближение Бурре, справедливое при широкополосных и не слишком сильных параметрических воздействиях (см., например, [2]).

На рис. 2 показана зависимость эффективной частотной характеристики от спектральной интенсивности $\mu_2 = 2\langle\beta^2\rangle\nu_2^{-1}$ и полосы флуктуаций потерь ν_2 . (Для белых флуктуаций условия среднеквадратичной устойчивости и устойчивости в среднем имеют вид $\mu_2 < 1$ и $\mu_2 < 2$.) Здесь с ростом интенсивности параметрического воздействия растет «эффективная» добротность. Это, разумеется, не означает, что с ростом μ_2 улучшаются фильтрующие свойства системы, поскольку хорошо известно, что при этом быстрее растет некогерентный шум. Смещение резонанса здесь несколько меньше, чем при наличии флуктуаций $\alpha(t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе [4] установлена следующая коммутационная формула для кумулянтных (но не моментных!) скобок:

$$M\left(\frac{d}{dt} + m\Pi\right)\langle\alpha(t), {}^{[m]}y(t)\rangle = \left\langle\alpha(t), {}^{[m]}M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t)\right\rangle, \quad (\text{П.1})$$

где $\alpha(t)$ — гауссов марковский процесс, заданный уравнением типа (3), $y(t)$ — функционал от α , M — любой линейный оператор. Естественным обобщением (П.1) на многомерный случай является соотношение

$$M\left(\frac{d}{dt} + \sum_{s=1}^m \Pi_s\right)\langle\alpha_1, \dots, \alpha_m, y\rangle = \left\langle\alpha_1, \dots, \alpha_m, M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t)\right\rangle. \quad (\text{П.2})$$

Поддействовав оператором системы $L\left(\frac{d}{dt} + i\omega + \Pi_{k_1} + \dots + \Pi_{k_m}\right)$ на совместный кумулянт вида $\langle\tilde{a}_{k_1}, \tilde{a}_{k_2}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, K(i\omega; t)\rangle$, с учетом (2) — (4), (П.2) получим

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt} + i\omega + \Pi_{k_1} + \dots + \Pi_{k_m}\right)\langle\tilde{a}_{k_1}, \tilde{a}_{k_2}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, K(i\omega; t)\rangle = \\ = \left\langle\tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, L\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)K(i\omega; t)\right\rangle = \\ = - \sum_{k_{m+1}} \left\langle\tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, \tilde{a}_{k_{m+1}}\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)^{k_{m+1}}K(i\omega; t)\right\rangle = \dots \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Используя формулу размыкания кумулянтных скобок, содержащих произведение случайных процессов [4, 5],

$$\begin{aligned} \langle\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta z\rangle = \langle\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta, z\rangle + \\ + \sum_{s=1}^m \langle\alpha_s \beta\rangle \langle\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_m, z\rangle, \quad m=1, 2, \dots \end{aligned}$$

(α, β — гауссовы процессы, z — случайный процесс, статистически связанный с ними), запишем правую часть (П.3) в виде

$$\begin{aligned} \dots = - \sum_{k_{m+1}} \left[\left\langle\tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)^{k_{m+1}}K(i\omega; t)\right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle\tilde{a}_{k_{m+1}} \tilde{a}_{k_s}\right\rangle \left\langle\tilde{a}_{k_1}, \dots, \tilde{a}_{k_{s-1}}, a_{k_{s+1}}, \dots, \tilde{a}_{k_m}, \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)^{k_{m+1}}K(i\omega; t)\right\rangle \right]_s, \end{aligned}$$

где $\{\dots\}_s$ — скобка симметризации по индексу s . Еще раз используя

формулу (П.1), выносим дифференциальный оператор за кумулянтные скобки, а затем положим всюду $d/dt \equiv 0$, поскольку нас интересуют только стационарные значения всех статистических характеристик. Тем самым мы приходим к рекуррентной формуле (7а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
2. Кляцкин Б. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
3. Музычук О. В. // ТМФ. 1976. Т. 28. № 3. С. 371.
4. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 10. С. 1246.
5. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.

Горьковский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
26 сентября 1988 г.

EFFECTIVE FREQUENCY CHARACTERISTIC OF THE LINEAR SYSTEM WITH INTENSIVE NON-WHITE FLUCTUATIONS OF PARAMETERS

O. V. Muzychuk

N-order linear stochastic system with Gaussian Markov fluctuations of parameters is considered. It is stated that mean (or effective) frequency characteristic of such systems may be represented in the form of matrix chain fraction. As an example the effective frequency characteristic of second-order system with non delta-correlated fluctuations of its parameters has been investigated. In the example shown the chain fractions are converged in whole mean-stability region.

Аннотации депонированных статей

УДК 621.372.823

ГИБРИДНЫЕ ВОЛНЫ В ЭКРАНИРОВАННОМ КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

В. Б. Казанский, И. В. Коцаревская

Исследованы собственные режимы экранированного кольцевого волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением методом двухсторонних эквивалентных граничных условий, предусматривающих произвольную пространственную зависимость полей. Посредством функционального матричного оператора установлена связь между полями в диэлектрических слоях. Решение задачи в базе продольных волн приводит к дисперсионным уравнениям, в матричные элементы которых входят слагаемые, автономно ответственные за влияние металлических и диэлектрических компонент волновода. Эффективность развитого подхода иллюстрируется численно-аналитическим анализом спектра собственных волн, их фазочастотных характеристик, критического режима. Указаны новые функциональные возможности металлодиэлектрического волновода при введении в его внутреннюю полость аксиально симметричной проводящей поверхности.

Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 170-В90. Деп. от 9 января 1990 г.

УДК 517.27

СВОЙСТВА УСЛОВНОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА ЧАСТИЧНО ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ ТИПА ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Ю. А. Кравцов

Дана новая интерпретация пробным функциям в условном характеристическом функционале (УХФ), а именно: пробные функции трактуются как возможные модельные процессы $z(t)$, аппроксимирующие данный случайный процесс $y(t)$ на основе восстановленных динамических уравнений. С этих позиций выявлены некоторые особенности УХФ динамического хаоса: найден явный вид УХФ на интервалах τ , меньших времени детерминированного поведения странного аттрактора τ_{det} , установлен линейный рост логарифма УХФ на тех же интервалах времени, найден вид УХФ в промежуточной области $\tau \sim \tau_{det}$, отмечен факт забывания начальных условий при $\tau \gg \tau_{det}$.

1. Условный характеристический функционал. Рассмотрим условный характеристический функционал (УХФ) случайного процесса

$$\Phi_y(z, t | z^0, t^0) = \langle \exp[i\alpha(y, z)] \rangle, \quad (1)$$

построенный на специальном классе пробных функций $z(t) = z(t | z^0, t^0)$, которые в момент времени t^0 принимают значения $z^0 \equiv z(t^0)$. Через (y, z) в (1) обозначено скалярное произведение функций y и z , т. е. интеграл от $y(t)z(t)$ в пределах от t^0 до t :

$$(y, z) = \int_{t^0}^t y(t')z(t')dt'. \quad (2)$$

Для определенности примем, что процессы y и z имеют нулевые (по времени) средние значения, что не снижает общность рассмотрения.

В отличие от традиционного определения характеристического функционала в показатель экспоненты в (1) введен размерный множитель α , такой, чтобы весь показатель в целом был безразмерным. Благодаря этому можно отказаться от обычно не оговариваемого, но неявно подразумеваемого требования, чтобы размерности исследуемого процесса $y(t)$ и пробной функции $z(t)$ были обратными. Более того, с введением множителя α процессы $y(t)$ и $z(t)$ можно считать одноразмерными. В качестве α можно взять, например, величину $(\sigma_y^2 \sigma_z^2 \tau_y \tau_z)^{-1/2}$, где σ_y^2 и σ_z^2 — дисперсии, а τ_y и τ_z — времена корреляции процессов $y(t)$ и $z(t)$.

Пробные функции $z(t)$, одномерные с $y(t)$, интересны и важны тем, что с их помощью можно попытаться прогнозировать наблюдаемый случайный процесс $y(t)$ на некотором интервале (t, t^0) , используя те или иные модельные динамические уравнения. Естественным (но не единственно возможным) начальным условием z^0 для прогноза $z(t)$ служит значение исследуемого процесса $y^0 \equiv y(t^0)$, так что $z^0 = y^0$. Таким образом, пробные функции приобретают смысл прогностических модельных процессов, при этом исследуемые случайные функции $y(t)$, допускающие прогнозирование на конечных интервалах времени, будут принадлежать классу частично детерминированных процессов [1-3]. Цель этой заметки — выявить свойства УХФ именно для частично де-

терминированных процессов, к которым относятся и процессы типа детерминированного хаоса.

2. Явное выражение для условного характеристического функционала незашумленного хаоса. Не представляет труда записать УХФ для идеального, т. е. для незашумленного динамического хаоса $y(t) = F(t)$, где $F(t)$ — функция, удовлетворяющая детерминированному уравнению, демонстрирующему хаотическое поведение. Многооточечная плотность вероятности процесса $y(t)$ дается произведением δ -функций:

$$\omega(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_N, t_N) = \prod_{j=1}^N \delta(y_j - F(t_j)). \quad (3)$$

Разбивая интервал (t^0, t) на N частей, усредняя характеристический функционал (1) с плотностью вероятности (3) и переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получим весьма простой результат:

$$\Phi_y(z, t | z^0, t^0) = \exp[i\alpha(F, z)]. \quad (4)$$

3. Условный характеристический функционал для зашумленного хаоса. Прогноз $z(t)$, основанный на детерминированных уравнениях, отличается от наблюдаемого процесса $y(t)$ в силу трех основных причин [3–5]: из-за флуктуационных воздействий $f(t)$ в реальной системе, из-за инструментальных шумов $v(t)$, неизбежно сопровождающих любой наблюдаемый процесс $y(t)$, и из-за неточности прогностического модельного процесса $z = F_1(t)$ по сравнению с незашумленным процессом $F(t)$. Исходя из этого представим разность $\eta = y - z$ в виде суммы трех слагаемых $\eta = \eta_f + \eta_v + \eta_F$, где $\eta_F = F - F_1$. Величины η_f и η_v , вычисленные в первом порядке теории возмущений, ограниченных на интервалах времени, линейны относительно шумов $f(t)$ и $v(t)$.

Делая естественное допущение о нормальности шумов $f(t)$ и $v(t)$, мы можем получить явное выражение для функционала (1):

$$\begin{aligned} \Phi_y(z, t | z^0, t^0) &= \langle \exp[i\alpha(\eta_f + \eta_v + \eta_F + z, z)] \rangle = \\ &= \exp[i\alpha(\eta_F + z, z)] \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2} \langle (\eta_f, z)^2 \rangle - \frac{\alpha^2}{2} \langle (\eta_v, z)^2 \rangle\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Времена τ_f и τ_v , начиная с которых вклад слагаемых с η_f и η_v становится заметным, оцениваются соответственно из условий

$$\frac{\alpha^2}{2} \langle (\eta_f, z)^2 \rangle \sim 1 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha^2}{2} \langle (\eta_v, z)^2 \rangle \sim 1. \quad (6)$$

При выполнении неравенства

$$\tau \ll \tau_1 \equiv \min(\tau_v, \tau_f) \quad (7)$$

вкладом шумов $f(t)$ и $v(t)$ можно пренебречь, так что неравенство (7) представляет собой условие применимости приближенной формулы (4). Более слабое условие $\tau \ll \tau_1$ ограничивает область применимости самой формулы (5), так как при $\tau > \tau_1$ уже нельзя ограничиваться первым (линейным) приближением теории возмущений для вычисления η_f и η_v .

4. Свойства УХФ в области детерминированного поведения исследуемого процесса $y(t)$. Будем рассматривать плоскость как символическое изображение пространства пробных функций $z(t)$. Сами функции $z(t)$ изобразим стрелками, длина которых характеризует время детерминированного (т. е. предсказуемого) поведения τ_{det} процесса y относительно модельного процесса z . В течение этого времени ход исследуемого случайного процесса $y(t)$ удовлетворительно описывается модельным процессом $z(t)$ в смысле выполнения неравенства

$$|\alpha(\eta, z)| \leq 1. \quad (8)$$

Из этого неравенства, ограничивающего величину всех компонент η_f , η_v и η_F невязки $\eta = y - z$, следует, что

$$\tau_{det} \sim \min(\tau_f, \tau_v, \tau_F) = \min(\tau_1, \tau_F), \quad (9)$$

где τ_f и τ_v оцениваются из (6), а τ_F — из условия $|\alpha(\eta_F, z)| \leq 1$, при котором еще не очень существенна «модельная» невязка $\eta_F = F - z$. Можно убедиться, что неравенству (8) отвечает условие $D(y|z) \geq 1/2$, где $D(y|z)$ — степень детерминированности процесса $y(t)$ относительно прогностической модели $z(t)$, определенная как нормированная функция корреляции y и z . Поэтому оценка (9) согласуется с оценками τ_{det} , проведенными в работах [1-3], а также в предшествующих работах [4, 5].

Жирной стрелкой на рис. 1 изображена наилучшая предсказательная функция z_{opt} , «длина» которой отвечает интервалу времени $\min(\tau_f, \tau_v) = \tau_1$, поскольку в этом случае $\eta_F = 0$, $\tau_F = \infty$ и $\tau_{det} = \tau_1$. Интервал τ_1 служит здесь горизонтом предсказуемости (этот термин был предложен Лайтхиллом [6]). Внешность круга $\tau = \tau_1$ (область 1 на рис. 1) отвечает области заведомо непредсказуемого поведения наблюдаемого процесса $y(t)$. Существенно, что горизонт предсказуемости τ_1 может заметно превышать время корреляции $\tau_c = \min(\tau_y, \tau_z)$, характеризующее процессы y и z [1-5].

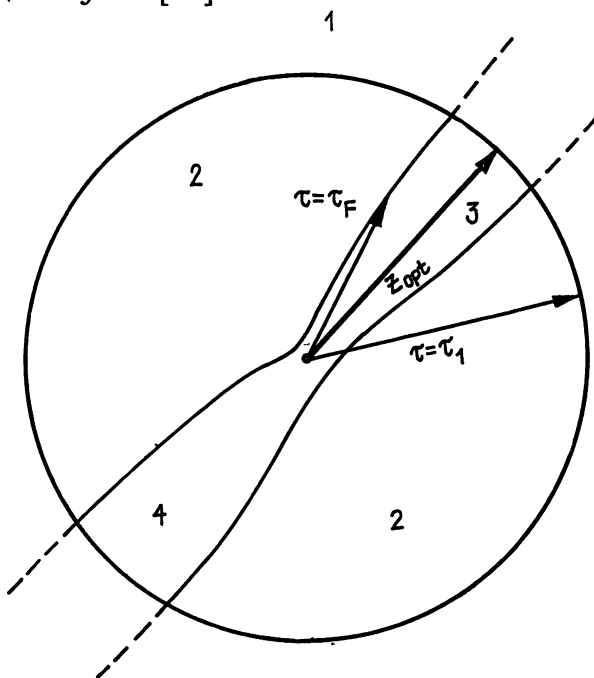


Рис. 1. Схематическое изображение характерных областей в пространстве модельных функций:

- 1 — область заведомо непредсказуемого поведения ($\tau > \tau_1$);
- 2 — область потери памяти о начальных условиях ($\tau > \tau_F$);
- 3 — область предсказуемого поведения ($\tau < \tau_F$, $\tau < \tau_1$);
- 4 — область предсказуемости при движении вспять во времени.

Основная часть 2 внутренности круга $\tau = \tau_1$ отвечает области применимости формулы (4) для идеального (бесшумного) хаоса, тогда как в непосредственной окрестности окружности $\tau = \tau_1$ вместо (4) вступает в силу формула (5). Поскольку возмущения η_f и η_v возрастают экспоненциально ($\propto \exp(\lambda^+ t)$, где $\lambda^+ > 0$ — наибольший ляпуновский показатель), формула (5) начинает заметно отличаться от (4) лишь в узком кольце шириной $\Delta\tau \sim 1/\lambda^+ \sim \tau_c$ возле горизонта предсказуемости $\tau = \tau_1$.

Для пробных функций $z(t)$, отличных от оптимальной модели $z_{opt} = F(t)$, длина стрелки τ_{det} уменьшается по сравнению с τ_1 и фактически совпадает с τ_F . Тем самым в пространстве пробных функций z выделяется пучок функций с $\tau < \tau_F$, в определенном смысле «коллинеарных» дан-

ной функции $z_{\text{opt}}=F(t)$ (область 3 на рис. 1). Для подавляющего большинства других, неколлинеарных функций скалярное произведение (F, z) и вместе с ним время $\tau_{\text{det}} \sim \tau_F$ становятся малыми. Для них область предсказуемого поведения сужается до величины порядка τ_c (перетяжка области 3).

При движении вспять во времени также имеется некоторая область согласованности 4, но для нее горизонт предсказуемости τ_1 следует оценивать, исходя из наибольшего по модулю отрицательного ляпуновского показателя λ^- .

5. Подобласть линейного роста логарифма УХФ. Внутри области предсказуемости 3 (см. рис. 1), т. е. в области $\tau < \tau_F$, можно выделить подобласть $\tau_c \ll \tau \leq \tau_F$, в которой функции y и z близки F , а интеграл (2) можно заменить его средним (точнее, «самоусредненным») значением

$$(y, z) \approx (F, F) = \int_{i^0}^t F^2(t') dt' \cong \sigma_F^2 \tau,$$

где $\sigma_F^2 \equiv \langle F^2 \rangle$. В результате

$$\Phi_y \cong \exp(i\alpha\sigma_F^2 \tau),$$

при этом логарифм УХФ оказывается линейной функцией временного интервала $\tau = t - i^0$:

$$\ln \Phi_y = i\alpha\sigma_F^2 \tau, \quad \tau_c \ll \tau < \tau_{\text{det}}.$$

6. Область потери динамической памяти о начальных условиях. Вне области детерминированного поведения 3, но еще внутри круга 2, ограниченного горизонтом предсказуемости $\tau = \tau_1$, т. е. при $\tau_F < \tau < \tau_1$, УХФ также допускает грубую оценку. В этой области скалярное произведение (y, z) как бы «замораживается» на значении $\sigma_F^2 \tau_F$, при этом

$$\Phi_y \cong \exp(i\alpha\sigma_F^2 \tau_F).$$

Таким образом, при $\tau > \tau_F$ (и тем более за горизонтом предсказуемости $\tau = \tau_1$) начальное время i^0 исчезает из выражений для УХФ, что отвечает полной потере динамической памяти о начальных условиях.

Указанные здесь особенности поведения УХФ на классе предсказательных пробных функций представляются нам новыми, хотя практическую ценность высказанных соображений еще предстоит выяснить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Илькова Л. Ш., Кравцов Ю. А., Мергелян О. С., Эткин В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 7. С. 929.
2. Кравцов Ю. А., Петников В. Г. // ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 871.
3. Кравцов Ю. А. // УФН. 1989. Т. 158. № 1. С. 93.
4. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 8. С. 992.
5. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 12. С. 2358.
6. Lighthill J. // Proc. Roy. Soc. 1986. V. A407. P. 35.

Институт общей физики
АН СССР

Поступила в редакцию
24 октября 1988 г.

PROPERTIES OF THE CONDITIONAL CHARACTERISTIC FUNCTIONAL OF PARTIALLY DETERMINISTIC PROCESSES OF DYNAMIC CHAOS TYPE

Yu. A. Kravtsov

The functions, entering in the conditional characteristics functional (CCF) are treated as a model (hypothetical) processes $z(t)$, approximating a given random process $y(t)$ on the basis of dynamic equation. Some peculiarities of CCF for deterministic chaos are revealed: an explicit form of CCF is obtained for time-intervals τ smaller as compared with the time of deterministic behavior of the strange attractors τ_{det} ; the linear growth of logarithm of CCF with time for the same time-intervals; the asymptotic form of CCF behavior in the intermediate region $\tau \sim \tau_{\text{det}}$ are found and finally «forgetting» of initial values for large intervals $\tau \gg \tau_{\text{det}}$ is pointed out.

УДК 621.371.15

ПРЕЛОМЛЕНИЕ И КОГЕРЕНТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ СРЕДЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Е. Е. Городничев, С. Л. Дударев,
Д. Б. Рогозкин, М. И. Рязанов

На основе решения уравнения Дайсона найдено среднее поле волн при произвольных углах падения излучения на полубесконечную среду со случайными флуктуациями диэлектрической проницаемости. Показано, что в случае крупномасштабных неоднородностей вычисление среднего поля требует учета нелокальности взаимодействия волн и не сводится к аналогичной акустической задаче для среды с эффективным волновым числом.

1. В работе [1] задача о вычислении среднего поля волн, взаимодействующих с плоским слоем случайно-неоднородной рассеивающей среды, сведена к аналогичной акустической задаче для однородного слоя с эффективным волновым числом $k_{эфф}$. Однако, как показано ниже, такой вывод оказывается корректным лишь в случае, когда длина волны λ падающего излучения намного превышает радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости b ($\lambda \gg b$) и рассеяние на неоднородностях среды является практически изотропным.

Что касается среды с крупномасштабными неоднородностями ($\lambda \leq b$), то в этой ситуации описать преломление и отражение волн путем введения одного лишь комплексного волнового числа $k_{эфф}$ в общем случае не удается. Физически это связано с тем, что при рассеянии коротковолнового излучения нельзя пренебрегать эффективным размытием границы случайной среды на величину порядка масштаба нелокальности взаимодействия волн с флуктуациями диэлектрической проницаемости.

Ниже на основе решения уравнения Дайсона найдено среднее поле волн, взаимодействующих с полубесконечной средой со случайными неоднородностями. Получены простые выражения для амплитуд прошедшей и отраженной волн. Показано, что для среды с крупномасштабными неоднородностями описание [1] оправдано только в случае скользкого падения излучения.

2. Пусть на границу полубесконечной среды со случайными рассеивающими неоднородностями под углом ξ_0 к поверхности (ξ_0 — угол скольжения) падает плоская волна единичной амплитуды с волновым вектором k_0 .

В пренебрежении поляризационными эффектами распространение волн в среде можно описать уравнением Дайсона для среднего поля [1, 2]:

$$\psi(r) = \exp(ik_0 r) + k_0^4 \iint dr' dr'' G_0(r-r') B_\epsilon(r', r'') G_0(r'-r'') \psi(r''), \quad (1)$$

где $G_0(r) = \exp(ik_0 r) / 4\pi r$ — функция Грина волн в свободном пространстве, $B_\epsilon(r', r'') = \langle \delta\epsilon(r') \delta\epsilon(r'') \rangle$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости среды. Предполагая, что среда является статистически однородной и изотропной, будем, как обычно, считать, что корреляционная функция зависит только от абсолютного значения разности $|r' - r''|$ [1-4]:

$$B_\epsilon(r', r'') = B_\epsilon(|r' - r''|).$$

Пренебрежение в уравнении (1) корреляционными функциями более высокого порядка предполагает относительно малость амплитуды флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$\langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \ll \begin{cases} (k_0 b)^{-2}, & k_0 b \gg 1 \\ (k_0 b)^{-4}, & k_0 b \ll 1 \end{cases}. \quad (2)$$

Интегрирование по переменным r' , r'' в уравнении (1) проводится по области, занимаемой средой, z' , $z'' > 0$ (ось z перпендикулярна к поверхности и направлена в глубь среды).

Геометрия задачи позволяет искать решение уравнения (1) в следующем виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(z) \exp(i k_{0\parallel} r_{\parallel}), \quad (3)$$

где $r_{\parallel} = (x, y)$, $k_{0\parallel} = (k_{0x}, k_{0y})$.

Подставляя это выражение в уравнение (1), после несложных преобразований получаем ($k_{0z} = k_0 \sin \zeta_0$)

$$\psi(z) = \exp(i k_{0z} z) + \frac{i k_0^2}{2 k_{0z}} \int_0^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dz'' \psi(z'') \times \quad (4)$$

$$\times \exp[i k_{0z} |z - z'|] f(|z' - z''|, k_{0\parallel}).$$

Входящая в (4) функция $f(|z|, k_{0\parallel})$ определяется соотношением

$$f(|z|, k_{0\parallel}) = 2\pi k_0^2 \int_0^{\infty} \rho d\rho G_0(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \times \quad (5)$$

$$\times B_e(\sqrt{\rho^2 + z^2}) J_0(k_{0\parallel} \rho),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Например, для корреляционной функции экспоненциального типа

$$B_e(r) = \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \exp(-\alpha r) \quad (6)$$

значение $f(|z|, k_{0\parallel})$ равно

$$f(|z|, k_{0\parallel}) = \frac{k_0^2 \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle}{2(\beta - i\alpha)} \exp[(i\alpha - \beta)|z|], \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(k_{0z}^2 - x^2)^2 + 4x^2 k_0^2} + k_{0z}^2 - x^2}, \quad (8)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(k_{0z}^2 - x^2)^2 + 4x^2 k_0^2} + x^2 - k_{0z}^2} \quad (k_{0z}^2 = k_0^2 - k_{0\parallel}^2).$$

Отметим, что фурье-образ функции $f(|z|, k_{0\parallel})$ по переменной z — $\hat{f}(k_{0z}, k_{0\parallel})$ — имеет смысл «борновской» средней амплитуды однократного рассеяния волн на нулевой угол на флуктуациях диэлектрической проницаемости среды. Для экспоненциальной корреляционной функции (6)

$$\hat{f}(k_z, k_{0\parallel}) = \frac{k_0^2 \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle}{(x - i k_0)^2 + k_{0\parallel}^2 + k_z^2}, \quad \hat{f}(k_{0z}, k_{0\parallel}) = \frac{k_0^2 \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle}{x^2 - 2ixk_0}. \quad (9)$$

Уравнение (4) по своему виду совпадает с волновым уравнением в интегральной форме с нелокальной комплексной эффективной диэлектрической проницаемостью

$$(\hat{\epsilon}_{\text{эфф}} - 1)\psi = \int_0^{\infty} dz' f(|z-z'|, k_{0\parallel}) \psi(z'). \quad (10)$$

В рассматриваемой ситуации, когда флуктуации диэлектрической проницаемости невелики (условие (2)), глубина затухания среднего поля $\psi(z)$ в среде для всего диапазона углов скольжения ζ_0 намного превышает характерный масштаб изменения функции $f(|z|, k_{0\parallel})$ по переменной z (т. е. масштаб нелокальности $\hat{\epsilon}_{\text{эфф}}$ (10)). Это обстоятельство существенно упрощает задачу и позволяет развить достаточно общий приближенный метод решения уравнения (4) для среднего поля в среде.

В глубине среды на расстояниях от поверхности, намного превышающих масштаб нелокальности эффективной диэлектрической проницаемости, ограниченность пределов интегрирования в уравнении (4) становится несущественной и среднее поле описывается теми же параметрами, что и в бесконечной среде [2]: локальной эффективной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{эфф}} = 1 + f(\gamma, k_{0\parallel})$ и постоянной распротрашения γ , которая является корнем дисперсионного уравнения

$$\gamma^2 = k_{0z}^2 + k_0^2 f(\gamma, k_{0\parallel}) \quad (11)$$

с наименьшей мнимой частью. При этом

$$\psi|_{z \rightarrow \infty} \approx Ae^{i\gamma z}, \quad (\hat{\epsilon}_{\text{эфф}} - 1)\psi \approx f(\gamma, k_{0\parallel})\psi, \quad (12)$$

где постоянная A — амплитуда прошедшей волны. Процессы отражения и преломления среднего поля на границе среда — вакуум сказываются лишь на величине A .

Используя очевидные асимптотические свойства (12), преобразуем уравнение (4) следующим образом. Введем локальную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\text{эфф}}(z) = [1 + f(\gamma, k_{0\parallel})\theta(z)]$, ($\theta(z)$ — единичная ступенчатая функция) и запишем (4) в дифференциальной форме:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_{0z}^2 + k_0^2(\epsilon_{\text{эфф}}(z) - 1) \right] \psi = k_0^2(\epsilon_{\text{эфф}} - \hat{\epsilon}_{\text{эфф}}) \psi. \quad (13)$$

После этого, используя запаздывающую функцию Грина ($z' > 0$)

$$G(z, z') = \begin{cases} -\frac{i}{k_{0z} + \gamma} \exp(i\gamma z' - ik_{0z}z), & z < 0 \\ \frac{i}{2\gamma} \left[\frac{k_{0z} - \gamma}{k_{0z} + \gamma} \exp[i\gamma(z+z')] - \exp(i\gamma|z-z'|) \right], & z > 0 \end{cases} \quad (14)$$

и собственные функции

$$\psi_0(z) = \begin{cases} \exp(ik_{0z}z) + \frac{k_{0z} - \gamma}{k_{0z} + \gamma} \exp(-ik_{0z}z), & z < 0 \\ \frac{k_{0z}}{k_{0z} + \gamma} e^{i\gamma z}, & z > 0 \end{cases} \quad (15)$$

левой части уравнения (13), преобразуем это уравнение к интегральному виду

$$\psi(z) = \psi_0(z) + k_0^2 \int_0^{\infty} dz' G(z, z') [\epsilon_{\text{эфф}}(z') - \hat{\epsilon}_{\text{эфф}}] \psi(z'). \quad (16)$$

Преимущество перехода к новому базису основано на выделении в явном виде возмущения, обусловленного только нелокальностью эффективной диэлектрической проницаемости. При этом важно, что возмущение

$[\epsilon_{\text{эфф}} - \epsilon_{\text{эфф}}^{\wedge}] \psi$ оказывается отличным от нуля лишь вблизи границы среды и быстро затухает на расстояниях от поверхности, превышающих масштаб

нелокальности $\epsilon_{\text{эфф}}^{\wedge}$ (рис. 1). Как показывает анализ, если флуктуации диэлектрической проницаемости среды относительно малы (неравенство (2)), то учет нелокальности слабо меняет величину среднего поля $\psi(z)$ в среде (но не в вакууме!). В связи с этим решение уравнения (16) можно искать методом последовательных приближений, рассматривая интегральное слагаемое в правой части (16) как возмущение*.

В первом порядке теории возмущений для среднего поля в среде получаем следующее выражение ($z > 0$):

$$\psi(z) = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + \gamma} e^{i\gamma z} \left[1 + \frac{ik_0^2}{2\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{f(k_z) - f(\gamma)}{k_z^2 - \gamma^2} \times \right. \quad (17)$$

$$\left. \times \left(\frac{k_z + \gamma}{k_z - \gamma} - \frac{k_{0z} - \gamma}{k_{0z} + \gamma} \right) \right] - \frac{2ik_{0z}}{k_{0z} + \gamma} k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{f(k_z) - f(\gamma)}{(k_z^2 - \gamma^2)(k_z - \gamma)} e^{ik_z z},$$

где

$$f(k_z) \equiv f(k_z, k_{0\parallel}), \quad f(\gamma) \equiv f(\gamma, k_{0\parallel}).$$

Полюсы функции $f(k_z)$ в последнем интеграле выражения (17) описывают волны, затухающие вблизи границы раздела среда — вакуум на расстояниях порядка масштаба нелокальности эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{эфф}}^{\wedge}$.

Так как поле отраженной волны определяется средним полем внутри среды ($z > 0$), которое, в свою очередь, мало отличается от $\psi_0(z)$, то для нахождения поля в вакууме можно ограничиться первой итерацией в уравнении (16). В том же приближении, что и в (17), находим

$$\psi(z) = \exp(ik_{0z}z) + \exp(-ik_{0z}z) \times \quad (18)$$

$$\times \left[\frac{k_{0z} - \gamma}{k_{0z} + \gamma} + \frac{2ik_{0z}}{(k_{0z} + \gamma)^2} k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{f(k_z) - f(\gamma)}{k_z^2 - \gamma^2} \right].$$

* Переход от уравнения (4) к (16) и решение уравнения (16) по теории возмущений аналогичны борновскому приближению в методе искаженных волн в квантовой теории рассеяния [5]. Выполнение неравенства (2) является необходимым условием применимости теории возмущений. Достаточное условие, строго говоря, может зависеть еще и от аналитических свойств корреляционной функции диэлектрической проницаемости.

