

РАДИОФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С АПРЕЛЯ 1958 г.

Том 33, № 12

Нижний Новгород

декабрь 1990

СОДЕРЖАНИЕ

Белоброва М. В., Иванов В. К., Кукушкин А. В., Левин М. Б., Фастовский Я. А. Пакет программ для диагностики условий распространения ультракоротких радиоволн над морем	1315
Котюсов А. Н., Немцов Б. Е. Неустойчивость равномерного распределения твердых частиц в потоке газа	1320
Загородний А. Г., Усенко А. С. Некогерентное рассеяние электромагнитных волн слоем слабоионизированной плазмы	1327
Цельсов Ю. Г., Кондратьев А. С. Применение метода СВЧ диагностики для измерения температуры осесимметричного ионизированного газового потока	1342
Скворцов В. А. Упрощенный расчет сдвига и уширения молекулярных линий давлением газа	1349
Белов А. А., Степанов А. В., Лопатников О. В. Исследование флуктуаций и нелинейных свойств емкости конденсаторов	1357
Кукушкин А. В., Ольяк М. Р. Перенос поляризации радиоизлучения в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме	1361
Каретникова И. Р., Нечаев А. Г., Хилько А. И. Особенности диагностики меняющихся во времени случайных неоднородностей волновода с помощью сложных импульсных сигналов	1370
Никольская Т. И., Никольский В. В. Модификация метода минимальных автономных блоков: метод Л-МАБ	1380
Почерняев В. Н., Скрыпник Л. В. Собственные функции частично заполненного прямоугольного волновода	1385
Сыровой В. А. К теории тонкостенных трубчатых релятивистских электронных пучков	1391
Запевалов В. Е., Мануилов В. Н., Цимлинг Ш. Е. К теории винтовых пучков с захваченными электронами	1406
Киракосянц В. Е., Логинов В. А., Слонов В. В. Качество обращения волнового фронта в системах с частично-заполненной апертурой	1412
Недорезов С. С. Локализованные колебания пьезоэлектрических резонаторов	1417

Краткие сообщения и письма в редакцию

Волков А. В., Латышев К. В., Кошель К. В., Славутский Л. А., Шевцов Б. М., Шишкарев А. А. Пространственные изменения уровня радиолокационных отражений от морской поверхности в условиях сверхрефракции	1423
Бахметьева Н. В., Игнатьев Ю. А., Шавин П. Б. Возбуждение неоднородностей при нагреве ионосферы проходящими мощными радиоволнами	1424
Казанский В. Б., Коцаревская И. В. Аналитическое решение дисперсионного уравнения кольцевого металлокерамического волновода	1425
Крючков С. В., Сыродоев Г. А. Увлечение электронов солитонами в сверхрешетке со спектром, выходящим за рамки учета «ближайших соседей»	1427
Усанов Д. А., Горбатов С. С., Семенов А. А. Двухчастотный режим работы СВЧ усилителя на диоде Ганна	1429
Андреева Р. И., Неганов В. А., Часовникова Т. А., Глушенко А. Г. Экспериментальное моделирование волноводных ферритовых X-циркуляторов КВЧ диапазона	1430
Корнилов С. А., Овчинников К. Д., Рипак А. М. Исследование источников 1/F шума в арсенид-галлиевых и кремниевых ЛПД	1432

Аннотации депонированных статей

Вербицкая Т. Н., Демехин В. В., Пономаренко В. Г. О влиянии постоянного электрического поля и тангенса диэлектрических потерь на коэффициент отражения СВЧ волн

1411

Информация

Содержание т. 33 журнала «Известия высших учебных заведений» по разделу «Радиофизика» за 1990 г.

1436

Именной указатель т. 33 журнала «Известия высших учебных заведений» по разделу «Радиофизика» за 1990 г.

1447

Всесоюзное агентство по авторским правам (ВААП)

1451

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, | В. И. ГАПОНОВ |, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНЫКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурashкина

Сдано в набор 28.09.90. Подписано к печати 25.04.91.
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.
Усл. печ. л. 12,25. Усл. кр.-отт. 14,70. Уч.-изд. л. 14,1. Тираж 1260.
Заказ 2615. Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика». Телефон 36-01-71.

Нижегородская областная типография управления издательств, полиграфии
и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 621.371:551.510

**ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ
УСЛОВИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАКОРОТКИХ
РАДИОВОЛН НАД МОРЕМ**

*М. В. Белоброва, В. К. Иванов, А. В. Кукушкин,
М. Б. Левин, Я. А. Фастовский*

Описана система диагностики условий распространения ультракоротких радиоволн в пограничном слое атмосферы над морем. Учтены эффекты рефракции, волноводного распространения и рассеяния.

В настоящее время в теории распространения радиоволн проводятся интенсивности исследования по диагностике и прогнозированию условий распространения радиоволн различных диапазонов по данным радиометеорологических наблюдений. Этому вопросу посвящены обзоры [1, 2], в которых проанализированы результаты теоретических исследований по распространению волн в пограничном слое атмосферы (АПС) над океаном за последние годы. Исследования, проведенные за рубежом, позволили создать американскую систему диагностики и прогнозирования условий распространения радиоволн (IREPS) [3, 7].

В данном сообщении описывается программная система (ПС) диагностики условий распространения волн в пограничном слое атмосферы. Она представляет пакет программ, в которых реализованы разработанные к настоящему времени физические механизмы этого явления. Отличие предлагаемого пакета программ от радиофизической части системы IREPS заключается в частичном учете механизма рассеяния волн на турбулентных флюктуациях показателя преломления тропосферы. В данной ПС проводятся расчеты следующих механизмов распространения электромагнитных волн в АПС.

1) Распространение в приводном волноводе испарения с учетом рассеяния на турбулентных флюктуациях показателя преломления атмосферы.

2) Распространение в тропосферном волноводе, образованном приподнятой инверсией показателя преломления.

3) Классический механизм однократного рассеяния (ДТР) в верхних слоях атмосферы.

4) В борновском приближении учитывается вклад в рассеяние дифракционного поля.

5) Для освещенной области используются отражательные формулы, полученные методом фейнмановских интегралов по траекториям, которые учитывают рассеяние на турбулентных флюктуациях показателя преломления тропосферы.

1. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ

Входными параметрами являются данные радиометеорологических измерений, заданные в виде следующих величин: толщина волновода испарения H_s , глубина поверхности инверсии (M -дефицит) ΔM , высота приподнятой инверсии H_i , толщина приподнятой инверсии ΔH , глубина приподнятой инверсии ΔM_i , градиент модифицированного показателя преломления в слое $H_s < z < H_i$, $G_2 = dM/dz$, градиент G_4 модифицированного показателя преломления при $z > H_i + \Delta H$, $G_4 = dM/dz$, структурная постоянная в колмогоровском спектре флюктуаций диэлектри-

ческой проницаемости, параметр анизотропии α небднородностей диполярической проницаемости атмосферы, средняя скорость ветра u и у поверхности моря.

На основе введенных метеопараметров и физических моделей распространения [2] в ПС производится расчет интенсивности поля $J(R, z, z_0)$, нормированной на интенсивность в свободном пространстве:

$$J(R, z, z_0) = \langle |U(R, z, z_0)|^2 \rangle / |U_0(R, z, z_0)|^2, \quad (1)$$

где $U(R, z, z_0)$ — поле в точке R, z , создаваемое источником, находящимся при $R=0$, на высоте z_0 над поверхностью раздела,

$$U_0 = \exp[ikR + ik(z - z_0)^2/2R]/R \quad (2)$$

— поле в свободном пространстве. Здесь и далее R — расстояние вдоль земной поверхности, z — высота над поверхностью Земли, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны излучения.

1.1. При наличии приводного волновода испарения ($H_s \neq 0$) производится оценка критической длины волны, распространяющейся в приводном волноводе, и оценивается оптимальная в смысле потерь на распространение длина волны, из диапазона $\lambda = 3, 10, 30, 50$ см на загоризонтной трассе поверхность — поверхность. При этом учитывается как влияние волновода, так и рассеяние на флуктуациях показателя преломления в приводном слое тропосфера. Результаты представляются в виде длины волны (см) и погонного ослабления (дБ/км) и выводятся на экран терминала.

1.2. При наличии приподнятой инверсии показателя преломления ($H_i \neq 0$) производятся упрощенные инженерные расчеты потерь при распространении прямого сигнала на загоризонтной трассе (за счет тропосферного канала) по методике [5].

1.3. В ПС предусмотрен режим построения диаграмм обнаружения целей радиолокационной станцией с заданным энергетическим потенциалом Π при данных значениях радиометеорологических параметров, описывающих состояние тропосферы. Для построения диаграмм обнаружения используется методика расчета дальности действия радиолокационных станций, изложенная в [6]. Вводится Π (дБ) — энергетический потенциал станции по точечному эквиваленту цели в обобщенных параметрах:

$$\Pi = C + I - SN,$$

где C — величина потенциально допускаемого данной станцией ослабления потока, когда энергия сигнала равна энергии шумов, I — эквивалентный коэффициент переизлучения изотропной цели, SN — величина отношения сигнал/шум. В результате расчетов на графопостроитель (ГП) или графический дисплей (ГД) выводится диаграмма обнаружения, т. е. изолинии в пространстве, на которых

$$40 \lg R - 20 \lg J(R, z, z_0) = \Pi. \quad (3)$$

При этом используются введенные ранее радиометеорологические параметры и производятся расчеты всех физических механизмов распространения радиоволн, которые могут иметь место при данной зависимости $M(z)$ и значениях C и I . На рис. 1 (см. на вклейке) приведен пример диаграммы обнаружения, выведенной на графопостроитель. Здесь рассмотрена мощная инверсия показателя преломления, параметры которой взяты из [3]: $H_i = 183$ м, $\Delta H = 122$ м, $\Delta M = 40$. Расчеты проведены для $\lambda = 9,1$ см, $z_0 = 30,5$ м, ширина диаграммы направленности передающей антенны $\theta_A = 1^\circ$, $\Pi = 220$ дБ.

1.4. Одним из режимов работы данной ПС является расчет потерь прямого сигнала, т. е. построение дистанционных или высотных зависи-

мостей интенсивности поля $10 \lg J(R, z, z_0)$ при заданных радиометеорологических параметрах. Результатом работы ПС в этом режиме является дистанционная или высотная зависимость интенсивности поля, выведенная на ГД или ГП.

1.5. ПС позволяет провести анализ траекторий лучевых полей, что наглядно отражает возможные физические механизмы загоризонтного распространения волн. Входными параметрами в этом режиме являются: высота расположения передающей антенны, полуширина диаграммы направленности антенны, максимальное расстояние вдоль поверхности Земли и шаг по расстоянию. В результате формируется конгруэнция лучей на ГД или ГП. На рис. 2 изображены траектории волн для источника, расположенного на высоте $z=500$ м, с шириной диаграммы направленности $\theta_A = 1^\circ$, при наличии М-инверсии с параметрами $H_i = 500$ м, $\Delta H = 100$ м, $\Delta M = 20$ ед.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

2.1. Алгоритм расчета волновых полей в области интерференции в случайно-неоднородной атмосфере основан на результатах [8], где методом фейнмановских интегралов по траекториям получено аналитическое решение для второго момента поля. В настоящей работе результаты [8] обобщаются в случае присутствия в тропосфере инверсии показателя преломления. Кроме этого, в предположении статистической независимости морского волнения и флюктуаций показателя преломления тропосферы коэффициент отражения от морской поверхности $V(\theta)$ предполагается равным коэффициенту отражения когерентной составляющей поля в приближении Кирхгофа:

$$V(\theta) = V_0(\theta) \exp(-k^2 \sigma^2 \sin \theta), \quad (4)$$

где $V_0(\theta)$ — коэффициент отражения Френеля от гладкой поверхности моря, θ — угол скольжения, σ^2 — дисперсия высот морской поверхности. Для связи среднеквадратичного значения высоты неровности морской поверхности σ [м] со скоростью ветра u [м/с] используется выражение [1]

$$\sigma^2 = 0,052u^2. \quad (5)$$

Следует отметить, что выражение (4) для коэффициента отражения носит феноменологический характер. Подобная модель используется в системе IREPS [1]. В [1] показано, что расчеты в приближении Кирхгофа по формуле (4) хорошо согласуются с экспериментальными данными. Физическим основанием использования формулы (4) для расчета интенсивности сигнала, отраженного от морской поверхности, является предположение, что при рассеянии вперед основной вклад в рассеянное поле вносит когерентная компонента поля.