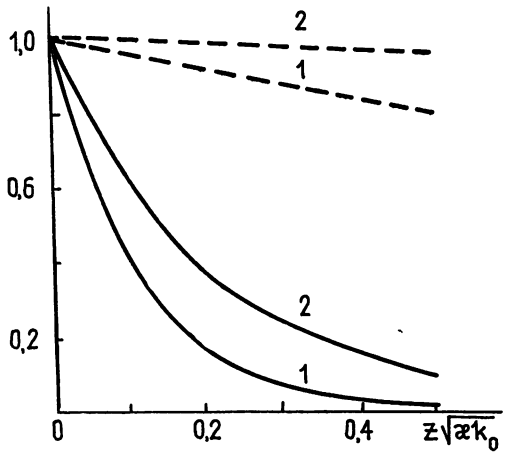


Рис. 1. Зависимость от глубины абсолютных значений возмущения $|(\epsilon_{\text{эфф}} - \epsilon_{\text{эфф}}^{\wedge})\psi_0|$ (сплошная кривая) и среднего поля в среде $|\psi_0|$ (пунктирная кривая) при различных углах скольжения:

1 — $\sin \xi_0 = 0,05$, 2 — $\sin \xi_0 = 0,2$. Все величины нормированы на единицу при $z=0$. Расчеты выполнены для среды с экспоненциальной корреляционной функцией $\langle (\delta\epsilon)^2 \rangle = 10^{-5}$; $\kappa = 10^{-2} k_0$.

В отличие от выражения для среднего поля в среде в формуле для отраженной волны не возникает дополнительных слагаемых, затухающих вблизи границы. Это связано с отсутствием флуктуаций диэлектрической проницаемости в области $z < 0$.

Выражения (17), (18) справедливы во всей области углов скольжения ζ_0 . Как будет показано ниже, при скользящем падении из (17), (18) следуют известные результаты [1]. Однако в случае среды с крупномасштабными неоднородностями с ростом угла скольжения ζ_0 результаты [1] теряют применимость и вклад в (17), (18) слагаемых, обусловленных нелокальностью эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{эфф}}$, становится определяющим.

3. На практике, как правило, важно знать не детальное поведение поля вблизи границы раздела вакуум — среда, а значения полей в преломленной и отраженной волнах вдали от поверхности. Используя (17), (18), нетрудно убедиться, что указанные асимптотические величины $\tilde{\psi}(z)$ ($\tilde{\psi}(z) = \psi(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$) удовлетворяют волновому уравнению

$$\tilde{\psi}'' + [k_{0z}^2 + k_0^2 f(\gamma, k_{0\parallel}) \theta(z)] \tilde{\psi} = 0 \quad (19)$$

с граничными условиями

$$\tilde{\psi}(z = +0) - \tilde{\psi}(z = -0) = \quad (20)$$

$$= \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + \gamma} k_0^2 \left[\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial f}{\partial k_z} \Big|_{k_z = \gamma} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{f(k_z) - f(\gamma)}{(k_z - \gamma)^2 (k_z + \gamma)} \right];$$

$$\tilde{\psi}'(z = +0) - \tilde{\psi}'(z = -0) = \quad (21)$$

$$= \frac{2i\gamma k_{0z}}{k_{0z} + \gamma} k_0^2 \left[\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial f}{\partial k_z} \Big|_{k_z = \gamma} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left(\frac{k_z}{\gamma} \right) \frac{f(k_z) - f(\gamma)}{(k_z - \gamma)^2 (k_z + \gamma)} \right].$$

Таким образом, задача о нахождении асимптотик среднего поля в общем случае не сводится к аналогичной акустической задаче с эффективным волновым числом γ [1]. Существенное отличие от выводов [1]

заключается в возникновении разрыва $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}'$ на границе вакуум — среда ($z = 0$). Скачки значений $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}'$ на границе отражают существование переходной области вблизи поверхности, где проявляется нелокальность $\epsilon_{\text{эфф}}$ (рис. 1). При подходе, основанном на (19) — (21), физические характеристики переходной области содержатся в граничных условиях (20), (21).

4. Проанализируем полученные выше результаты в различных предельных случаях и сопоставим их с выводами известных работ [1, 3].

В силу условия (2) при решении дисперсионного уравнения (11) можно пренебречь отличием γ от k_{0z} в аргументе $f(\gamma, k_{0\parallel})$ и положить в первом приближении [1]

$$\gamma \approx \sqrt{k_{0z}^2 + k_0^2 f(k_{0z}, k_{0\parallel})}. \quad (22)$$

В случайной среде с неоднородностями малых (меньше длины волны) размеров рассеяние на флуктуациях диэлектрической проницаемости изотропно, $f(k_z, k_{0\parallel})$ практически не зависит от угла скольжения ζ_0 , и взаимодействие волн с веществом во всей области углов скольже-

ния ζ_0 можно описать в приближении локальной эффективной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = 1 + f(k_{0z}, k_{0\parallel}) . \quad (23)$$

Скачком асимптотик волнового поля $\tilde{\psi}$ и его производной $\tilde{\psi}'$ на границе вакуум—среда (см. (20), (21)) можно пренебречь. Амплитуды отраженной и прошедшей волн в этой ситуации определяются соотношением (15) и не отличаются от найденных в [1].

В случае крупномасштабных (размер больше длины волны) неоднородностей взаимодействие падающего излучения с границей раздела вакуум—среда носит более сложный характер.

При относительно малых углах скольжения $\zeta_0 \ll \zeta_*$ (ζ_* — характерное значение угла скольжения, на котором меняется фурье-образ

$$f(k_z, k_{0\parallel}), \zeta_* \sim \sqrt{f(k_{0z})/k_0^2 \left. \frac{\partial f(k_z)}{\partial k_z^2} \right|_{k_z=k_{0z}}}$$

ной модели (9), $\zeta_* \sim \sqrt{\kappa/k_0^*}$) нелокальность эффективной диэлектрической

проницаемости $\varepsilon_{\text{эфф}}$ незначительна. Причина этого — относительно медленное изменение среднего поля на размерах порядка масштаба нелокальности.

Амплитуды преломленной и отраженной волн в случае $\zeta_0 \ll \zeta_*$ в первом приближении определяются решением (15) и совпадают с результатами [1]. Поправки к амплитудам, вычисленным в приближении локальной эффективной диэлектрической проницаемости, согласно (17), (18) имеют порядок $\sqrt{|f(k_{0z}, k_{0\parallel})|/\zeta_*} \ll 1$. Тот же порядок малости имеет и скачок производной поля $\tilde{\psi}'$ в граничном условии (21).

Что касается скачка самого поля $\tilde{\psi}$ на границе, то он имеет более высокий порядок — $\frac{|f(k_{0z}, k_{0\parallel})|}{\zeta_*^2}$. Например, для случайной среды с экспоненциальной корреляционной функцией граничные условия (20), (21) при $\zeta_0 \ll \zeta_*$ выглядят следующим образом:

при $\zeta_0 \ll \zeta_*$ выглядят следующим образом:

$$\tilde{\psi}(z = +0) - \tilde{\psi}(z = -0) = \frac{1}{4} \frac{k_0^2}{x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \frac{k_{0z}}{k_{0z} + \gamma} ; \quad (24)$$

$$\tilde{\psi}'(z = +0) - \tilde{\psi}'(z = -0) = \frac{1}{4} \frac{k_0^2}{x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \frac{k_{0z}(i-1)}{k_{0z} + \gamma} \sqrt{\kappa k_0} . \quad (25)$$

Напротив, в области относительно больших углов скольжения $\zeta_0 \gg \zeta_*$ ситуация существенно иная. В этом случае нелокальность эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{эфф}}$ принципиально меняет характер зависимости амплитуд преломленной и отраженной волн от угла скольжения.

В частности, с ростом угла скольжения ζ_0 величина амплитуды прошедшей через границу вакуум—среда волны стремится к некоторому предельному значению

$$A_0 \approx 1 - \frac{f(k_0)}{4} + \frac{k_0}{2} \left. \frac{\partial f(k_z)}{\partial k_z} \right|_{k_z=k_0} - \frac{k_0}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{f(k_z) - f(k_0)}{(k_z - k_0)^2} , \quad (26)$$

отличающемся от результата решения соответствующей акустической задачи [1]. Отличие от результата [1] заключается в появлении в формуле (26) дополнительных (третьего и четвертого) слагаемых и связа-

* Следует подчеркнуть, что эта величина отличается от характерного угла однократного рассеяния, входящего в среднее сечение рассеяния на флуктуации диэлектрической проницаемости, κ/k_0 [4].

но с нелокальностью $\varepsilon_{\text{эфф}}^{\wedge}$. В соответствии с (26) разница между A_0 и единицей оказывается существенно большей, чем это следует из [1], и отражает тот факт, что затухание волны в переходном слое вблизи границы меньше, чем в объеме случайной среды.

Сказанное можно проверить на примере экспоненциальной модели. Используя выражение (17), при относительно больших углах скольжения $\zeta_0 \gg \sqrt{\kappa/k_0}$ для амплитуды преломленной волны находим

$$A = 1 + \frac{1}{4} \frac{k_0^2}{x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle - \frac{ik_0}{8x} \frac{\langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle}{\sin^2 \zeta_0} + \dots \quad (27)$$

Отсюда следует, что амплитуда прошедшей волны с ростом угла скольжения ζ_0 стремится к предельной величине

$$A_0 \approx 1 + \frac{k_0^2}{4x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle$$

(результат [1]: $A_0 \approx 1 - \frac{ik_0}{8x} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle$). Преломленное поле при нормальном падении можно представить в виде

$$\psi(z) |_{z \rightarrow \infty} = A_0 e^{ivz} \approx \exp \left[ik_0 z - \frac{k_0^2}{4x} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \left(z - \frac{1}{x} \right) \right].$$

Из полученного выражения видно, что в переходном слое толщиной порядка масштаба нелокальности (κ^{-1}) затухание волны практически отсутствует.

Что касается амплитуды отраженной волны B , то в соответствии с выражением (18) (см. также непосредственно (4)) при относительно больших углах скольжения ζ_0 она может быть представлена в виде

$$B \approx \frac{ik_0^2}{2k_{0z}} \int_0^{\infty} dz' \exp(ik_{0z} z') \int_0^{\infty} dz'' f(|z' - z''|, k_{0\parallel}) \exp(ik_{0z} z''). \quad (28)$$

В рассматриваемой области углов характерный масштаб изменения функции $f(|z|, k_{0\parallel})$ по переменной z много больше, чем период осцилляций входящих в (28) экспонент. В связи с этим рассчитанная по формуле (28) амплитуда отраженной волны оказывается меньше, чем аналогичная величина, вычисленная без учета нелокальности эффективной диэлектрической проницаемости [1] (результат [1] можно получить из (28), если интегрирование по z'' распространить до $-\infty$). В этом нетрудно убедиться на примере среды с экспоненциальной корреляционной функцией (6). При $\zeta_0 \gg \zeta_* \approx \sqrt{\kappa/k_0}$ для амплитуды отраженной волны (28) находим

$$B \approx \frac{1}{8} \frac{\langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle}{\zeta_0^4}. \quad (29)$$

Таким образом, в отличие от результата [1] ($B \sim \zeta_0^{-2}$) коэффициент отражения убывает с ростом угла скольжения как ζ_0^{-4} .

Поэтому при вычислении амплитуды отраженной волны на основе (19)–(21) необходимо удерживать в граничных условиях (20), (21) все слагаемые до порядка ζ_0^{-4} включительно, т. е.

$$\tilde{\psi}(z = +0) - \tilde{\psi}(z = -0) = \frac{1}{4} \frac{k_0^2}{x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \lambda \left(1 - \frac{ixk_0}{2k_{0z}^2} \mu_1 - \frac{3x^2 k_0^2}{4k_{0z}^4} \mu_2 + \dots \right),$$

$$\tilde{\psi}'(z = +0) - \tilde{\psi}'(z = -0) = \frac{ik_{0z}k_0^2}{4x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle \lambda \left(1 + \frac{ixk_0}{2k_{0z}^2} \mu_1 + \frac{1}{4} \frac{x^2 k_0^2}{k_{0z}^4} \mu_3 + \dots \right),$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{ix}{k_0} + \frac{k_0^2}{2x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle + \dots, \quad \mu_1 = 1 + \frac{ix}{2k_0},$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{ix}{k_0} - \frac{k_0^2}{12x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle + \dots,$$

$$\mu_3 = 1 + \frac{ix}{k_0} + \frac{k_0^2}{4x^2} \langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle + \dots$$

Подавление когерентного отражения волн с ростом угла скольжения ξ_0 ($\xi_0 \gg \xi_*$) обусловлено анизотропией рассеяния на крупномасштабных неоднородностях случайной среды.

Следует отметить, что точное решение уравнения Дайсона (1) для частного случая экспоненциальной корреляционной функции впервые было найдено в работе [3]. В пределах применимости уравнения (1) (неравенство (2)) результаты [3] полностью совпадают с соотношениями, которые следуют из (17), (18) в частном случае корреляционной функции (6) (например, при $\xi_0 \gg \sqrt{x/k_0}$ с соотношениями (27), (29)).

Таким образом, область применимости результатов [1] ограничена случаем скользящего падения, когда угол скольжения меньше характерного угла изменения функции $f(k_z, k_{0\parallel})$, $\xi_0 \ll \xi_*$. При углах скольжения $\xi_0 \gtrsim \xi_*$ необходимо уже учитывать нелокальность эффективной диэлектрической проницаемости, что приводит к резкому подавлению когерентного отражения волн.

В заключение следует указать на принципиальную возможность использования когерентного отражения для получения информации о корреляционной функции случайной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барабаненков Ю. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 4. С. 579.
2. Барабаненков Ю. Н. // УФН. 1975. Т. 117. № 1. С. 49.
3. Kupiec I., Felsen L. B., Rosenbaum S., Keller J. B., Chow P. // Radio Sci. 1969. V. 4. № 11. P. 1067.
4. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. Т. 2.
5. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
22 сентября 1988 г.

WAVE REFRACTION AND COHERENT REFLECTION ON THE BOUNDARY OF THE RANDOM MEDIUM

E. E. Gorodnichev, S. L. Dudarev, D. B. Rogozkin, M. I. Ryazanov

The paper discusses the Dyson equation for the mean field of waves in random medium. New approximate solution of Dyson equation is found. This solution takes into account the anisotropy of the inhomogeneity mean scattering amplitude. It is pointed out that the effective wave number method is inapplicable in the case of large scale inhomogeneity of random medium.

УДК 537.874.6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ ПЛОСКОГО НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА С ФЛАНЦЕМ

А. Я. Слепян

При помощи нового варианта неполного метода Галеркина с полуобращением в граничных условиях получено строгое решение задачи дифракции волн H -поляризации на открытом конце плоского плавнонерегулярного волновода с бесконечным фланцем. Приведены результаты расчета элементов матрицы рассеяния и полей дифракции в дальней зоне для структур с линейным законом нерегулярности.

Задачи дифракции электромагнитных волн на открытом конце плоского плавнонерегулярного волновода с фланцем представляют значительный интерес для техники СВЧ. Данные задачи являются ключевыми при проектировании узлов возбуждения открытых резонаторов [1], антенных излучателей [2], открытых резонаторов с канавками на зеркалах для полупроводниковых квазиоптических генераторов [1, 3]. В настоящее время решение указанных дифракционных задач получено асимптотическими и строгими численными методами только для случая регулярного волновода (см., например, [4–10]). Целью данной статьи является разработка строгого и эффективного метода, пригодного для структур с волноводами переменной ширины. Предлагаемый метод является одним из вариантов неполного метода Галеркина (НМГ) с полуобращением в граничных условиях [11–13]. В отличие от [11–13], где в качестве «главной части» оператора граничных условий при полуобращении выделяется оператор типа свертки, в рамках данного подхода «главная часть» — парный сумматорно-интегральный оператор с тригонометрическим ядром. Обращение последнего проводится методом разрывных интегралов Вебера—Шафхейтлина [5, 14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЕЙ

1.1. Пусть открытый конец плоского волновода, имеющего участок переменной ширины $0 \leq z \leq L$ и бесконечный фланец в плоскости $z=L$ (рис. 1а), возбуждается совокупностью $TM_{0,2n}$ -волн, набегающих из $z \rightarrow -\infty$, и плоской H -поляризованной волной, падающей из $z \rightarrow \infty$ нормально к плоскости фланца. Ширина волновода на участке $0 \leq z \leq L$ описывается произвольной дважды дифференцируемой функцией $a(z)$. Стенки волновода и фланец будем считать идеально проводящими. Требуется определить дифракционное поле внутри волновода и в полупространстве $z > L$.

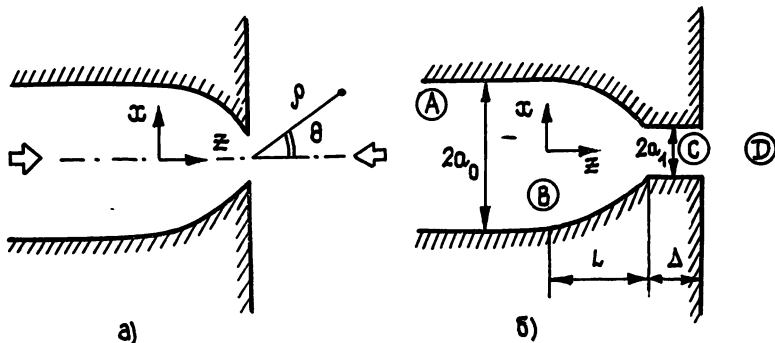


Рис. 1.

Данная задача заключается в решении двумерного уравнения Гельмгольца $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$ ($\varphi=H_y$, $k=2\pi/\lambda$, λ — длина волны), удовлетворяющего граничному условию Неймана на поверхности структуры, условию излучения при $z \rightarrow \pm\infty$, условию Мейкснера на ребре.

1.2. Из свойств симметрии структуры и возбуждающего поля следует, что $\varphi(-x, z) = \varphi(x, z)$, поэтому достаточно найти φ при $z > 0$. Рассмотрим вначале вспомогательную структуру, показанную на рис. 1б; к пределу $\Delta \rightarrow 0$ перейдем на заключительной стадии решения. Представим поле в частичных областях (способ их введения показан на рис. 1б) в следующем виде.

Область A, $z < 0$:

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [S_n \exp(-\gamma_n^{(0)}z) + R_n \exp(\gamma_n^{(0)}z)] \varphi_n(x, 0), \quad (1)$$

где $\varphi_n(x, z) = \cos \frac{n\pi}{a(z)} x$, $\gamma_n^{(0)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a_0}\right)^2 - k^2}$, R_n — неизвестные коэффициенты, S_n — комплексные амплитуды падающих ТМ_{0,2n}-волн.

Область C, $L \leq z \leq L + \Delta$:

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n \exp(\gamma_n^{(1)}z_1) + c_n \exp(-\gamma_n^{(1)}z_1)] \varphi_n(x, L), \quad (2)$$

где $z_1 = z - L - \Delta$, $\gamma_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a_1}\right)^2 - k^2}$.

Область D, $z > L + \Delta$:

$$\varphi(x, z) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x \exp(-\gamma z_1) d\alpha + 2A_0 \cos kz_1, \quad (3)$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $A(\alpha)$ — неизвестная спектральная амплитуда поля, A_0 — комплексная амплитуда падающей плоской волны. Интегрирование вдоль полуоси $[0, \infty)$ выполняется так, что точка ветвления подинтегральной функции $\alpha = k$ обходится снизу.

В нерегулярной области B ($0 \leq z \leq L$) используем НМГ [12, 15]:

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \varphi_n(x, z), \quad (4)$$

где $P(z) = \{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестная вектор-функция. Для $P(z)$ в соответствии с НМГ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$P''(z) + H(z)P'(z) + B(z)P(z) = 0. \quad (5)$$

Штрих означает операцию дифференцирования по z , матрицы-функции $H(z)$, $B(z)$ вычисляются аналогично [12, 15]; их явные выражения для краткости не выписываем.

1.3. Следующий этап построения решения дифракционной задачи состоит в формулировке граничных условий к системе (5). Сшивая тангенциальные компоненты магнитного и электрического полей на границах частичных областей ($z=0$, $z=L$, $z=L+\Delta$), получим

$$P'(0) + (\xi_0 - \Gamma_0)P(0) = -2\Gamma_0 S; \quad (6a)$$

$$P(0) = R + S; \quad (6b)$$

* Под $\sqrt{\bar{X}}$ здесь и далее понимается та ветвь, для которой $\text{Im} \sqrt{\bar{X}} < 0$; если $\text{Im} \sqrt{\bar{X}} = 0$, то $\text{Re} \sqrt{\bar{X}} > 0$.

$$P'(L) + (\xi_1 - \Gamma_1)P(L) = -2\Gamma_1 E^+ c; \quad (7a)$$

$$P(L) = E^- b + E^+ c, \quad (7b)$$

где $R = \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$, $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.
Элементы матриц ξ_0, ξ_1 определены в [13], $\Gamma_{i,mn} = \delta_{mn} \gamma_n^{(i)}$, $i=0,1$;
 $E_{mn}^{\pm} = \delta_{mn} \exp(\pm \gamma_n^{(1)} \Delta)$, δ_{mn} — символ Кронекера.

Векторы b и c удовлетворяют парным интегрально-сумматорным соотношениям, вытекающим из требования непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial z$ в раскрыве ($z=L+\Delta$), а также граничного условия на поверхности фланца:

$$2A_0 + \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + b_n) \cos \frac{n\pi}{n_1} x, \quad (8)$$

$0 < x \leq a_1;$

$$\int_0^{\infty} A(\alpha) \gamma \cos \alpha x d\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - b_n) \gamma_n^{(1)} \cos \frac{n\pi}{a_1} x; \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} A(\alpha) \gamma \cos \alpha x d\alpha = 0, \quad a_1 < x < \infty. \quad (10)$$

Соотношения (5)–(10) образуют краевую задачу для бесконечной системы ОДУ. Для ее численного решения путем редукции с использованием прогонки в (7a) необходимо исключить вектор c , т. е. выразить c через $P(L)$. Это можно сделать с помощью метода, развитого в [5, 14]. Описываемая в следующем параграфе процедура фактически является регуляризацией краевой задачи (5)–(10).

Отметим, что подход [14] позволяет провести регуляризацию существенно более сложных краевых задач для систем ОДУ, чем подход [5]. Такие задачи возникают, в частности, при использовании изложенного в данной статье варианта НМГ для исследования ограниченных решеток из нерегулярных полубесконечных плоских волноводов.

2. ПОЛУОБРАЩЕНИЕ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ К СИСТЕМЕ ОДУ

2.1. Перейдем к пределу $\Delta \rightarrow 0$. Представим x -компоненту электрического поля в раскрыве в виде следующего разложения:

$$E_x(x, L) = \frac{\rho(x)}{j\omega\epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m C_{2m}^{\nu} \left(\frac{x}{a_1} \right), \quad \rho(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right]^{\nu-1/2}, \quad (11)$$

где $C_p^{\nu}(u)$ — полином Гегенбаура порядка p . Параметр ν определяет характер особенности E_x в угловой точке. В соответствии с условиями Мейкснера [16] для рассматриваемой конфигурации структуры ν следует выбрать равным $(\pi + 2\beta)/(6\pi - 4\beta)$, где $\beta = \arctg a'(L)$.

Приравнивая (11) поочередно к левой и правой частям (9), получим представления для трансформанты и коэффициентов Фурье функции $\partial\varphi/\partial z(x, L)$ в виде равномерно сходящихся рядов по бесселевым функциям:

$$A(\alpha) \gamma = -2a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m f_m^{\nu} F_m^{\nu}(a\alpha_1); \quad (12)$$

$$(b_n - c_n) \gamma_n^{(1)} = (2 - \delta_{n0}) \pi \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m f_m^{\nu} F_m^{\nu}(n\pi), \quad (13)$$

где $f_m^\nu = \frac{(-1)^m \Gamma(2m+2\nu)}{(2m)! \Gamma(\nu)}$, $F_m^\nu(x) = \frac{J_{2m+\nu}(x)}{(2x)^\nu}$, $J_\beta(x)$ — функция Бесселя порядка β , $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Представление $A(\alpha)$ в форме (12) тождественно удовлетворяет (10) (это может быть показано с использованием разрывных интегралов Вебера—Шафхейтина [17]).

Подставляя (12), (13) в (8) и пользуясь свойствами полноты и ортогональности системы полиномов Гегенбаура в пространстве $L_2^2(-1, 1)$, получим следующее соотношение между μ , b и c :

$$\tilde{L}g = T(b + c) - r; \quad (14a)$$

$$g = U\mu, \quad (14b)$$

где $g = \{g_m\}_{m=0}^\infty$, $\mu = \{\mu_m\}_{m=0}^\infty$, $r = \{r_p\}_{p=0}^\infty$, $r_p = 2A_0 F_p^\nu(0)$, \tilde{L} , T , U — матричные операторы, элементы которых вычисляются по формулам

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^2 \tilde{L}^{(j)}, \quad \tilde{L}_{00}^{(1)} = 0, \quad \tilde{L}_{00}^{(2)} = -2a_1 \int_0^\infty [F_0^\nu(\alpha a_1)]^2 \frac{d\alpha}{\gamma}, \quad (15)$$

$$\tilde{L}_{pm}^{(1)} = -a_1 2^{-4\nu} \frac{\Gamma(1+2\nu)\Gamma(m+p)}{\Gamma(1+m-p+\nu)\Gamma(1-m+p+\nu)\Gamma(1+m+p+2\nu)},$$

$$\tilde{L}_{pm}^{(2)} = -2a_1 \int_0^\infty F_p^\nu(\alpha a_1) F_m^\nu(\alpha a_1) q(\alpha) d\alpha, \quad m+p > 0,$$

$$q(\alpha) = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}, \quad T_{pn} = F_p^\nu(n\pi), \quad U_{mn} = \delta_{mn} f_m^\nu.$$

Операторы $\tilde{L}^{(1)}$ и $\tilde{L}^{(2)}$ являются соответственно «главной» и вполне непрерывной частями оператора \tilde{L} [14].

Перепишем (13) в матричной форме с учетом (14b):

$$\Gamma_1(b - c) = Qg, \quad (16)$$

где Q — матричный оператор с элементами $Q_{nm} = (\delta_{n0} - 2)\pi F_m^\nu(n\pi)$, элементы матрицы Γ_1 определены выше.

Комбинируя (14a) и (16), получим

$$Wg = h, \quad (17)$$

где $W = \tilde{L} - G$, $G = T\Gamma_1^{-1}Q$, $h = 2Tc - r$.

Оператор G , так же как и оператор \tilde{L} , может быть представлен в виде суммы «главной» и вполне непрерывной частей:

$$G = \sum_{j=1}^2 G^{(j)}, \quad G_{pm}^{(1)} = -\frac{\pi \delta_{p0} \delta_{m0}}{2^{4\nu+1} \Gamma^2(\nu+1) \gamma_0^{(1)}} + a_1 \sum_{n=1}^\infty \frac{F_p^\nu(n\pi) F_m^\nu(n\pi)}{n},$$

$$G_{pm}^{(2)} = a_1 \sum_{n=1}^\infty F_p^\nu(n\pi) F_m^\nu(n\pi) \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\gamma_n^{(1)}} - \frac{a_1}{n\pi}.$$

Из (16), (17) следует, что

$$b = Sc - f, \quad (18)$$

где $\tilde{S} = I + 2S_1 T$, $f = S_1 r$, $S_1 = \Gamma_1^{-1} Q W^{-1}$, I — тождественный оператор.

Учитывая (7а), (7б), (18) и выполняя некоторые преобразования, получим искомое граничное условие при $z=L$:

$$P'(L) + (\xi_1 - \Gamma_1)P(L) + 2\Gamma_1 V^{-1}P(L) = 2\Gamma_1 V^{-1}f, \quad (19)$$

где $V = I + S$.

2.2. Итак, исходная задача дифракции сведена к двухточечной краевой задаче для бесконечной системы ОДУ (5), (6а), (19). Для численного решения (5), (6а), (19) необходимо редуцировать до конечного порядка N , одновременно переходя к конечномерным аналогам матричных операторов и векторов в (17), (18) (последнее соответствует учету членов с номерами $m \leq M$ в разложениях (11)–(13)). После этого следует воспользоваться одной из модификаций метода прогонки [18]. Сходимость приближенного решения краевой задачи к точному при $N, M \rightarrow \infty$ может быть доказана строго аналогично [11]. Для доказательства сходимости существенно, что оператор $W = \sum_{j=1}^2 W^{(j)}$ ($W^{(j)} = \tilde{L}^{(j)} - G^{(j)}$) является обратимым в l_2 . Это следует из результатов [14], где установлено, что в l_2 оператор $W^{(1)}$ является ограниченным и положительно определенным, а оператор $W^{(2)}$ — вполне непрерывным.

После решения краевой задачи (5), (6а), (19) можно, используя (6б), (7б), (12), (14а), (14б), определить R и $A(\alpha)$, а затем с помощью (1), (3), (4) вычислить поле в любой точке пространства. Для рассеянного поля $\tilde{\varphi}$ в дальней зоне аналогично [4–10] можно получить следующее представление:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(\rho, \theta) = \exp\left[j\left(k\rho - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}} \Phi(\theta),$$

где $\Phi(\theta) = k \cos \theta A(k \sin \theta)$, $\theta = \arctg \frac{\sqrt{x_n^2}}{z-L}$, $\rho = \sqrt{x^2 + (z-L)^2}$.

2.3. Перед тем как перейти к изложению результатов расчетов, следует сделать два важных замечания. Во-первых, явный учет условия на ребре приводит к тому, что матрица \tilde{S} в (18), (19) в общем случае не является обобщенной матрицей рассеяния открытого конца плоского регулярного волновода ширины a_1 с фланцем*. Это обстоятельство не позволяет воспользоваться для расчета S методами [4–10]. Во-вторых, граничное условие при $z=L$ может быть получено в несколько отличном от (19) виде непосредственно из (14а), (16):

$$P'(L) + \xi_1 P(L) - \tilde{Q}L^{-1}TP(L) = \tilde{Q}L^{-1}r. \quad (20)$$

Несложно заметить, что граничные условия (19) и (20), эквивалентные при $N, M \rightarrow \infty$, перестают быть эквивалентными при конечных N, M . Сопоставление данных граничных условий показывает, что в отличие от (20) в (19) неявно учитывается влияние высших (с номерами $n > N$) волн виртуального волновода, в который переходит частичная область S при $\Delta \rightarrow 0$. В силу этого сходимость метода редукции для краевой задачи (5), (6а), (19) будет более быстрой, чем для краевой задачи (5), (6а), (20).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Изложенный выше метод был реализован численно в виде программы, написанной на алгоритмическом языке ФОРТРАН для

* S является обобщенной матрицей рассеяния данной регулярной структуры только при $a'(L) = 0$.

ЭВМ БЭСМ-6. Редуцированная краевая задача (5), (6а), (19) решалась методом направленной ортогонализации [18] при помощи программы ЕСТМО из библиотеки прикладных программ по электродинамике МГУ [19]. Интегралы в $\tilde{L}_{pm}^{(2)}$ представлялись в виде рядов по степеням частотного параметра ka_1 [5]. Расчеты показывают, что с введением двойной точности вычислений данные ряды эффективно суммируются при $ka_1 \leq 10$. Суммирование медленно сходящихся рядов в $G_{pm}^{(1)}$ проводилось с использованием методики [20].

Изучались структуры с линейным законом нерегулярности $a(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z/L$. Установлено, что для обеспечения однопроцентной точности расчетов элементов матрицы рассеяния и полей в дальней зоне достаточно положить $N = [ka_{\max}/\pi] + PN_0$ (где $N_0 = 3; 4$), $M = [ka_1] \pm 1$ ($[x]$ — целая часть x , $a_{\max} = \max\{a(z)\}$). Относительная погрешность выполнения баланса активных мощностей и соотношений взаимности при этом не превышает 10^{-5} .

В частном случае $a_1 = a_0$ (открытый конец плоского регулярного волновода с фланцем) получено полное совпадение с результатами [4-8, 10].

3.2. На рис. 2 приведены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и трансформации $R_{0,0}$ и $R_{1,0}$ для структур различных конфигураций в случае возбуждения основной волной плоского волновода. Сплошные кривые соответствуют структуре с параметрами $a_1 = 0,5a_0$, $L = 2a_0$, пунктирные — $a_1 = 1,5a_0$, $L = a_0$. Штрихпунктирными линиями изображены аналогичные зависимости для открытого конца плоского регулярного волновода с фланцем.

Как видно из рис. 2, введение нерегулярности приводит к существенному изменению хода частотных характеристик в одноволновом диапазоне. В частности, при $a_1/a_0 < 1$ кривые становятся слабоосциллирующими, при $a_1/a_0 > 1$ — имеют резкий провал, соответствующий режиму полного прохождения падающей волны. Отметим, что в точке полного прохождения фаза коэффициента отражения $R_{0,0}$ претерпевает скачок, равный 180° . Указанные особенности дифракционных процессов физически объясняются интерференцией «парциальных» волн, отраженных от входного сечения нерегулярного участка и поверхности раскрыва.

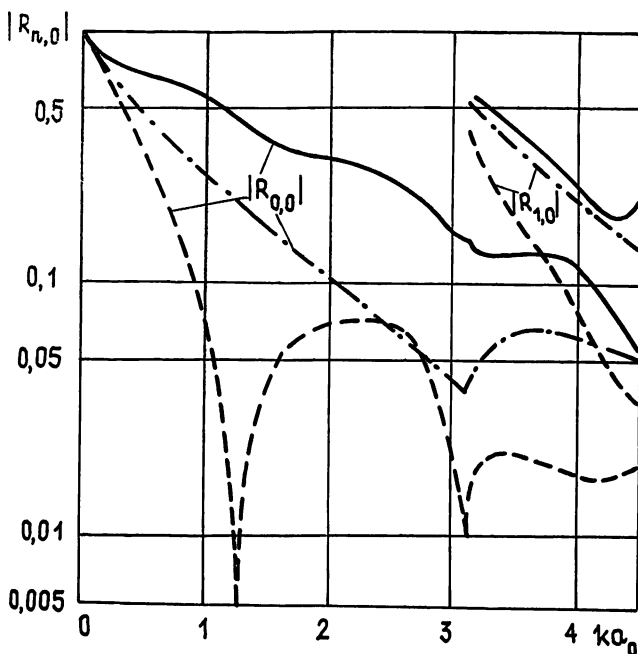


Рис. 2.

Амплитудно-частотные характеристики изучаемых структур при возбуждении плоской волной представлены на рис. 3 (различные линии на рис. 3, 4 соответствуют тем же структурам, что и на рис. 2, $T_n = R_n$ при $A_0 = 1, S_n = 0$). Анализ рис. 3 показывает, что, изменяя ширину раскрыва и длину нерегулярного участка, можно управлять амплитудным спектром $TM_{0,2n}$ -волн в регулярном полубесконечном волноводе. На рис. 2, 3 отчетливо заметны пороговые явления — характерные изломы в точке «рождения» $TM_{0,2}$ -волны. С ростом a_1/a_0 изломы становятся более резкими.

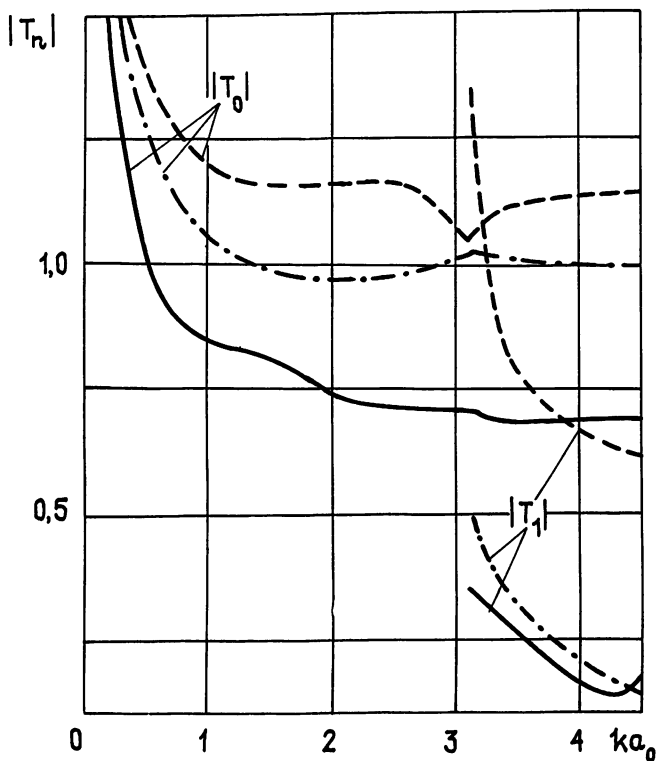


Рис. 3.

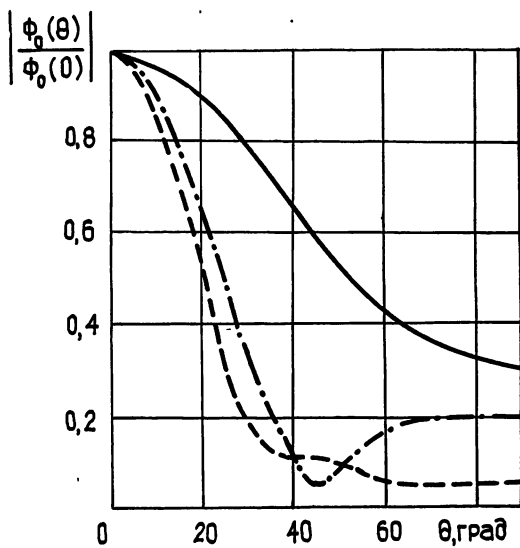


Рис. 4.

На рис. 4 изображены нормированные диаграммы направленности исследуемых линейно-нерегулярных структур, возбуждаемых основной

волной плоского волновода при $ka_0=4,5$. Следует отметить, что увеличение размера раскрыва приводит к снижению уровня бокового излучения.

Автор признателен А. А. Кураеву, А. С. Ильинскому и Э. И. Велиеву за поддержку и полезные советы при выполнении настоящей работы, В. В. Веремею и А. Я. Слепяну — за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопапов В. П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. Т. 2. Источники. Элементарная база. Радиосистемы. — Киев: Наукова думка, 1985. — 256 с.
2. Амией Н., Галлиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. — М.: Мир, 1974. — 455 с.
3. Булгаков Б. М., Скрасанов В. Н., Фисун А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 4. С. 447.
4. Mittra R., Itoh T. // Proc. IEEE. 1971. V. 59. № 7. P. 1131.
5. Hongo K., Ogawa Y., Itoh T., Ogusu K. // IEEE Trans. Ant. Propag. 1975. V. 23. № 4. P. 558.
6. Ильинский А. С., Репин В. М., Старостин Л. И. В кн.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Гос. ун-т, 1973. Вып. 20. С. 38.
7. Воскресенский Г. В., Журав С. М. // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 7. С. 1390.
8. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. // ДАН УССР. Сер. А. 1986. № 11. С. 57.
9. Боровиков В. А. // ДАН СССР. Т. 217. № 4. С. 788.
10. Lee S. W. // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 9. P. 2830.
11. Копенкин А. Д., Кураев А. А., Слепян А. Я. и др. // ЖВММФ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1894.
12. Копенкин А. Д., Кураев А. А., Слепян А. Я. и др. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 2. С. 247.
13. Копенкин А. Д., Кураев А. А., Слепян А. Я. и др. // Радиотехника и электроника, 1988. Т. 33. № 10. С. 2022.
14. Велиев Э. И., Веремей В. В., Шестопапов В. П. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 3. С. 478.
15. Свешников А. Г., Ильинский А. С., Котик И. П. В кн.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Гос. ун-т, 1965, Вып. 3. С. 97.
16. Meixner J. // IEEE Trans. Ant. Propag. 1972. V. 20. № 4. P. 442.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. Т. 2. — 296 с.
18. Быков А. А., Ильинский А. С. // ЖВММФ. 1979. Т. 19. № 3. С. 631.
19. Быков А. А., Тупиков М. В. В кн.: Математическое и программное обеспечение библиотеки прикладных программ по электродинамике. — М.: Гос. ун-т, 1987. С. 103.
20. Ляпин В. П., Михалевский В. С., Синявский Г. П. // Краткие тексты докл. VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М.: ИРЭ АН СССР, 1980. Т. 2. С. 189.

Минский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
16 августа 1988 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION AT THE OPEN-ENDED PLANE FLANGED IRREGULAR WAVEGUIDE

A. Ya. Slepian

A strict solution of H-polarized wave diffraction problem at the open-ended plane smoothly-irregular flanged waveguide by means of the new variant of Galerkin's incomplete method with a semiinversion in the boundary conditions has been obtained. Results of scattering matrix elements and far diffraction fields calculations for the linear irregularity structures are given.

УДК 621.396.67

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ НА ГЛАДКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ В ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ

Ю. И. Белов, В. В. Снегирева

Исследован метод разделения интерферирующих сигналов на гладкие составляющие числом более двух при измерениях в диапазоне частот. Показано, что для оценки уровня основной и помеховых компонент сигнала требуется меньшее число отсчетов, но большее время вычислений, чем в подобных методах разделения, использующих преобразование Фурье.

В ряде задач измерений сигнал содержит сумму интерферирующих когерентных составляющих, продуцированных, например, переотражениями исходного сигнала от априорно известных точек измерительной схемы, включающей объект исследования и его физическое окружение. Проблема разделения таких интерферирующих составляющих весьма актуальна, в частности, в измерениях характеристик излучения или рассеяния различных объектов, в том числе антенн. Стробировать или подавить мешающие сигналы в экспериментах не всегда удается, поэтому используются различные методы выделения «полезного» сигнала, т. е. сигнала без переотраженных составляющих, с помощью измерений в диапазоне частот и специальной обработки результатов [1, 2, 6]. Например, в [2] показано, что при планарных измерениях сигналов в ближней зоне зеркальной антенны основной вклад в искажения измеряемого поля связан с однократным переотражением сигнала, излученного зондом, а) между элементами крепления облучателя антенны и устройством перемещения зонда (сканирующее устройство), б) между краем зеркала и сканирующим устройством. Эти исследования, а также обсуждение в работе [3] способа разделения данных для двух интерферирующих сигналов стимулировали поиск обобщения результатов [3] на большее количество разделяемых составляющих при известном (с достаточной точностью) положении областей переотражения основного сигнала.

Данные измерений на N частотах можно представить как некоторый N -мерный вектор:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + U_2 \mathbf{p}_2 + \dots + U_M \mathbf{p}_M, \quad (1)$$

где \mathbf{p}_1 — полезный сигнал, а $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_M$ — помеховые составляющие, обусловленные переотражениями в измерительной схеме и от окружающих предметов, U_m ($m=2, 3, \dots, M$) — диагональные матрицы, характеризующие запаздывание помеховых составляющих относительно основной,

$$U_m = \text{diag} \left\{ \exp\left(-i2 \frac{\omega_1}{c} R_m\right), \dots, \exp\left(-i2 \frac{\omega_N}{c} R_m\right) \right\}, \quad (2)$$

а n -я компонента вектора \mathbf{p} представляет собой сигнал $p(\omega_n)$, измеренный на частоте $\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega$. Необходимо оценить долю в данных \mathbf{p} , приходящуюся на каждую из составляющих \mathbf{p}_m ($m=1, 2, \dots, M$), т. е. целью алгоритма является нахождение компонент векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_M$ по известным компонентам вектора \mathbf{p} . Обычно (см. в задачах рассеяния [4]) каждая из составляющих p_m является гладкой функцией частоты ω , более гладкой, чем исходные данные p . Гладкость решения ха-

рактируется взвешенной евклидовой нормой вторых производных (по ω) $\|e\| = e^+ W e$, где

$$e = \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \dots \\ \ddot{p}_M \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 [0] & \dots & [0] \\ [0] & W_2 & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & W_M \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$W_m (m=1, 2, \dots, M)$ — диагональные матрицы порядка $(N-2)$ с элементами в виде положительных действительных чисел, определяющих вес в каждой точке p_m . Под \ddot{p}_m здесь понимаются конечные разности второго порядка, поэтому \ddot{p}_m в матричной форме записывается следующим образом:

$$\ddot{p}_m = A p_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (4)$$

где A — матрица размерности $(N-2) \times N$, элементы которой равны [3]: $a_{ii} = a_{i+2} = 1$; $a_{i+1} = -2$; $a_{ij} = 0$ ($j \neq i, i+1, i+2$), $i=1, 2, \dots, N-2$.

Как отмечалось выше, максимально гладкое решение будет обладать наименьшей нормой $\|e\|$, поэтому аналогично задаче о двух источниках сигналов [3], используя соотношения (1), (3), (5) и применяя теорему о проекциях, получим матричное уравнение относительно $(M-1)N$ -мерного вектора \tilde{p} :

$$H \tilde{p} = B, \quad (5)$$

где

$$H = \begin{bmatrix} H_1 + Q_M & \dots & Q_M U_{M-1} \\ \bar{U}_2 Q_M & H_2 + \bar{U}_2 Q_M U_2 & \dots & \bar{U}_2 Q_M U_{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{U}_{M-1} Q_M & \bar{U}_{M-1} Q_M U_2 & \dots & H_{M-1} + \bar{U}_{M-1} Q_M U_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{M-1} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} Q_M p \\ \bar{U}_2 Q_M p \\ \dots \\ \bar{U}_{M-1} Q_M p \end{bmatrix},$$

Q_m -комплексные эрмитовы, H_m — действительные симметричные ленточные матрицы с полушириной ленты 2,

$$Q_m = U_m H_m \bar{U}_m, \quad H_m = A + W_m A, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (7)$$

(5) эквивалентно системе матричных уравнений относительно p_1, p_2, \dots, p_{M-1} .

Переходя к переменным

$$\tilde{p}_1 = p_1, \quad \tilde{p}_m = \tilde{p}_{m-1} + U_m p_m, \quad m = 2, 3, \dots, M-1, \quad (8)$$

получим из (5) рекуррентные соотношения для \tilde{p}_{m-1} через \tilde{p}_m и уравнение относительно \tilde{p}_{M-1} ($m=2, 3, \dots, M-1$):

$$\tilde{p}_{m-1} = D_m \tilde{p}_m, \quad V_M \tilde{p}_{M-1} = Q_M p, \quad (9)$$

где

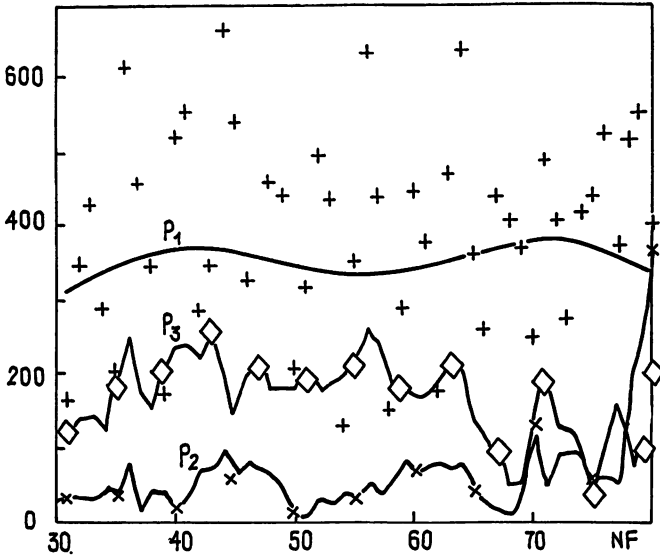
$$V_2 = H_1 + Q_2, \quad V_m = H_1 D_2 \dots D_{m-1} + Q_m, \quad D_m = V_m^{-1} \hat{Q}_m. \quad (10)$$

Искомые p_1, p_3, \dots, p_M находятся из соотношений (1) и (8). Из (9) видно, что для определения p_1, p_2, \dots, p_{M-1} требуется вычисление обратных матриц V_m^{-1} от $(M-1)$ комплексных матриц N -го порядка V_m ($m=2, 3, \dots, M$). Это накладывает первые ограничения на выбор $\Delta\omega^*$:

$$\frac{2R_m \Delta\omega}{c} \neq 2\pi l, \quad m=2, 3, \dots, M, \quad l=0, \pm 1, \dots; \quad (11)$$

$$\frac{2|R_m - R_k| \Delta\omega}{c} \neq 2\pi l, \quad m \neq k. \quad (12)$$

Амплитуда



Фаза, град

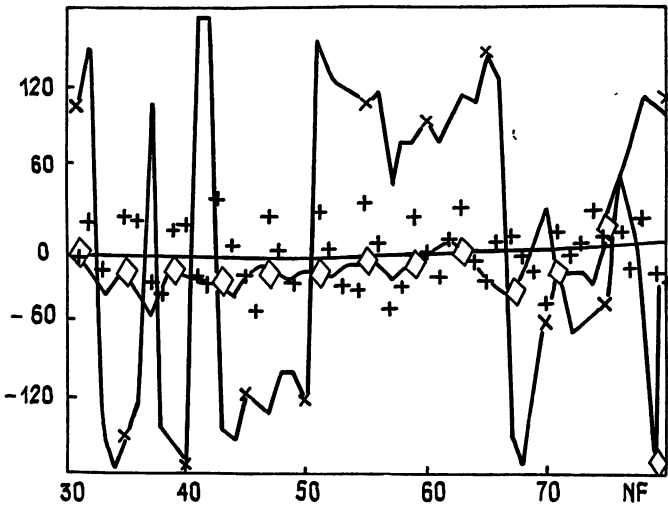


Рис. 1.

* В [3], где рассмотрена задача разделения данных на две гладкие составляющие, отмечено, что необходимо выполнение условий: а) $N \geq 4$, б) $2R_2 \Delta\omega / c \neq 2\pi l$, иначе задача становится вырожденной. Условия (11), (12) — аналог условия (б) для числа $M > 2$.

Если условие (11) или (12) не выполнено, p_m теряет различие либо с «полезным» сигналом p_1 , либо с другой помеховой составляющей p_k , матрица V_m (либо V_k , если $k > m$ и не выполнено (12)) сингулярна. Кроме того, выбор $\Delta\omega$ и числа точек N ограничен колосой пропускания экспериментальной установки: $N\Delta\omega \leq \Delta\omega_0$.

Следующие ограничения на N и $\Delta\omega$ связаны с достижением заданной точности определения составляющих, с размерами диапазона частот, где они должны быть определены (частный случай — одна частота), а также с предполагаемым характером изменения каждой из составляющих $p_m(\omega)$ в рассматриваемом диапазоне частот. Эти вопросы исследовались на математической модели для $M=3$: в качестве исходных данных $p(\omega_n)$ брались предварительно рассчитанные значения $p_{\text{мод}}(\omega_n)$ — результат интерференции трех заданных составляющих $p_{\text{мод}1,2,3}(\omega_n)$, амплитуда и фаза которых синусоидально зависит от ω .

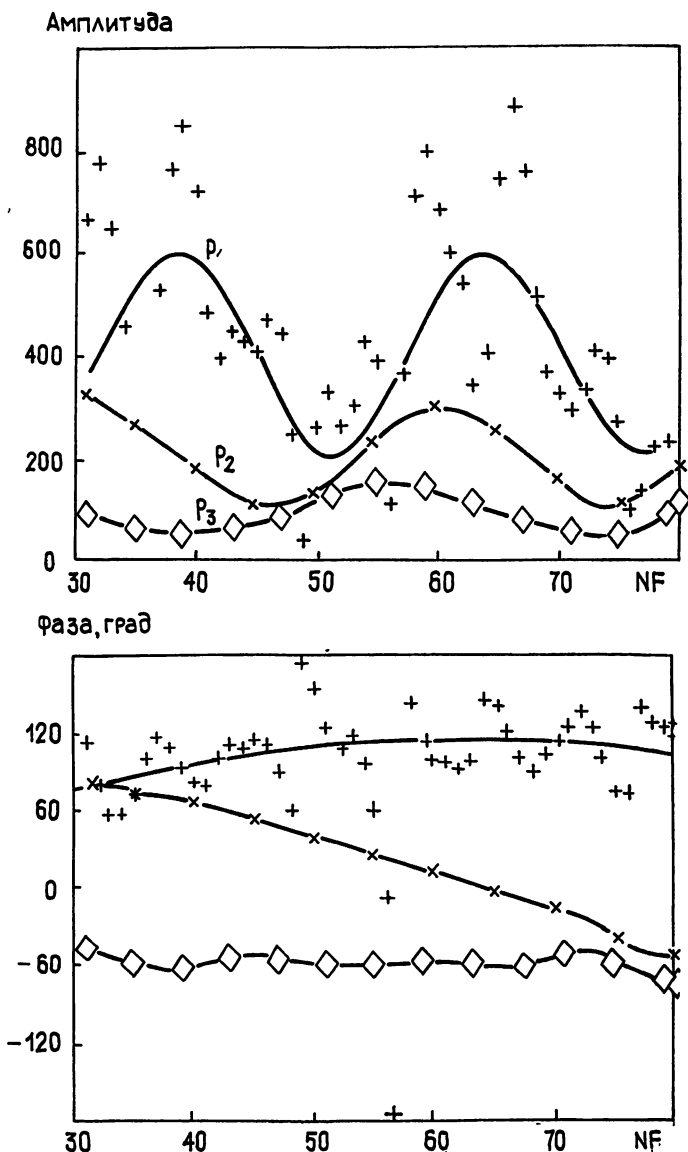


Рис. 2.

Точность определения составляющих в зависимости от числа точек N (при заданном Δf) была исследована также по экспериментальным данным, предоставленным нам автором работы [2]. Эти данные пред-

ставляют собой сигналы, полученные с выходов измерителя отношений амплитуд и разности фаз в сравнении с опорным сигналом генератора, который излучается рупорной антенной малых размеров, находящейся на перемещаемой металлической конструкции в некоторой точке ближней зоны над приемной зеркальной параболической антенной диаметром 7 м. На рис. 1 представлена амплитуда (в относительных единицах) и фаза (в градусах) разделяемых на ЭВМ составляющих $p_m(\omega_n)$ ($m=1, 2, 3$; $n=1, 2, \dots, N$), а также амплитуда и фаза исходных экспериментальных данных $p(\omega_n)^*$ (+++) для числа обрабатываемых точек $N=50$; по оси абсцисс — нормированная частота $N_F = (f-f_0)/\Delta f + 64$, $f_0=5$ ГГц — рабочая частота, $\Delta f=6$ МГц — дискрет по частоте, $R_2=3,4$ м, $R_3=6,45$ м. На рис. 2 представлены соответствующие результаты для модельной задачи.

Расчеты для различных периодов зависимости $p_{\text{мод}1,2,3}(\omega)$ показали, что составляющие надежно разделяются, если на каждый из характерных периодов изменения $p_{1,2,3}(\omega)$ приходится не менее 25 точек**. В средних точках ω_n (т. е. $n=6, 7, \dots, N-5$) диапазонов частот $\omega_n - \omega_{n-1} = N\Delta\omega$ для $N \geq 30$ отличия расчетных и истинных значений $p_m(\omega_n)$ для модельной задачи составляют менее 1—2% по амплитуде и менее 3° по фазе. Для $N=20$ амплитудные и фазовые ошибки составляли соответственно $\delta A \sim 5\%$ и $\Delta\phi \sim 3, \dots, 5^\circ$. С такой же точностью алгоритм позволяет определить $p_1(\omega_n)$ — основную составляющую для экспериментальных данных (данные заметно «зашумлены», и для более слабых по мощности помеховых составляющих ошибки оказались больше, например, для $N=20$ $\delta A_{2,3} \sim 10\%$), причем для трех средних в диапазоне частотных точек $\omega_{N/2}, \omega_{N/2 \pm 1}$ p_1 определяется с большей точностью ($\delta A_1 \sim 1, \dots, 2\%$ для $N=20$)***.

При $N < 20$ ошибки в определении составляющих резко растут, поскольку при $N=20$ разрешение синтезированных во временной области импульсов, соответствующих каждой из составляющих в экспериментальной установке [2] (частоты и расстояния для модельной задачи брались те же), близко к предельному, т. е. $|R_3 - R_2| \sim c/N\Delta f$. Следовательно, в общем случае M источников число отсчетов должно удовлетворять условию

$$N \geq c/\Delta f \min \{|R_m - R_k|\}. \quad (13)$$

Характерной мерой устойчивости решения по отношению к производимым вычислениям, а также возможным неточностям в исходных данных $p(\omega_n)$ являются числа обусловленности матриц V_m : $\text{cond}(V_m) = \|V_m\| \|V_m^{-1}\|$ [5]. Для используемых в работе данных числа обусловленности матриц V_2 и V_3 составляли $10^3 - 10^4$ для $N=40-50$, что является достаточным для систем такого порядка (см. [3]). Выполнение условия (13), а также условия $R_m \frac{\Delta\omega}{c} \geq \frac{2\pi}{N}$ является некоторой гарантией хорошей обусловленности матриц V_m .

Сравнение предлагаемого алгоритма с многочастотным методом [2] показывает, что для оценки уровня основной и помеховых составляющих требуется гораздо меньшее число отсчетов (частот) измерений (для разделения составляющих в [2] проводились измерения на 128 частотах). Платой за это является необходимость априорных данных о геометрии системы, а также требуемое для обращения матриц время обработки (пропорциональное MN^3), гораздо большее, чем время, не-

* Основной составляющей при обработке экспериментальных данных придавался вес 100 (т. е. большая гладкость).

** На период изменения спектра $H(\omega)$ импульсной переходной функции $h(t)$ экспериментальной установки [2] приходится порядка 45 частотных точек.

*** В отличие от модельной задачи для экспериментальных данных истинные значения $p_m(\omega_n)$ неизвестны, и для того, чтобы выяснить предельные возможности метода, результаты расчетов для различного числа точек $N < 50$ сравнивались с соответствующими результатами для $N=50$.

обходимое для проведения преобразования Фурье в [2] (пропорциональное $MN \ln N$ при использовании аппарата быстрого преобразования Фурье). Это может компенсировать указанное выше достоинство предлагаемого метода, тем не менее в каждом конкретном эксперименте выбор метода разделения составляющих может быть сделан из соображений либо ограничения во времени обработки, либо ограничения в диапазоне частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fissimous T. K. // Electron. Lett. 1968. V. 4. № 17. P. 348.
2. Калинин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 4. С. 495; Препринт НИРФИ № 222. Горький, 1986.
3. Ksienski D. A. // Proc. IEEE. 1985. V. 73. № 1. P. 177.
4. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964.
5. Форсайт Дж., Молер К. Численные решения систем линейных алгебраических уравнений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.
6. Беляев Б. Г. Сб. Антенны. — М.: Радио и связь, 1986. Вып. 34. С. 93.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
6 октября 1988 г.

A METHOD OF RESOLVING DATA INTO SMOOTH COMPONENTS WITH SWEEPED FREQUENCY TECHNIQUE

Yu. I. Belov, V. V. Snegireva

The method of resolving the reflecting signals into smooth components is developed and investigated for the case of range-frequency measurements when the number of components is more than two. A less number of samples is needed for the estimation of the basic and noise component level but the time of calculation is longer than in the similar methods using the Fourier transformation.

Аннотации депонированных статей

УДК 621.372

РАССЕЯНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЭРМИТ-ГАУССОВЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПЛОСКОСЛОИСТЫМИ СТРУКТУРАМИ

А. А. Вертий, С. П. Гаврилов, В. Н. Деркач

Прямым и обратным преобразованием Фурье проведен численный анализ электромагнитного поля гауссовой волны, отраженной или прошедшей плоскую многослойную структуру в случае нормального падения на эту структуру двумерной E -поляризованной эрмит-гауссовой электромагнитной волны порядка n .

Расчет спектральных плотностей исследуемых полей проведен матричным методом с учетом состояния поляризации волнового поля. Определены коэффициенты разложения искомого волнового поля по ортонормированному набору двумерных эрмит-гауссовых модовых функций. Приведены зависимости этих коэффициентов от параметров, характеризующих многослойные устройства — перестраиваемое интерференционное зеркало и узкополосный интерференционный фильтр типа Фабри—Перо.

Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 408-В90. Деп. от 19 января 1990 г.

УДК 537.874.6

АВТОКОЛЛИМАЦИОННОЕ ОТРАЖЕНИЕ ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЕТКОЙ С ЭКРАНОМ

А. А. Кириленко, А. П. Кусайкин

Исследованы энергетические характеристики автоколлимационного отражения от решеток с экраном как перспективного элемента трактов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Рассмотрены режимы полного автоколлимационного или полного зеркального отражения и их связь со спектральными характеристиками плоского резонатора со щелями.

Ввиду большого практического интереса вопросам автоколлимационного или в более общем случае «незеркального» отражения волн от периодических структур посвящено много работ. Детальные сведения о характеристиках решеток пилообразного, синусоидального профилей, гребенок и других можно найти в [1-6] и приведенной там библиографии. Технологические трудности изготовления таких решеток в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах привели к необходимости рассмотрения более простой структуры, которая может быть изготовлена, например, фотолитографическим путем. С другой стороны, анализ автоколлимационного отражения от полупрозрачной решетки с варьируемым расстоянием до экрана дает возможность изучить перспективу создания элементов, перестраиваемых по углу или по частоте. Исследования проведены на численной модели, использующей декомпозиционный подход (решетка — плоскость) с расчетом матрицы рассеяния ленточной решетки методом задачи Римана—Гильберта [7].

Напомним некоторые положения. Периодическая отражательная решетка при возбуждении ее плоской волной создает спектр пространственных гармоник, уходящих от решетки под углами (отсчет от оси Z)

$$\varphi_n = -\arcsin(n\kappa^{-1} + \sin \varphi),$$

где n — номер гармоники, $\kappa = l/\lambda$, l — период решетки, λ и φ — длина и угол падения первичной волны. Эффект автоколлимационного отражения заключается в реализации условия

$$2\kappa \sin \varphi = -p, \tag{1}$$

при котором (p)-я гармоника распространяется в направлении, противоположном направлению прихода первичной волны. Доля энергии, переносимой уходящей волной, определяется выражением $W_n^{E(H)} = |a_n^{E(H)}|^2 \operatorname{Re} \Gamma_n / \Gamma_0$, где $a_n^{E(H)}$ — комплексная амплитуда пространственной гармоники в случае E - или H -поляризации, $\Gamma_n = (2\pi/l) (\kappa^2 - \Phi_n^2)^{1/2}$ и $\Phi_n = (2\pi/l) (n + \kappa \sin \varphi)$ — постоянные распространения, соответственно, вдоль осей Z и Y . Наибольший интерес в приложениях (например, при создании открытых резонаторов с дисперсионными зеркалами) вызывают два режима: полного автоколлимационного отражения (ПАО), когда $W_p^{E(H)} = 1$, и полного зеркального отражения (ПЗО), когда $W_p^{E(H)} = 0$ при $W_0^{E(H)} = 1$ (последний важен при создании двухчастотных трехзеркальных систем).