Таким образом, в соответствии с [8] интенсивность поля в области интерференции будем описывать выражением

$$J(R, z, z_0) = \sum_{n, m=1}^N A_n A_m^* \exp[ik(S_n - S_m) - M_{nm}], \quad (6)$$

где A_n, S_n — амплитуда и фаза n -го луча, M_{nm} — структурная функция разности фаз вдоль лучевых траекторий $r_n(s)$ и $r_m(s)$:

$$M_{nm} = 0,73k^2 C_e^2 \int_0^R ds |r_n(s) - r_m(s)|^{5/3}. \quad (7)$$

Здесь C_e — структурная постоянная флюктуаций диэлектрической проницаемости тропосферы, число N в сумме (7) соответствует количеству лучей, формирующих поле в данной точке трассы при заданном профиле $M(z)$. Для стандартной рефракции, как известно, существует только прямая волна и волна, отраженная от поверхности раздела, т. е.

N=2. Фаза вдоль луча с номером n описывается классическим выражением для действия:

$$S_n = \frac{i\hbar}{2} \int_0^R ds \left[\left(\frac{dr_n}{ds} \right)^2 + P(r_n(s)) \right], \quad (8)$$

где сами траектории r_n определяются решением уравнений Эйлера

$$\frac{d^2 r_n}{ds^2} = \frac{dP}{dr_n}, \quad P(r) = \frac{1}{2} M(r) \cdot 10^{-6} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$r_n(0) = z_0, \quad r_n(R) = z. \quad (10)$$

Как в [8], так и в настоящем сообщении учет объемного рассеяния в области интерференции производится фактически в приближении метода плавных возмущений. Как известно, в этом случае дисперсия флуктуаций углов прихода $\langle \theta_s^2 \rangle$ рассеянных волн удовлетворяет неравенству $\langle \theta_s^2 \rangle \ll \theta_p^2$, где $\theta_p^2 = (kR)^{-1}$ — квадрат углового размера зоны Френеля. Последнее обстоятельство позволяет использовать для нахождения траекторий уравнение (9), а амплитуда n -го луча — A_n определяется решением невозмущенной задачи и учитывает расходимость вдоль данной траектории. Для волн, отраженных от поверхности моря,

$$A_{n_0} = A_n(R) V(\theta_n), \quad (11)$$

где θ_n — угол скольжения n -й волны в точке отражения. Величина θ_n определяется законом Снеллиуса и решением уравнения геометрической оптики (9). Решение уравнений (9) производится на ЭВМ.

2.2. Для расчетов однократно рассеянного поля в верхних слоях атмосферы используются результаты [9, 10]. При этом учитывается высотная зависимость структурной постоянной C_e от высоты для различных типов стратификации в приводном слое.

2.3. Расчет интенсивности поля УКВ при наличии отражающих слоев на верхней границе АПС проводится с использованием классической теории [4]. При этом в данном варианте системы не учитывается рассеяние на флуктуациях показателя преломления. Аналогичная модель используется в [3]. В [3, 7] проведено сопоставление этой модели с экспериментом и отмечено удовлетворительное согласие теоретических результатов с результатами измерений внутри тропосферного волноводного канала в диапазоне метровых — сантиметровых волн. Там же показано, что в пространстве над волноводом результаты эксперимента существенно отличаются от теоретических, что, по-видимому, связано с рассеянием на неоднородностях показателя преломления. При использовании некогерентного сложения ограниченной совокупности «незахваченных» мод [7] приподнятого волновода можно повысить результирующий уровень поля в пространстве над волноводом, что лучше согласуется с результатами эксперимента. Однако изложенное в [3, 7] не позволяет иметь четкий критерий количества удерживаемых мод, и поэтому упомянутая методика (см. [3, 7]) не используется в настоящей работе.

Для ускорения расчетов поля в сумме нормальных волн, которой представляется множитель ослабления, удерживаются только «захваченные» моды. При вычислении постоянных распространения используются ВКБ-асимптотики дисперсионных уравнений. Результаты тестовых расчетов сравнивались с приведенными в [7] для аналогичных параметров M -профиля. Сравнение показывает достаточно хорошее согласие результатов для случая, когда хотя бы один из корреспондентов находится в волноводном канале. В ситуации, когда оба корреспонден-

та расположены вне канала, на наш взгляд, требуется усложнение расчетов с учетом, прежде всего, мелкомасштабной структуры показателя преломления, обеспечивающей интегральный эффект рассеяния в непрерывный спектр.

2.4. В настоящей ПС для расчетов волноводного механизма распространения используется теория, развитая в [4], и результаты [2, 11, 12], где исследовано влияние флуктуаций показателя преломления. В зависимости от диапазона волн и параметров среды в приводном слое для расчетов используются три блока, которые соответствуют различным предельным ситуациям распространения. В случае, когда волновод не обеспечивает захвата первой моды в канал, вычисление интенсивности поля проводится по формулам ВКБ-асимптотик, приведенным в [4]. Основная трудность при расчетах в этой ситуации заключается в определении постоянной распространения первой моды. В данной ПС сформирован массив постоянных распространения, которые предварительно рассчитаны в рамках строгой теории [4] для линейно-логарифмической модели M -профиля и различных условий стратификации. При обращении к этому блоку постоянная распространения первого мода определяется интерполяцией по массиву. Для очень малых приведенных высот волновода kH_s/m (эта ситуация характерна для «длинных» волн ($\lambda > 30$ см) в умеренных широтах над морем) при расчетах постоянных распространения используются формулы теории возмущений [13].

При наличии мощных волноводов испарения, когда наблюдается захват хотя бы одной моды в канал, в системе реализованы формулы Фока [4] для линейно-ломаной модели M -профиля. Критерием, когда не нужно учитывать рассеяние на случайных флуктуациях показателя преломления в волноводе, является малая величина полного ослабления на трассе за счет рассеяния, т. е.

$$k^{-2/3} C_e^3 \alpha^{-5/3} m^{11/3} R \ll 1. \quad (12)$$

На сантиметровых волнах, как показано в [2], рассеяние на флуктуациях показателя преломления является существенным фактором. Вследствие рассеяния происходит перераспределение поля в пространстве; внутри волновода поле дополнительно ослабляется за счет рассеяния и часть энергии поля излучается в пространство над волноводом.

ЛИТЕРАТУРА

- Хитни Т. В., Рихтер Ю. Х. и др. // ТИИЭР. 1985. Т. 73. № 2. С. 106.
- Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 29. № 7. С. 811.
- Hitney H. V., Rappert R. A., Hattan C. P. In: URSI Comm. F., Open Symp. Preprint, La Baule, France, 1977. V. 1.
- Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.—М.: Сов. радио, 1970.
- Doherty H. T., Hart B. A. // IEEE Trans. 1979. V. AP-27. № 4., Р. 542.
- Голов К. В. Расчет дальности действия радиолокационных станций—М.: Сов. радио, 1962.
- Baumgartner Jr., Hitney H. V., Rappert R. A. // IRE Proc., 1983. V. 130. Pt. F. № 7., Р. 630.
- Кукушкин А. В., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 30. № 12. С. 1442.
- Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967.
- Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 7. С. 817.
- Кукушкин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 11. С. 18.
- Кукушкин А. В., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 6. С. 753.
- Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 2. С. 192.

УДК 534.29

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА

A. H. Котюсов, B. E. Немцов

Рассмотрена задача о поведении твердых частиц (капель), находящихся в потоке газа. Показано, что в данной системе развивается неустойчивость, найден ее инкремент. Проведена количественная оценка характерного времени развития неустойчивости. Отмечено, что исследуемый механизм неустойчивости может приводить к динамической коагуляции аэрозолей

Круг вопросов, связанных с исследованиями в области механики гетерогенных сред, достаточно широк. Одной из важных проблем этого направления представляется проблема коагуляции аэрозолей, т. е. явление слипания дисперсных частиц. Вопросам коагуляции посвящено значительное количество работ (см. [1-3]). Поскольку сближение частиц может быть вызвано самыми различными причинами (бронновское движение, наличие градиента скорости в движущейся среде, турбулизация потока, электрическое взаимодействие частиц, гидродинамическое взаимодействие и т. д.), то в соответствии с этим существует целый ряд гипотез о механизме коагуляции, ни одна из которых, однако, полностью не объясняет процесса.

При изучении динамических механизмов коагуляции в литературе [1-3] макроскопическое движение гетерогенных смесей рассматривается обычно при выполнении ряда допущений. Эти допущения позволяют выделить исследование поведения единичных включений или неоднородностей и процессов около них, проводя их независимо с помощью классических в механике сплошной среды методов и уравнений. Таким образом, как правило, проводится исследование динамических характеристик одиночных частиц с последующей попыткой учесть их парное взаимодействие друг с другом. В то же время существует и другая возможность взаимодействия частиц и их коллективной динамики, связанная с когерентным характером длинноволновых возмущений, в формировании которых существует сразу большое число твердых тел. Исследованию данного механизма посвящена настоящая работа. Рассмотрение проводится на примере простой модели газа, заполненного твердыми частицами одного радиуса, движущимися с некоторой постоянной скоростью. Считается, что энергией парного взаимодействия и другими эффектами хаотического и внутреннего движения твердых включений, а также столкновениями частиц можно пренебречь. Полагается также, что отсутствуют процессы дробления, слипания (коагуляции) и образования новых дисперсных частиц.

При анализе было установлено, что в присутствии твердых включений формируется мода, неустойчивая по отношению к малым возмущениям объемного содержания твердых частиц. Обнаруженная неустойчивость приводит к сближению твердых частиц и к их дальнейшему слиянию. В работе вычислен инкремент неустойчивости, а также проведена количественная оценка характерного времени развития неустойчивости.

При описании коллективных эффектов взаимодействия потока

твердых частиц с газом будем исходить из уравнений непрерывности для твердой компоненты

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div} n \mathbf{v}_t = 0 \quad (1)$$

и газа [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{4}{3} \pi R^3 \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v} \right). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v}_t — скорость твердых частиц радиуса R , \mathbf{v} — скорость газа.

Для вывода этих уравнений необходимо представление смеси как совокупности двух континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью. Для каждого из этих составляющих континуумов в каждой точке определяются обычным образом приведенная плотность (масса соответствующей составляющей в единице объема среды) и скорость. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, определена пара значений плотностей и скоростей [1]. Уравнение (1) представляет собой фактически закон сохранения количества твердой фазы. Уравнение (2) также имеет простой физический смысл. Первое слагаемое в правой части (2) обусловлено тем, что при внесении в некоторый объем твердых частиц газ выталкивается из этого объема, второе слагаемое связано с тем обстоятельством, что в области повышенного содержания твердых частиц должна возрастать скорость газовой компоненты. Особенно нагляден этот вывод для случая стационарного одномерного течения газа, когда $v \sim (1 - (4/3)\pi R^3 n)^{-1}$, и v обращается в бесконечность, если твердая фаза занимает весь объем смеси.

Если частицы распределены по радиусам, нужно ввести концентрацию шаров с радиусом от R до $R+dR$, $dn=f(r, R, t)dR$, и тогда уравнения принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} f \mathbf{v}_t = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty R^3 f dR + \operatorname{div} \left(\int_0^\infty R^3 f dR \right) \mathbf{v} \right), \quad (4)$$

где \mathbf{v}_t имеет смысл гидродинамической скорости частиц радиуса R . Эти уравнения следует дополнить уравнением движения твердых частиц.

Уравнение движения твердого тела, погруженного в колеблющуюся жидкость, для случая потенциального обтекания получено в [4] и имеет вид

$$\rho_t \frac{d_2 \mathbf{v}_t}{dt} = \rho \frac{d_1 \mathbf{v}}{dt} + \frac{\rho}{2} \frac{d_2}{dt} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_t). \quad (5)$$

Первое слагаемое правой части соответствует так называемой силе Архимеда, обусловленной действием среднего давления газа на частицу без учета влияния самой частицы на поле скоростей газа [1]. Второе слагаемое обусловлено тем фактом, что в действительности тело не увлекается полностью жидкостью; возникает движение тела относительно жидкости, в результате чего сама жидкость приобретает некоторый дополнительный импульс. Таким образом, можно говорить, что второе слагаемое уравнения (5) определяется микрополями, возникающими вокруг движущейся твердой частицы. Замечательно здесь то, что действие собственных полей частицы может быть выражено через средние значения скорости газа v и частицы v_t . По очевидным причинам второе слагаемое отражает эффект присоединенной массы. Урав-

нение (5) получено в книге [4] для случая пространственного однородного течения газа. Обобщение на случай неоднородного течения сделано в книге [1]. При этом оказалось, что полную производную d_2/dt следует понимать как $\partial/\partial t + (\mathbf{v}_t \nabla)$, в отличие от $d_1/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v} \nabla)$ [1]. Этот результат физически достаточно ясен, поскольку, как уже говорилось, второе слагаемое в (5) обусловлено ближним полем твердой частицы и должно определяться субстанциональными производными, связанными с ней.