Свойства решеток, в том числе и в режимах автоколлимации, существенно зависят от числа распространяющихся пространственных гармоник. Поэтому имеет смысл сразу выделить характерные частот-

ные диапазоны: одноволновый, двухволновый и т.д. Предварительно заметим, что при наложении условия автоколлимации происходит вырождение постоянных распространения у гармоник, номера которых равно отстоят от 0 и p в противоположных направлениях числовой оси. Учитывая это, будем при $p = -1$ называть одноволновым режим возбуждения, когда распространяются нулевая и (-1) -я гармоники, двухволновым — с распространяющимися (-2) -, (-1) -, 0-, $(+1)$ -й гармониками и т.д. Поскольку условие (1) связывает частоту и угол падения, то параллельно оси приведенных частот κ на рисунках отложена ось φ с соответствующими значениями угла падения из (1) с $p = -1$.

1. ОДНОВОЛНОВЫЙ РЕЖИМ

На рис. 1 изображены линии ПАО (сплошные) и линии ПЗО (штриховые) в координатах κ, δ ($\delta = h/l$) при различных значениях ширины щелей $\theta = d/l$ для E - и H -поляризации в области одноволнового режима $0,5 < \kappa < 1,5$.

Прежде всего отметим, что линии ПЗО образуют семейства кривых, асимптотически стремящихся к $\kappa = 0,5$ при увеличении высоты решетки δ . Наличие серии таких семейств обусловлено периодичностью в зависимости энергии автоколлимирующей гармоники от изменения высоты структуры, причем период составляет половину длины волны нулевой (или (-1) -й) гармоники вдоль оси $Z - \pi(l\Gamma_0)^{-1}$. Проявление ПЗО в одноволновой области изменения параметров поддается элементарной интерпретации и связано с наличием тривиального решения $a_0^E = -1$ или $a_0^H = 1$ в случае, когда по высоте решетки укладывается целое число полуволн и $\exp(2i\Gamma_0 h) = 1$. Бесконечно тонкая решетка в этом случае лежит в узле электрического поля. Положение таких линий ПЗО описывается условием

$$\delta = m(4\kappa^2 - 1)^{-1/2}, \quad (2)$$

не зависящим от ширины лент решетки и от типа поляризации.

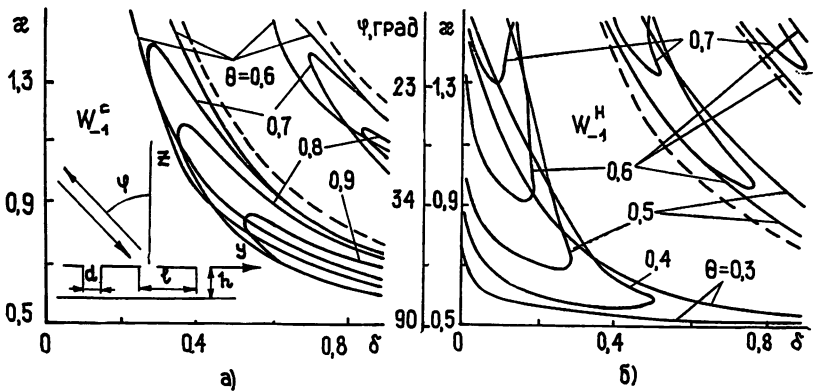


Рис. 1.

Линии ПАО при E -поляризации расположены попарно вблизи линий ПЗО со стороны меньших значений κ и δ и ведут себя аналогично последним при возрастании высоты решетки (например, кривые рис. 1а, при $\theta = 0,7$). Такое попарное расположение линий ПАО соответствует характерному двугорбому резонансу по частотной оси, а близость к линии ПЗО — высокой крутизне одного из его склонов. При некоторых значениях κ две линии ПАО сливаются; выше этих значений частоты эффект ПАО при данном значении θ вообще не проявляется ни при каком положении решетки. Рис. 1а отражает только фрагмент общей картины поведения линий ПАО при изменении ширины щели ($0,6 \leq \theta \leq 0,9$). Для щелей более узких, чем $\theta = 0,55$, эффект ПАО

качественно проявляется аналогично кривым $\theta=0,6$, при этом линии $W_{-1}^E=1$, не сливаясь, обрываются при $\kappa=1,5$, не проникая в область двухволнового режима. При стремлении θ к нулю линии ПАО попарно сближаются, устремляясь к линиям ПЗО в положение, описываемое выражением (2). При этом происходит увеличение добротности их резонансного проявления (под добротностью понимается величина, обратная полуширине резонансной кривой энергии на уровне 0,5). С другой стороны, с увеличением щелей при $\theta>0,9$ для проявления ПАО необходимы все меньшие значения частоты и большие величины высоты решетки.

В случае H -поляризации (рис. 1б) области проявления эффекта ПАО носят качественно иной характер. В работе [4] ранее отмечалось, что у решеток волноводного типа (гребенка) при H -поляризации эффект ПАО в одноволновой области проявляется при существенно меньших значениях характерной «глубины» решетки δ в сравнении с E -случаем. Ту же закономерность имеем и для ленточной решетки с экраном, где ПАО существует и при очень малых δ . Второе отличие H -случая состоит в том, что для конкретной решетки эффект ПАО исчезает при частотах не выше (как на рис. 1а), а ниже некоторой частоты, характерной для данного θ . Как и ранее, с уменьшением θ линии ПАО приближаются к линиям ПЗО, с той разницей, что в случае H -поляризации первые расположены со стороны больших значений κ и δ , чем линии, определяемые уравнением (2).

Надо заметить, что и первое семейство линий ПАО при H -поляризации также может рассматриваться как «близкое» к линии ПЗО с $m=0$ в (2). Характерная особенность его состоит в наличии отрезков линий $W_{-1}^H=1$, почти параллельных осям κ или δ . Это дает возможность обеспечить широкую частотную полосу эффекта ПАО или сделать его проявление малочувствительным к расстоянию решетка—экран. Например, при $\theta=0,6$, $\delta=0,17$ имеем $W_{-1}^H>0,99$ в полосе $0,89<\kappa<1,37$ ($34^\circ>\varphi>21^\circ$).

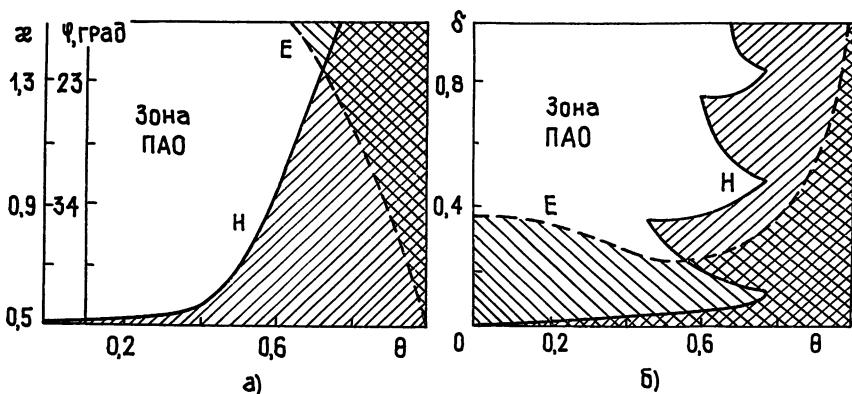


Рис. 2.

Выше мы упоминали о том, что для каждого значения ширины щели существуют характерные зоны, в которых эффект ПАО не проявляется ни при каких значениях других параметров задачи. Рис. 2а иллюстрирует расположение этих зон: слева от сплошной линии для H -поляризации и от штриховой для E -поляризации ПАО может быть обеспечено подбором расположения решетки, а в заштрихованных областях такой эффект не наблюдается. Аналогичная информация представлена и на рис. 2б: слева от соответствующих кривых существуют частоты, на которых вся энергия отражается от решетки в обратном направлении. Надо заметить, что в отличие от гребенки [5] в рассматриваемой структуре весьма мал набор геометрий, обеспечивающих одновременное ПАО для обеих поляризаций сразу.

Если рассматривать взаимодействие решетки и экрана в «двухмодовом» приближении, т.е. без учета высших (с $n \neq 0, -1$) пространственных гармоник поля, то требование полного автоколлимационного отражения, например в E -поляризации, ведет к условию

$$\exp(2i\Gamma_0 h) = F_1(R_0, R_{-1}) = \quad (3)$$

$$= (4F_2)^{-1}(5R_0 + F_2 \pm \sqrt{(5R_0 + F_2 + 2)^2 - 16F_2 R_0 + 2}),$$

где $F_2 = 2(R_{-1}^2 - R_0^2) - R_0$, R_0 и R_{-1} — амплитуды нулевой и (-1) -й волн, отраженных от ленточной решетки. Здесь учтена специфика такой структуры: $1 + R_0 = T_0$, $R_{-1} = T_{-1}$. Из (3) сразу следует наличие двух ветвей ПАО; высота решетки над экраном, получаемая из (3), хорошо совпадает с данными численных экспериментов. При этом интересно, что в области существования эффекта ПАО требуемое для разрешимости (3) соотношение $|F_1(R_0, R_{-1})| = 1$ выполняется с высокой точностью для обоих знаков перед корнем в (3).

В точке, где подкоренное выражение в (3) обращается в нуль, происходит слияние двух ветвей ПАО (за ней $|F_1(R_0, R_{-1})| \neq 1$, и этот эффект не проявляется). Привлекая соотношения, следующие из унитарности матрицы рассеяния решетки, имеем

$$(5R_0 + F_2 + 2)^2 = 16F_2 R_0 \quad \text{при} \quad (4)$$

$$J^2 = -R^2 - 1,1R + 0,1(-4R^2 - 6R - 1)^{1/2} - 0,2,$$

где $R + JR = R_0$. Связь $J^2 = F(R)$, описываемая формулой (4), определяет границы областей, где возможен эффект ПАО, т.е. линии, изображенные на рис. 2а. Анализируя знак $F(R)$, получаем, что эффект ПАО невозможен там, где $R > -0,2$ ($R < 0,2$ для H -поляризации).

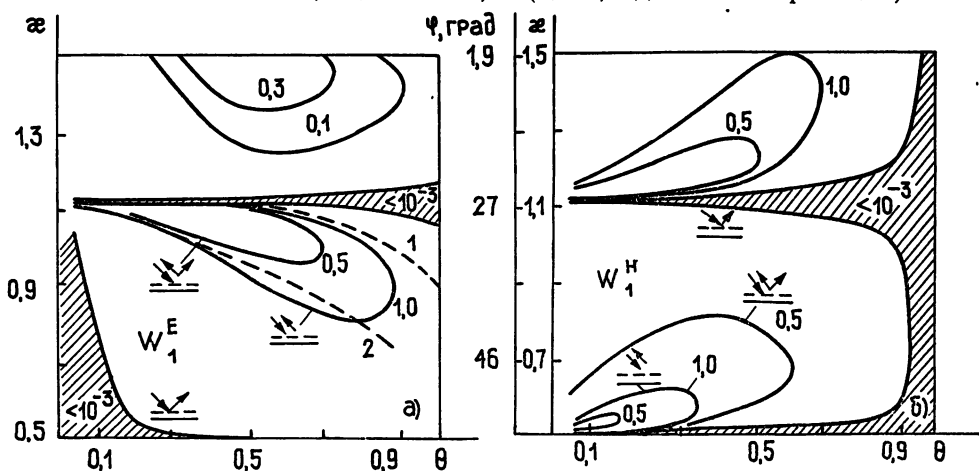


Рис. 3.

Рис. 3 позволяет проследить поведение энергетических характеристик при изменении ширины щелей в условиях зафиксированного расстояния между решеткой и экраном. Здесь в координатах κ, θ представлены линии равного уровня энергии (-1) -й гармоники для обеих поляризаций при $\delta = 0,5$. Заштрихованные области — это зоны зеркального отражения, где $W_1^{E(H)} \ll 1$. На рис. 3а наблюдаются две такие области, обусловленные явлениями разной природы. При малых значениях κ и θ область ПЗО появляется из-за того, что волна, падающая на решетку при больших значениях угла ϕ (малые частоты), не «замечает» узких щелей при E -поляризации и отражается от ленточной решетки как от металлической поверхности. Поскольку при H -поляризации токи направлены поперек щелей, то даже при $\theta \ll 1$ ще-

ли разрывают линии тока, решетка далека по своим свойствам от экрана и выхода на ПЗО при малых θ не наблюдается. Вторая область ПЗО проявляется как результат полуволнового резонанса, описываемого выражением (2). С увеличением ширины щелей решетки происходит расширение области ПЗО, что соответствует уменьшению добротности этого эффекта. Такое поведение дифракционных характеристик можно легко объяснить, если рассматривать ленточную решетку с экраном как резонатор, нагруженный на открытое пространство через щели решетки. Естественно, что при увеличении связи с последним резонансные эффекты уменьшат свою добротность. Это же касается и эффекта ПАО, который проявляется в виде двугорбого резонанса («языка»), максимумы которого расходятся с ростом θ , а добротность их при этом снижается.

В случае H -поляризации (рис. 3б) при больших значениях ширины щелей решетки $0,94 < \theta < 1,0$ присутствует область, в которой при любых значениях частоты в одноволновом диапазоне осуществляется ПЗО. Здесь падающая H -поляризованная волна «не замечает» тонких лент решетки, перпендикулярных E -составляющей падающего поля.

Поведение дифракционных характеристик при малых значениях частоты $0,5 < \kappa < 0,9$ качественно идентично их проявлению в области $1,12 < \kappa < 1,5$, следующей за полуволновым резонансом. Переписав (2) в виде $m = 2\delta \sqrt{\kappa^2 - 0,25}$, при $\kappa = 0,5$ получим $m = 0$, что при H -поляризации соответствует распространению между решеткой и экраном ТЕМ-волны — первичная волна падает под углом 90° . С этим и связано существование зоны ПЗО при $\kappa \approx 0,5$ только в случае H -поляризации. Понятно, что при E -поляризации такой эффект при малых частотах отсутствует.

2. ДВУХВОЛНОВЫЙ РЕЖИМ

Область двухволнового режима заключена в пределах $1,5 < \kappa < 2,5$. На рис. 4 представлены фрагменты различных зависимостей, харак-

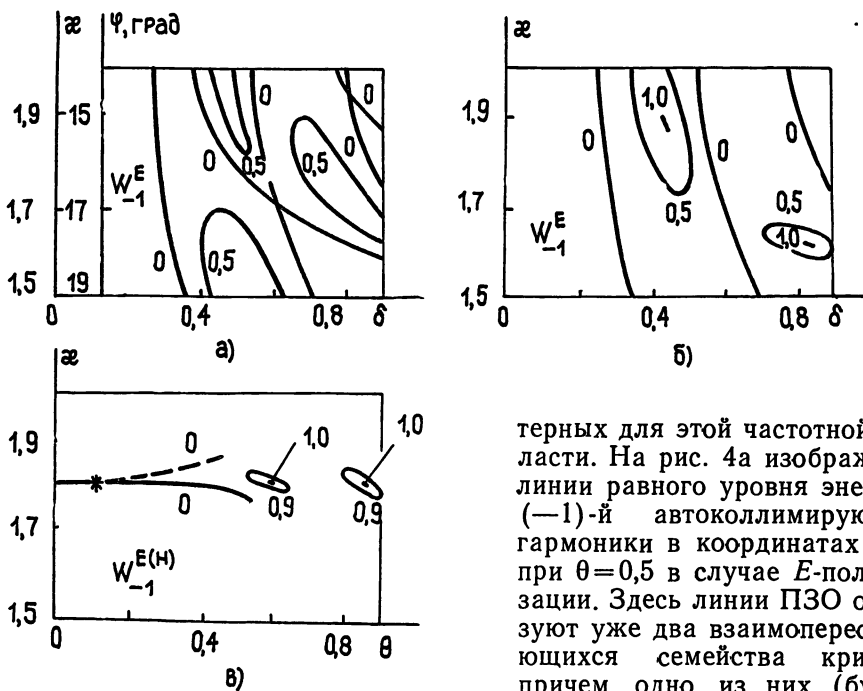


Рис. 4.

терных для этой частотной области. На рис. 4а изображены линии равного уровня энергии (—) — 1-й автоколлимирующей гармоники в координатах κ, δ при $\theta = 0,5$ в случае E -поляризации. Здесь линии ПЗО образуют уже два взаимопересекающихся семейства кривых, причем одно из них (будем называть его основным) описывается выражением (2) и

является продолжением линий ПЗО из одноволновой области. Построение простой модели ПЗО с помощью металлического экрана

вместо решетки в двухволновой области для другого набора линий уже невозможно, хотя, как показывают расчеты, и здесь $W_0^E = 1$. Это связано с тем, что нельзя удовлетворить граничным условиям на таком экране для одной из распространяющихся волн в случае, когда наложено условие полуволнового резонанса на другую распространяющуюся волну. Однако анализ численных результатов показал, что новый набор линий ПЗО в двухволновой области при $\theta \leq 0,5$ все же тесно связан с резонансом (-2) -й и $(+1)$ -й волн и его положение достаточно хорошо описывается выражением

$$\delta = m(4\kappa^2 - 9)^{-1/2}. \quad (5)$$

При больших ширинах щелей это второе семейство линий ПЗО исчезает (см. рис. 4б с $\theta = 0,8$). Более того, если при $\theta \leq 0,5$ эффект ПАО вообще отсутствовал, то с расширением щелей образуются области с высоким уровнем W_{-1}^E , внутри которых эффект ПАО проявляется в отдельно стоящих точках. Расположены последние практически на линиях, где раньше наблюдалось зеркальное отражение. Подобное (в отдельных областях) проявление ПАО ранее наблюдалось в одноволновом диапазоне на эшелетте [3] и в двухволновом — на решетке волноводного типа [4].

Более наглядно иллюстрирует динамику изменения свойств решетки с увеличением ширины щелей рис. 4в, где в координатах κ, θ представлены линии уровня W_{-1}^E (сплошные) и линия ПЗО для H -поляризации (штриховая). Значению $\kappa \approx 1,803$, при котором наблюдается ПЗО для решеток с узкими щелями, соответствует выражение (5) вплоть до $\theta = 0,4$ в E - и $\theta = 0,2$ — в H -поляризации. При больших щелях линия ПЗО уходит от этой частоты в сторону меньших частот для E - и больших — для H -поляризации. Если для H -поляризации резонансов ПАО вообще не обнаружено, то для E после «разрушения» эффекта ПЗО на той же частоте резонансы $(+1)$ -й волны и (-2) -й волны Флоке проявляются уже в виде полного автоколлимационного отражения в отдельных точках.

Природу возникновения эффектов ПЗО и ПАО в двухволновом диапазоне помогает понять анализ распределений электромагнитного поля, представленных на рис. 5а—5в. Первое распределение соответствует точке, отмеченной звездочкой на рис. 4в для случая E -поляризации. Как само наличие набора лучностей поля (при «тривиальном» резонансе линии уровня параллельны оси Y), так и их период по оси Y свидетельствуют о том, что эффект зеркального отражения обусловлен именно $(+1)$ -й и (-2) -й волнами между решеткой и экраном. Картины поля на рис. 5б и 5в соответствуют уже эффекту ПАО и зафиксированы, соответственно, в точках $\theta = 0,69$ и $\theta = 0,86$ (см. рис. 4в). Как и выше, «ответственность» за резонанс несут $(+1)$ -я и (-2) -я волны, с той разницей, что резонанс ПАО возможен как при симметричном (б), так и при несимметричном (в) распределении поля относительно плоскости $Y = 0$.

3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И АВТОКОЛЛИМАЦИОННОЕ ОТРАЖЕНИЕ

Не останавливаясь в деталях на самой постановке спектральной задачи о собственных колебаниях открытой периодической структуры (см. [8]), рассмотрим конкретные результаты, следующие из анализа дисперсионного уравнения для E -поляризации

$$|I + RE| = 0 \quad (6)$$

в области комплексных частот $\kappa = \kappa' + i\kappa''$, $\kappa'' < 0$. Здесь $R = \{R_{mn}\}_{m, n = -\infty}^{\infty}$ — матрица отражения волн от ленточной решетки, матрица $E = \{\exp(2i\pi\Gamma_m h) \delta_m^n\}_{m, n = -\infty}^{\infty}$ описывает затухание при распространении Флоке волн между решеткой и экраном. В режиме автоколлимации $(-p)$ -й волны, при выполнении условия (1), из условия симметрии

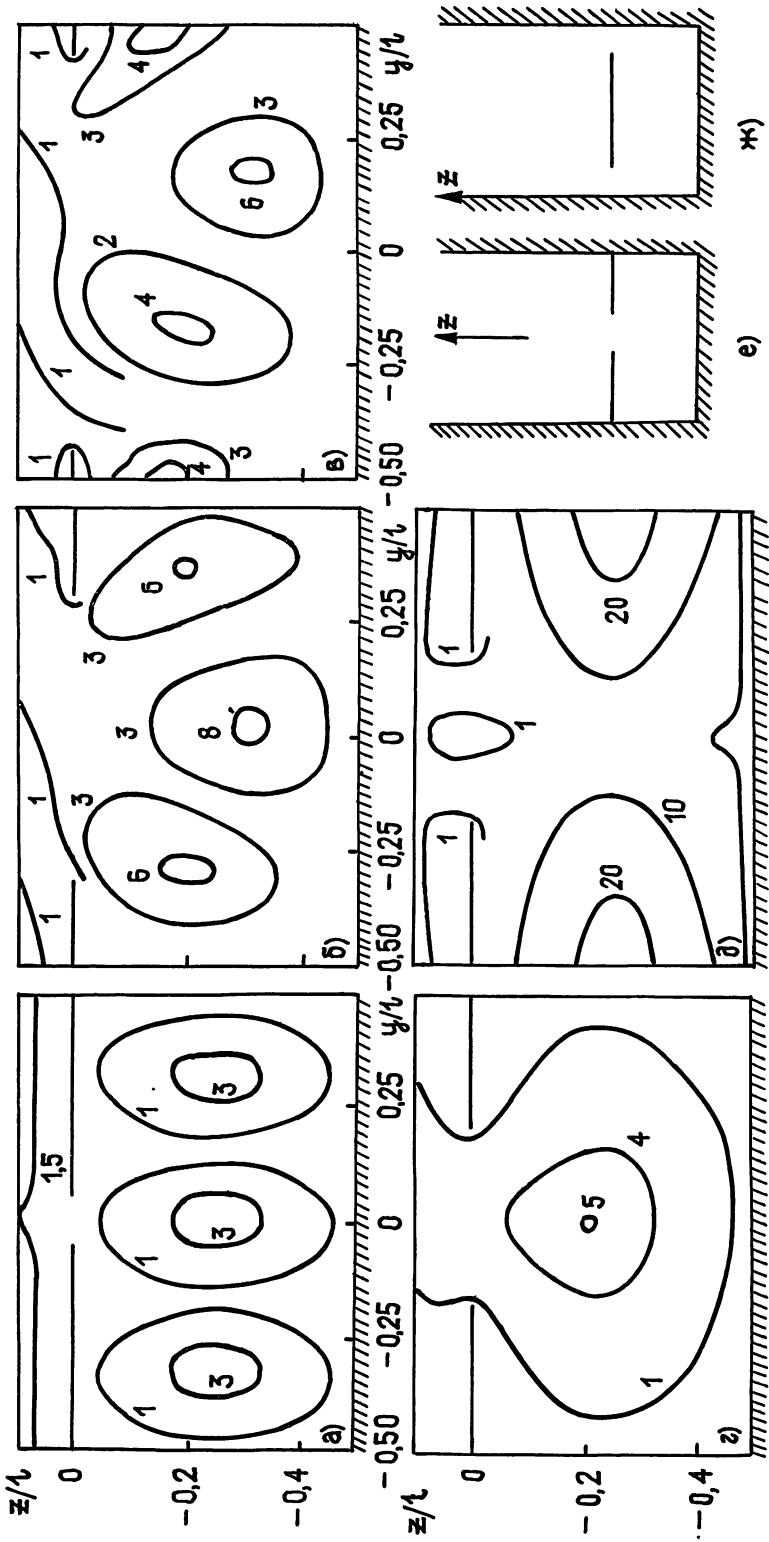


Рис. 5.

решетки относительно плоскости $Y=0$ имеем $R_{mn}=R_{-(m-p), -(n-p)}$. С учетом обычных соотношений взаимности вида $R_{mn}(\varphi)\Gamma_n(\varphi) = R_{nm}(-\varphi)\Gamma_{-m}$ получаем, что (6) эквивалентно

$$|I+R^+E| |I+R^-E| = 0, \quad (7)$$

где $\{R_{sq}^\pm\} = R_{sq} \pm R_{s, -(q-p)}$. Два возникших дисперсионных уравнения описывают собственные частоты колебаний симметричных (+) и антисимметричных (-) относительно плоскости $Y=0$. При этом возникают волноводные аналоги рассматриваемых задач: в симметричном случае это анализ колебаний в резонаторе, ограниченном двухленточной диафрагмой (рис. 5е), в несимметричном — диафрагмой с лентой в центре волновода (рис. 5ж). В качестве начального приближения при поиске корней методом Ньютона использовалось дисперсионное уравнение плоского волновода (предел нашей структуры при $\theta \rightarrow 0$), когда

$$\kappa'_{mp} = 0,5[(2\rho+1)^2 + m^2\delta^{-2}]^{1/2}. \quad (8)$$

Штриховыми линиями на рис. 3а представлены зависимости реальных частей комплексных собственных частот симметричного и несимметричного колебаний ($m=1, p=-1$ в (8)) от ширины щелей решетки. В области узких щелей явно видно наличие связи как между $\kappa'_{1,-1}(\theta)$ и частотой проявления эффекта ПАО, так и между $\kappa''_{1,-1}(\theta)$ и добротностью резонанса (-1)-й отраженной волны. Последняя на порядок ниже при резонансе на симметричных колебаниях, так как у них существенно выше дифракционные потери. Распределения поля для двух случаев (1 и 2), отмеченных на рис. 3а звездочками, представлены, соответственно, на рис. 5д и 5г. При равных щелях наличие узла поля вблизи излучающей апертуры для несимметричного колебания (рис. 5д), естественно, ведет к меньшим потерям. Ясно, что и на рис. 1 наличие двух ветвей ПАО связано с двумя возможными типами симметрии возбуждаемых собственных колебаний.

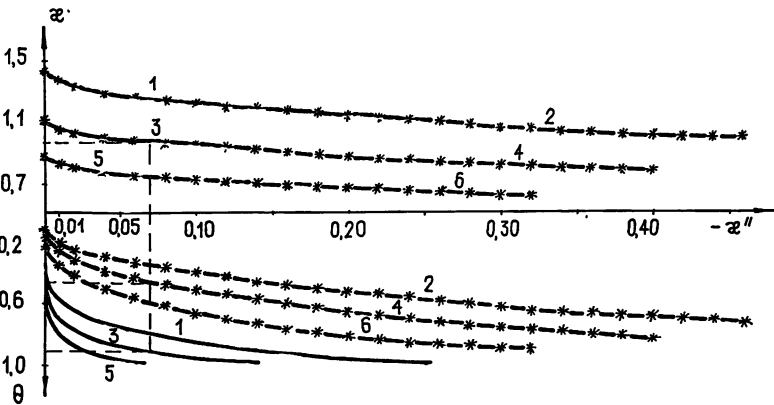


Рис. 6.

Данные, приведенные на рис. 6, дают представление о динамике изменения комплексных собственных частот симметричных и несимметричных колебаний с ростом щелей решетки для трех различных высот ее над экраном. В качестве параметра на кривых $\kappa(\theta)$ в плоскости κ', κ'' фигурирует величина θ . Соответствующие каждой точке значения θ отложены на вертикальной оси в нижней части рис. 6. Кроме интуитивно понятных факторов — смещения κ' в длинноволновую сторону с появлением потерь, резкого роста κ'' при открывании щелей и существенной разницы κ''^+ и κ''^- при одинаковых щелях — существует закономерность, требующая специального пояснения.

Дело в том, что штриховая (симметричные колебания) и сплошная (несимметричные) линии совпадают друг с другом, т. е. при данной

высоте решетки существует жесткая зависимость между реальной частью собственной частоты колебания и его добротностью: хотя каждой точке общей кривой в плоскости κ' , κ'' соответствуют разные θ для задач, соответствующих рис. 5е и рис. 5ж, однако получающаяся конкретная величина κ' сразу предопределяет κ'' и наоборот. Объяснение этому заключено в том, что характеристики тонких диафрагм в одномодовом диапазоне определяются всего одним параметром (см. [9], стр. 102), в эквивалентной схеме — индуктивностью, и если известна фаза коэффициента отражения от диафрагмы, позволяющая рассчитать резонансную частоту, то сразу задана и абсолютная величина этого коэффициента, определяющая величину связи резонатора с волноводом.

В силу неоднозначности функций $\Gamma_n = \pm (2\pi/l) \sqrt{\kappa^2 - \Phi_n^2}$, определяющих постоянные распространения волн Флоке, поиск собственных частот в принципе, [8], необходимо вести на многолистной поверхности Римана, где каждый лист отличается своим набором знаков в определении Γ_n . Оказалось, что физический смысл имеют и решения (7), расположенные на высших («нефизических») листах, где для части значений n может быть и $\text{Re } \Gamma_n < 0$, что говорит о наличии «приходящих» волн Флоке в пространственном спектре собственного колебания. Как пример укажем, что отдельные точки ПАО в двухволновом диапазоне на рис. 4в соответствуют двум собственным колебаниям с $\kappa'' = 0$ на высшем листе поверхности Римана с $\text{Re } \Gamma_0 > 0$, $\text{Re } \Gamma_{-1} < 0$, когда в спектре присутствуют нулевая уходящая и (-1) -я приходящая волны. Таким образом поля, возбуждающиеся при этом в структуре, близки к собственным (рис. 5б, 5в), аналогичные эффекты для других структур отмечались в [10]. Интересно, что в случае несимметричного колебания знак κ'' меняется на противоположный при переходе через точку $\kappa'' = 0$ (путем изменения θ или δ например), а для симметричного колебания спектральная линия (зависимость $\kappa(\theta)$ или $\kappa(\delta)$ в плоскости κ' , κ'') только касается реальной оси.

Представленный выше анализ прежде всего имел целью предложить для открытых резонансных систем миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов новый частотно- и углоселективный элемент, существенно отличающийся от известных и электродинамикой, и технологическими возможностями. Использование таких зеркал в ОР с дисперсионными зеркалами приведет к дополнительному разрежению спектра, даст возможность управлять их свойствами, осуществить некоторые специфические режимы работы, например в двухчастотном трехзеркальном резонаторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tseng D. Y., Hessel A., Oliner A. A. // *Alta Frequenza*. 1969. V. 38. № 3. P. 82.
2. *Electromagnetic Theory of Gratings* / Ed. R. Petit. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1980.
3. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. — Киев: Наукова думка, 1986.
4. Кириленко А. А., Кусайкин А. П., Сиренко Ю. К. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1985. Т. 28. № 11. С. 1450.
5. Кириленко А. А., Кусайкин А. П., Сиренко Ю. К. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1986. Т. 29. № 10. С. 1182.
6. Кусайкин А. П. Препринт ИПЭ АН УССР № 313. Харьков, 1986.
7. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Харьков: Гос. ун-т, 1971.
8. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П. // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286. № 1. С. 85.
9. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности. — Киев: Наукова думка, 1986.
10. Сиренко Ю. К. Автореферат диссертации. Харьков, 1988.

УДК 535.421:534.23:621.37

**АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
В ПОЛЕ ЗАТУХАЮЩЕГО УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПУЧКА
С КВАДРАТИЧНЫМ ФАЗОВЫМ ФРОНТОМ
В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

А. С. Задорин, С. Н. Шарангович

Рассмотрена задача об акустооптическом взаимодействии слаборасходящихся световых пучков в поле затухающего ультразвукового пучка с квадратичным фазовым фронтом в анизотропной среде. Получены дифференциальные уравнения, определяющие дифракционное световое поле, и найдено их общее решение в замкнутом виде. Изучено влияние анизотропии и диссипативных потерь энергии звуковых волн на частотные и энергетические характеристики акустооптического взаимодействия при малой и большой мощности ультразвукового пучка с квадратичным фазовым фронтом.

Естественным путем развития акустооптических (АО) устройств является повышение центральных частот с расширением полосы рабочих частот. Однако переход на высокие частоты связан с существенным возрастанием диссипативных потерь энергии звуковых волн. Влияние этого фактора на характеристики АО устройств и само акустооптическое взаимодействие (АОВ) исследовалось в ряде работ [1-6] в предположении изотропности среды взаимодействия и однородности фазового фронта звукового пучка. На практике же часто используются кристаллические среды, обладающие выраженной анизотропией физических свойств, и фокусирование звуковых волн. Поэтому данная работа, написанная как продолжение [7] с сохранением терминологии и обозначений, имеет своей целью изучение АОВ в поле затухающего ультразвукового пучка с квадратичным фазовым фронтом в анизотропной среде.

Рассмотрим дифракцию слаборасходящегося монохроматического пучка светового излучения

$$E_0(r, t) = 0,5e_0 E^0(r) \exp [i(\omega_0 t - k_0 \cdot r)] + \text{к. с.}, \quad (1)$$

где e_0 , ω_0 , k_0 , $E_0(r)$ — поляризация, частота, волновой вектор и распределение комплексной амплитуды светового пучка на границе области АОВ в кристаллической среде с затуханием упругих волн в брэгговском режиме АОВ. Здесь и далее описание и действия над векторными и тензорными величинами проводятся в бескоординатной форме по правилам [9]. Так операции $(a \cdot b)$, $(a \times b)$ означают скалярное и векторное произведение; (ab) — тензорное (диадное) произведение; $(a \cdot \hat{\epsilon} \cdot b)$ — свертка (скалярное произведение) тензора $\hat{\epsilon}$ с векторами a, b .

Допустим, что затухающий ультразвуковой пучок в кристалле можно представить в виде квазиплоской слаборасходящейся волны:

$$U(r, t) = 0,5u[U_m(r) \exp [i(\Omega_0 t - K_0 \cdot r + iaq \cdot r)] + \text{к. с.}], \quad (2)$$

где $U_m(r)$ — амплитуда ультразвуковых смещений, связанная с распределением амплитуды на границе с преобразователем $U(r', z' = 0)$ в плоскости $q \cdot r = 0$ выражением

$$U_m(r) = U\left(r' - v_{\text{гп}} \frac{z'}{v}, 0\right), \quad (3)$$

U — вектор поляризации; Ω_0 , v , $v_{гр}$ — частота, фазовая и групповая скорости; q , $q_{гр}$ — единичные векторы волновой и групповой нормали; $K_0 = (\Omega_0/v)q$; $v_{гр} = v_{гр}q_{гр}$; r' — радиус-вектор в плоскости $q \cdot r = \text{const}$; $z' = q \cdot r$; α — коэффициент затухания. В параксиальном приближении распределение $U_m(r)$, формируемое преобразователем, поверхность которого в плоскости дифракции описывается кривой порядка, можно аппроксимировать выражением

$$U_m(r) = \begin{cases} U_0 \exp [iK_0(l-L'/2)^2/2R] & \text{при } z' \text{ tg } \gamma \leq l' \leq z' \text{ tg } \gamma + L, \\ 0 & \text{при остальных } l' \end{cases} \quad (4)$$

где R — радиус кривизны волнового фронта; L' , l' — длина преобразователя и координата, отсчитываемая в плоскости дифракции (рис. 1); $\text{tg } \gamma = |v_{гр} \times q|/v$; U_0 , γ — амплитуда и угол сноса звукового пучка. В анизотропной среде представление пучка $U(r, t)$ в виде (2)–(4) справедливо при выполнении следующего условия:

$$z'_{\text{max}} |W| K_0 \Delta \psi^2 / 8\pi \ll 1,$$

где W — коэффициент квадратичной анизотропии; z'_{max} — максимальное значение координаты области АОВ вдоль вектора q ;

$$\Delta \psi = \begin{cases} 2\pi/K_0 L' & \text{при } R > K_0 L'^2/4 \\ L' (1 - 0,84 \sqrt{2\pi R/K_0}/L')/R & \text{при } R \leq K_0 L'^2/4 \end{cases}$$

— ширина углового спектра пучка $U(r, t)$. В этом случае согласно (2), (3) границы $U(r, t)$ описываются плоскостями $\Gamma \cdot r = 0$ и $\Gamma \cdot r = L'$, где $\Gamma \cdot q_{гр} = 0$.

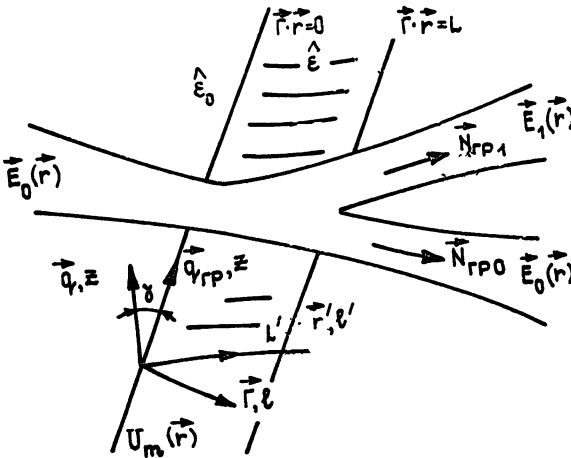


Рис. 1. Геометрия АОВ в анизотропной среде.

Под действием ультразвукового пучка (2) осуществляется возмущение диэлектрической проницаемости кристалла

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_0 + 0,5 \Delta \hat{\varepsilon} (U_m(r) \exp [i(\Omega_0 t - K_0 \cdot r) - \alpha q \cdot r] + \text{к. с.}), \quad (5)$$

где $\Delta \hat{\varepsilon}$ — величина возмущения тензора $\hat{\varepsilon}_0$ в поле звуковой волны единичной амплитуды. Для поля $E_0(r, t)$ возмущенный слой является рассеивающей областью, на выходе которой в брэгговском режиме дифракции существуют амплитуды лишь двух световых пучков $E_0(r, t)$ и $E_1(r, t)$, удовлетворяющих векторному уравнению

$$\text{rot rot}(E_0 + E_1) = -\mu_0 \varepsilon_0 (\partial^2 / \partial t^2) [\hat{\varepsilon} \cdot (E_0 + E_1)], \quad (6)$$

где ϵ_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Ввиду малости параметра $\mu = |\Delta\epsilon \cdot e_0| U_0 / |\hat{\epsilon}_0 \cdot e_0| \ll 1$ решение уравнения (6) будем искать методом медленно меняющихся амплитуд, в соответствии с которым и результатами [1-4] световое поле в возмущенной области представим в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0,1} e_j E_{mj}(\mathbf{r}) \exp [i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) - \alpha_j(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] + \text{к. с.}, \quad (7)$$

где $\omega_1 = \omega_0 \pm \Omega_0$, поляризации e_j и волновые векторы \mathbf{k}_j удовлетворяют волновому уравнению, описывающему распространение световых волн в невозмущенной среде [7],

$$[\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_j \mathbf{k}_j - (\omega_j^2/c^2) \hat{\epsilon}_0] \cdot e_j = 0, \quad (8)$$

$E_{mj}(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся в области АОВ амплитуды световых волн, зависимость которых от α определяет влияние затухания звука на $E_0(\mathbf{r}, t)$, $E_1(\mathbf{r}, t)$ и находится в результате решения укороченных уравнений.

Полагая, что в пределах звукового пучка (2) дифракционные изменения падающего светового пучка малы, и подставляя (5), (7) в (6), а также используя (8) и результаты [7], получим систему укороченных уравнений для комплексных амплитуд $E_{mj}(\mathbf{r})$ в области АОВ:

$$i \frac{\partial E_{m0}(l, z)}{\partial l} (e_0 \cdot \hat{B}_0 \cdot e_0) + i \frac{\partial E_{m0}(l, z)}{\partial z} (e_0 \cdot \hat{D}_0 \cdot e_0) = \frac{k_0^2}{2} (e_0 \cdot \Delta\epsilon \cdot e_1) \times \\ \times U_m^*(l) E_{m1}(l, z) \exp [i\Delta K l - 2\alpha z \cos \gamma], \quad (9)$$

$$i \frac{\partial E_{m1}(l, z)}{\partial l} (e_1 \cdot \hat{B}_1 \cdot e_1) + i \frac{\partial E_{m1}(l, z)}{\partial z} (e_1 \cdot \hat{D}_1 \cdot e_1) + i\alpha (e_1 \cdot \hat{B} \cdot e_1) E_{m1}(l, z) = \\ = \frac{k_0^2}{2} (e_1 \cdot \Delta\epsilon \cdot e_0) U_m(l) E_{m0}(l, z) \exp [-i\Delta K l],$$

где $\Delta K = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0 - \mathbf{K}_0|$ — модуль вектора фазовой расстройки;

$$\hat{B}_{0,1} = k_0 n_{0,1} [2(\Gamma \cdot N_{0,1}) - \Gamma N_{0,1} - N_{0,1} \Gamma], \quad \hat{B} = -k_0 n_1 [2(\mathbf{q} \cdot N_1) - \mathbf{q} N_1 - N_1 \mathbf{q}], \quad (10)$$

$$\hat{D}_{0,1} = k_0 n_{0,1} [2(\mathbf{q}_{\text{гп}} \cdot N_{0,1}) - \mathbf{q}_{\text{гп}} N_{0,1} - N_{0,1} \mathbf{q}_{\text{гп}}],$$

$n_{0,1}$ — показатели преломления; l, z — координаты вдоль составляющих $\text{grad } E_{m0,1} = \Gamma \frac{\partial E_{m0,1}}{\partial l} + \mathbf{q}_{\text{гп}} \frac{\partial E_{m0,1}}{\partial z}$, связанные с $l' = l/\cos \gamma$ и $z' = z \cos \gamma$,

k_0 — волновое число света в вакууме. Следуя [7], можно показать, что система (9) имеет первый интеграл, выражающий постоянство суммарной плотности потока энергии взаимодействующих пучков в направлении Γ к любой точке области АОВ. Поэтому решения уравнений (9) будут удовлетворять закону сохранения суммарной энергии взаимодействующих пучков E_0 и E_1 в анизотропной среде, возмущенной затухающим ультразвуковым пучком $U(\mathbf{r}, t)$.

Из уравнений (9) следует, что изменение амплитуд $E_{m0,1}$ в области АОВ по координатам l и z отличается в $\eta_{0,1} = (e_{0,1} \cdot \hat{B}_{0,1} \cdot e_{0,1}) \times \times (e_{0,1} \cdot \hat{D}_{0,1} \cdot e_{0,1})^{-1}$ раз. Во многих практических случаях $\eta_{0,1} \gg 1$. На этом основании будем полагать, что выполняются неравенства

$$\frac{\partial E_{m1}}{\partial z} \ll \eta_1 \frac{\partial E_{m1}}{\partial l}, \quad \frac{\partial E_{m0}}{\partial z} \ll \eta_0 \frac{\partial E_{m0}}{\partial l},$$

и пренебрежем слагаемыми $\partial E_{m0,1}/\partial z$ в (9). В этом случае для распределения звукового поля (4) система (9) преобразуется в однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2}{dl^2} E_{m1} + (al+b) \frac{d}{dl} E_{m1} + (cl+d) E_{m1} = 0, \quad (11)$$

где введены обозначения

$$a = -iK_0(R \cos^2 \gamma)^{-1}, \quad c = -i\alpha \frac{K_0(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}_1)}{R \cos^2 \gamma (\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{e}_1)},$$

$$b = i \left(\Delta K + \frac{K_0 L}{2R \cos^2 \gamma} \right) + \alpha \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{e}_1)}, \quad (12)$$

$$k = \frac{k_0^2 (\mathbf{e}_0 \cdot \hat{\Delta \varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\Delta \varepsilon} \cdot \mathbf{e}_0)}{4(\mathbf{e}_0 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{e}_0) (\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{e}_1)} U_0^2,$$

$$d = k \exp[-2\alpha z \cos \gamma] + i\alpha \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{e}_1)} \left[\Delta K + \frac{K_0 L}{2R \cos^2 \gamma} \right].$$

Граничные условия для решения уравнения (11) имеют вид

$$E_{m1}(l=0, z) = 0, \quad \frac{dE_{m1}(l=0, z)}{dl} = -i \frac{k_0^2}{2} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\Delta \varepsilon} \cdot \mathbf{e}_0)}{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{e}_1)} \times$$

$$\times \exp \left[-i \frac{K_0 L^2}{8R \cos^2 \gamma} \right] U_0 E^0(z). \quad (13)$$

Используя связь уравнения (11) с уравнением Уиттикера [8], а также общее решение последнего и граничные условия (13), найдем искомое пространственное распределение амплитуды дифрагированного светового пучка на выходе области кристалла, возмущенной затухающим ультразвуковым пучком,

$$E_{m1}(l, z) = -i \frac{k_0^2}{2} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\Delta \varepsilon} \cdot \mathbf{e}_0)}{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{e}_1)} U_0 E^0(z) \exp \left[-\frac{\alpha l^2}{8} - \alpha' l \right] \times$$

$$\times \left\{ (l+B) \Phi \left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2 \right) \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} (l+B)^2 \right) - \right.$$

$$\left. - B \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2 \right) \Phi \left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i|a|}{2} (l+B)^2 \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi \left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2 \right) \left[\Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2 \right) + i \Phi \left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2 \right) \right] \times \right.$$

$$\times \frac{|a|B^2}{3} (D+1) \left] - i|a|B^2 D \Phi\left(\frac{D}{2} + 1, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) \times \right. \\ \left. \times \Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right)\right\}^{-1},$$

где $\Phi(a, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [8] и введены обозначения:

$$D = \frac{c^2 - abc + a^2 d}{a^2}, \quad B = \frac{ab - 2c}{a^2}, \quad \alpha' = \alpha \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{B} \cdot \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{B}_1 \cdot \mathbf{e}_1)}. \quad (15)$$

Распределение поля прошедшего светового пучка $E_0(\mathbf{r}, t)$ вдоль направления $\mathbf{q}_{\text{гр}}$ в плоскости $\Gamma \cdot \mathbf{r} = L$ определим с помощью второго уравнения системы (9) и соотношений (12), (13):

$$E_{m0}(l, z) = E^0(z) \exp\left[\frac{al^2}{2} + bl - 2\alpha'l\right] \left\{ \Phi\left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) \times \right. \\ \times \left[\Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} (l+B)^2\right) + i|a|(l+B)^2 \frac{(D+1)}{3} \Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{i|a|}{2} (l+B)^2\right) \right] - \\ - iB \Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) |a| D (l+B) \Phi\left(\frac{D}{2} + 1, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} (l+B)^2\right) \left. \right\} \times \\ \times \left\{ \Phi\left(\frac{D}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) \left[\Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) + i \Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) \right] \times \right. \\ \times \left. \frac{|a|}{3} B^2 (D+1) \right] - i|a| B^2 D \Phi\left(\frac{D}{2} + 1, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) \Phi\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i|a|}{2} B^2\right) \left. \right\}^{-1}. \quad (16)$$

Формулы (14), (16) дают общее решение системы уравнений (9) в замкнутом виде, которое удовлетворяет закону сохранения энергии и позволяет описать брэгговское АОВ в поле затухающего звукового пучка с квадратичным фазовым фронтом при любой эффективности дифракции в кристаллах.

При малых уровнях акустической мощности P_a ($d \rightarrow 0$) выражение (14) асимптотически переходит в соотношение

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = -i \frac{\mathbf{e}_1}{2} E^0(z) \left[\frac{k_0^2 P_a M_2 n_0 \cos \beta_0 (N_{\text{гр}0} \cdot \Gamma) \pi}{8L' H \cos \gamma n_1 \cos \beta_1 (N_{\text{гр}1} \cdot \Gamma) |a|} \right]^{1/2} \exp\left[-\alpha z \cos \gamma - \right. \\ \left. - \frac{\alpha'l}{2} - i \frac{\Delta K l}{2} - i \left(\frac{\Delta K + i\alpha'}{2|a|} \right)^2 + i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \right] \left[F\left(\frac{l\sqrt{|a|}}{2\sqrt{2}} + \frac{\Delta K + i\alpha'}{\sqrt{2|a|}}\right) + \right. \\ \left. + F\left(\frac{l\sqrt{|a|}}{2\sqrt{2}} - \frac{\Delta K + i\alpha'}{\sqrt{2|a|}}\right) \right] + \text{к. с.}, \quad (17)$$

записанное с учетом результатов [7] в удобном для практических расчетов виде. Здесь $F(x)$ — комплексный интеграл Френеля; M_2 — коэффициент АО качества [7]; $\beta_{0,1}$ — углы сноса световых пучков и используются соотношения

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{B}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 2n_1 k_0 \cos \beta_1 (N_{\text{гр}1} \cdot \Gamma), \quad (\mathbf{e}_1 \cdot \hat{B} \cdot \mathbf{e}_1) = -2n_1 k_0 \cos \beta_1 (N_{\text{гр}1} \cdot \mathbf{q}). \quad (18)$$

Рассмотрим некоторые особенности АОВ в анизотропной среде с

затуханием упругих волн. Как следует из (15), (18) и (17), величина α' учитывает изменение координаты z при движении светового пучка внутри возмущенного слоя и определяется не волновой нормалью [1-5], а направлением вектора Пойнтинга N_1 . Вследствие этого коэффициент $\alpha' = -\alpha \sin(\theta_1 \pm \beta_1) / \cos(\theta_1 \pm \beta_1 \pm \gamma)$, где θ_1 — угол дифракции, существенно зависит от углов сноса β, γ . Поскольку в анизотропной среде угол β и тем более γ может значительно превышать величину θ_1 , то пренебрежение углами γ, β приведет к значительным погрешностям в определении $E_1(\mathbf{r}, t)$. Например, при нормальном АОВ в кристалле TeO_2 с $\gamma = 60^\circ$ величина α' , определяемая соотношением (15), будет превышать значение $\alpha' = -\alpha \operatorname{tg} \theta_1$ [1-3] в два раза.

Интересно отметить, что в соответствии с (14), (17) наименьшее влияние затухания звука на эффективность дифракции имеет место при $\mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}} = 0$ ($\alpha' = 0$). Это условие совпадает с условием широкополосного аномального АОВ. Следовательно, при такой геометрии дифракции затухание звука не накладывает ограничений на длину взаимодействия и частотные свойства исследуемого АОВ. При $\mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}} \neq 0$ соотношение (17) экспоненциально убывает с увеличением l . По этой причине выбирать длину взаимодействия больше, чем $l^* = (\Gamma \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}}) / (\mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}}) \alpha$, нецелесообразно, что является ограничивающим условием на частотные свойства АОВ. Максимальная полоса частот, которую можно обеспечить за счет фокусировки звука ($R < K_0 l^{*2} / 4$), в этом случае равна

$$\Delta f = \frac{f_0 (\Gamma \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}})^2}{\alpha R \cos^2 \gamma (\mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}})^2} \left[1 - \frac{0,84 \alpha \cos \gamma (\mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}})}{(\Gamma \cdot \mathbf{N}_{\text{rp1}})} \sqrt{\frac{R \nu}{f_0}} \right]. \quad (19)$$

Рассмотрим режим сильного АО взаимодействия, характеризующийся существенным энергообменом между световыми волнами в области АОВ. При уровне акустической мощности $P_a > P_a^* = 16 L' H K_0 \times (M_2 R k_0^2 \cos \gamma \exp[-2\alpha z \cos \gamma])^{-1}$ и фазовом синхронизме АОВ ($\Delta k = 0$) можно показать, что асимптотика решений (14), (16) имеет вид

$$E_1(\mathbf{r}, t) = -ie_1 \frac{E^0(z)}{2} \left[\frac{(\mathbf{e}_0 \cdot \hat{B}_0 \cdot \mathbf{e}_0)}{(\mathbf{e}_1 \cdot \hat{B}_1 \cdot \mathbf{e}_1)} \right]^{1/2} \sin[\sqrt{kL} \exp(-\alpha z')] \times \\ \times \exp \left[-\frac{\alpha L^2}{8} + \frac{\alpha'^2}{2a} + \varphi_1 \right] + \text{к. с.}, \quad (20)$$

$$E_0(\mathbf{r}, t) = \frac{e_0}{2} E^0(z) \cos[\sqrt{kL} \exp(-\alpha z')] \exp[\alpha^2 (2a)^{-1} + \varphi_0] + \text{к. с.},$$

где $k = k_0^2 P_a M_2 (8L'H \cos \gamma)^{-1}$, $\varphi_{0,1} = i(\omega_0, 1t - \mathbf{k}_{0,1} \cdot \mathbf{r})$. В общем случае формулы (20) справедливы в области АОВ, ограниченной координатами $0 < l < L$, $0 < z < \ln(M_2 R P_a k_0^2 \cos \gamma / 16 L' H K_0) / 2\alpha$, при выполнении условия $|D/2| \gg 1$, которое определяет соответствующие ему значения параметров α, L, R, P_a . Полученные асимптотические выражения с точностью до постоянных фазовых множителей совпадают с соотношениями, описывающими АОВ в поле затухающего звукового пучка с плоским фазовым фронтом, и для изотропных сред переходят в известные [3]. Этот результат объясняется тем, что при $P_a > P_a^*$ падающая световая волна эффективно взаимодействует со всеми плосковолновыми составляющими углового спектра звукового пучка с распределением (4) при $R \leq K_0 L'^2 / 4$ на всей длине области АОВ. Поэтому все выводы работ [3, 4, 6] о влиянии затухания звука на эффективность дифракции при $\Delta K = 0$ справедливы в рассматриваемом режиме только при $P_a > P_a^*$.

Анализ частотных и угловых свойств ($\Delta K \neq 0$) исследуемого режима АОВ ($P_a > P_a^*$, $\sqrt{|a|} / 2L \gtrsim 1,5$) был проведен на основе численных

расчетов по формулам (14) — (16). В результате было установлено, что при $\sqrt{|a|/2} L > 1,5$ для АОВ в поле затухающего звукового пучка с квадратичным фазовым фронтом характерно расширение полосы частот и угловой апертуры в 1,5—3 раза по сравнению с аналогичными параметрами при дифракции света на звуковом пучке с плоским фазовым фронтом длиной L и мощностью P_a . Данный эффект может быть использован для компенсации влияния затухания звука на углочастотную зависимость эффективности дифракции.

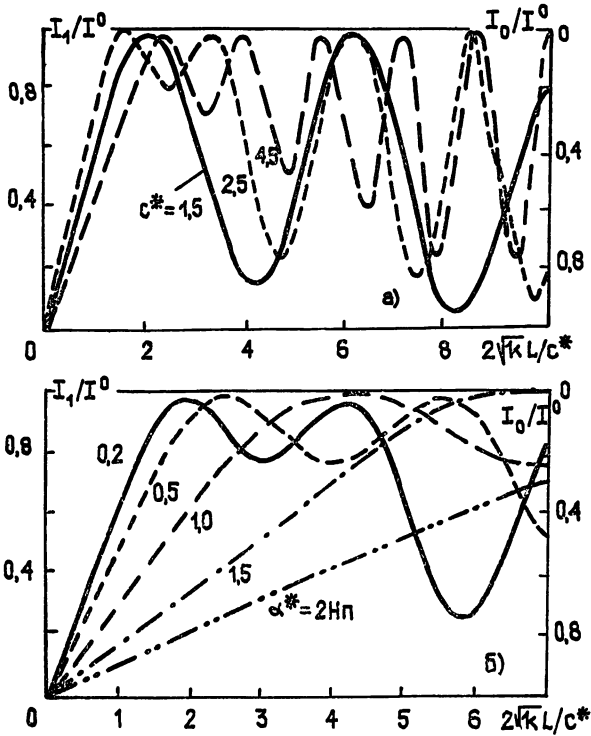


Рис. 2. Зависимость относительной интенсивности $I_{1,0}/I^0$ от $2\sqrt{k}L/c^*$ при различных значениях параметров c^* и α^* : а) $\alpha^*=0$, $\Delta KL=0$; б) $c^*=2,5$, $\Delta KL=0$.

В промежуточных значениях величины P_a ($0,01 P_a^* < P_a < P_a^*$) характер изменения дифракционного поля $E_{0,1}(r, t)$ от параметров АОВ и затухания звука более сложный. Введем безразмерные параметры $\alpha^* = \alpha z$, $c^* = \sqrt{0,5|a|} L$ в выражениях (14), (16), с помощью которых в переменных $2\sqrt{k}L/c^*$ и ΔKL могут быть представлены все возможные случаи АОВ без привлечения конкретных параметров световых, акустических волн и свойств среды взаимодействия. В частности, анализ решений (14), (16) в указанных параметрах и переменных показывает, что энергообмен между прошедшей и дифрагированными волнами в поле затухающего ультразвукового пучка может носить как периодически осциллирующий ($c^* \leq 2$), так и насыщающийся характер ($c^* > 2$), сопровождающийся локальными экстремумами. В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости относительной интенсивности $I_{1,0}/I^0$ от $2\sqrt{k}L/c^*$, вычисленные по соотношениям (14), (16) при различных значениях c^* и α^* для случая фазового синхронизма АОВ ($\Delta KL=0$). Из рис. 2 видно, что в области $c^* \geq 2$ насыщающийся характер зависимости $I_{1,0}/I^0(2\sqrt{k}L/c^*)$ позволяет уменьшить влияние затухания звука на эффективность дифракции. Расчет показывает, что путем выбора соответствующего уровня P_a можно получить увеличение компенсации

потерь на 10—30% в интегральной эффективности АОВ, $\eta = \int_0^{z'_{\max}} I_1(z) \times$

$\times dz / \int_0^{z_{\max}} I_0(z) dz$, в сравнении с аналогичным способом при дифракции

света на звуковом пучке с плоским фазовым фронтом, причем требуемый уровень P_a оказывается, как правило, ниже, чем в случае $c^* < 1,5$. В области $c^* > 1,5$ в условиях фазовых расстройк ($\Delta K \neq 0$), которые могут быть частотными или угловыми, зависимости $I_1(\Delta KL)/I_0$ при любых значениях $2\sqrt{k}L/c^*$ и α^* практически сохраняют свой вид. Однако для значений $c^* \geq 1,5$ с ростом $2\sqrt{k}L/c^*$ характерно существенное уширение и изменение формы зависимостей $I_1(\Delta KL)/I_0$. К такому же изменению углочастотных зависимостей $I_1(\Delta KL)/I_0$ приводит вариация параметра α^* (на практике это соответствует различным точкам области АОВ по координате z). На рис. 3 представлены изменения относительных интенсивностей дифрагированного и прошедшего световых пучков в зависимости от ΔKL при различных $2\sqrt{k}L/c^*$ и α^* , иллюстрирующие указанные особенности АОВ в поле затухающего звукового пучка с квадратичным фазовым фронтом. Из них следует, что подбором параметров $2\sqrt{k}L$, c^* можно добиться значительного снижения влияния затухания звука на углочастотную зависимость $\eta(\Delta K)$, так, например, для указанных на рис. 3 значений α^* , c^* , $2\sqrt{k}L/c^*$ обеспечивается $\eta(\Delta K_{\min}^{\max}) > 0,6$ при изменении α^* в пределах от 1 до 20 дБ.

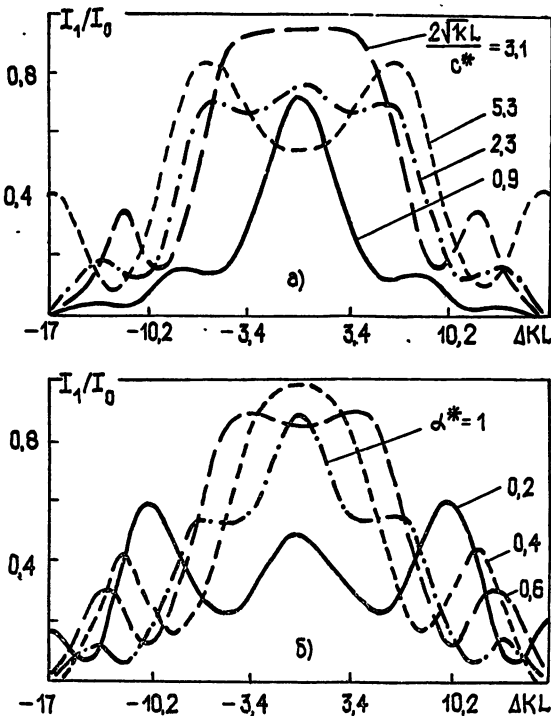


Рис. 3. Зависимость относительной интенсивности I_1/I_0 от фазовой расстройки ΔKL при различных значениях параметров $2\sqrt{k}L/c^*$ и α^* : а) $\alpha^* = 0$, $c^* = 2,5$; б) $2\sqrt{k}L/c^* = 5,2$, $c^* = 2,5$.

Таким образом, проведенные расчеты позволяют найти распределения дифракционного поля световых пучков при АОВ в поле затухающего

шего акустического пучка с произвольной кривизной фазового фронта, диссипацией звуковой энергии при анизотропии упругих и оптических свойств среды взаимодействия, а также определить параметры АОВ, при которых обеспечивается минимальное влияние затухания звука на эффективность дифракции, угловые и частотные свойства АОВ как при малой, так и большой мощности звука. Полученные результаты могут быть полезны при конструировании и расчете АО устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Такер Дж., Рэмптон В. Гиперзвук в физике твердого тела. — М.: Мир, 1975.
2. Cohen H. G., Gordon E. I. // Bell. Syst. Techn. J. 1965. V. 44. P. 693:
3. Филипович В. А., Щербак Ю. М. // Вестник АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 4. С. 103.
4. Yao S. K., Tsai G. S. // Appl. Opt. 1977. V. 16. № 11. P. 3032.
5. Глинский А. А. // Опт. и спектр. 1984. Т. 56. Вып. 5. С. 966.
6. Бель В. Н., Войтенко Н. Г., Кулак Г. В. // ДАН БССР. 1986. Т. 30. № 10. С. 894.
7. Задорин А. С., Шарангович С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 7. С. 798.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973.
9. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. — М.: Наука, 1975.

Томский институт автоматизированных систем
управления и радиоэлектроники

Поступила в редакцию
9 августа 1988 г.

ACOUSTOOPTIC INTERACTION IN A FIELD OF LOSSY ULTRASONIC BEAM WITH CURVED WAVEFRONT IN ANISOTROPIC MEDIUM

A. S. Zadorin, S. N. Sharangovich

A problem is considered of acoustooptical interaction of weakly divergent light beams in a field of lossy ultrasonic beam with curved wavefront in anisotropic medium. The differential equations defining the diffracted light field have been derived. The general solution of this equations has been defined. The influence of anisotropy and acoustic attenuation on frequency and energy parameters of acoustooptical interaction has been studied under small and large power of ultrasonic beam with curved wavefront.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Барнс Дж. Электронное конструирование: методы борьбы с помехами: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990 (1 кв.). — 13 л.

Книга посвящена методам обеспечения помехоустойчивости и электромагнитной совместимости электронных устройств в процессе их конструирования. Рассматриваются проблемы электромагнитной совместимости, связанные с особенностями монтажа компонентов, заземления, экранирования. Приведены расчетные формулы и графики.

Для инженеров, занимающихся конструированием радиоэлектронной аппаратуры, студентов соответствующих специальностей и квалифицированных радиолюбителей.

Моро У. Микролитография: В 2-х частях: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990 (II кв).. — 69 л.

Книга крупного американского специалиста по сути представляет собой энциклопедию, посвященную процессам микролитографии, материалам для полупроводниковой технологии и вспомогательным технологическим операциям. Рассматриваются различные виды резисторов, методы их нанесения, сушки, экспонирования, травления. Изучаются новые технологические процессы: ультрафиолетовая, рентгеновская, электронно-ионно-лучевая литография. Имеются материалы по управлению технологическими процессами и термической обработке поверхностей.