По поводу (5) следует сделать еще одно замечание. Если характерные масштабы возмущений достаточно велики по сравнению с расстоянием между частицами, то можно рассматривать твердые частицы как сплошную среду.

При наличии вязкости уравнения неразрывности имеют тот же вид, а уравнение движения усложняется [1, 6]:

$$\begin{aligned} \rho_t \frac{d_2 \mathbf{v}_t}{dt} = & \rho \frac{d_1 \mathbf{v}}{dt} + \frac{\rho}{2} \frac{d_2}{dt} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_t) - \frac{9}{2} \frac{\eta \Psi}{R^2} (\mathbf{v}_t - \mathbf{v}) - \\ & - \frac{9}{2R} \sqrt{\frac{\eta \rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t (t - t')^{-1/2} \frac{d_2}{dt'} (\mathbf{v}_t - \mathbf{v}) dt' + f. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части имеют тот же смысл, что и в случае потенциального обтекания, третье слагаемое есть известная сила Стокса, или сила вязкого трения, четвертое — так называемая сила Бассэ, зависящая от истории движения твердых частиц и жидкости. Она выражает собой мгновенное гидродинамическое сопротивление и начинает играть важную роль, когда твердая частица приобретает большое ускорение. Пятое слагаемое f — сторонняя плотность силы, действующей на твердые частицы.

При нахождении сил считалось, что частицы удалены на достаточно большое расстояние, т. е. $R^3 n \ll 1$. Кроме того, в уравнении (5), (6) входит усредненная по объему величина v , которая мало меняется на расстояниях, сравнимых с $n^{-1/3}$. Таким образом, для справедливости приведенных уравнений должно выполняться условие

$$R \ll n^{-1/3} \ll \lambda, \quad (7)$$

где λ — характерный пространственный масштаб возмущений. Уравнение (6) получено в предположении о «ползущем» обтекании, когда число Рейнольдса $Re = vR/v \ll 1$ [4].

В уравнении (6) сила Стокса записана с учетом «эффекта стесненности», заключающегося в том, что в области с повышенной концентрацией частиц возрастает стоксово сопротивление. Очевидно, что зависимость от концентрации обусловлена взаимодействием между частицами, осуществляющимся посредством полей скоростей, порождаемых каждой частицей в окружающей жидкости. Эта зависимость учтена в (6) коэффициентом $\Phi = \Phi(n)$. Остановимся здесь несколько подробнее на выяснении вида функции $\Phi(n)$, который может быть определен из зависимости скорости оседания твердых сфер от концентрации частиц в вязкой жидкости. Определению данной зависимости посвящено много работ, обзор которых содержится в книге [5].

Все теоретические исследования стесненного движения разделяются на три группы. К первой группе [5] относятся расчеты, в которых предполагается, что центры сфер расположены геометрически правильным образом, например по кубической решетке, с характерной длиной порядка $R\alpha^{-1/3}$, где R — радиус сферы, $\alpha = (4/3)\pi R^3 n$ — объемная концентрация сферических частиц. Расчеты показали, что для малоконцентрированной дисперской системы ($\alpha \ll 1$) относительное снижение скорости осаждения сфер с учетом взаимодействия пропорционально $\alpha^{1/3}$ с коэффициентом пропорциональности порядка единицы.

Вторая группа расчетов основана на ячеистой модели взаимодействия частиц [1]. В такого рода работах среднее гидродинамическое воздействие на какую-либо сферу всех других сфер заменяется воздействием границы, обычно принимаемой сферической, окружающей рассматриваемую частицу. Радиус внешней сферической границы выбирается равным $R\alpha^{-1/3}$. Движение жидкости в ячейке удовлетворяет условиям прилипания на поверхности твердой частицы. Все расчеты, приведенные в рамках такой модели, показали, что относительное изменение скорости осаждения пропорционально $\alpha^{1/3}$. Коэффициент пропорциональности здесь также порядка единицы.

К третьей группе относятся исследования, в которых на основе статистических аналитических методов рассчитано «стесненное осаждение» случайно распределенных сфер в малоконцентрированной суспензии [7, 8]. Показано, что изменение средней скорости осаждения твердых сфер в суспензии пропорционально α , с коэффициентом пропорциональности, равным 5–6. Зависимости такого рода подтверждаются экспериментально [2].

Необходимо отметить, что в первой и второй группах расчеты «стесненного оседания» основаны на том, что каждая оседающая сфера заменяется некоторой сосредоточенной силой, приложенной к жидкости в центре сферы. Из закона Стокса скорость жидкости при движении изолированной сферы изменяется с расстоянием r как v_0R/r , где v_0 — скорость сферы. Из сказанного следует, что дополнительная скорость жидкости в окрестности каждой сферы, обусловленная влиянием всех остальных, пропорциональна Rv_0/l , где l — некоторая длина, связанная с расположением частиц. В случае регулярного расположения сфер за l можно принять расстояние между соседними сферами. В итоге изменение скорости жидкости в точке расположения некоторой сферы, эквивалентное изменению скорости движения выбранной сферы, дается соотношением $v - v_0 \sim v_0 R n^{1/3}$. Аналогично в случае ячеистой модели за l можно выбрать размер ячейки, также пропорциональный $\alpha^{-1/3}$. Вместе с тем необходимо отметить, что в отличие от ячеистой модели и модели регулярного расположения, при произвольном расположении сфер, нельзя указать ни точного, ни преимущественного среднего расстояния между частицами. В этом смысле третья модель выглядит более правдоподобно, поскольку в реальной дисперсионной системе поддержание регулярного расположения частиц невозможно.

Кроме того при изучении движения твердых частиц в жидкости необходимо учитывать появление зависимости коэффициента вязкости от концентрации частиц, определяемое формулой Эйнштейна [4]. Для сферических частиц $\eta = \eta_0(1 + 5\alpha/2)$.

Сделаем еще одно важное замечание. Дело в том, что расчет скорости оседания частиц в суспензии основан на применении известного решения Стокса для полей скоростей жидкости, обтекающей сферу. Это решение применимо лишь на расстояниях $r \ll v/v_0$ от движущейся частицы. На больших расстояниях стоксовское распределение скоростей оказывается неверным и необходимо пользоваться решением Осеена [4]. Оценок для изменения скорости в этом случае произведено не было, однако ввиду быстрого экспоненциального спада поля скоростей на больших расстояниях в решении Осеена поправка, обусловленная стесненным движением, экспоненциально мала и зависимость силы Стокса от концентрации определяется лишь поправкой Эйнштейна.

В итоге, обобщая все сказанное, выпишем существующие зависимости $\varphi(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= 1 + k_1 \alpha^{1/3}, & k_1 &\sim 1,5, & n^{-1/3} \ll v/v_0; \\ \varphi(\alpha) &= 1 + k_2 \alpha, & k_2 &\sim 5 \div 6, & n^{-1/3} \ll v/v_0; \\ \varphi(\alpha) &= 1, & & & n^{-1/3} \geq v/v_0.\end{aligned}$$

Исследуем устойчивость однородного распределения твердых час-

тиц в потоке газа. Начнем с потенциального обтекания. Как видно из (6), приближение потенциального обтекания справедливо, если для характерной частоты колебаний выполняется

$$\omega \gg v/R^2, \quad (8)$$

т. е. когда сила, действующая на частицу, определяется фактически силой присоединенных масс, как в идеальной жидкости. Такой предельный инерционный режим характерен для маловязких жидкостей с достаточно крупными частицами.

При выполнении (8) в качестве исходной системы следует брать уравнения (3) — (5). Поскольку в уравнение движения размеры частиц не входят явным образом, результат будет зависеть лишь от удельного

объема твердой фазы $\alpha = \int_0^4 \pi R^3 f(r, R) dR$. Считая, что невозмущенная

скорость газа v_0 , а возмущения зависят от координат и времени по закону $\exp(-i\omega t + ikr)$, из (3) — (5) получим для мнимой части частоты

$$Im\omega \approx \pm \sqrt{\alpha_0 \rho_t / \rho} k v_0, \quad (9)$$

где $\alpha_0 = (4/3)\pi R^3 n_0$ — невозмущенный удельный объем твердой фазы. Из полученного выражения видно, что система неустойчива. Инкремент растет с ростом k .

При выполнении (8) должно соблюдаться условие

$$kR \gg (\sqrt{\alpha \rho / \rho_t} Re)^{-1}. \quad (10)$$

С учетом того, что $kR \ll 1$, неравенство (10) может быть реализовано лишь при $Re \gg 1$. Однако возможность применимости приближения потенциального обтекания при больших числах Рейнольдса недостаточно ясна. Для более точного анализа неустойчивости в (6) необходим учет членов, содержащих вязкость. Откажемся от неравенства (8). Тогда после линеаризации уравнений (1), (2) на фоне невозмущенных значений n_0 , $v_0 = 2fR^2/9\eta$ получим для возмущений концентрации и скорости газа

$$\alpha' = \alpha_0 k v_t / \omega; \quad (11)$$

$$kv = -\alpha_0 \frac{\omega - kv_0}{1 - \alpha_0} \frac{kv_t}{\omega}. \quad (12)$$

Уравнение (6) будем рассматривать в приближении малости силы Бассэ по сравнению с силой Стокса. Такое приближение справедливо для случая $\omega \ll v/R^2$ [1], где ω — характерная частота изменения скорости движения частицы.

После линеаризации (6) имеем

$$\rho_t \frac{d v_t}{dt} = \rho \left(\frac{d v}{dt} + (v_0 \nabla) v \right) + \frac{\rho}{2} \frac{d v}{dt} - \beta_0 (v_t - v) + \alpha' \beta' v_0, \quad (13)$$

где $\beta_0 = 9\eta/2R^2$, $\beta = 9\eta(\alpha) \Psi(\alpha)/2R^2$, $\beta' = \partial\beta/\partial\alpha$. При выводе (13) было учтено, что $\rho_t \gg \rho$, а также то, что невозмущенные частицы покоятся.

Считая, что возмущения скоростей и концентрации зависят от координат и времени по закону $\exp(-i\omega t + ikr)$, из уравнения (13) получим

$$v_t (-i\omega \rho_t + \beta_0) = v \left(ik v_0 \rho - \frac{3}{2} i\omega \rho + \beta_0 \right) + \alpha' \beta' v_0; \quad (14)$$

$$\beta' = \beta_0 (5/2 + \Psi'_\alpha), \quad (15)$$

Умножая скалярно обе части (14) на \mathbf{k} и воспользовавшись (11), (12) (15), получим для ω следующее уравнение:

$$\omega^2 + \omega \left(i v_k - \frac{5}{2} \frac{\rho}{\rho_t} \alpha_0 k v_0 \right) + \frac{\rho}{\rho_t} \alpha_0 (k v_0)^2 - i \alpha_0 v_k k v_0 \left(\frac{7}{2} + \Psi'_a \right) = 0. \quad (16)$$

Здесь $v_k = \beta_0 / \rho_t$. При выводе (16) были учтены неравенства $\alpha_0 \ll 1$, $\rho_t \gg \rho$. Решение (16) элементарно и имеет вид

$$\omega \approx -\frac{i v_k}{2} + \frac{5}{4} \frac{\rho}{\rho_t} \alpha_0 k v_0 \pm \frac{i v_k}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \alpha_0}{\rho_t v_k^2} (k v_0)^2 - \frac{4 i \alpha_0}{v_k} k v_0 \left(\frac{7}{2} + \Psi'_a \right)}. \quad (17)$$

Будем полагать, что в формуле (17) в подкоренном выражении второй и третий члены малы по сравнению с единицей. Подобное приближение действительно для подавляющего большинства физических объектов (движение капель тумана в воздухе, движение частиц пыли и аэрозолей в трубах и т. п.). Это дает возможность произвести некоторые упрощения (17) с помощью разложения подкоренного выражения в ряд.

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать лишь мнимая часть (17), то, выполняя несложные вычисления и пренебрегая малыми членами, получим

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{\alpha_0 (k v_0)^2}{v_k} \left[\frac{\rho}{\rho_t} + \alpha_0 \left(\frac{7}{2} + \Psi'_a \right)^2 \right], \quad (18)$$

откуда видно, что система неустойчива.