Для специалистов по технологии микроэлектроники, студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей,

УДК 539.12

ДВИЖЕНИЕ СГУСТКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е. Е. Барминова, А. С. Чихачев

Проведено исследование динамики эллипсоидального сгустка заряженных частиц в поперечном постоянном магнитном поле; учтены эффекты собственного пространственного заряда и запаздывания потенциала.

В реальных экспериментальных условиях, как, например, при движении сгустков в поворотных магнитах ускорителей или при инжекции частиц в установки с сильным магнитным полем, а также в астрофизических условиях (например в магнитосфере Земли) представляется важным изучение различных эффектов, связанных с движением в поперечном магнитном поле. Примером таких эффектов может служить преобразование эмиттансов, изучавшееся в работах [1, 2]. Ближе всего к изучаемым в данной работе вопросам находится поставленная в [3] проблема разворота сгустков заряженных частиц, решение которой необходимо для создания компактных ускоряющих систем.

В настоящей работе рассматривается динамика сгустка эллиптической формы, движущегося в поперечном магнитном поле в трех частных случаях: в условиях, когда можно пренебречь собственными полями, при наличии большого собственного заряда в случае движения в неоднородном поле и с учетом запаздывания потенциала при вращении сгустка в однородном постоянном магнитном поле.

1. Пусть имеется сгусток заряженных частиц, который движется в плоскости (x, y) , перпендикулярной магнитному полю, причем сгусток считается достаточно длинным вдоль поля.

Рассмотрим случай, когда собственными полями сгустка можно пренебречь (например, в условиях существования компенсирующего фона частиц другого знака и нерелятивистского характера движения). Уравнения движения отдельных частиц в системе координат (x_1, y_1) , связанной с центром сгустка и вращающейся с угловой скоростью $\omega_B/2$ (где $\omega_B = eB/mc$, B — однородное постоянное магнитное поле, m, e — масса и заряд частиц, c — скорость света), можно записать в виде

$$\ddot{x}_1 + \frac{\omega_B^2}{4} x_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 + \frac{\omega_B^2}{4} y_1 = 0. \quad (1)$$

Инвариант такой системы можно представить в виде

$$I = \frac{(\dot{u}x_1 - u\dot{x}_1)^2}{\epsilon_1^2} + \frac{(\dot{v}y_1 - v\dot{y}_1)^2}{\epsilon_2^2} + \left(\frac{x_1}{u}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{v}\right)^2 + C_0(\dot{x}_1 y_1 - x_1 \dot{y}_1), \quad (2)$$

где u и v удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\ddot{u} + \frac{\omega_B^2}{4} u = \frac{\epsilon_1^2}{u^3}, \quad \ddot{v} + \frac{\omega_B^2}{4} v = \frac{\epsilon_2^2}{v^3}, \quad (3)$$

смысл констант $\epsilon_1, \epsilon_2, C_0$ будет пояснен ниже. Если взять функцию рас-

предела частиц в виде $f = \kappa \delta(I - 1)$, то для плотности частиц можно получить

$$n = \frac{\kappa \kappa}{uv} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma(1 - Ax_1^2 - By_1^2 - Cx_1 y_1), \quad (4)$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{u^2} - \frac{C_0^2 \varepsilon_2^2}{4v^2}, \quad B = \frac{1}{v^2} - \frac{C_0^2 \varepsilon_1^2}{4u^2}, \quad C = C_0 \left(\frac{\dot{u}}{u} - \frac{\dot{v}}{v} \right),$$

т. е. в данной модели частицы действительно занимают на плоскости (x_1, y_1) область, ограниченную эллипсом. Удобно перейти в систему координат (x, y) , связанную с главными осями эллипса:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

где $\operatorname{tg} 2\alpha = C/(B-A)$.

Для средних величин можно получить $\overline{x^2} = R_x^2/4$, $\overline{y^2} = R_y^2/4$, где R_x и R_y — величины полуосей эллиптического сечения, являющиеся функциями времени, которые можно выразить через A , B и C :

$$\frac{1}{R_x^2} = \frac{1}{2} (A + B + \sqrt{(A-B)^2 + C^2}), \quad \frac{1}{R_y^2} = \frac{1}{2} (A + B - \sqrt{(A-B)^2 + C^2}).$$

Определим эмиттанс изучаемой системы как объем четырехмерного гиперэллипсоида в фазовом пространстве, ограниченного поверхностью $I = 1$:

$$\varepsilon = \iiint_{I < 1} dx_1 dy_1 dx_1 dy_1.$$

После приведения гиперэллипсоида к главным осям получим выражение

$$\varepsilon = \iiint \int d\xi d\eta dx dy, \quad \frac{u^2}{\varepsilon_1^2} \xi^2 + \frac{v^2}{\varepsilon_2^2} \eta^2 + \frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} < 1$$

причем

$$\xi = \dot{x}_1 - (x_1 \dot{u}/u - y_1 C_0^2 \varepsilon_1^2 / 2u^2), \quad \eta = \dot{y}_1 - (y_1 \dot{v}/v + x_1 C_0^2 \varepsilon_2^2 / 2v^2).$$

Выражение для эмиттанса может быть преобразовано к виду

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int \int_{\frac{u^2}{\varepsilon_1^2} \xi^2 + \frac{x^2}{R_x^2} < 1} d\xi dx \int \int_{\frac{v^2}{\varepsilon_2^2} \eta^2 + \frac{y^2}{R_y^2} < 1} d\eta dy. \quad (5)$$

Уравнение (5) представляет полный эмиттанс сгустков как половину произведения эмиттансов, соответствующих x - и y -движениям частиц. Обозначим

$$\varepsilon_x = \pi R_x \varepsilon_1 / u, \quad \varepsilon_y = \pi R_y \varepsilon_2 / v.$$

Так как $\overline{\xi^2} = \overline{(x_1 - \dot{x}_1)^2} = \varepsilon_1^2 / 2u^2$, $\overline{\eta^2} = \overline{(y_1 - \dot{y}_1)^2} = \varepsilon_2^2 / 2v^2$, выражения для x - и y -эмиттансов можно представить в виде

$$\varepsilon_x^2 = 4\pi^2 \overline{\xi^2} \overline{x^2}, \quad \varepsilon_y^2 = 4\pi^2 \overline{\eta^2} \overline{y^2}.$$

Представление полного эмиттанса как произведение x - и y -эмиттансов является условным, так как уравнения движения по поперечным координатам не разделяются. Инвариантность полного эмиттанса мо-

жет быть проверена непосредственным вычислением с учетом уравнений (3). Константы ε_1 и ε_2 — постоянные, определяющие среднеквадратичные скорости.

Можно показать, что константа C_0 определяет средний момент частиц:

$$C_0 \sim \overline{(xy - xy)}.$$

Рассмотрим случай, когда $v^2 = v_*^2 = \text{const} = 2\varepsilon_2/\omega_B$ и динамика сгустка определяется функцией $u(t)$. Уравнение для $u(t)$ имеет интеграл

$$\frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{\omega_B^2}{4} \frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon_1^2}{2u^2} = C_*^2. \quad (6)$$

Рассмотрим изменение эмиттансов между моментами времени, когда $\dot{u}=0$. Если в начальный момент времени $u(t)$ принимает минимальное из двух значений (см. (6)), т. е.

$$u_1^2 = \frac{2\varepsilon_1}{\delta\omega_B} (1 - \sqrt{1-\delta^2}), \quad \delta = \frac{\varepsilon_1 \omega_B}{C_*^2} \leq 1,$$

то

$$\varepsilon_{1x}^2 = \varepsilon_1^2 \left(1 - \frac{C_0^2 \varepsilon_2^2}{4} \frac{u_1^2}{v_*^2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1^2}{1 - \chi a}, \quad \chi = \frac{C_0^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}, \quad a = \frac{1 - \sqrt{1-\delta^2}}{\delta}.$$

При повороте вектора скорости центра сгустка на угол π угол поворота эллипса как целого составит $\pi/2$, поэтому

$$\varepsilon_{2x}^2 = 4\pi^2 \overline{\xi^2 y^2} \text{ и } \varepsilon_{2y}^2 = 4\pi^2 \overline{\eta^2 x^2},$$

например,

$$\varepsilon_{2x}^2 = \varepsilon_1^2 \left(\frac{u_2^2}{v_*^2} - \frac{C_0^2 \varepsilon_1^2}{4}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 a}{(1 - \chi a)}.$$

Если определить коэффициент перекачки k следующим образом:

$$k^3 = \varepsilon_{2x}^3 / \varepsilon_{1x}^2,$$

то получим

$$k^2 = a\varepsilon_2/\varepsilon_1, \quad k_{\max}^2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1.$$

Для отношения y -эмиттансов можно получить

$$\varepsilon_{2y}^2 / \varepsilon_{1y}^2 = \varepsilon_1 / a\varepsilon_2,$$

причем при $\delta \rightarrow 0$ $a \rightarrow 0$, так что это отношение может быть сколько угодно большим (соответственно отношение x -эмиттансов может быть малым). Малым значениям δ соответствует большая величина константы C_* , физический смысл которой ясен из (6).

При фиксированных значениях C_* эффект перекачки растет с ростом величины $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, т. е. с ростом отношения начальных значений x - и y -эмиттансов.

В рассматриваемом бесстолкновительном приближении перекачка поперечных эмиттансов сгустка может быть весьма существенной. Отметим здесь, что инвариант типа (2) был использован в работе [4] для изучения движения пучка с разными эмиттансами в смещанной квадрупольно-соленоидальной системе (при $C_0=0$).

2. В данном разделе изучим движение сгустка с существенным

собственным зарядом в неоднородном магнитном поле, предположив, что магнитное поле слабо меняется на длине порядка размеров сгустка. Тогда уравнения движения отдельных частиц можно записать в виде

$$\ddot{x} = \frac{eB_z}{mc} \dot{y} + \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \ddot{y} = -\frac{eB_z}{mc} \dot{x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad (7)$$

где (x, y) — лабораторная система координат, (x_1, y_1) — система, связанная с центром сгустка и движущаяся поступательно. Положим

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t), \quad y(t) = y_0(t) + y_1(t), \quad x_1 \ll x_0, \quad y_1 \ll y_0.$$

Для координат центра сгустка (x_0, y_0) имеем

$$\ddot{x}_0 = \omega_B(x) \dot{y}_0, \quad \ddot{y}_0 = -\omega_B(x) \dot{x}_0. \quad (8)$$

В дальнейшем будем считать, что ω_B линейно зависит от x : $\omega_B(x) = \omega' x \sigma(x)$. Получим $\ddot{x}_0 = \dot{y}_0 \omega' x_0$, $\ddot{y}_0 = -\dot{x}_0 \omega' x_0$. Начальные условия имеют вид: при $t=0$ $\dot{y}_0=0$, $\dot{x}_0=v$, $x_0=0$. Тогда $\dot{y}_0 = -\omega' x_0^2/2$, а так как $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = v^2$, то

$$\frac{dx_0}{dt} = \pm \sqrt{v^2 - \omega' x_0^2/4}. \quad (9)$$

При движении в магнитном поле центр сгустка достигает точки $x_0 = x_{0 \max} = \sqrt{2v/\omega'}$ и далее движется в обратном направлении. Учет сил со стороны собственного пространственного заряда удобнее проводить во вращающейся системе координат (x_2, y_2) , связанной с главными осями эллиптического сечения сгустка. В общем случае требуется решение десяти уравнений первого порядка в обычных производных. Далее, однако, рассмотрим частный случай, когда угловая скорость вращения эллиптического сечения $\dot{\theta} = \omega_B/2$. Тогда, если выполняется условие $\dot{x}_0 \cos 2\theta = \dot{y}_0 \sin 2\theta$ (при определенных начальных условиях следующее из (8)), в системе координат (x_2, y_2) в уравнениях движения (7) разделяются переменные:

$$\ddot{x}_2 + \omega_B^2 x_2/4 = \omega' \dot{x}_0 \cos^2 \theta x_2/\sin 2\theta + Q x_2/(R_x + R_y) R_x, \quad (10)$$

$$\ddot{y}_2 + \omega_B^2 y_2/4 = -\omega' \dot{x}_0 \sin^2 \theta y_2/\sin 2\theta + Q y_2/(R_x + R_y) R_y.$$

При этом было использовано соотношение для потенциала (см. [5])

$$\frac{e\Phi}{m} = \frac{2\pi e^2 n_0 R_x R_y}{(R_x + R_y) m} \left(\frac{x_2^2}{R_x} + \frac{y_2^2}{R_y} \right), \quad (11)$$

$$x_2 = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \quad y_2 = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta.$$

Здесь Q — величина, пропорциональная погонной плотности заряда, $Q = 4\pi e^2 n_0(t) R_x R_y/m$, n_0 — плотность частиц, постоянная внутри эллипса, R_x и R_y — величины полуосей эллиптического сечения. Инвариант системы (10) запишем в виде

$$I = \frac{(R_x \dot{x}_2 - \dot{R}_x x_2)^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{R_x^2} + \frac{(R_y \dot{y}_2 - \dot{R}_y y_2)^2}{\epsilon_2^2} + \frac{y_2^2}{R_y^2}. \quad (12)$$

Если взять функцию распределения частиц в виде $f = \kappa \delta(I-1)$, то для плотности легко получить

$$n_0 = \frac{\pi \kappa}{R_x R_y} \epsilon_1 \epsilon_2 \delta \left(1 - \frac{x_2^2}{R_x^2} - \frac{y_2^2}{R_y^2} \right). \quad (13)$$

Постоянство плотности в области, занятой частицами, предполагалось ранее при выводе уравнений движения (10) и соотношения (11). Используя равенство $dI/dt \equiv 0$ и (13), можно получить уравнения для полуосей R_x и R_y :

$$\ddot{R}_x + \frac{\omega_B^2}{4} R_x = \left(\frac{\omega' \dot{x}_0 \cos^2 \theta}{\sin 2\theta} + \frac{Q}{R_x(R_x + R_y)} \right) R_x + \frac{\varepsilon_1^2}{R_x^3}, \quad (14)$$

$$\ddot{R}_y + \frac{\omega_B^2}{4} R_y = \left(-\frac{\omega' \dot{x}_0 \sin^2 \theta}{\sin 2\theta} + \frac{Q}{R_y(R_x + R_y)} \right) R_y + \frac{\varepsilon_2^2}{R_y^3}.$$

Поскольку в начальный момент времени $t=0$ $\dot{y}_0=0$, $\dot{x}_0=v$, $y_0=-d_0$ (где d_0 — начальное расстояние центра сгустка от оси поворота), то из соотношения $\dot{x}_0 \cos 2\theta = \dot{y}_0 \sin 2\theta$ следует, что сгусток подлетает к границе магнитного поля, имея начальный угол поворота $\theta = \theta_0 = -\pi/4$. Далее, так как $\dot{\theta} \equiv (\omega'/2) x_0(t)$, можно получить

$$\dot{\theta}^2 = (v\omega' \cos 2\theta)/2, \quad \dot{x}_0 = -v \sin 2\theta. \quad (15)$$

Тогда система (14) принимает вид

$$\ddot{R}_x + v\omega' \cos 2\theta R_x = -\omega' v R_x + Q/(R_x + R_y) + \varepsilon_1^2/R_x^3, \quad (16)$$

$$\ddot{R}_y + v\omega' \cos 2\theta R_y = \omega' v R_y + Q/(R_x + R_y) + \varepsilon_2^2/R_y^3.$$

Решение системы (16) требует предварительного решения уравнения (15) с начальными условиями $\theta|_{t=0} = -\pi/4$.

Из симметрии уравнений (16) относительно замены $\theta \rightarrow -\theta$ следует, что сгусток вылетит под углом $\pi/4$, причем конечные значения R_x, R_y будут равны начальным, если $R_x|_{t=0} = \dot{R}_y|_{t=0} = 0$. Таким образом, в рассмотренном частном случае уравнения движения по поперечным координатам могут быть разделены и поведение сгустка описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В системе координат, связанной со сгустком, перекачка эмиттансов отсутствует.

3. В настоящем, заключительном разделе изучим состояния вращающегося сгустка эллиптической формы с большим пространственным зарядом и удерживаемого внешним магнитным полем.

В системе координат (x, y) , связанной с центром сгустка и вращающейся вместе с главными осями эллипса, потенциальная энергия $e\Phi$ может быть представлена в виде

$$\frac{e\Phi}{m} = \frac{1}{2} (ax^2 + by^2),$$

где a и b выражаются через величины полуосей эллипса R_x и R_y . Будем считать, что угловая скорость вращения эллипса как целого $\dot{\alpha}(t) \equiv \text{const}$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. Тогда уравнения движения отдельной частицы можно представить в виде

$$\ddot{x} + (\omega_B - 2\dot{\alpha})\dot{y} = -\dot{\alpha}\omega_B x + ax + \dot{\alpha}^2 x, \quad (17)$$

$$\ddot{y} - (\omega_B - 2\dot{\alpha})\dot{x} = -\dot{\alpha}\omega_B y + by + \dot{\alpha}^2 y.$$

Вследствие постоянства коэффициентов для этой системы существует интеграл следующего вида:

$$I = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{(\dot{\alpha}\omega_B - a - \dot{\alpha}^2)}{2} x^2 + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{(\dot{\alpha}\omega_B - b - \dot{\alpha}^2)}{2} y^2. \quad (18)$$

Если взять функцию распределения в виде $f = \kappa \delta(I - I_0)$, то, интегрируя по скоростям, можно получить, что частицы сгустка занимают область эллиптической формы с полуосями R_x и R_y :

$$R_x^2 = \frac{2I_0}{\omega\omega_B - a - \omega^2}, \quad R_y^2 = \frac{2I_0}{\omega\omega_B - b - \omega^2}, \quad (19)$$

где $\omega = \dot{\alpha}$, $I_0 = v_0^2/2$. При этом плотность частиц внутри эллипса постоянна.

Рассмотрим теперь уравнение для потенциала $\Phi(x, y, t)$:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 4\pi en. \quad (20)$$

Будем изучать такой случай, когда зависимость от времени обусловлена вращением пучка. Положим при этом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},$$

где (r, θ) — полярные координаты в плоскости (x, y) . В этом случае (20) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{l_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 4\pi en. \quad (21)$$

Для однородного уравнения вида (21) решение выглядит так:

$$\Phi_{\text{int}} \sim Ae^{is\theta} J_s(2r/l_0),$$

где A — неизвестная амплитуда, s — целое число, J_s — функция Бесселя. Заметим, что пучку эллиптического сечения соответствует решение $s=2$, поэтому окончательно имеем

$$\Phi_{\text{int}} = \pi en r^2 + A \cos 2\theta J_2(2r/l_0) + C_*/e \quad (22)$$

или при $2r/l_0 \ll 1$

$$e\Phi_{\text{int}} = m \frac{\omega^2}{4} r^2 (1 + g \cos 2\theta) + C_*, \quad (23)$$

где $g = 2eA/ml_0^2 m_p^2$, C_*/e — потенциал на оси. Отметим, что в случае используемой лоренцевской калибровки $\left(\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv 0 \right)$ вектор-потенциал $\mathbf{A} \neq 0$. Из (23) следует, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = - \frac{2\omega}{c} m \omega_p^2 r^2 g \sin 2\theta,$$

откуда с учетом того, что в рассматриваемой системе координат $j_r \equiv j_\theta \equiv 0$, можно получить $A_r \sim r^3$ и $A_\theta \sim r^3$. Отсюда видно, что добавочное электрическое поле $\mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ имеет третий порядок малости по r . Можно также пренебречь силой, связанной с собственным магнитным полем $H_z^{(c)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$. Если в (20) пренебречь вторым членом в левой части уравнения, то $g \equiv 0$ и соотношение (23) описывает круглый пучок. На основании (23) для величин полуосей получим

$$R_x^2 = \frac{v_0^2}{\omega_p^2} \left(2 \frac{\omega\omega_B}{\omega_p^2} - 2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 - g \right)^{-1},$$

$$R_y^2 = \frac{v_0^2}{\omega_p^2} \left(2 \frac{\omega \omega_B}{\omega_p^2} - 2 \frac{\omega^1}{\omega_p^2} - 1 + g \right)^{-1},$$

а также

$$a = \frac{m\omega_p^2}{2} (1 + g), \quad b = \frac{m\omega_p^2}{2} (1 - g). \quad (25)$$

Если обозначить

$$\lambda = v_0/\omega_p, \quad \xi = 2 \frac{\omega \omega_B}{\omega_p^2} - 2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1, \quad (26)$$

то

$$R_x^2 = \frac{\lambda^2}{(\xi - g)}, \quad R_y^2 = \frac{\lambda^2}{(\xi + g)}.$$

Введем эллиптические координаты

$$x = h_0 \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = h_0 \operatorname{sh} u \sin v. \quad (27)$$

Граница пучка определяется соотношением

$$\operatorname{ch} 2u_0 = \xi/g, \quad g \geq 0.$$

Для потенциала имеем

$$e\Phi_{\text{int}} = \frac{m\omega_p^2}{8} h_0^2 (\operatorname{ch} 2u + \cos 2v + g(1 + \cos 2v \operatorname{ch} 2u)) + C_*, \quad (28)$$

$$h_0^2 = 2\lambda^2 g / (\xi^2 - g^2).$$

Для определения константы g необходима сшивка полученного решения (28) с решением для потенциала вне пучка. В полярных координатах уравнение для внешнего потенциала имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{l_0^2} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (29)$$

В эллиптических координатах (27) выражение для $\Delta_{\perp} \Phi_{\text{ext}}$ выглядит следующим образом:

$$\Delta \Phi = \frac{2}{h_0^2 (\operatorname{ch} 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right).$$

Выражение $\partial^2 \Phi / \partial \theta^2$ в общем случае в эллиптических координатах очень сложно, поэтому далее решается приближенная задача в предположении, что справедливо неравенство $\operatorname{ch} u \gg 1$, т. е. $\operatorname{ch} 2u \simeq e^{2u}/2$, $\operatorname{ch} 2u \gg \gg \cos 2v$ во всей области вне пучка (достаточно выполнения соотношения $\xi \geq 1,6g$, при этом $e^{2u u_0} \gg 10e^{-2u_0}$):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \simeq e^{-2u} \sin 2v \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Вследствие вида выражения (28) естественно предположить, что Φ_{ext} можно представить в виде ряда

$$e\Phi_{\text{ext}} = \Psi_0(u) + \Psi_1(u) \cos 2v + \Psi_2(u) \cos 4v + \dots$$

При этом все члены разложения начиная с $\Psi_2 \cos 4v$ не влияют на поле

внутри пучка. Можно получить

$$e \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \simeq e^{-2u} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} - 4 \cos 2v \Psi_1 + 2 \cos 2v e^{-2u} \frac{\partial \Psi_0}{\partial u}. \quad (30)$$

Из (29) для Ψ_0 и Ψ_1 имеем

$$\Psi_0'' + \frac{h_0^2}{4l_0^2} \Psi_1' = 0, \quad (31)$$

$$\frac{4}{h_0^2} \Psi_1'' - \frac{16}{h_0^2} \Psi_1 + \frac{4}{l_0^2} e^{2u} - \frac{2}{l_0^2} \Psi_0' = 0.$$

Одно из краевых условий, которым удовлетворяют Ψ_0, Ψ_1 , имеет вид $\Psi_0' |_{u \rightarrow \infty} = b_0$ (см. [5]). Это условие означает, что потенциал на бесконечности растет логарифмически с ростом радиуса. При выполнении неравенства $h_0 \ll l_0$ из первого уравнения системы (31) следует, что $\Psi_0' \simeq b_0$ во всей области определения. Тогда для Ψ_1 можно получить

$$\Psi_1'' - 4\Psi_1 + \frac{h_0^2}{l_0^2} \Psi_1 e^{2u} - \frac{b_0}{2l_0^2} h_0^2 = 0.$$

Полное решение этого уравнения

$$\Psi_1 = \frac{b_0}{2} e^{-2u} + C_1 J_2(\nu e^u) + C_2 N_2(\nu e^u), \quad (32)$$

где $\nu = h_0/l_0 = h_0 \omega/c$, J_2 и N_2 — функция Бесселя и Неймана. Границе пучка соответствует значение $u = u_0$. Обозначим $z_0 = \nu e^{u_0}$. Так как потенциал на оси C_* не представляет физического интереса, то сшивка решений вне и внутри пучка дает три условия: из сшивки поля, не зависящего от v ,

$$b_0 = \frac{m\omega_p^2}{4} \operatorname{sh} 2u_0 h_0^2, \quad (33)$$

приравнивая поле и потенциал на границе при $\cos 2v$, имеем, соответственно,

$$\frac{m\omega_p^2 h_0^2}{4} g \operatorname{sh} 2u_0 = -b_0 e^{-2u_0} + C_2 z_0 N_2'(z_0) + C_1 z_0 J_2'(z_0); \quad (34)$$

$$\frac{m\omega_p^2 h_0^2}{8} (1 + g \operatorname{sh} 2u_0) = b_0 e^{-2u_0} + C_2 N_2(z_0) + C_1 J_2(z_0). \quad (35)$$

Используя приближенные выражения

$$\pi N_2(z_0) |_{z_0 \ll 1} \simeq -1 - \frac{4}{z_0^2}, \quad J_2(z_0) |_{z_0 \ll 1} \simeq \frac{z_0^2}{8}$$

и исключая константу C_2 из (34) и (35), можно получить

$$1 + \xi + \sqrt{\xi^2 - g^2} = -\frac{\sqrt{\xi^2 - g^2}}{4g} \nu^2 + \frac{2C_1 \nu^2 e^{2u_0}}{m\omega_p^2 h_0^2}. \quad (36)$$

Положим, что $\sqrt{\xi^2 - g^2} \simeq \xi$ (случай слабой эллиптичности, см. (26)). Тогда из (36) следует

$$1 + 2\xi \simeq -\frac{\lambda^3}{2\xi} \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2\xi}{g} \frac{2C_1}{m\omega_p^2} \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (37)$$

При этом возможны два случая: $\xi \ll 1$ и $\xi \gg 1$. В первом случае получим

$$\xi \simeq g \frac{m\omega_p^2 c^2}{4\omega^2 C_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda\omega}{c} \right)^2. \quad (38)$$

Угловая скорость определяется из уравнения, мало отличающегося от уравнения для ламинарного пучка ($\xi=0$), условие же $\xi \ll 1$ может быть выполнено при достаточно больших значениях C_1 и малых λ .

Условие $\xi \gg 1$ выполняется только при определенных значениях g :

$$g \simeq \frac{2C_1}{m\omega_p^2} \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Это соотношение фактически связывает слагаемые потенциала, пропорциональные $\cos 2v$ внутри и вне пучка.

В отличие от предыдущих разделов здесь мы изучали пучок, характеризующийся равными в собственной системе координат среднеквадратичными скоростями $\overline{x^2}$ и $\overline{y^2}$. При этом состояния вращающегося эллиптического пучка возникают вследствие запаздывания потенциала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кушин В. В. // ЖТФ. 1973. Т. 43. Вып. 11. С. 2262.
2. Мурин Б. П., Громов Е. Ф., Кушин В. В. // Труды РТИ. 1973. Т. 16. С. 348.
3. Gullicksen R. L. // NIM. 1987. B24/25. P. 730.
4. Чихачев А. С. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 1. С. 103.
5. Капчинский И. М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. — М.: Атомиздат, 1966.

Опытно-конструкторское бюро
«Горизонт»

Поступила в редакцию
8 августа 1988 г.

THE CHARGE PARTICLES BUNCHES MOTION IN TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

E. E. Barminova, A. S. Chikhachev

The dynamics of charge particles ellipsoidal bunch in a transverse magnetic field is studied. The effects of own space charge and potential delay are considered.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Лобкова Л. М. Распространение радиоволн над морской поверхностью. — М.: Радио и связь, 1990 (III кв.). — 18 л.

Приведены оригинальные результаты экспериментальных и теоретических исследований флуктуаций радиоволн сантиметрового и миллиметрового диапазонов при распространении над морем, моделирования приводного слоя атмосферы и взволнованной поверхности моря, методы описания электромагнитного поля в месте приема в приближении к двухлучевой модели. Получены формулы для оценки статистических моментов поля при распространении радиоволн вблизи поверхности моря. Даны статистические характеристики антенн, расположенных вблизи морской поверхности, предложена статистическая модель морского канала связи.

Для научных работников; может быть полезна аспирантам радиотехнических специальностей.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.246

**О СПЕКТРЕ ФЛУКТУАЦИЙ РАДИОСИГНАЛА
В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ АТМОСФЕРЕ С УЧЕТОМ НАПРАВЛЕННОСТИ
ИЗЛУЧЕНИЯ АНТЕННЫХ СИСТЕМ**

А. С. Брюховецкий, И. М. Фукс, С. И. Ширманова

Поглощение радиоволн в резонансных линиях атмосферных газов может сильно влиять на величину флуктуаций радиосигнала [1-3], в особенности при направленном радиоизлучении и приеме [4, 5]. Исследования спектра флуктуаций в этих условиях до сих пор не проводились.

Воспользовавшись результатами работ [5, 6], в борновском приближении для спектров уровня амплитуды (χ) и фазы (s) можно получить следующее выражение:

$$W_{\chi, s}^{(i, j)}(\nu) = 0,033 \frac{2\pi}{\nu_0} k_{0i} k_{0j} k_0^{-5/6} L^{11/6} [C_{ni} C_{nj} (J_c^- \mp J_c^+) + C_{ai} C_{aj} (J_c^- \pm J_s^+) - C_{ai} C_{nj} (J_s^- \pm J_s^+) + C_{ni} C_{aj} (J_s^- \mp J_s^+)]. \quad (1)$$

Здесь использованы обозначения

$$\left\{ \begin{matrix} J_c^\pm \\ J_s^\pm \end{matrix} \right\} = \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\eta \frac{\exp[-X(f_{2j} + f_{2i})]}{(1/\beta + f^2 + \eta^2)^{11/6}} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} X(f_{1j} \pm f_{1i}) \right\}, \quad (2)$$

$f = \nu/\nu_0 = \sqrt{L/k_0}/V_\perp$ — безразмерная частота, определяемая временем пролета неоднородностей со скоростью V_\perp через зону Френеля; j, i соответствуют значениям частот радиосигнала ω_1 и ω_2 и отвечающим им волновым числам k_{0j}, k_{0i} ; $k_0 = \omega/c = 2\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)c$ — среднее волновое число; $X = (f^2 + \eta^2)/2$; $\rho_0 = (k_0 a^2/L)^{-1}$; $\beta = k_0 L_0^2/L$, где a — гауссов размер апертуры приемной и передающей антенн, L_0 — внешний масштаб турбулентности в спектре Кармана, L — длина трассы; C_{ni}, C_{ai}, \dots — структурные постоянные для флуктуаций коэффициентов преломления и поглощения,

$$\frac{f_{2i}}{f_{2j}} = \frac{1}{\rho_0} \frac{2 + \rho_0^2 [\xi^2 + (1 - \xi)^2] \{1 \pm \Omega\}^2}{4 + \rho_0^2 \{1 \pm \Omega\}^2}; \quad (3)$$

$$\frac{f_{1i}}{f_{1j}} = \{1 \pm \Omega\} \frac{1 + \rho_0^2 \xi (1 - \xi) \{1 \pm \Omega\}^2}{4 + \rho_0^2 \{1 \pm \Omega\}^2}. \quad (4)$$

Выражение (1) позволяет рассчитать функцию когерентности флуктуаций уровня и фазы частотно-разнесенных сигналов. Здесь мы более детально исследуем энергетические спектры $W_{\chi, s}^{(j)}(\nu)$, получающиеся при нулевом ($i=j$) частотном разнес $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_2 + \omega_1) \rightarrow 0$. В этом случае

$$\left. \begin{matrix} J_c^- \pm J_c^+ \\ J_s^- \pm J_s^+ \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{matrix} [J(0, f, \rho_0, \beta) \pm J(1, f, \rho_0, \beta)] \right\}, \quad (5)$$

причем

$$J(\mu, f, \rho_0, \beta) = \int_0^\infty d\eta \sqrt{\pi/A} \exp(A/4 - c) \text{erfi}(\sqrt{A}/2) (1/\beta + f^2 + \eta^2)^{-11/6}. \quad (6)$$

Здесь $\text{erfi}(z) = \int_0^z e^{-x^2} dx$ — комплексный интеграл вероятности, $A = \rho_0(f^2 + \eta^2) \times \times (2 + i\mu\rho_0)/(4 + \rho_0^2)$, $C = (f^2 + \eta^2)(\rho_0 + 2/\rho_0 - i\mu)/(4 + \rho_0^2)$.