Механизм данной неустойчивости может быть объяснен двумя причинами. Во-первых, при возрастании в некоторой области количества твердых частиц увеличивается скорость газа в этой области, так как эффективное сечение, через которое проходит газ, уменьшается. Увеличение скорости вызывает уменьшение давления (закон Бернулли), что приводит к дальнейшему сближению твердых частиц, а значит — к развитию неустойчивости. Во-вторых, при определенных условиях более существенную роль играет механизм, связанный с эффектом стесненности, т. е. с увеличением силы Стокса в области с повышенной концентрацией твердых частиц. При этом частицы из области с повышенной концентрацией твердой фазы сильнее увлекаются потоком и догоняют частицы в области с пониженной концентрацией твердой фазы. Это приводит к росту плотности числа частиц, что способствует дальнейшему развитию процесса. Кроме того, необходимо отметить, что аналогичный вклад в неустойчивость вносит определяемая формулой Эйнштейна [1, 5] зависимость коэффициента вязкости от концентрации частиц.

Приведем численную оценку выражения (18). Для характерных значений параметров частиц, движущихся в воздухе под действием силы тяжести, имеем: $n \sim 10^6 \text{ см}^{-3}$, $R = 10^{-3} \text{ см}$, $v = 0,15 \text{ см}^2 \text{с}^{-1}$, $\rho_t / \rho = 10^3$, $v_0 = 2R^2 g \rho_t / 9 \nu p$, $k \sim n^{1/3}$. Будем считать, что частицы аэрозоля распределены хаотически. Тогда согласно [7] $\varphi = 1 + 5a$. В итоге для величины инкремента неустойчивости получим $\operatorname{Im} \omega \sim 10^{-1} \text{ с}^{-1}$. Характерное время увеличения концентрации $\tau \sim 10 \text{ с}$.

Как было показано выше, полученное решение справедливо лишь для малых чисел Рейнольдса $Re \ll 1$. С учетом приведенных значений параметров получим $Re \sim 0,02$, т. е. мы имеем дело с ламинарным режимом движения. Следует также отметить, что при рассмотрении процессов, протекающих в атмосфере, большую роль играет крупномасштабная турбулентность [9]. Однако она практически не оказывает никакого влияния на развитие неустойчивости с масштабами $\lambda < l$, где l — характерный масштаб турбулентности. Для условий атмосферы $l < 1 \text{ м}$, в то время как $\lambda \gg n^{-1/3} \sim 10^{-2} \text{ см}$ (см. формулу (7)). Таким

образом, влійнієм кропніомасштабної турбулентності можна пренебречь.

Приведенные оценки показывают, что описанная неустойчивость приводит к увеличению концентрации, т. е. к сближению мелких частиц аэрозоля и их дальнейшему слипанию. Подобный эффект может наблюдаться при оседании туманов, пыли и аэрозолей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.—336 с.
2. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. — М.: Мир, 1975.—378 с.
3. Физические основы ультразвуковой технологии / Под ред. Л. Д. Розенберга.—М.: Наука, 1970.—716 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986.—736 с.
5. Хаппель Дж., Брениер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.—М.: Мир, 1976.—632 с.
6. Сой С. Гидродинамика многофазных систем.—М.: Мир, 1974.—536 с.
7. Головин А. М., Чижов В. Е. // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 105.
8. Batchelor G. K. // Fluid Mechanics. 1972. V. 52. Pt. 2. P. 245.
9. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии.—Л.: Гидрометеоиздат, 1984.—751 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 августа 1989 г.

INSTABILITY OF UNIFORM DISTRIBUTION OF SOLID PARTICLES IN THE GAS FLOW

A. N. Kotuysov, B. E. Nemtsov

A problem is considered on behaviour of solid particles (drops) in the gas flow. It is shown that instability is developed in the given system and its increment has been found. A quantitative estimation has been made for the characteristic time of the instability development. It is noted that the investigated instability mechanism can lead to dynamic coagulation of aerosols.

УДК 533.932

НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СЛОЕМ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

А. Г. Загородний, А. С. Усенко

Рассчитаны дифференциальные коэффициенты некогерентного отражения и прохождения электромагнитных волн слоем слабоионизованной плазмы при произвольных значениях коэффициентов поглощения частиц граничными плоскостями. Детально исследовано влияние характера взаимодействия электронов с поверхностью на спектральные и угловые распределения рассеянного излучения.

Некогерентное рассеяние электромагнитных волн в плазме лежит в основе одного из наиболее мощных методов диагностики плазмы. Это обстоятельство определяет актуальность соответствующих теоретических исследований [1–6], необходимых как для расшифровки экспериментальных спектров рассеяния, так и для описания фундаментальных процессов взаимодействия электромагнитных волн с плазмой и плазмоподобными средами.

Важным аспектом таких исследований является детальное изучение спектров рассеянных волн в случае пространственно ограниченных плазменных систем. Расчеты спектров некогерентного отражения электромагнитных волн полуограниченной плазмой [7–10] наглядно проиллюстрировали, что учет влияния границы может приводить не только к количественным, но и к глубоким качественным отличиям таких спектров от соответствующих результатов для неограниченной плазмы.

До последнего времени расчеты спектров рассеянного излучения в случае ограниченных плазменных систем проводились преимущественно на основе модели зеркального отражения частиц от границ раздела. Изучение влияния поглощающих свойств границ на спектры некогерентного рассеяния было выполнено лишь для полуограниченной слабоионизованной плазмы при рассеянии с малым изменением частоты [11]. При этом было показано, что в определенных случаях (например, когда глубина проникновения поля в плазму сравнима с длиной свободного пробега электронов) спектры некогерентного отражения испытывают существенное влияние поглощательных свойств границы. Представляет интерес обобщить эти результаты на случай плазменного слоя, что и является целью настоящей работы. Общие соотношения для энергетических характеристик некогерентно рассеянных волн слоем плазмы были приведены ранее в [12].

В первом разделе работы выполнены расчеты электромагнитных полей, рассеянных на флуктуациях плотности электронов в слое слабоионизованной плазмы, и найдены дифференциальные коэффициенты некогерентного отражения и прохождения электромагнитных волн.

Разд. 2 посвящен расчету динамического формфактора плазменного слоя при произвольных значениях коэффициентов поглощения частиц границами. Расчеты выполнены для случая малого изменения частоты при рассеянии, что соответствует диффузионному приближению при расчете корреляционных функций флуктуаций плотности электронов.

Результаты численного анализа полученных общих соотношений угловых и спектральных распределений интенсивности рассеянного из-

лучений при различных значениях коэффициентов поглощения частич границами, параметров плазмы и внешней среды приведены в разд. 3.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПЛАЗМЕННЫМ СЛОЕМ

Рассмотрим слабоионизованную электронно-ионную плазму, которая занимает область ($-\infty < x, y < \infty, 0 < z < L$). Внешние относительно плазменного слоя области ($z < 0$ и $z > L$) заполнены прозрачными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1(\omega)$ и $\epsilon_2(\omega)$ соответственно. Пусть на рассматриваемую плазменную систему из области $z < 0$ падает плоская электромагнитная волна

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \cos(k_0 r - \omega_0 t), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{k}_0 \equiv \mathbf{k}_0(\omega_0) = \left(\frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_1(\omega_0)} \sin \theta_0, 0, \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_1(\omega_0)} \cos \theta_0 \right),$$

$\mathbf{E}_0 = e\mathbf{E}_{00}$, $e = (-\cos \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0)$ — вектор поляризации электрического поля падающей волны, θ_0 — угол падения волны, а ϕ_0 — угол между проекцией вектора \mathbf{E}_0 на плоскость XY и осью OY.

В случае высокочастотного падающего поля ($\omega_0 \gg \omega_{pe}$, ω_{pe} — плазменная частота для электронов), которым мы ограничиваемся в настоящей работе, для описания плазмы можно использовать гидродинамическое приближение. Это позволяет представить проникшее в плазму электрическое поле в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{0i}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha_0, \alpha=\pm 1} \lambda_{ij}^{(1)\alpha_0}(\alpha k_{\perp 0}, \alpha \omega_0) E_{0j} \exp[i\alpha(k_{\perp 0} r_{\perp} + \alpha_0 k_{z0}^{(1)}(\omega_0) z - \omega_0 t)], \quad i = x, y, z, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{(1)\alpha_0}(\alpha k_{\perp 0}, \alpha \omega_0) &= \delta_{ij} \lambda_i^{(1)\alpha_0}(\alpha k_{\perp 0}, \alpha \omega_0), \\ \lambda_x^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0) &\equiv \lambda_p^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0), \quad \lambda_y^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0) \equiv \lambda_s^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0), \\ \lambda_z^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0) &= -r_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)}, \omega_0) \lambda_p^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0), \\ \lambda_{p,s}^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0) &= [2r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)}, \omega_0)(1 - \alpha_0 r_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(2)}, \omega_0)) \exp[-i(1 + \alpha_0)k_{z1}(\omega_0)L]] \{1 + r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)}, \omega_0)(1 + r_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(2)}, \omega_0)) - \\ &- (1 - r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)}, \omega_0))(1 - r_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(2)}, \omega_0)) \exp[-i2k_{z1}(\omega_0)L]\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_p^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1,2)}, \omega_0) &= -\frac{\epsilon_{1,2}(\omega_0)}{\epsilon(\omega_0)} \frac{k_{z1,2}(\omega_0)}{\tilde{k}_{z1,2}(\omega_0)}, \quad r_s^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1,2)}, \omega_0) = -\frac{\tilde{k}_{z1,2}(\omega_0)}{k_{z1,2}(\omega_0)}, \\ \tilde{k}_{z1,2}(\omega_0) &\equiv \tilde{k}_{z1,2}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1,2)}, \omega_0) = \sqrt{(\omega_0^2/c^2)\epsilon_{1,2}(\omega_0) - (\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1,2)})^2} = \\ &= (\omega_0/c) \sqrt{\epsilon_{1,2}(\omega_0)} \cos \theta_{01,2}, \quad k_{z1,2}(\omega_0) \equiv k_{z1,2}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1,2)}, \omega_0) = \\ &= \sqrt{(\omega_0^2/c^2)\epsilon(\omega_0) - (\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1,2)})^2} = (\omega_0/c) \sqrt{\epsilon(\omega_0) - \epsilon_{1,2}(\omega_0) \sin^2 \theta_{01,2}}, \\ \text{sign Re } \tilde{k}_{z1,2}(\omega) &, \quad \text{sign Re } k_{z1,2}(\omega) = \text{sign } \omega, \\ \mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)} \equiv \mathbf{k}_{\perp 0} &= ((\omega_0/c) \sqrt{\epsilon_1(\omega_0)} \sin \theta_{01}, 0, 0), \quad \theta_{01} \equiv \theta_0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$k_{\perp 0}^{(2)} = (\omega_0/c) \sqrt{\epsilon_2(\omega_0)} \sin \theta_{02}, 0, 0, \sqrt{\epsilon_1(\omega_0)} \sin \theta_{01} = \sqrt{\epsilon_2(\omega_0)} \sin \theta_{02},$$

$$k_{z0}^{(a)}(\omega_0) = (\omega_0/c) \sqrt{\epsilon(\omega_0) - \epsilon_1(\omega_0) \sin^2 \theta_0}, \text{ sign Im } k_{z0}^{(a)}(\omega_0) = \text{sign } \alpha,$$

$$\epsilon_{pe}(\omega) = 1 - [\omega_{pe}^2/\omega(\omega + i\nu_e)], \quad \omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_e/m_e, \quad \mathbf{r}_\perp = (x, y, 0),$$

δ_{ij} — символ Кронекера, e, m_e, n_e — заряд, масса и невозмущенная плотность электронов, ν_e — эффективная частота соударений электронов с нейтралами.