На рис. 1 представлены зависимости $\Phi_1 = J_c^- + J_c^+$, $\Phi_2 = J_s^+$ и $\Phi_3 = J_c^- - J_c^+$ от безразмерной частоты $f = \nu/\nu_0$ при различных значениях параметров $\beta = k_0 L_0^3/L$ и $\rho_0 = (k_0 a^2/L)^{-1}$ для ближней ($\rho_0 \ll 1$), переходной ($\rho_0 \sim 1$) и дальней ($\rho_0 \gg 1$) зон. Зависимость спектральных характеристик Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 от параметров ρ_0 и β качественно та же, что и у соответствующих им интегральных по частоте величин B_3 , B_2 , B_1 из [5]: Φ_1 (как и B_3) в сильной степени зависит от β и практически не зависит от ρ_0 , в то время как Φ_3 (и B_1) существенным образом определяется величиной ρ_0 и слабо зависит от β . Кривые 1, 2, 3 здесь и ниже отвечают значениям $\beta = 2^\circ$, 2^{13} , 2^{15} соответственно.

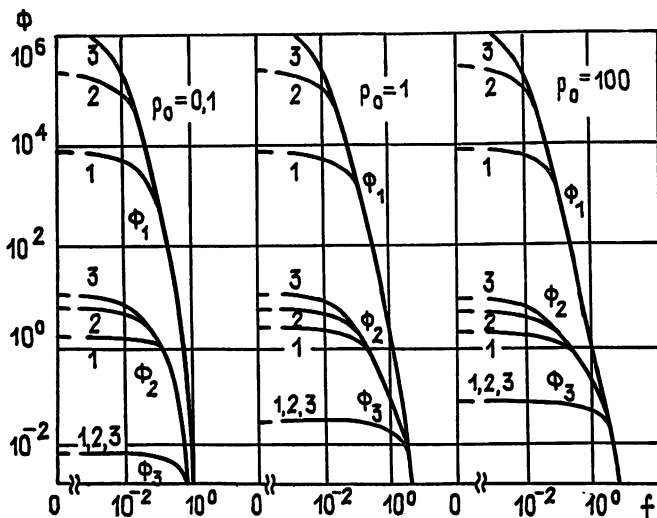


Рис. 1.

На основе этих зависимостей можно вычислить спектры флуктуаций уровня амплитуды $W_\chi^{(j)}(f)$, фазы $W_s^{(j)}(f)$ и взаимный спектр амплитудно-фазовых флуктуаций $W_{\chi s}^{(j)}(f)$:

$$W_{\chi, s, \chi s}^{(j)}(f) = W_{\chi, s, \chi s}^0(f) [1 + \Delta_{\chi, s, \chi s}(f)], \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_\chi^0(f) \\ W_s^0(f) \\ W_{\chi s}^0(f) \end{aligned} \right\} = 2\pi \cdot 0,033 k_0^{7/6} L^{11/6} C_n^2 \begin{cases} J_c^- - J_c^+ \\ J_c^- + J_c^+ \\ J_s^+ \end{cases} \quad (8)$$

— значения спектров без учета поглощения, а

$$\Delta_\chi(f) = [(C_a^2/C_n^2) - 2(C_a/C_n)J_s^+]/(J_c^- - J_c^+); \quad (9a)$$

$$\Delta_s(f) = [(C_a^2/C_n^2)(J_c^- - J_c^+) + 2(C_a/C_n)J_s^+]/(J_c^- + J_c^+); \quad (9b)$$

$$\Delta_{\chi s}(f) = -(C_a^2/C_n^2) - 2(C_a/C_n)J_c^+/J_s^+ \quad (9b)$$

— относительные изменения соответствующих спектров за счет наличия поглощения. Для структурных постоянных воспользуемся значениями, приведенными в работе [5].

На рис. 2 представлены относительные изменения $\Delta_\chi(f)$ в зависимости от параметров β и ρ_0 . Рис. 3 демонстрирует аналогичную зависимость $\Delta_{\chi s}(f)$. Как видно из данных на этих рисунках, низкочастотная часть спектров $W_\chi^{(j)}(f)$ и $W_{\chi s}^{(j)}(f)$ подвержена вблизи центра линии поглощения очень сильному влиянию поглощения. На спектре фазы наличие поглощения фактически не сказывается ($\Delta_s \ll 1$). Эти выводы качественно согласуются с расчетами для падающей плоской волны и ненаправленного точечного приемника ([7], рис. 4, 5), однако влияние направленных свойств антенных систем количественно в значительной мере ($\sim 10^4 \div 10^3$) усиливает влияние поглощения на $W_\chi^{(j)}(f)$ и $W_{\chi s}^{(j)}(f)$, так же как это было и с интегральными по частоте характеристиками $\langle \chi^2 \rangle$ и $\langle \chi s \rangle$ [5]. При этом резкое увеличение $\Delta_{\chi s}(f)$ и $\Delta_\chi(f)$ лишь в узкой полосе частот $f \sim 0 \div 10^{-2}$ и некоторое уменьшение $\Delta_\chi(f)$ в полосе $f \sim 10^{-1} \div 10^0$ при-

водят к более умеренным интегральным по частоте значениям [5] $\Delta_\chi \sim 10^0 \div 10^2$ и $-\Delta_{\chi_s} \sim 10^1 \div 10^2$.

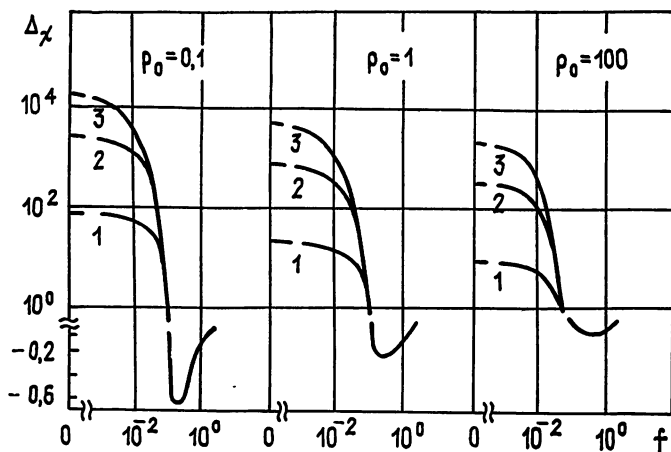


Рис. 2.

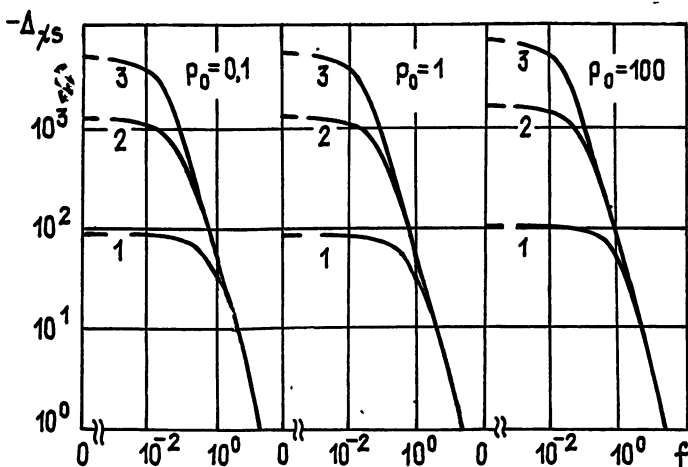


Рис. 3.

Полученные результаты могут найти применение в оценках влияния турбулентности приземного слоя как канала связи на радиочастотах вблизи полос атмосферного поглощения, а также в системах атмосферного радиозондирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee R. W., Naip J. C. // Proc. IEEE. 1969. V. 57. № 2. P. 357.
2. Гурвич А. С. // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. № 11. С. 1923.
3. Шарапов Л. И., Брюховецкий А. С., Ваксер И. Х., Комяк В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 10. С. 1504.
4. Курбатова Р. И., Фукс И. М., Шарапов Л. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 3. С. 237.
5. Брюховецкий А. С., Фукс И. М., Ширманова С. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 7. С. 878.
6. Фукс И. М. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 3. С. 515.
7. Ott R. H. // IEEE Trans. 1977. V. AP-26. № 2. P. 329.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
25 ноября 1988 г.

О ГЕОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ИОНОСФЕРУ

Л. П. Горбачев, Т. А. Семенова, В. Ф. Федоров

В настоящее время вопросу о воздействии различного вида источников на ионосферу уделяется значительное внимание. Изучению геомагнитных возмущений, возникающих при распространении акустических волн инфразвуковой частоты в ионосфере, посвящен ряд работ, например [1-5]. Представляет интерес рассмотреть вопрос и о возможности возбуждения низкочастотных электромагнитных полей высокочастотными источниками, такими, например, как молниевые разряды. Поле электрического диполя, возникающего в подобных явлениях, может возбудить в ионосфере электрические токи [6], ответственные за возникновение геомагнитных возмущений. Областью, в которой возбуждаются электрические токи, является E -слой ионосферы. Возникающая токовая система является сложной и в основном определяется электрической проводимостью ионосферной плазмы E -слоя ионосферы, направлением магнитного поля Земли и параметрами источника.

В работе рассматривается токовая система, возбуждаемая в E -слое ионосферы электрическим полем вертикального электрического диполя с эффективным моментом D_z . Магнитное поле предполагается также вертикальным.

Плотность возникающего электрического тока в ионосфере в цилиндрической системе координат r, φ, z с началом в центре E -слоя ионосферы можно представить в форме $j_\varphi = \sigma_2 E_r$, где $E_r = -3D_z z r [4\pi \epsilon_0 (z^2 + r^2)^{5/2}]^{-1}$ — радиальная компонента электрического поля диполя, z — координата диполя, σ_2 — проводимость Холла.

Подобная токовая система характеризуется эффективным магнитным дипольным моментом M_z :

$$M_z = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} j_\varphi r^2 dr = \frac{D_z}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2 dz.$$

Для вертикального магнитного поля Земли задача обладает цилиндрической симметрией с вертикальной осью z .

Компоненты тензора электрической проводимости полагаем зависящими только от z . Если бы они были постоянными, то вследствие разделения зарядов отсутствовали бы радиальные токи и поле определялось бы кольцевыми токами. Из-за неоднородности свойств проводимости наряду с кольцевыми токами возникнут внутри E -слоя ионосферы и тороидальные токи (рис. 1).

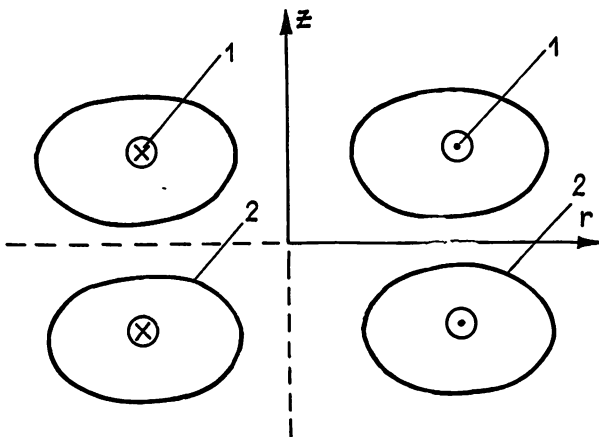


Рис. 1. Система кольцевых (1) и тороидальных токов (2).

Расчет полей такой системы является сложной задачей. Однако, учитывая, что гиротропный слой по толщине не превышает (20—30 км), а поле рассматривается на поверхности Земли (на расстоянии 100 км от E -слоя), то полем тороидальной токовой системы будем пренебрегать (оно существенно внутри тороида). В этом приближении сначала следует определить распределение кольцевых токов в тонком гиротропном E -слое ионосферы. С этой целью, пренебрегая токами смещения, запишем уравнения Максвелла

$$\text{rot } H = j, \quad \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad B = \mu_0 H. \quad (1)$$

Из (1) для азимутальной проекции плотности тока j_φ имеем

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi = \mu_0 \frac{\partial j_\varphi}{\partial t}. \quad (2)$$

Интегрируя (2) по z и полагая, что вне гиротропного слоя $\partial E_\varphi / \partial z$ обращается в нуль, получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi dz = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} j_\varphi dz. \quad (3)$$

Уравнение (3) дополним законом Ома и уравнением непрерывности для плотности тока

$$j_r = \sigma_1 E_r - \sigma_2 E_\varphi, \quad j_\varphi = \sigma_2 E_r + \sigma_1 E_\varphi, \quad (4)$$

где σ_1 — проводимость поперек магнитного поля, σ_2 — проводимость Холла,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r j_r + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Из (5), если считать, что вне E -слоя ионосферы $j_z = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_r dz = 0. \quad (6)$$

Используя (6), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(z) E_r dz - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(z) E_\varphi dz = \sigma_1' \int_{-\infty}^{\infty} E_r dz - \sigma_2' \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi dz = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_r dz = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi dz. \quad (7)$$

Используя (4) и (7), находим

$$\begin{aligned} J(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} j_\varphi dz = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(z) E_r dz + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(z) E_\varphi dz = \\ &= \sigma_2'' \int_{-\infty}^{\infty} E_r dz + \sigma_1'' \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi dz = \sigma_3 \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma_3 = (\sigma_2' \sigma_2'' / \sigma_1') + \sigma_1''$ — эффективная проводимость, аналогичная проводимости Каулинга. С учетом (8) уравнение (3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J(r, t) = \mu_0 \sigma_3 \frac{\partial J(r, t)}{\partial t}. \quad (9)$$

Уравнение (9) при условиях

$$J(0, t) = J(\infty, t) = 0, \quad t > 0 \quad (10)$$

имеет интегральное соотношение

$$\pi \int_0^\infty J(r, t) r^2 dr = M_z = \text{const}, \quad (11)$$

M_z — магнитный момент системы кольцевых токов. Уравнение (9) при условиях (10) и (11) имеет решение

$$J(r, t) = \begin{cases} \frac{M_z}{8\pi} \frac{\mu_0^2 \sigma_3^2 r}{t^2} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_3 r^2}{4t}\right), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Если источник точечный и находится в начале координат, а магнитный момент

$M_z(t)$ зависит от времени, то в соответствии с (12)

$$J(r, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0^2 \sigma_3^2 r}{8\pi} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_3 r^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{dM_z}{d\tau} d\tau, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Если $M(t) = M_z u(t)$, где $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ или $\frac{du}{dt} = \delta(t)$, то используя (13), приходим к (12). Если $M_z(t) = M_z \Delta t (d\delta(t)/dt)$, что характерно при импульсном воздействии электрического поля диполя на ионосферу, то

$$J(r, t) = \begin{cases} \frac{M_z \Delta t \mu_0^2 \sigma_3^2 r}{8\pi t^3} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_3 r^2}{4t}\right) \left(2 - \frac{\mu_0 \sigma_3 r^2}{4t}\right), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Для определения поля токов введем векторный потенциал

$$B = \text{rot } A.$$

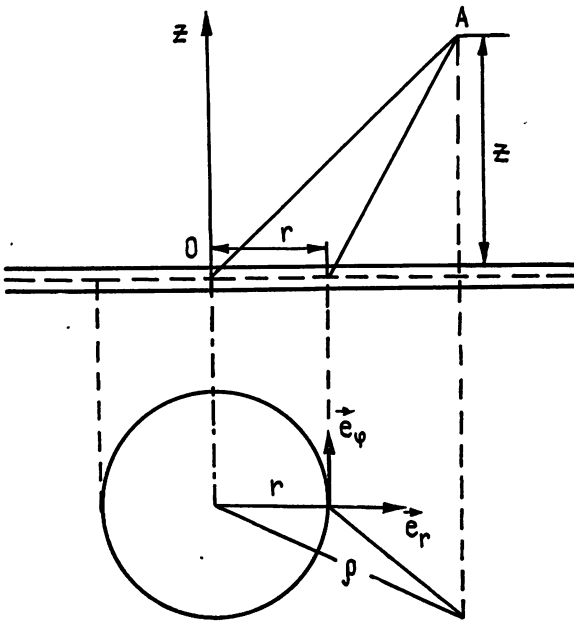


Рис. 2. Схема расположения источника, пункта наблюдения A и системы кольцевых токов.

В силу симметрии задачи (кольцевые токи в принятом приближении текут в плоскости $z=0$) векторный потенциал A имеет одну компоненту $A_\varphi e_\varphi$ (рис. 2), где

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_\varphi(r, z, t)}{R} dV. \quad (15)$$

Здесь $R^2 = \rho^2 + z^2 + r^2 - 2\rho r \cos \varphi$ (угол φ отсчитывается от плоскости, проходящей через ось z и точку наблюдения). Учитывая (8), имеем

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty J(r, t) r dr \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(\rho^2 + z^2 + r^2 - 2\rho r \cos \varphi)^{1/2}}. \quad (16)$$

Компоненты магнитного поля в точке наблюдения рассчитываются по формулам

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi), \quad (17)$$

На рис. 3, 4 приведены результаты численных расчетов при $\rho=10^3$ км и $z=100$ км для функции источника в виде (14). Если принять для численных оценок параметры электрического диполя, соответствующие грозовому облаку [7], $D_z = 200$ Кл·км, $\Delta t = 0,2$ с — средняя продолжительность разряда, то по данным рис. 3, 4

$$B_{r \max} = 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ нТл}, \quad B_{z \max} = 0,23 \cdot 10^{-2} \text{ нТл}.$$

Эти значения достигаются соответственно в моменты времени $t_p = 8,3$ мин, $t_z = 18$ мин (день, максимум солнечной активности).

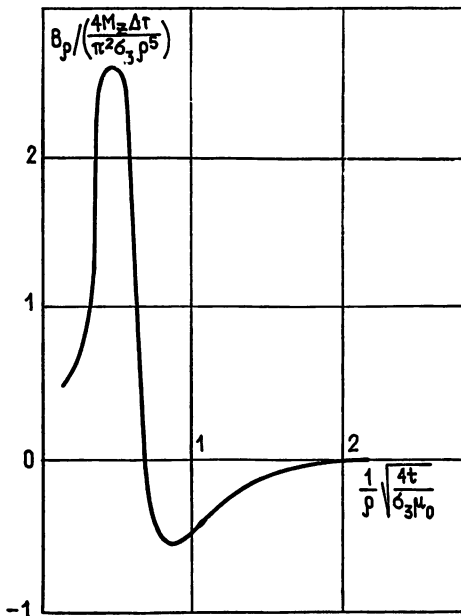


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость радиальной компоненты B_r от времени.

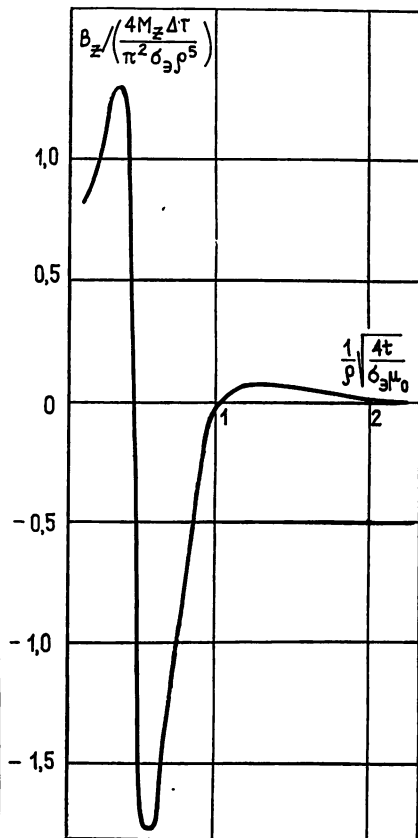


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость вертикальной компоненты B_z от времени.

Таким образом, и при импульсном воздействии электрического поля диполя на ионосферу генерируются геомагнитные возмущения, распространяющиеся на большие расстояния и имеющие длительности, превышающие десятки минут.

Из результатов работы следует, что рассматриваемый механизм генерации геомагнитных возмущений позволяет пояснить возникновение магнитных возмущений при грозовых явлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачев Л. П., Савченко Ю. Н. // Магнитная гидродинамика. 1973. № 1. С. 85.
2. Альперович Л. С., Гохберг М. Б., Сорокин В. М., Федорович Г. В. // Физика Земли. 1979. № 3. С. 58.
3. Горбачев Л. П., Лазарев В. М. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1979. Т. 19. № 1. С. 115.
4. Сорокин В. М. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1987. Т. 27. № 1. С. 104.
5. Борисов Н. Д. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1987. Т. 27. № 4. С. 566.
6. Русакова Н. Н., Троицкая В. А. // ДАН СССР. 1987. С. 1344.
7. Юман М. Молния. — М.: Мир, 1972. С. 327.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
11 октября 1988 г.

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДВУХМОДОВОГО ЛАЗЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ НАКАЧКИ

Б. А. Ниязов, Ф. Р. Султанова

К настоящему времени предложено много моделей лазерных систем, которым присущи хаотические пульсации излучения [1-5]. Главным образом исследовались одномодовые лазеры. При этом было установлено, что подобные режимы могут быть относительно легко наблюдаемы в неавтономных системах [2-5]. В [4, 5], в частности, численно исследовались стохастические пульсации интенсивности одномодового лазера, находящегося под воздействием внешнего поля излучения. При этом производилась периодическая модуляция либо внешнего поля, либо инверсии населенностей. В данной работе показано, что аналогичные режимы пульсаций интенсивности излучения могут иметь место и в отсутствие внешнего поля, но для двухмодовой модели лазера.

Мы исходим из уравнений для двухмодового оптического квантового генератора в приближении однородного уширения линии излучения, когда возбуждены, например, две поперечные моды резонатора. Система уравнений для комплексных амплитуд полей мод $E_k(t)$ ($k=1, 2$), поляризации активной среды $P(t)$ и разности населенностей $N(t)$ имеет вид [6]

$$\frac{dE_k}{dt} = -\left[\frac{1}{2T_c^{(k)}} + i(\omega_k - \omega)\right]E_k + i g P, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{P}{T_2} - iN \sum_{k=1}^2 g_k E_k, \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N - N_0}{T_1} - 2i \sum_{k=1}^2 g_k (E_k^* P - E_k P^*),$$

где N_0 — равновесное значение разности населенностей, g_k — коэффициенты, определяемые пространственной конфигурацией мод, ω — частота атомного перехода, ω_k — частота поля k -моды, $T_c^{(k)}$ — время затухания поля k -моды в резонаторе, T_1 и T_2 — времена релаксации поляризации и разности населенностей соответственно.

В случае выполнения соотношений $T_1 \ll T_c^{(k)}$, $T_2 \ll T_c^{(k)}$ (поляризация и разность населенностей безынерционно следят за изменением поля в резонаторе) можно провести стандартное адиабатическое исключение переменных P и N [4, 6] и получить вместо (1) систему двух уравнений для комплексных амплитуд $E_1(t)$, $E_2(t)$.

Считая для простоты $g_1 = g_2 = g$, $T_c^{(1)} = T_c^{(2)} = T_c$ и производя в полученных уравнениях замену переменных

$$I = A |E_1 + E_2|^2, \quad r = A \operatorname{Re}(E_1 E_2^*), \quad \rho = A \operatorname{Im}(E_1 E_2^*),$$

$$A = 4g^2 T_1 T_2, \quad \tau = t/2T_c,$$

получим

$$\frac{dI}{d\tau} = -2I + 4R \frac{I}{1+I} - 2\rho\delta, \quad \frac{dr}{d\tau} = -2r - \rho\sigma + R \frac{I}{1+I}, \quad (2)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -2\rho + r\delta + 2R \frac{\rho}{1+I},$$

где $R = 2g^2 T_c T_2 N_0$ — величина, пропорциональная накачке, $\delta = 2T_c(\omega_2 - \omega_1)$ — безразмерная частота межмодовых биений.

Система (2) имеет три стационарных состояния.

1) Состояние равновесия, соответствующее отсутствию генерации: $I = r = \rho = 0$. Это состояние является устойчивым при условиях $R < 1$, $|\delta| > 2$ либо $R < (\delta^2 + 4)/8$, $|\delta| < 2$.

2) Симметричное состояние равновесия,

$$I = \frac{8R}{\delta^2 + 4} - 1, \quad r = \frac{I}{2} \left(1 - \frac{R}{1+I}\right), \quad \rho = I\delta/4$$

отвечающее равным амплитудам мод:

$$|E_1| = |E_2| = \frac{1}{\sqrt{2A}} \sqrt{R - \frac{\delta^2 + 4}{8}}.$$

Симметричное положение равновесия существует и устойчиво при

$$|\delta| < 2, \quad R > (\delta^2 + 4)/8.$$

3) Стационарное состояние вида

$$I=R-1, \quad r=0, \quad \rho=I/\delta,$$

которому соответствуют значения амплитуд мод, равные

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R-1}{A}} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\delta}} \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\delta}} \right).$$

Этот стационарный режим существует и устойчив при $R > 1$, $|\delta| > 2$.

Нами численно исследовались нестационарные режимы системы (2), получающиеся при периодической модуляции инверсии населенностей

$$R = R_0 + R' \cos \Omega \tau.$$

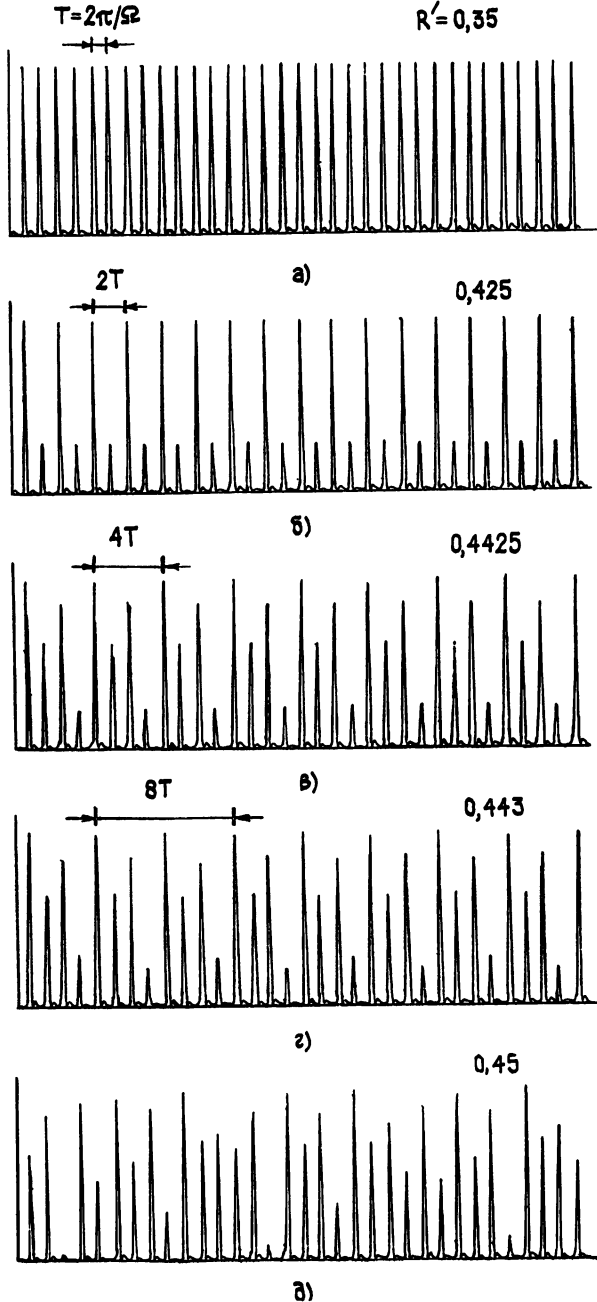


Рис. 1.

Поведение решений системы (2) изучалось в зависимости от глубины модуляции R' для конкретных значений параметров $R_0=0,91$, $\delta=1,8$. Частота модуляции Ω вы-

биралась близкой к частоте релаксационных колебаний соответствующей автономной системы: $\Omega=0,5$. Результаты численных расчетов показали, что при глубине модуляции $R' < 0,4$ наблюдается режим периодических пульсаций интенсивности излучения с частотой, равной частоте модуляции Ω . Временные реализации интенсивности представлены на рис. 1а. Вблизи значения глубины модуляции $R' \approx 0,404$ предельный цикл в фазовом пространстве системы (2), соответствующий периодическим пульсациям интенсивности с частотой Ω , становится неустойчивым. При этом рождается устойчивый предельный цикл с частотой $\Omega/2$ (рис. 1б). При увеличении глубины модуляции получены последовательные удвоения периода (рис. 1в, г). Следует отметить, что бифуркационная диаграмма последовательных удвоений имеет сложную структуру. Так,

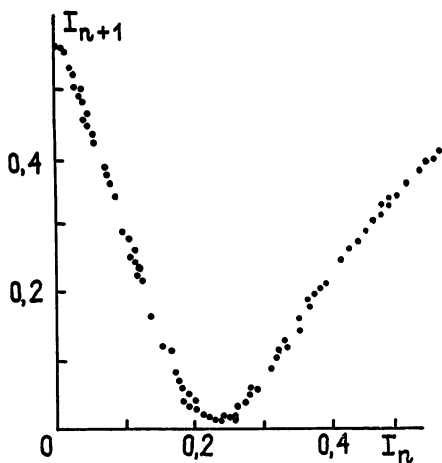


Рис. 2.

рис. 2. В отличие от [5], где получается отображение типа «купол», здесь одномерное отображение имеет вид «ямы».

в интервалах существования предельных циклов $\Omega/2^n$ существуют «островки» хаотичности, причем переход к хаосу в этом случае со стороны больших R' происходит по механизму перемежаемости, а со стороны малых R' — через последовательные удвоения периода. Для значений R' , лежащих в интервале $0,45 < R' < 0,51$, наблюдался режим нерегулярных пульсаций интенсивности, при этом в указанном интервале имелись области периодичности с периодами 3, 7, 11. Дальнейшее увеличение глубины модуляции ($R' > 0,51$) вновь приводило к периодическим пульсациям интенсивности с частотой модуляции накачки Ω .

Для полученного режима хаотических пульсаций были численно построены одномерные отображения Пуанкаре. Соответствующие им значения интенсивности I_n выбирались последовательно через период модуляции накачки $T = 2\pi/\Omega$. Результаты представлены на

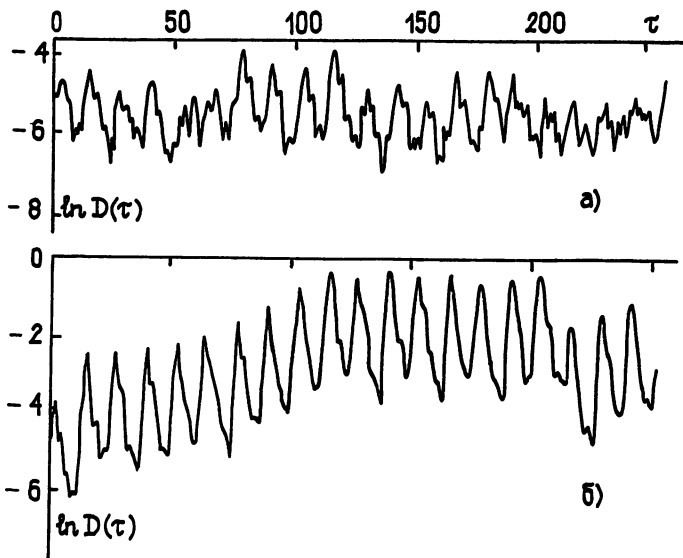


Рис. 3.