В результате взаимодействия электромагнитного поля (2) с флюктуациями в плазме возникает ток $J^{sc}(\mathbf{r}, t)$. Ограничивааясь рассмотрением случаев, когда частота рассеянного поля $\omega \gg \omega_{pe}$ и рассеяние происходит лишь на флюктуациях плотности электронов $\delta n_e(\mathbf{r}, t)$, рассеивающий ток можно представить в виде [1, 2]

$$J^{sc}(\mathbf{r}, t) = e \delta n_e(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_{0e}(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где $\mathbf{v}_{0e}(\mathbf{r}, t)$ — скорость, приобретенная электронами под воздействием проникшей волны. Подставляя (2) в (4), получаем

$$J_i^{sc}(\mathbf{r}, t) = -i \delta n_e(\mathbf{r}, t) \sum_{\alpha_0, \alpha = \pm 1} (\alpha \omega_0) \alpha_e(\alpha \omega_0) \lambda_{ij}^{(1)\alpha_0}(\alpha \mathbf{k}_{\perp 0}, \alpha \omega_0) \times \\ \times E_{0j} \exp[i\alpha(\mathbf{k}_{\perp 0} \mathbf{r}_\perp + \alpha_0 k_{z0}^{(a)}(\omega_0) z - \omega_0 t)], \quad i = x, y, z. \quad (5)$$

Это соотношение можно обобщить на случай многокомпонентной системы, содержащей поляризующиеся частицы [6]:

$$J_i^{(\sigma)sc}(\mathbf{r}, t) = -i \delta n_\sigma(\mathbf{r}, t) \sum_{\alpha_0, \alpha = \pm 1} (\alpha \omega_0) \alpha_\sigma(\alpha \omega_0) \lambda_{ij}^{(1)\alpha_0}(\alpha \mathbf{k}_{\perp 0}, \alpha \omega_0) \times \\ \times E_{0j} \exp[i\alpha(\mathbf{k}_{\perp 0} \mathbf{r}_\perp + \alpha_0 k_{z0}^{(\sigma)}(\omega_0) z - \omega_0 t)], \quad i = x, y, z. \quad (6)$$

Здесь $\alpha_\sigma(\omega)$ — поляризуемость частиц сорта σ . В случае свободных электронов $\alpha_e(\omega) = -e^2/m_e \omega(\omega + i\nu_e)$.

Отметим, что приближение (4), отвечающее однократному рассеянию проникшего в плазму поля на флюктуациях плотности заряженных частиц $\delta n_\sigma(\mathbf{r}, t)$, широко используется в теории рассеяния электромагнитных волн как в случае неограниченной [1–6], так и полуограниченной [7–11] плазменных систем. Учет многократного рассеяния отвечает удержанию более высоких степеней флюктуационных величин $\delta n_\sigma(\mathbf{r}, t)$ в выражении для рассеянного поля. Поскольку рассматривается рассеяние электромагнитных волн с незначительным изменением частоты и величины $\delta n_\sigma(\mathbf{r}, t)$ являются малыми, то можно пользоваться приближением (4).

Так как ток $J^{(\sigma)sc}(\mathbf{r}, t)$ играет роль источника рассеянного излучения, то создаваемое им электромагнитное поле может быть найдено на основе решения задачи возбуждения плазменного слоя заданным источником. Общее решение данной задачи может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}^{sc}(\mathbf{r}, t) = \quad (7)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_\perp \exp[i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \omega t)] \begin{cases} \mathbf{E}^{(1)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \exp[-ik_{z1}(\omega)z], & z < 0 \\ \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{sc}(\mathbf{k}_n, \omega) \exp\left(i \frac{n\pi z}{L}\right), & 0 < z < L, \\ \mathbf{E}^{(3)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \exp[-ik_{z2}(\omega)(L-z)], & z > L \end{cases}$$

также

$$\begin{aligned}
 E^{sc}(\mathbf{k}_n, \omega) &= i \frac{\frac{4\pi\omega}{c^2}}{k_n^2 - (\omega^2 \epsilon(\omega)/c^2)} \left\{ J(\mathbf{k}_n, \omega) - \frac{c^2}{\omega^2 \epsilon(\omega)} k_n (\mathbf{k}_n J(\mathbf{k}_n, \omega)) \right\}, \\
 J_i(\mathbf{k}_n, \omega) &= J_i^{(o)sc}(\mathbf{k}_n, \omega) - \frac{c}{2\pi} e_{zij} (B_j^{(1)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) - (-1)^n B_j^{(2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega)), \quad i = x, y, z, \\
 E_i^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= \frac{1}{k_\perp^2} \left\{ \pm \tilde{k}_{z1,2}(\omega) k_i E_z^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) - \frac{\omega}{c} e_{zij} k_j B_z^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \right\}, \quad i = x, y, \\
 B_i^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= \frac{1}{k_\perp^2} \left\{ \pm \tilde{k}_{z1,2}(\omega) k_i B_z^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) + \frac{\omega}{c} \epsilon_{1,2}(\omega) e_{zij} k_j E_z^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \right\}, \quad i = x, y, \\
 E_z^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= \pm \frac{1}{2 \tilde{k}_{z1,2}(\omega) L_p(\mathbf{k}_\perp, \omega)} \{ L_p^{(2,1)-}(\mathbf{k}_\perp, \omega) (\mathbf{k}_\perp E_\perp^{(+)}(\mathbf{k}_\perp, \omega)) \mp \\
 &\mp L_p^{(2,1)+}(\mathbf{k}_\perp, \omega) (\mathbf{k}_\perp E_\perp^{(-)}(\mathbf{k}_\perp, \omega)) \}, \\
 B_z^{(1,2)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= \frac{c}{2\omega L_s(\mathbf{k}, \omega)} \{ L_s^{(2,1)-}(\mathbf{k}_\perp, \omega) e_{zij} k_i E_j^{(+)}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \pm \\
 &\pm L_s^{(2,1)+}(\mathbf{k}_\perp, \omega) e_{zij} k_i E_j^{(-)}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \}, \tag{8} \\
 E_i^{(\pm)}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= -i \frac{2}{\omega} \frac{\pi^2}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(\pm)} \Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}_n, \omega) J_j^{(o)sc}(\mathbf{k}_n, \omega), \quad i = x, y, z, \\
 \Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}_n, \omega) &= \frac{k_i k_j}{k_n^2} \frac{1}{\epsilon(\omega)} + \frac{\delta_{ij} - k_i k_j / k_n^2}{\epsilon(\omega) - \omega^2 k_n^2 / c^2}, \quad i, j = x, y, z, \\
 L_{p,s}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= \frac{1}{2} \{ L_{p,s}^{(1)+}(\mathbf{k}_\perp, \omega) L_{p,s}^{(2)-}(\mathbf{k}_\perp, \omega) + L_{p,s}^{(1)-}(\mathbf{k}_\perp, \omega) L_{p,s}^{(2)+}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \}, \\
 L_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= 1 \mp i r_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_\perp, \omega) (\operatorname{tg}(k_z(\omega)L/2))^{\mp 1}, \\
 \tilde{k}_{z1,2}(\omega) &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{1,2}(\omega) - k_\perp^2}, \quad k_z(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) - k_\perp^2}, \\
 \operatorname{sign} \operatorname{Re} k_z(\omega) &= \operatorname{sign} \omega, \quad \gamma_n^{(\pm)} = 1 \pm (-1)^n, \quad \mathbf{k}_n = (\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, n\pi/L), \\
 J^{(o)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z) &= \int_{-L}^L dz \exp\left(i \frac{n\pi z}{L}\right) J^{(o)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z), \\
 J_i^{(o)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z) &= -i \sum_{\alpha_0, \alpha=\pm 1} (\alpha \omega_0) \alpha_o (\alpha \omega_0) \lambda_{ij}^{(1)\alpha_0} (\alpha \mathbf{k}_{\perp 0}, \alpha \omega_0) \times \\
 &\times E_{0j} \exp(i \alpha \alpha_0 k_{z0}^{(\alpha)}(\omega_0) z) \delta n_o(\mathbf{k}_\perp - \alpha \mathbf{k}_{\perp 0}, \omega - \alpha \omega_0, z), \tag{9}
 \end{aligned}$$

$J^{(o)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z)$ — фурье-компоненты тока рассеяния, определяемая соотношением

$$\begin{aligned}
 J_i^{(o)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z) &= -i \sum_{\alpha_0, \alpha=\pm 1} (\alpha \omega_0) \alpha_o (\alpha \omega_0) \lambda_{ij}^{(1)\alpha_0} (\alpha \mathbf{k}_{\perp 0}, \alpha \omega_0) \times \\
 &\times E_{0j} \exp(i \alpha \alpha_0 k_{z0}^{(\alpha)}(\omega_0) z) \delta n_o(\mathbf{k}_\perp - \alpha \mathbf{k}_{\perp 0}, \omega - \alpha \omega_0, z), \tag{9}
 \end{aligned}$$

$r_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_\perp, \omega)$ — отношение поверхностных импедансов плазмы и внешних сред, определяемых выражением (3), в случае p - или s -поляризованных волн, e_{zij} — совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

В случае, когда внешние среды одинаковы ($\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_2(\omega) \equiv \varepsilon(\omega)$), выражения (7), (8) переходят в известное решение задачи возбуждения плазменного слоя заданными источниками [13].

Пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $\delta(\omega - \omega' \pm 2\omega_0)$, которые исчезают после усреднения по времени на интервалах $t \gtrless \omega_0^{-1}$, корреляционные функции $\langle J_i^{(g)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z) J_j^{(g)sc*}(\mathbf{k}'_\perp, \omega', z') \rangle$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \langle J_i^{(g)sc}(\mathbf{k}_\perp, \omega, z) J_j^{(g)sc*}(\mathbf{k}'_\perp, \omega', z') \rangle &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \times \\ &\times \delta(\omega - \omega') \omega_0^2 E_0^2 \sum_{\alpha_0, \beta_0, \alpha=\pm 1} |\alpha_0(\alpha\omega_0)|^2 \lambda_{ik}^{(1)\alpha_0}(\alpha\mathbf{k}_{\perp 0}, \alpha\omega_0) \times \\ &\times (\lambda_{jl}^{(1)\beta_0}(\alpha\mathbf{k}_{\perp 0}, \alpha\omega_0))^* e_k e_l \exp(i\alpha(\alpha_0 \mathbf{k}_{z0}^{(\alpha)}(\omega_0)) z - \\ &- \beta_0 \mathbf{k}_{z0}^{(\alpha)*}(\omega_0) z')) \langle \delta n(z) \delta n^*(z') \rangle_{\mathbf{k}_\perp - \alpha\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega - \alpha\omega_0}^{\alpha}, \quad i, j = x, y, z. \end{aligned} \quad (10)$$

На основе полученных выражений (7) — (10) среднее значение нормальной компоненты вектора Умова—Пойнтинга рассеянного поля равно

$$\begin{aligned} \langle P_z^{(1,2)} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\Omega \cos \theta I^{(1,2)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\Omega \times \\ &\times \frac{d^2 R^{(1,2)}}{d\omega d\Omega} |P^{\text{inc}}|, \end{aligned} \quad (11)$$

где $I^{(1,2)}(\omega)$ — интенсивность рассеянного излучения в интервале телесного угла $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ в областях $z < 0$ и $z > L$ соответственно:

$$I^{(1,2)}(\omega) = \frac{\omega^2 \sqrt{\varepsilon_{1,2}(\omega)}}{2(2\pi)^4 c} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \{ \varepsilon_{1,2}(\omega) \langle |E_s^{(1,2)sc}|^2 \rangle_{\mathbf{k}_\perp \omega} + \langle |B_s^{(1,2)sc}|^2 \rangle_{\mathbf{k}_\perp \omega} \}, \quad (12)$$

$P^{\text{inc}} = (\mathbf{k}_0/k_0) (c\sqrt{\varepsilon_1(\omega_0)}/2\pi) E_0^2$ — вектор Умова—Пойнтинга падающей волны, φ — азимутальный, а θ — полярный (отсчитываемый от внешней нормали к границам $z=0$ или $z=L$) углы рассеяния, задающие направление оси телесного угла $d\Omega$, $d^2R^{(1)}/d\omega d\Omega$ и $d^2R^{(2)}/d\omega d\Omega$ — дифференциальные коэффициенты некогерентного отражения и прохождения (нормированные на величину потока падающей волны $|P^{\text{inc}}|$), определяющие плотность потока энергии излучения, рассеянного единицей поверхности, в интервале частот $d\omega$ в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$\frac{d^2R^{(1,2)}}{d\omega d\Omega} = \text{Re} \sum_{\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta = \pm 1} \Psi_{\alpha_0 \beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) F(\Delta\mathbf{k}_\perp, \Delta\omega; \Delta\mathbf{k}_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta\mathbf{k}_z^{(\beta_0, \beta)}). \quad (13)$$

Величины $\Psi_{\alpha_0 \beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)$ учитывают отражение и преломление падающего и рассеянного полей в системе

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha_0 \beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{1,2}(\omega)}{\varepsilon_1(\omega_0)}} G_{ij}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega) \times \\ &\times \lambda_{ik}^{(1)\alpha_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0) (\lambda_{jl}^{(1)\beta_0}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \omega_0))^* e_k e_l, \end{aligned}$$

$$G_{ij}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega) = \left(\delta_{ij}^\perp - \frac{\mathbf{k}_{\perp i} \mathbf{k}_{\perp j}}{k_\perp^2} \right) \gamma_s^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega) + \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\beta)*} \times$$

$$\times \left(\frac{k_{z1,2}}{\tilde{k}_{z1,2}} \right)^3 \gamma_p^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega), \quad i, j = x, y, z,$$

$$\gamma_{p,s}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega) = \lambda_{p,s}^{(1,2)\alpha}(\mathbf{k}_\perp, \omega) (\lambda_{p,s}^{(1,2)\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega))^*,$$

$$\lambda_{p,s}^{(1,2)\alpha}(\mathbf{k}_\perp, \omega) = [2r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(2)}, \omega)(1 + \alpha r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(1)}, \omega)) \exp[-ik_z(\omega)L] \times$$

$$\times ((1 + r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(1)}, \omega))(1 + r_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(2)}, \omega)) - (1 - r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(1)}, \omega)) \times$$

$$\times (1 - r_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(2)}, \omega))) \exp[-i2k_z(\omega)L] \}^{-1},$$

$$\mathbf{x}^{(e)} = \left(k_x, k_y, \alpha \frac{\mathbf{k}_\perp^3}{k_{z1,2}(\omega)} \right), \quad k_z(\omega) \equiv k_{z1,2}(\omega) \equiv k_{z1,2}(\mathbf{k}_\perp^{(1,2)}, \omega) =$$

$$= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_{1,2}(\omega) \sin^2 \theta_{1,2}}, \quad \mathbf{k}_\perp \equiv \mathbf{k}_\perp^{(1,2)}(\omega) = \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{1,2}(\omega)} \times \right.$$

$$\left. \times \sin \theta_{1,2} \cos \varphi, \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{1,2}(\omega)} \sin \theta_{1,2} \sin \varphi, 0 \right),$$

$$\sqrt{\varepsilon_1(\omega)} \sin \theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \sin \theta_2, \quad \tilde{k}_{z1,2}^2 = (\mathbf{k}_\perp^{(1,2)})^2 + \tilde{k}_{z1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2}(\omega),$$

а выражения для $\lambda_{p,s}^{(1)\alpha}(\mathbf{k}_\perp, \omega)$ определяются согласно формуле (3) с заменами в ней $r_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_\perp^{(1,2)}, \omega_0) \rightarrow r_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_\perp^{(1,2)}, \omega)$, $k_{z1}(\omega_0) \rightarrow k_z(\omega)$. Полярный угол рассеяния θ при рассеянии назад ($z < 0$) будем обозначать через θ_1 (в этом случае $\theta_2 = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_1(\omega)/\varepsilon_2(\omega)} \sin \theta_1)$), а при рассеянии вперед ($z > L$) $\theta = \theta_2$ (в этом случае в качестве θ_1 следует взять $\theta_1 = -\arcsin(\sqrt{\varepsilon_2(\omega)/\varepsilon_1(\omega)} \sin \theta_2)$).

Отметим, что величины $\gamma_{p,s}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega)$, $G_{ij}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega)$, $\Psi_{\alpha_0 \beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_{p,s}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega) = (\gamma_{p,s}^{(1,2)\beta\alpha}(\mathbf{k}_\perp, \omega))^*,$$

$$G_{ij}^{(1,2)\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, \omega) = (G_{ji}^{(1,2)\beta\alpha}(\mathbf{k}_\perp, \omega))^*,$$

$$\Psi_{\alpha_0 \beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = (\Psi_{\beta_0 \alpha_0}^{(1,2)\beta\alpha}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega))^*.$$

Величины $F(\Delta \mathbf{k}_\perp, \Delta \omega; \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)})$ можно интерпретировать как динамический формфактор рассматриваемой системы:

$$F(\Delta \mathbf{k}_\perp, \Delta \omega; \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)}) = \frac{\omega_0^4}{c^4} |\alpha_z(\omega_0)|^2 \int_0^L dz \int_0^L dz' \times$$

$$\times \langle \delta n(z) \delta n^*(z') \rangle_{\Delta \mathbf{k}_\perp, \Delta \omega} \exp[i(\Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)} z - (\Delta k_z^{(\beta_0, \beta)})^* z')],$$

$$\Delta \mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_\perp(\omega) - \mathbf{k}_\perp(\omega_0), \quad \Delta \omega = \omega - \omega_0, \quad \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)} = \alpha_0 k_{z0}(\omega_0) + \alpha k_z(\omega), \quad \alpha_0 \alpha = \pm 1.$$

При рассмотрении задачи рассеяния электромагнитного поля на флюктуациях плотности электронов $\omega_0^4 |\alpha_e(\omega_0)|^2 / c^4 = r_e^2 (1 + v_e^2/\omega_0^2)$, где $r_e = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона.

Если величина $F(\Delta \mathbf{k}_\perp, \Delta \omega; \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)})$ удовлетворяет условию

$$F(\Delta \mathbf{k}_\perp, \Delta \omega; \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)}) = F^*(\Delta \mathbf{k}_\perp, \Delta \omega; \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)}, \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}), \quad (17)$$

то с учетом (16) знак Re в правой части выражения (13) можно опустить (справедливость условия (17) будет в дальнейшем доказана).

В случае одинаковых внешних сред необходимость введения различных θ_1 и θ_2 (а, следовательно, и различных $k_{\perp}^{(1)}$ и $k_{\perp}^{(2)}$, k_{z1} и k_{z2} и т. п.) отпадает (при этом $\theta_{01}=\theta_{02}\equiv\theta_0$, $k_{\perp 0}^{(1)}=k_{\perp 0}^{(2)}\equiv k_{\perp 0}$, $\theta_1=\theta_2\equiv\theta$, $k_{\perp}^{(1)}=k_{\perp}^{(2)}=k_{\perp}$, $k_{z1}=k_{z2}\equiv k_z$, $k_{z1}=k_{z2}\equiv k_z$, $k_1=k_2\equiv k$, $r_{p,s}^{(1)}=r_{p,s}^{(2)}\equiv r_{p,s}$) и выражения (14) переходят в результаты, полученные в работе [14].

Если в формулах (13), (14), (16) выполнить предельный переход $L\rightarrow\infty$, то получаем известный результат [7, 8, 11] для дифференциального коэффициента некогерентного отражения в случае полуограниченной системы (в выражении (13) из всех слагаемых остается только одно, соответствующее условию $\alpha_0=\beta_0=\alpha=\beta=+1$). Дифференциальный коэффициент некогерентного прохождения при этом обращается в нуль.

В случае, когда падающая волна s - (фаза $=0$) или p - (фаза $=\pi/2$) поляризована, из (14) получаем

$$\Psi_{s \alpha_0 \beta_0}^{(1, 2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{1,2}(\omega)}{\varepsilon_1(\omega_0)}} \gamma_s^{(1, 2)\alpha\beta}(k_{\perp 0}, \omega_s) \times \\ \times [\gamma_s^{(1, 2)\alpha\beta}(k_{\perp}^{(1, 2)}, \omega) \cos^2 \varphi + \gamma_p^{(1, 2)\alpha\beta}(k_{\perp}^{(1, 2)}, \omega) \cos^2 \theta \sin^2 \varphi]; \quad (18)$$

$$\Psi_{p \alpha_0 \beta_0}^{(1, 2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{1,2}(\omega)}{\varepsilon_1(\omega_0)}} \gamma_p^{(1, 2)\alpha\beta}(k_{\perp 0}, \omega_0) \times \\ \times [\gamma_s^{(1, 2)\alpha\beta}(k_{\perp}^{(1, 2)}, \omega) \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi + \gamma_p^{(1, 2)\alpha\beta}(k_{\perp}^{(1, 2)}, \omega) S^{(1, 2)\alpha_0\alpha}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) \times \\ \times (S^{(1, 2)\beta_0\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega))^*], \quad (19)$$

где

$$S^{(1,2)\alpha_0\alpha}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \alpha_0 \alpha r_s^{(1)}(k_{\perp 0}, \omega_0) r_s^{(1, 2)}(k_{\perp}^{(1, 2)}, \omega) \sin \theta_0 \sin \theta - \\ - \cos \theta_0 \cos \theta \cos \varphi, \quad \alpha_0, \alpha = \pm 1. \quad (20)$$

В борновском приближении ($\varepsilon_1(\omega)=\varepsilon_2(\omega)\equiv\varepsilon(\omega)$, $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)\rightarrow 0$) получаем

$$\lambda_{p,s}^{(1)\alpha}(k_{\perp}, \omega) = \delta_{\alpha+}, \quad \lambda_{p,s}^{(2)\alpha}(k_{\perp}, \omega) = \delta_{\alpha-}, \quad \gamma_{p,s}^{(1)\alpha\beta}(k_{\perp}, \omega) = \delta_{\alpha+} \delta_{\beta+}, \\ \gamma_{p,s}^{(2)\alpha\beta}(k_{\perp}, \omega) = \delta_{\alpha-} \delta_{\beta-}, \\ \Psi_{p,s \alpha_0 \beta_0}^{(1)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \delta_{\alpha_0+} \delta_{\beta_0+} \delta_{\alpha+} \delta_{\beta+} \Psi_{p,s}^B(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega), \\ \Psi_{p,s \alpha_0 \beta_0}^{(2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \delta_{\alpha_0+} \delta_{\beta_0+} \delta_{\alpha-} \delta_{\beta-} \Psi_{p,s}^B(\theta_0, \pi-\theta, \varphi; \omega_0, \omega), \quad (21)$$

где $\Psi_{p,s}^B(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)$ — коэффициенты при рассеянии p - или s -поляризованных плоских волн в неограниченной плазме [1, 2, 15, 16]:

$$\Psi_s^B(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) \equiv \Psi_s^B(\theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi),$$

$$\Psi_p^B(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} (\cos^2 \Psi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi), \quad (22)$$

$$\cos \Psi = \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta_0 \cos \theta,$$

$$\Psi = (k_0, \hat{k}^+), \quad \hat{k}^+ = (k_x, k_y, -k_z).$$

Отметим, наконец, что свойства величин $\Psi_{p,s}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)$ в азимутальной плоскости такие же, как и у соответствующих величин $\Psi_{p,s}^{sb}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)$, описывающих отражательно-преломляющие свойства полуограниченной плазмы [11], а именно:

$$\begin{aligned}\Psi_{s,\alpha_0\beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \pi-\varphi; \omega_0, \omega) &= \Psi_{s,\alpha_0\beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega), \\ \Psi_{p,\alpha_0\beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, 2\pi-\varphi; \omega_0, \omega) &= \Psi_{p,\alpha_0\beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)\end{aligned}\quad (23)$$

при произвольных углах θ_0 и θ и

$$\Psi_{p,\alpha_0\beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(0, \theta, \pi-\varphi; \omega_0, \omega) = \Psi_{p,\alpha_0\beta_0}^{(1,2)\alpha\beta}(0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega), \quad (24)$$

— в частном случае, отвечающем $\theta_0=0$.

Если величины $F(\Delta k_\perp, \Delta\omega; \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)})$ зависят от Δk_\perp (в настоящей работе это будет показано в дальнейшем), то соотношения (23), (24) также справедливы и для дифференциальных коэффициентов некогерентного отражения и прохождения p - и s -поляризованных плоских волн.

2. ДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМФАКТОР СИСТЕМЫ

Расчет корреляционной функции флюктуаций плотности $\langle \delta n(z) \delta n^*(z') \rangle_{\Delta k_\perp, \Delta\omega}^s$, определяющей динамический формфактор рассматриваемой системы (16), представляет весьма сложную задачу. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случаев, когда можно пренебречь взаимодействием между зарядами. Как было показано в работах [17, 18], такое приближение является оправданным в диффузионном пределе ($r_{D\sigma} \gg |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg l_f^\sigma$, $|t - t'| \gg \tau_f^\sigma$, где l_f^σ , $\tau_f^\sigma = v_\sigma^{-1}$, $r_{D\sigma} = (T_\sigma / 4\pi e^2 n_\sigma)^{1/2}$, T_σ — длина, время свободного пробега, дебаевский радиус и температура для частиц сорта σ) и в пределе амбиполярной диффузии ($|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg l_f^\sigma, r_{D\sigma}$). В этих случаях пространственно-временная корреляционная функция флюктуаций плотности $\langle \delta n(\mathbf{r}', t) \times \delta n(\mathbf{r}', t') \rangle^s$ может быть выражена через вероятность перехода частицы в конфигурационном пространстве $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ из точки \mathbf{r}' в точку \mathbf{r} за время $t = t - t'$ следующим образом [18, 19]:

$$\langle \delta n(\mathbf{r}, t) \delta n(\mathbf{r}', t') \rangle^s = n_\sigma [\theta(t) W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + \theta(-t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}, -t)], \quad (25)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, а величина $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна—Смолуховского

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_\sigma \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0 \quad (26)$$

с начальным условием

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (27)$$

Здесь D_σ — коэффициент диффузии частиц сорта σ , который для заряженных частиц равен $D_\sigma = s_\sigma^2 / v_\sigma$, где $s_\sigma = \sqrt{T_\sigma / m_\sigma}$ — средняя тепловая скорость частиц (для броуновских частиц $D_\sigma = \langle v^2 \rangle / 3v_\sigma$, причем в отличие от случая заряженных частиц формула (25) не является приближенной). В дальнейшем будем рассматривать электронно-ионную систему. В соответствии с этим под величиной D_σ , входящей в уравнение (26), будем понимать величину $D_\sigma = D$:

$$D = \begin{cases} D_e, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < r_D \\ D_A, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \geq r_D \end{cases}, \quad (28)$$

где r_D — дебаевский радиус ($r_D^{-2} = r_{De}^{-2} + r_{Di}^{-2}$), $D_A = D_e D_i (T_e + T_i) / (D_e T_i + D_i T_e)$.