Была исследована также устойчивость различных режимов. В фазовом пространстве системы (2) в установившемся режиме выбирались две точки, разнесенные на начальное расстояние $D(0) = 10^{-5}$, и вычислялась эволюция этого расстояния $D(t)$. Для периодического режима (рис. 3а) фазовые точки сближаются с течением времени, так что при больших временах расстояние между ними остается в пределах точности вычислений (10^{-6}). В случае же нерегулярного режима (рис. 3б) две первоначально близкие точки вследствие неустойчивости с течением времени все более отдаляются до наступления насыщения, связанного с ограниченностью размера аттрактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ораевский А. Н. // Труды ФИАН СССР. 1984. Т. 171. С. 3.
2. Гапонов А. В., Рабинович М. И., Шапиро М. Ф. // Вестник Московского ун-та, Сер. Физика, астрономия, 1978, Т. 19, № 4, С. 125,

3. Маторин И. И., Пиковский А. С., Ханин Я. И. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 10. С. 2096.
4. Yamada T., Graham R. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. № 16. P. 1322.
5. Scholz H. I., Yamada T., Brand H., Graham R. // Phys. Lett. 1981. V. 82A. № 7. P. 321.
6. Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. Т. 2. Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975.

Ташкентский государственный университет

Поступила в редакцию
20 октября 1988 г.

УДК 539.219.1; 535.361; 535.241.6

ПРОХОЖДЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПУЧКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ СЛАБОРАССЕИВАЮЩИЕ ЭКРАНЫ

И. А. Громыко, В. Е. Пустоваров

Исследования показывают [1], что с помощью навигационных систем, управляемых выходными сигналами приемников оптического излучения, приходящего в нашу галактику от звезд и звездных скоплений, можно ориентировать и стабилизировать положение объектов с точностью 0,1".

Для проверки и настройки оптических приемников необходимы метрологически аттестованные имитаторы звездного неба (ИЗН), позволяющие проводить испытания астронавигационных систем как в статическом, так и в динамическом режимах. Последний предполагает в процессе проверки смещение модели участка звездного неба относительно входного окна приемника оптического излучения.

Для реализации таких конструкций целесообразно использование слабонеработающих экранов, подсвечиваемых сканируемыми пучками светового излучения.

В работе [2] получена зависимость среднего квадрата угла отклонения лучей от аксиального направления (дисперсия угла прихода)

$$\begin{aligned} \overline{\theta^2} = & \left[\frac{\omega}{\pi} \left(1 - \frac{3\beta\tau_s^2}{C_s} \right)^{-2} + \overline{\tau^2} C_s \times \right. \\ & \times \int_0^{\tau_s} \frac{(C_s + 3\beta\tau_s^2)(1 + \beta + t) - 3\beta(1 + \beta)t^2 + (1 - 2\beta)t^3 + t^4/4}{(C_s + 3\beta\tau_s^2 + 3t^2 + t^3)^2} e^t dt \left. \right] \times \\ & \times \left[\left(1 + \frac{3\beta\tau_s^2}{C_s} \right)^{-1} + C_s \int_0^{\tau_s} \frac{e^t dt}{C_s + 3\beta\tau_s^2 + 3t^2 + t^3} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где $\overline{\tau^2}$ — дисперсия угла отклонения луча при элементарном акте рассеяния, $\beta = \omega/\pi\gamma^2$, ω — начальная расходимость пучка, $C_s = 3\sigma^2 S/\pi\gamma^2$, S — начальное сечение пучка, σ — показатель рассеяния, $\sigma = \lambda\epsilon$, λ — вероятность выживания кванта, ϵ — показатель ослабления, $\tau_s = \sigma Z$, Z — толщина рассеивающего экрана.

Автором проанализированы результаты решения уравнения (для $C_s < 10$) и сделан вывод о том, что область, где величина θ^2 практически сохраняется или меняется сравнительно медленно, четко выражена только в узких пучках излучения. Однако для достаточно параллельных пучков излучения, удовлетворяющих условию $C_s > 10$, решение этого уравнения на ЭВМ позволяет по-новому оценить возможности использования рассеивающих экранов в метрологических целях. Результаты решения приведены в виде графиков на рис. 1 (сплошные линии), для сравнения пунктиром показаны зависимости, полученные в работе [2]. Из анализа графиков видно, что величина θ^2 практически сохраняется или меняется сравнительно медленно и в области широких пучков. На рис. 2 показаны уточненные границы области $\theta^2 = \text{const}$, которая автором [2] названа ближней стационарной зоной (III), I — первая нестационарная зона, II — вторая нестационарная зона.

Характерное свойство ближней стационарной зоны выражается в том, что дисперсия угла прихода лучей, прошедших через рассеивающий экран, практически не зависит от его толщины. Следовательно, выбор (для определенного сечения пучка излучения) толщины экрана ИЗН в середине ближней стационарной зоны позволяет значительно снизить требования к соблюдению постоянства толщины экрана ИЗН. Уровень сигнала на выходе приемника излучения не будет хаотически модулирован из-за флуктуаций толщины экрана при сканировании пучка излучения.

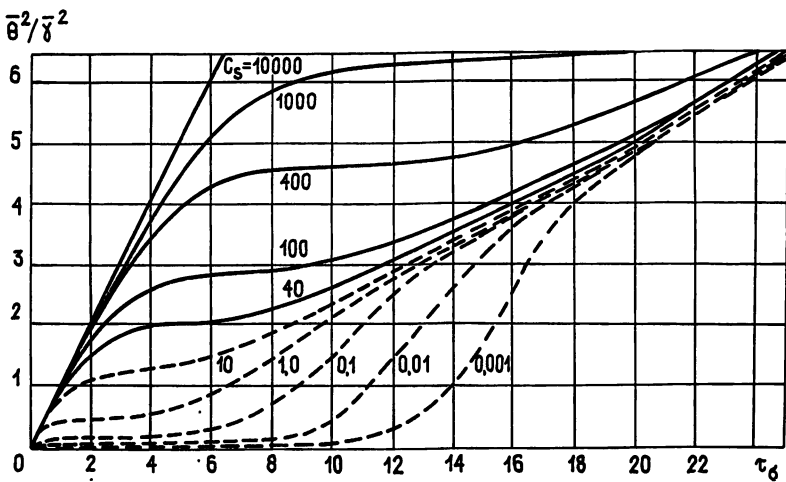


Рис. 1.

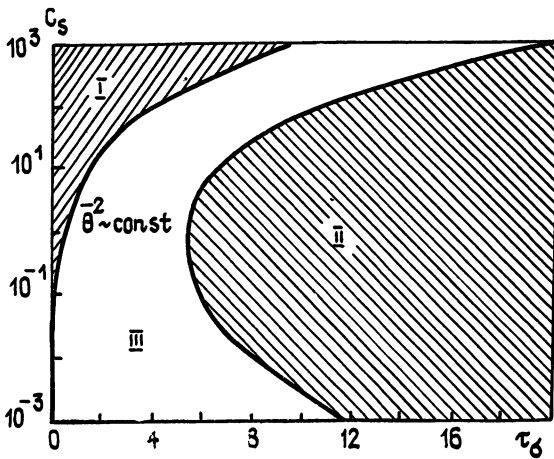


Рис. 2.

Наличие ближней стационарной зоны для любых пучков излучения позволяет решить метрологическую проблему [3] создания ослабителей оптического излучения на базе слаборассеивающих экранов.

1) Полное решение уравнения для дисперсии угла прихода лучей показывает наличие ближней стационарной зоны в случае использования параллельных энергетических пучков любого начального сечения.

2) В настоящее время использование слаборассеивающих экранов позволяет решить две актуальные метрологические проблемы: создание имитаторов звездного неба динамического типа и ослабителей оптического излучения, допускающих сканирование пучка энергии по экрану. При этом уменьшены требования к постоянству толщины экрана при одновременном сохранении его некоторых оптических свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Квазиус Г., Макэнлесс Ф. Проектирование систем астронавигации. — М.: Мир, 1970. — 304 с.
2. Долин Л. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9. № 1. С. 61.
3. Воронков Г. Л. Ослабители оптического излучения. — Л.: Машиностроение. 1980. — 158 с.

Поступила в редакцию
19 сентября 1988 г.,
после доработки
26 июня 1989 г.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАДИОИЗОБРАЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

М. Б. Богданов

В последние годы для построения радиоизображений по данным апертурного синтеза все более широко применяются нелинейные методы восстановления изображений [1, 2]. Важными преимуществами этих методов являются более полный учет априорной информации, необходимой для решения данной некорректно поставленной задачи, и возможность получения суперразрешения за счет расширения полосы частот. Наибольшее распространение из них получили метод максимума энтропии (ММЭ). Однако при анализе сложных радиоизображений его применение сталкивается с определенными трудностями. Можно показать, что данному методу свойственна зависимость степени подавления шумовых выбросов в радиоизображении от уровня яркости, на котором они возникают, — более сильное сглаживание выбросов происходит на низком уровне. Такая зависимость затрудняет использование ММЭ в случае изображений типа темной структуры на ярком фоне [2]. Для восстановления сложных радиоизображений желательно применять алгоритм, эффективно подавляющий шумовые выбросы на любом уровне яркости. Такую возможность предоставляет метод регуляризации Тихонова [3], который использует стабилизирующий функционал, зависящий от квадратов производных изображения. Следует отметить, что подход к достижению этой же цели путем добавления стабилизатора к функционалу энтропии, рекомендованный в монографии [1], на наш взгляд, не является обоснованным, так как он фактически делает неопределенной процедуру выбора параметра регуляризации.

Как известно, регистрируемое распределение яркости $U(x, y)$ является двумерной сверткой истинного распределения $Z(x, y)$ с диаграммой направленности $A(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x-\xi, y-\eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta = A(x, y) * * Z(x, y). \quad (1)$$

Будем искать распределение яркости $Z(x, y)$, обеспечивающее минимум функционала Тихонова, который в координатной области имеет вид

$$M^{\alpha}[Z] = \|A(x, y) * * Z(x, y) - U(x, y)\|_{L_2}^2 + \alpha \|Z(x, y)\|_{W_2}^2. \quad (2)$$

Использование в качестве стабилизатора квадрата нормы в пространстве W_2^1 гарантирует сходимости решения при условии выбора параметра регуляризации α по принципу невязки или обобщенной невязки в случае неточного задания диаграммы $A(x, y)$ [4]. Существует достаточно эффективный алгоритм безусловной минимизации функционала (2) [4], который, однако, не позволяет учитывать неотрицательность $Z(x, y)$. С целью учета этой априорной информации нами был разработан нелинейный алгоритм минимизации функционала Тихонова, использующий метод проекции градиента на множество неотрицательных функций. Такая минимизация удобнее всего выполняется в фурье-области. Обозначим тильдами преобразования Фурье соответствующих функций и введем в рассмотрение вектор пространственных частот $\omega(\omega_1, \omega_2)$. Воспользовавшись теоремой Парсеваля и свойствами дифференцирования преобразования Фурье, функционал (2) можно записать как

$$M^{\alpha}[\tilde{Z}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [|\tilde{A}(\omega)\tilde{Z}(\omega) - \tilde{U}(\omega)|^2 + \alpha(1 + |\omega|^4)|\tilde{Z}(\omega)|^2] d\omega_1 d\omega_2. \quad (3)$$

Так же легко можно получить выражение для градиента функционала

$$\tilde{G}(\omega) = 2\tilde{A}^*(\omega)\tilde{A}(\omega)\tilde{Z}(\omega) - 2\tilde{A}^*(\omega)\tilde{U}(\omega) + 2\alpha(1 + |\omega|^4)\tilde{Z}(\omega). \quad (4)$$

Схема алгоритма достаточно проста. Выбирается начальное приближение $\tilde{Z}_k(\omega)$, удовлетворяющее условию $Z_k(x, y) > 0$, и вычисляется градиент $\tilde{G}_k(\omega)$. Затем решается одномерная задача минимизации функционала $M^{\alpha}[\tilde{Z}_{k, \lambda}]$ на семействе функций

$$\tilde{Z}_{k, \lambda}(\omega) = P[\tilde{Z}_k(\omega) - \lambda \tilde{G}_k(\omega)], \quad (5)$$

где P — оператор проекции на множество функций, неотрицательных в координатной области, а $\lambda > 0$. Согласно [5] такая проекция осуществляется путем выполнения обратного преобразования Фурье для $\tilde{Z}_{k, \lambda}(\omega)$, заменой отрицательных значений $Z_{k, \lambda}(x, y)$ нулями и выполнением прямого преобразования Фурье. После определения значения параметра λ_m , соответствующего минимуму одномерной задачи, следующее приближение находится по правилу

$$\tilde{Z}_{k+1}(\omega) = P[\tilde{Z}_k(\omega) - \lambda_m \tilde{G}_k(\omega)]. \quad (6)$$

Процесс итерации повторяется до достижения минимума функционала (3).

Предлагаемый метод восстановления радионизображений с использованием проекции градиента в фурье-области обладает и определенными преимуществами вычислительного характера, связанными с существованием быстрых алгоритмов двумерного преобразования Фурье. Эти алгоритмы, а также используемые простые линейные операции с двумерными массивами допускают параллельные вычисления и могут быть реализованы на векторных или векторно-конвейерных ЭВМ с очень высокой производительностью. При необходимости в данном алгоритме легко может быть применен и более эффективный метод проекции сопряженных градиентов, что, однако, потребует увеличения объема памяти.

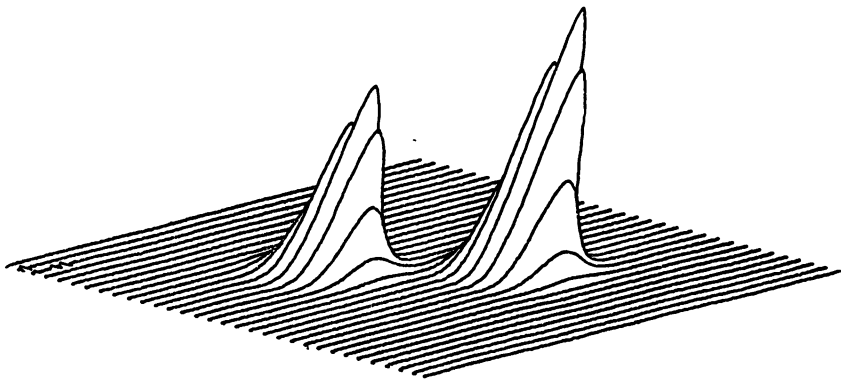


Рис. 1.

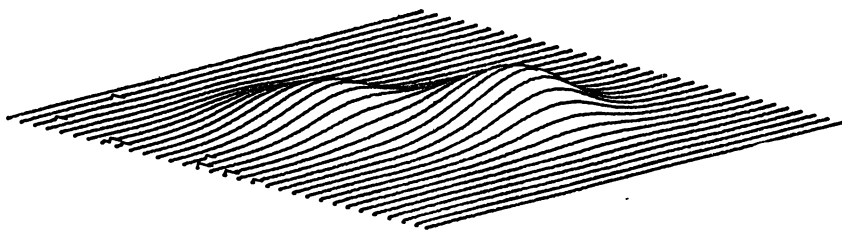


Рис. 2.

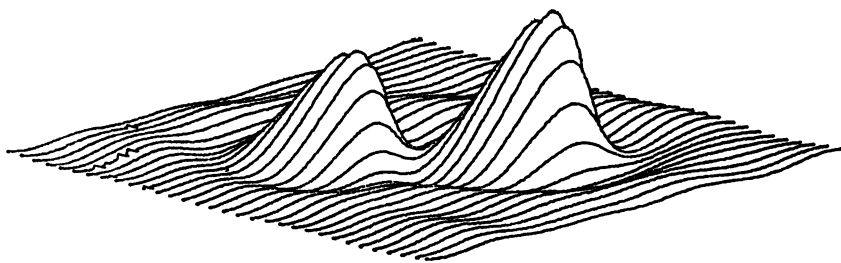


Рис. 3.

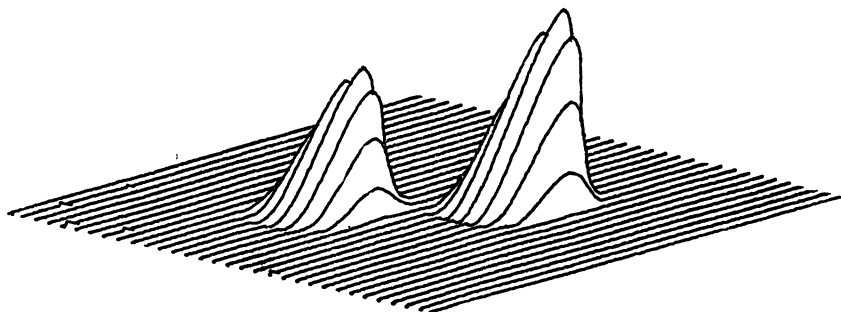


Рис. 4.

Для иллюстрации возможностей алгоритма приведем результаты численных экспериментов, выполненных на мини-ЭВМ «Электроника 100-25». На рис. 1 показано модельное радиоизображение $Z(x, y)$, состоящее из двух источников с гауссовым распределением яркости, одинаковой полушириной, но несколько различающимися максимальными значениями. Это изображение было свернуто с гауссовой диаграммой направленности $A(x, y)$, полуширина которой в два раза превышала полуширину источников. Результирующее распределение яркости $U(x, y)$, показанное на рис. 2, было подвергнуто случайному возмущению аддитивным гауссовым шумом с дисперсией, равной 1% от максимального значения $U(x, y)$. Результат восстановления радиоизображения линейным методом регуляризации показан на рис. 3, а нелинейным методом — на рис. 4. Все рисунки даны в одинаковом масштабе. Сравнение этих изображений показывает заметные преимущества нелинейного алгоритма, связанные с учетом априорной информации о неотрицательности решения. Они проявляются как в более высоком угловом разрешении, так и в устранении отрицательного ореола, окружающего изображения источников при линейных методах восстановления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 304 с.
2. Nagayan R., Nityananda R. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1986. V. 24. P. 127.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 286 с.
4. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики. — М.: Наука, 1985. — 352 с.
5. Левитин Е. С., Поляк Б. Т. // ЖВММФ. 1966. Т. 6. № 5. С. 787.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 20 октября 1988 г.

УДК 621.396

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Г. Ефимова

Внешняя задача дифракции электромагнитного импульса может быть сведена к системе временных интегральных уравнений (ВИУ) относительно эквивалентных токов на поверхности рассеивателя. В случае идеального проводника эквивалентный ток совпадает с наводимым поверхностным током. Соответствующее ВИУ известно [1], численное решение его использовалось при исследовании дифракции нестационарных сигналов на осесимметричных телах [1-3]. Если же рассеиватель представляет собой диэлектрический объект, то система ВИУ может быть составлена относительно тангенциальных и нормальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей [4]. При произвольной поверхности рассеивателя и произвольной временной зависимости первичного сигнала систему ВИУ приходится решать численно с использованием ЭВМ. Поскольку в процессе численного решения в оперативной памяти машины необходимо хранить значения искомых функций и их производных по времени на всех элементарных площадках поверхности во все рассматриваемые моменты времени, требуемый объем памяти ЭВМ оказывается очень большим. Один из путей уменьшения необходимого объема памяти — это сокращение количества искомых функций в решаемых уравнениях.

Использование интегральных представлений напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей [4] с учетом уравнений непрерывности, связывающих тангенциальные и нормальные компоненты E и H на поверхности диэлектрического тела, позволяет получить следующую систему ВИУ:

$$\begin{aligned} \hat{J}^M(\rho, t) = & -\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} [n_p \times \hat{E}_1^n(\rho, t)] - \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} [n_p \times \hat{E}_2^n(\rho, t)] + \\ & + \frac{n_p}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \times \int_S \left\{ r_0 \times \left[\varepsilon_2 \left[-\frac{1}{rc_2} \frac{\partial \hat{J}^M(q, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \frac{1}{r^2} \hat{J}^M(q, \tau_2) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \varepsilon_1 \left[-\frac{1}{rc_1} \frac{\partial \hat{J}^M(q, \tau_1)}{\partial \tau_1} - \frac{1}{r^2} \hat{J}^M(q, \tau_1) \right] \right] + \frac{1}{rc} \left[\varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial J^3(q, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \right. \right. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial J^3(q, \tau_1)}{\partial \tau_1} \Big] - \frac{c}{r} \left[\left(\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial J^3(s, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial J^3(q, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right) r_0 + \right. \\
& \left. + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{c_2} J^3(q, \tau_2) - \frac{1}{c_1} J^3(q, \tau_1) \right) r_0 + \frac{2}{r^2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} J^3(q, t') dt' \right) r_0 \right] ds ; \\
J^3(p, t) = & \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} [n_p \times H_1^n(p, t)] + \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} [n_p \times H_2^n(p, t)] + \\
& + \frac{n_p}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \times \int_S \left\{ r_0 \times \left[\mu_2 \left[-\frac{1}{rc_2} \frac{\partial J^3(q, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \frac{1}{r^2} J^3(q, \tau_2) \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mu_1 \left[\frac{1}{rc_1} \frac{\partial J^3(q, \tau_1)}{\partial \tau_1} + \frac{1}{r^2} J^3(q, \tau_1) \right] \right] - \frac{1}{rc} \left[\varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial J^M(q, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial J^M(q, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right] + \frac{c}{r} \left[\left(\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial \hat{J}^M(q, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial \hat{J}^M(q, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right) r_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{c_2} \hat{J}^M(q, \tau_2) - \frac{1}{c_1} \hat{J}^M(q, \tau_1) \right) r_0 + \frac{2}{r^2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \hat{J}^M(q, t') dt' \right) r_0 \right] r_0 \right\} ds ,
\end{aligned} \tag{2}$$

где t — время; r — расстояние между точкой наблюдения p и точкой интегрирования q ; r^0 — единичный вектор, направленный от q к p ; n_p — внешняя нормаль к поверхности рассеивателя; ε_1, μ_1 — относительные электрическая и магнитная проницаемости рассеивателя; ε_2, μ_2 — относительные параметры внешней среды; ε_0, μ_0 — абсолютные параметры вакуума; c — скорость света в вакууме; c_i — скорость света в среде с параметрами ε_i, μ_i ; $\hat{J}^M = J^M \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$; $J^M = [E \times n]$, $J^3 = [n \times H]$ — эквивалентные маг-

нитный и электрический токи на поверхности S ; $\hat{E}^n = E^n \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$; E_i^n, H_i^n — напряженности электрического и магнитного полей заданных источников, расположенных в среде с параметрами ε_i, μ_i ; $\tau_i = t - r/c_i$.

Полученная система уравнений (1), (2) связана преобразованием Фурье с известной системой интегральных уравнений Мюллера для задачи дифракции монохроматического поля на диэлектрическом теле [3] и содержит лишь две неизвестные функции — эквивалентные токи J^3 и J^M . При численном решении ВИУ (1), (2) необходимый объем памяти в полтора раза меньше того, который требуется при решении системы ВИУ [4], содержащей в качестве неизвестных функций тангенциальные и нормальные компоненты полей E и H . Разница в требуемом объеме памяти объясняется следующим. При выборе системы криволинейных координат, в которой один из ортов совпадает с единичной нормалью к поверхности рассеивателя, полученные векторные уравнения (1), (2) сводятся к четырем скалярным уравнениям относительно четырех неизвестных функций — двух координатных составляющих электрического тока и двух — магнитного тока. Система же уравнений, используемая в [4], кроме указанных неизвестных функций, содержит еще две — нормальные компоненты полей E и H .

ЛИТЕРАТУРА

1. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. — М.: Мир, 1977. С. 202.
2. Беннетт С. Л., Росс Дж. Ф. Время — импульсные электромагнитные процессы и их применения // Труды Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектротехнике. 1978. Т. 66. № 3. С. 35.
3. Васильев Е. Н., Ефимова И. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 1. С. 87.
4. Mieras H., Bennett C. L. // IEEE J. Ant. Prop. 1982. V. AP-30. № 1. P. 2.
5. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987. С. 39.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
5 декабря 1988 г.

РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ВОЛНОВОДЕ

В. П. Моденов

Дифракционно-резонансные свойства диэлектрических, полупроводниково-диэлектрических, ферритовых и других вставок различной геометрической формы в волноводе представляют особый интерес в связи с возможностью их использования при создании разного рода волноводных многофункциональных устройств и в метрологии.

Целью данной работы является исследование в СВЧ диапазоне резонансных свойств, в частности явления резонансного поглощения, диэлектриков [1] в волноводе.

Численно решается двумерная задача дифракции волны H_{10} плоского импедансного волновода на диэлектрической неоднородности в H -плоскости волновода (см. вставку к рис. 1). Данная задача является математической моделью, позволяющей исследовать распространение волны H_{10} в прямоугольном волноводе с частичным диэлектрическим заполнением в форме прямоугольного параллелепипеда с зазорами только вдоль узких импедансных стенок волновода и полным заполнением волновода вдоль его широких стенок, которые считаем идеально проводящими.

Решение задачи выполнено на основе ортогонального метода Галеркина [2]. Существенной особенностью данного метода является строгий учет потерь в веществе, заполняющем волновод, и конечной проводимости металлических стенок плоского волновода.

Соответствующая математическая краевая задача заключается в нахождении решения двумерного уравнения Гельмгольца, которое удовлетворяет заданным граничным условиям импедансного вида (граничным условиям Леонтовича) на металлических стенках плоского волновода, условиям сопряжения, обеспечивающим непрерывность касательных компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей на границах диэлектрика, а также условиям возбуждения и излучения, заключающимся в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности, кроме падающей на «диэлектрическое включение» основной волны H_{10} .

Решение данной несамосопряженной краевой задачи ищем в виде разложения по полной системе комплекснозначных собственных функций поперечного сечения плоского импедансного волновода. Для определения коэффициентов этих разложений получаем краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую решаем численно на ЭВМ и определяем коэффициенты отражения и прохождения нормальных волн. Вычисляем величину пропускания

$$L = -10 \lg |T_1| \text{ (дБ)},$$

где T_1 — комплексный коэффициент прохождения волны H_{10} .

На рис. 1 приведена типичная спектральная характеристика пропускания рассматриваемой диэлектрической вставки в волноводе с импедансными стенками. Проводимость стенок волновода $6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$; параметры диэлектрической вставки: $\text{Re } \epsilon = 2,1$; $|\text{Im } \epsilon| = 0,0008$; $a = 23 \text{ мм}$; $d = l = 15 \text{ мм}$; $b = 1,15 \text{ мм}$.

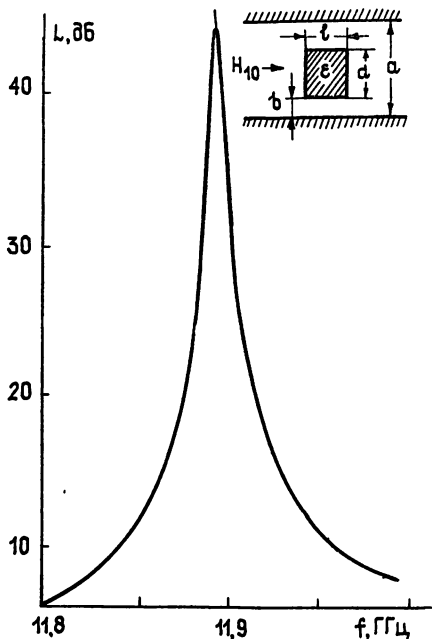


Рис. 1.

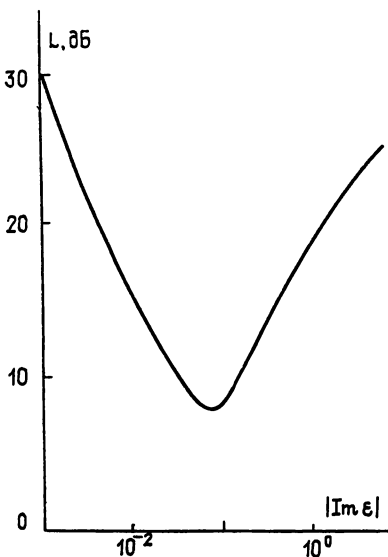


Рис. 2.

Резонансный характер спектральной кривой объясняется тем, что в результате дифракции волны H_{10} на несимметричной диэлектрической неоднородности происходит трансформация этой волны в высшие типы колебаний, в частности, возбуждается волна типа H_{20} [3]. При определенных условиях возможно резонансное накопление энергии этой моды в образованном диэлектрическом резонаторе (резонанс на «запертых» модах [4]).

На рис. 2 изображен график зависимости максимального значения пропускания L от величины мнимой части диэлектрической проницаемости на резонансной частоте 11, 8986 ГГц. Как видно из этого рисунка, влияние поглощения в диэлектрике на резонансной частоте на прохождение волны H_{10} существенно, причем существует оптимальная величина потерь в диэлектрике, при которой поглощение максимально, а резонансные свойства еще сохраняются (эффект резонансного поглощения). Это согласуется с подобным явлением для многослойных поглощающих структур [1].

Аналогичными резонансными свойствами в волноводе обладают также полупроводниково-диэлектрические [5] и ферритовые [6] вставки различной геометрической формы. Влияние на резонансные свойства таких структур удельного сопротивления полупроводника или подмагничивающего поля для феррита во многом идентично влиянию потерь в диэлектрике.

Перспективно использование резонансных свойств таких структур и, в частности, эффекта резонансного поглощения при создании активных и пассивных функциональных устройств СВЧ техники, а также для разработки новых бесконтактных методов определения геометрических и физических параметров диэлектриков, полупроводников и ферритов. Так, например, если использовать фоточувствительные полупроводники, то на основе рассмотренного эффекта можно создавать фотоуправляемые резонансные поглотители, модуляторы и т. д.

Автор выражает благодарность Ю. А. Пирогову за полезные обсуждения результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирогов Ю. А., Тихонравов А. В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1978. Т. 21. № 3. С. 15.
2. Моденов В. П. // ЖВММФ. 1987. Т. 27. № 1. С. 144.
3. Богданов Ф. Г. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 5. С. 876.
4. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности. — Киев: Наукова думка, 1986. — 216 с.
5. Кошелев О. Г., Моденов В. П., Филонова Е. А. // Труды II Всесоюз. школы-семинара «Взаимодействие электромагнитных волн с полупроводниками и полупроводниково-диэлектрическими структурами». — Саратов: Гос. ун-т, 1988. Ч. 2. С. 136.
6. Екжанов А. Е., Моденов В. П., Пирогов Ю. А. // Тезисы докл. III Всесоюзного семинара по функциональной магнитоэлектронике. — Красноярск. 1988. С. 34.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
15 ноября 1988 г.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Мэнгин Ч.-Г., Маккелланд С. Технология поверхностного монтажа: Пер. с англ.— М.: Мир, 1990 (I кв.). — 14 л.

Книга посвящена технологии монтажа электронных компонентов непосредственно на поверхности схемных плат. Анализируются вопросы, связанные со стандартизацией компонентов и корпусов ИС для поверхностного монтажа, автоматизацией технологических процессов, выбором конструкционных и технологических материалов. Рассматриваются особенности элементной базы для поверхностного монтажа, коммутационных плат, монтажного оборудования и испытательных средств.

Для конструкторов и технологов, специализирующихся в области производства радиоэлектронной аппаратуры, вычислительной и контрольно-измерительной техники, а также студентов вузов и техникумов соответствующих специальностей.