$+D_i T_e$) — коэффициент амбиполярной диффузии.

Уравнение (26) должно быть дополнено граничными условиями при $z=0$ и $z=L$. Будем рассматривать случай, отвечающий заданной вероятности ($0 \leq (1-p_{1,2}) \leq 1$) поглощения падающих на границы частиц (соответствующие коэффициенты отражения частиц от границ $z=0$ и $z=L$ равны p_1 и p_2). Такая модель описывается граничными условиями третьего рода [20, 21]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - h_1 \right) W(r, r', \tau) &= 0 \mid_{z=0}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) W(r, r', \tau) &= 0 \mid_{z=L}, \end{aligned} \quad (29)$$

где величины $h_{1,2}$ выбираются отвечающими так называемому «радиационному» граничному условию [21, 22]: $h_{1,2} = (1-p_{1,2}) / (\sqrt{2\pi} p_{1,2} L^2)$.

В частных случаях абсолютно поглащающей ($p=0$) или идеально отражающей ($p=1$) границ величина h обращается в бесконечность или нуль соответственно.

Подставляя известное решение краевой задачи третьего рода (26), (27), (29) [22, 23] в (16), (25), выражение для формфактора слоя можно представить в следующем виде:

$$F(\Delta k_\perp, \Delta\omega; \Delta k_z^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_z^{(\beta_0, \beta)}) \equiv F(x, \Delta k_x^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_x^{(\beta_0, \beta)}) =$$

$$= n_\sigma(\omega_0^4/c^4) |\alpha_\sigma(\omega_0)|^2 \{ W(x, \Delta k_x^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_x^{(\beta_0, \beta)}) + W^*(x, \Delta k_x^{(\beta_0, \beta)}, \Delta k_x^{(\alpha_0, \alpha)}) \}. \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W(x, \Delta k_z, \Delta k'_z) &= \frac{L}{D} \left\{ \frac{\Phi(i(\Delta k_z - \Delta k'^*_z)L)}{(\Delta k'^*_z)^2 + x^2} + \frac{1}{2xL} \frac{1}{1 - \delta_1 \delta_2 \exp(-2xL)} \times \right. \\ &\times \left\{ \exp(i(\Delta k_z - \Delta k'^*_z)L) \left[\frac{1}{\Delta k_z - ix} + \frac{\delta_1 \exp(-2xL)}{\Delta k_z + ix} \right] \left[\frac{1}{\Delta k'^*_z - ix} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\delta_2}{\Delta k'^*_z + ix} \right] \left[\frac{1}{\Delta k_z + ix} - \frac{\delta_2 \exp(-2xL)}{\Delta k_z - ix} \right] \left[\frac{1}{\Delta k'^*_z + ix} + \frac{\delta_1}{\Delta k'^*_z - ix} \right] - \right. \\ &- \exp(-2xL) \left\{ \exp(i\Delta k_z L) \left[\frac{1}{\Delta k_z + ix} + \frac{\delta_2}{\Delta k_z - ix} \right] \times \right. \\ &\times \left[\frac{1}{\Delta k'^*_z + ix} + \frac{\delta_1}{\Delta k'^*_z - ix} \right] + \exp(-i\Delta k'^*_z L) \left[\frac{1}{\Delta k_z - ix} + \frac{\delta_1}{\Delta k_z + ix} \right] \times \\ &\times \left. \left. \left[\frac{1}{\Delta k'^*_z - ix} + \frac{\delta_2}{\Delta k'^*_z + ix} \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

и

$$\Phi(x) = \frac{\exp(x) - 1}{x}, \quad \delta_{1,2} = \frac{x - h_{1,2}}{x + h_{1,2}}, \quad x = \sqrt{(\Delta k_\perp)^2 - i \frac{\Delta\omega}{D_\sigma}}, \quad \operatorname{Re} x \geq 0. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что величины $F(x, \Delta k_x^{(\alpha_0, \alpha)}, \Delta k_x^{(\beta_0, \beta)})$, представленные выражением (30), действительно удовлетворяют условию (17).

Формулы (30)–(32) совместно с (14), (18)–(20) представляют решение искомой задачи о некогерентном рассеянии электромагнитных волн слоем слабоионизованной плазмы при произвольных значениях коэффициентов поглощения частиц границами.

Остановимся подробнее на анализе выражения (31) в случае тонкого слоя ($|k_{z0}(\omega_0)|L, |k_z(\omega)|L \ll 1$). Если предположить, что выпол-

няется также дополнительное условие $|\kappa| \gg |k_{z0}(\omega_0)|$, $|k_z(\omega)|$, то выражение (31) может быть упрощено к виду

$$W(\kappa, \Delta k_z, \Delta k'_z) = W(\kappa, p_1, p_2) = \frac{L}{\kappa^2 D} \left\{ 1 - \frac{1}{2\kappa L} \frac{1 - \exp(-\kappa L)}{1 - \delta_1 \delta_2 \exp(-2\kappa L)} \times \right. \\ \left. \times [(1 - \delta_1)(1 + \delta_2 \exp(-\kappa L)) + (1 - \delta_2)(1 + \delta_1 \exp(-\kappa L))] \right\}. \quad (33)$$

В частном случае идеально отражающих границ $p_1 = p_2 = 1$ ($\delta_1 = \delta_2 = 1$) из (33) следует

$$W(\kappa, 1, 1) = L/\kappa^2 D, \quad (34)$$

что отличается от соответствующего выражения для полуограниченной системы [11] заменой величины $L_{\text{eff}} = (2\text{Im } \Delta k_z^{(++)})^{-1}$, играющей роль эффективной глубины проникновения электромагнитного поля в полуограниченную плазму, на толщину слоя L . Поскольку в рассматриваемом приближении величина $\xi = L/L_{\text{eff}} \ll 1$, то отношение дифференциальных коэффициентов некогерентного отражения в случаях тонкого слоя и полупространства с идеально отражающими границами является малой величиной порядка ξ , что представляется вполне естественным, поскольку число рассеивателей в тонком слое существенно меньше числа частиц, принимающих реальное участие в рассеянии электромагнитной волны полуограниченной системой.

Отметим, что выражение (34) остается в силе и при произвольных значениях коэффициентов p_1 и p_2 , если выполняется условие $|\kappa|L \gg 1$.

В противоположном случае, когда $|\kappa|L \ll 1$ (условие $|\kappa| \gg |k_{z0}(\omega_0)|$, $|k_z(\omega)|$ по-прежнему предполагается выполненным), выражение (33) сводится к

$$W(\kappa, p_1, p_2) \simeq \frac{L^3}{2\kappa D} \frac{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2) + (\kappa L/3)[(1 - \delta_1 \delta_2) + \delta_1 \delta_2 \kappa L]}{1 - \delta_1 \delta_2 \exp(-2\kappa L)}. \quad (35)$$

Если выполнено условие $|\kappa|/h_{1,2} \ll 1$, которое налагает ограничение на коэффициенты $p_{1,2}$ ($0 \leq p_{1,2} < p_0$, $(1 - p_0)/p_0 = \sqrt{2\pi} |\kappa| l_f^2$), то динамический формфактор (30) определяется только коэффициентами поглощения частиц границами и допускает следующее простое представление:

$$F(\kappa, \Delta k_z^{(a_0, a)}, \Delta k_z^{(b_0, b)}) = n_s \frac{\omega_0^4}{c^4} |\alpha_s(\omega_0)|^2 \frac{L^3}{6D} F(p_1, p_2), \quad (36)$$

где

$$F(p_1, p_2) = 1 + 3(x_1 + x_2) - 3 \frac{(x_1 - x_2)^2}{1 + x_1 + x_2}, \quad x_{1,2} = 1/L h_{1,2}. \quad (37)$$

Для слоя с идеально отражающими границами динамический формфактор также можно представить в виде (36), если воспользоваться ранее полученным результатом (34). При этом

$$F(1, 1) = 12 \text{Re}(1/(\kappa L)^2). \quad (38)$$

Используя (35), можно показать, что выражение (36) остается в силе и в случае, когда одна граница полностью отражает ($p_i = 1$), а вторая частично поглощает ($0 \leq p_j < p_0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$) падающие на них частицы

$$F(1, p_2) = 4(1 + 3x_2), \quad F(p_1, 1) = 4(1 + 3x_1). \quad (39)$$

В случае тонкого слоя выражение (13) преобразуется к виду

$$d^2R^{(1,2)}/d\omega d\Omega = \Psi^{(1,2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) F(\kappa, p_1, p_2), \quad (40)$$

где

$$\Psi^{(1,2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \sum_{\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta=\pm 1} \Psi^{(1,2)\alpha\beta}_{\alpha_0\beta_0}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega). \quad (41)$$

При рассеянии p - или s -поляризованных плоских электромагнитных волн на тонком слое в выражении (41) можно выполнить суммирование, что дает

$$\begin{aligned} \Psi_s^{(1,2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{1,2}(\omega)}{\varepsilon_1(\omega_0)}} |\lambda_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega_0)(1 - R_s^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega_0))|^2 \times \\ &\times |\lambda_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega)(1 - R_s^{(2,1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2,1)}, \omega))|^2 \cos^2 \varphi + \\ &+ |\lambda_p^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega)(1 - R_p^{(2,1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2,1)}, \omega))|^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \}; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Psi_p^{(1,2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{1,2}(\omega)}{\varepsilon_1(\omega_0)}} |\lambda_p^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega_0)(1 - R_p^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega_0))|^2 \times \\ &\times |\lambda_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega)(1 - R_s^{(2,1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2,1)}, \omega))|^2 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi + \\ &+ |\lambda_p^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega)(1 - R_p^{(2,1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2,1)}, \omega))S^{(1,2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)|^2 \}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega) &= \frac{\lambda_{p,s}^{(1,2)sb}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega)}{1 - R_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega)R_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega)}, \\ \lambda_{p,s}^{(1,2)sb}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega) &= 1 + R_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{(1,2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &= r_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega_0)r_p^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega_0)r_s^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega)r_p^{(2,1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2,1)}, \omega) \times \\ &\times \sin \theta_0 \sin \theta \mp \cos \theta_0 \cos \theta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (44)$$

а $R_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega) = -(1 + r_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega))/(1 - r_{p,s}^{(1,2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1,2)}, \omega))$ — френелевские коэффициенты отражения плоских p - и s -поляризованных электромагнитных волн, падающих со стороны прозрачного диэлектрика, характеризуемого диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{1,2}(\omega)$, под углом $\theta_{1,2}$ на полуограниченную систему, имеющую диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$.

В случае одинаковых внешних сред ($\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_2(\omega) \equiv \tilde{\varepsilon}(\omega)$)

$$r_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega) = r_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega) \equiv r_{p,s}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega), \quad (45)$$

$$R_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega) = R_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega) \equiv R_{p,s}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega),$$

$$\lambda_{p,s}^{(1)sb}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega) = \lambda_{p,s}^{(2)sb}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega) \equiv \lambda_{p,s}^{sb}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega),$$

$$\lambda_{p,s}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega) = \lambda_{p,s}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(2)}, \omega) \equiv \lambda_{p,s}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)$$

из (42) следует, что спектры некогерентного отражения и прохождения s -поляризованных волн тонким слоем одинаковы ($d^2R_s^{(1)}/d\omega d\Omega = d^2R_s^{(2)}/d\omega d\Omega = \Psi_s^{sl}(\theta, \varphi; \omega_0, \omega)F(x, p_1, p_2)$):

$$\begin{aligned} \Psi_s^{(1)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &= \Psi_s^{(2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) \equiv \\ &\equiv \Psi_s^{sl}(\theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\tilde{\varepsilon}(\omega_0)}} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\equiv \Psi_s^{sl}(\theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\tilde{\varepsilon}(\omega_0)}} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi),$$

причем величина $\Psi_s^{sl}(\theta, \varphi; \omega_0, \omega)$ не зависит от диэлектрических свойств рассеивающей среды и совпадает с величиной $\Psi_s^B(\theta, \varphi; \omega_0, \omega)$ при $\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon(\omega)$.

Спектры отражения и прохождения *p*-поляризованных волн на тонком слое в общем случае различны,

$$\Psi_p^{(1, 2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega_0)}} \{ \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi + |S^{(1, 2)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega)|^2 \}, \quad (47)$$

и совпадают лишь в частных случаях, отвечающих $\theta=0$ или $\varphi=\pi/2$

Выражения (42), (43) существенно упрощаются, если диэлектрическая проницаемость нижнего полупространства (подложки) существенно превосходит диэлектрические проницаемости плазмы и диэлектрика в области $z < 0$: $\epsilon_2(\omega) \gg |\epsilon(\omega)|$, $\epsilon_1(\omega)$. С точностью до членов нулевого порядка малости по отношениям $|\epsilon(\omega)/\epsilon_2(\omega)|$, $|\epsilon_1(\omega)/\epsilon_2(\omega)|$ получаем, что дифференциальные коэффициенты некогерентного отражения отличны от нуля лишь при рассеянии *p*-поляризованных плоских волн:

$$\begin{aligned} \Psi_s^{(1)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &\simeq 0, \\ \Psi_p^{(1)}(\theta_0, \theta, \varphi; \omega_0, \omega) &\equiv \Psi_p^{(1)}(\theta_0, \theta; \omega_0, \omega) \simeq \end{aligned} \quad (48)$$

$$\simeq \frac{8}{\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_1(\omega_0)}} |L_p^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)}, \omega_0) L_p^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega) r_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp 0}^{(1)}, \omega_0) r_s^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega)|^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta,$$

где

$$L_p^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega) = \frac{1 + R_p^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega)}{1 - R_p^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}^{(1)}, \omega)}. \quad (49)$$

В борновском приближении из всех слагаемых суммы (13) остается отличным от нуля лишь одно, отвечающее случаю $\alpha_0=\beta_0=\alpha=\beta=+1$ при рассеянии в область $z < 0$, и $\alpha_0=\beta_0=+1$, $\alpha=\beta=-1$ — при рассеянии в область $z > L$, что дает

$$\frac{d^2 R^{(1)}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega_0)}} \left(\delta_{ij} - \frac{\mathbf{k}_i^+ \mathbf{k}_j^+}{\mathbf{k}^2} \right) e_i e_j F(\Delta \mathbf{k}_{\perp}, \Delta \omega; \Delta \mathbf{k}_z^{(++)}, \Delta \mathbf{k}_z^{(++)}); \quad (50)$$

$$\frac{d^2 R^{(2)}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega_0)}} \left(\delta_{ij} - \frac{\mathbf{k}_i^- \mathbf{k}_j^-}{\mathbf{k}^2} \right) e_i e_j F(\Delta \mathbf{k}_{\perp}, \Delta \omega; \Delta \mathbf{k}_z^{(+-)}, \Delta \mathbf{k}_z^{(+-)}), \quad (51)$$

где величина $W(x, \Delta k_z, \Delta k_z)$ ($\Delta k_z \equiv \Delta k_z^{(++)}$ при рассеянии назад и $\Delta k_z \equiv \Delta k_z^{(+-)}$ при рассеянии вперед), определяющая формфактор в выражениях (50), (51), может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(x, \Delta k_z, \Delta k_z) &= \frac{L}{D} \frac{1}{(\Delta k_z)^2 + x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{xL} \frac{1}{1 - \delta_1 \delta_2 \exp(-2xL)} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ (1 + \delta_1 \delta_2 \exp(-2xL)) \frac{(\Delta k_z)^2 - x^2}{(\Delta k_z)^2 + x^2} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} (1 + \exp(-2xL)) - \exp(-xL) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left[\left(1 + \delta_1 \delta_2 \frac{(\Delta k_z)^2 - x^2}{(\Delta k_z)^2 + x^2} + (\delta_1 + \delta_2) \right] \cos \Delta k_z L + (1 - \delta_1 \delta_2) \frac{2x \Delta k_z}{(\Delta k_z)^2 + x^2} \sin \Delta k_z L \right) \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Как следует из (52), дифференциальные коэффициенты некогерентного

рассеяния электромагнитных волн плазменным слоем не изменяются при замене $p_1 \leftrightarrow p_2$.

Поскольку эффективная глубина проникновения электромагнитного поля в полуограниченную плазму L_{eff} достигает своего максимального значения [11] $L_{\text{eff}}^{\max} \simeq (\lambda(\omega_0)/4\pi) (\omega_0^3/\omega_{pe}^3 v_e)$ ($\lambda(\omega_0) = 2\pi c/\omega_0$ — длина падающей волны (в вакууме)) при $\theta_0, \theta = 0$, то наличие второй границы ($z=L$) будет сказываться в спектрах рассеяния только при $l < l_u$ ($l=L/\lambda(\omega_0)$, $l_u \simeq (4\pi)^{-1} (\omega_0^3/\omega_{pe}^3 v_e)$).

Отражательные свойства границы влияют на характер движения частиц лишь вплоть до удалений частиц от границы на расстояния порядка нескольких длин свободного пробега. Поэтому выбор модели границ будет оказывать решающее значение на спектры рассеянного излучения при $l < l_d$ ($l_d \sim \pi^{-1} (s_e/c) (\omega_0/v_e)$).

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

В общем случае детальное исследование особенностей поведения спектров рассеянного излучения возможно лишь на основе численного анализа. Ниже рассмотрены некоторые характерные спектральные и угловые зависимости нормированных дифференциальных коэффициентов

некогерентного отражения и прохождения ($R_{p,s}^{(1,2)} = (r_e/c) \cdot (d^2 R_{p,s}^{(1,2)} / d\omega d\Omega)$) в случае рассеяния p - и s -поляризованных плоских электромагнитных волн слоем слабоионизованной плазмы. Расчеты проводились по общим формулам (13), (18)–(20), (30), (31) для водородоподобной, изотермической плазмы с параметрами $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $c/s_e = 100$, $v_i/v_e = 10^{-2}$, $\omega_0/\omega_{pe} = 5$.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведены частотные спектры дифференциальных коэффициентов некогерентного отражения p -поляризованной плоской электромагнитной волны тонким слоем ($l=0,1$) в плоскости падающей волны ($\phi=0$), $\varepsilon=1$, $p_2=0$, $\theta_0=30^\circ$, $v_e/\omega_{pe}=0,1$, при различных значениях коэффициента p_1 (кривая $1-p_1=0$; $2-p_1=0,5$; $3-p_1=1$). Поскольку спектры рассеянного излучения, представляющие аналог рэлеевской линии вблизи частоты $\Delta\omega=0$, практически симметричны, то на рисунках приведены лишь участки частотного спектра при $\Delta\omega \geq 0$. Как и следовало ожидать, интенсивность рассеяния электромагнитных волн тонким слоем существенно меньше, чем полупространством. Различие между ними зависит от модели границы и является максимальным в случае абсолютно поглощающих границ (достигая при этом четырех порядков), что вполне естественно, поскольку эффективная глубина проникновения поля в плазму значительно пре-восходит толщину слоя и поэтому объем приповерхностной области, дающий вклад в рассеянное излучение, в случае полуограниченной системы намного больше объема слоя.

При выбранной частоте столкновений электронов с нейтралами ($v_e/\omega_{pe} = 0,1$) спектры рассеяния для полуограниченной системы практически не зависят от модели границы, тогда как в случае тонкого слоя выбор модели границы является определяющим как для интенсивности линии рассеянного излучения, так и для ее ширины (в данном случае длина свободного пробега сравнима с толщиной слоя ($L/l_c \simeq 1,26$), и рассеянное излучение определяется в основном электронами, провзаимодействовавшими с границами слоя).

Если предположить, что в результате столкновений электронов с идеально отражающей границей происходит увеличение их эффективной частоты соударений, то с уменьшением толщины слоя эта частота будет возрастать, что и приводит к сужению спектра рассеянного излучения. Для системы с абсолютно поглощающими границами наблюдается иной характер поведения спектра — уширение его при уменьшении толщины слоя. Так, например, если в случае полуограниченной системы ширина линии G^{sl} практически не зависит от модели границы и при $\theta_0=30^\circ$, $\theta=45^\circ$ равна $G^{sl} \simeq 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot \omega_{pe}$, то в случае тонкого слоя ли-

ния на порядок шире ($\Gamma^{sl} \approx 1,4 \cdot 10^{-1}/\omega_{pe}$) для абсолютно поглощающих границ на два порядка уже ($\Gamma^{sl} \approx 2 \cdot 10^{-4}/\omega_{pe}$) в случае идеально отражающих границ. Такое поведение спектра является общим для обеих поляризаций электромагнитной волны, падающей на слой, и справедливо для дифференциальных коэффициентов некогерентного рассеяния как назад, так и вперед.

Численный анализ, выполненный для тонкого слоя ($l=0,1$), при $\varphi=0$ показывает, что спектры рассеяния *s*-поляризованных волн практически не зависят от угла рассеяния θ и для любых углов θ_0 и θ наблюдается почти одинаковый уровень рассеянного излучения вперед и назад, что полностью согласуется с выводами аналитических исследований (46) для тонкого слоя. В то же время при наклонном падении ($\theta_0=30^\circ$) *p*-поляризованной волны уровень рассеянного излучения вперед на три порядка превосходит уровень рассеянного излучения, если рассеяние происходит в плоскости падающей волны ($\varphi=0$) под углом $\theta_0=60^\circ$. При $\varphi=\pi/2$ различие между спектрами рассеянного излучения в верхнее и нижнее полупространства практически не наблюдается. Эти выводы качественно согласуются с результатами аналитических исследований (47).

Частотные зависимости дифференциальных коэффициентов некогерентного отражения и прохождения *s*- и *p*-поляризованных плоских волн от слоя плазмы при различных значениях диэлектрической проницаемости подложки представлены на рис. 2 (кривая 1— $\epsilon_2=1$, 2— $\epsilon_2=2$, 3— $\epsilon_2=10$, $\epsilon_1=1$, $p_1=p_2=0$, $l=0,1$, $v_e/\omega_{pe}=1$, $\theta_0=30^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\varphi=90^\circ$). В пределе очень больших значений ϵ_2 коэффициенты некогерентного прохождения для обеих поляризаций и отражения для *s*-поляризации стремятся к нулю, тогда как интенсивность отраженного рассеянного излучения для *p*-поляризованных волн выходит на насыщение, уровень которого при выбранных углах примерно в 3,3 раза превосходит уровень рассеянного излучения в случае $\epsilon_2=1$. Расчеты, выполненные на основе выражений (47), (48) в предположении $\epsilon_1(\omega) \approx \text{Re } \epsilon(\omega)$, дают

$$\left(\frac{d^2 R_p^{(1)}}{d\omega d\Omega} \right) \Big|_{\epsilon_2 \rightarrow \infty} / \left(\frac{d^2 R_p^{(1)}}{d\omega d\Omega} \right) \Big|_{\epsilon_2=1} = \frac{(4 \sin \theta_0 \sin \theta)^2}{1 - (\sin \theta_0 \sin \theta)^2},$$

что при заданных углах θ_0 , θ составляет величину 3,2.

На рис. 3 представлены индикатрисы рассеяния в плоскости $x0z$ при $\theta_0=0$, $\varphi=0$ (кривая 1— $p=0$; 2— $p=1$; $p_1=p_2=p$, сплошные кривые — *s*-поляризация, пунктирные — *p*-поляризация, $\epsilon=1$, $v_e/\omega_{pe}=1$, $\Delta\omega/\omega_{pe}=10^{-4}$). Для сравнения на рис. 3в, г приведены индикатрисы рассеяния в случае полуограниченной системы (кривая 3). Как и следовало ожидать, максимальное различие между результатами достигается в случае тонкого слоя (рис. 3а, $l=0,1$). По мере увеличения толщины слоя влияние отражательных свойств границ на рассеянное излучение достаточно быстро ослабевает и уже при $l=10$ спектры рассеянного излучения отличаются незначительно (рис. 3в). Увеличение толщины слоя сопровождается возрастанием уровня рассеянного излучения во внешние области (рис. 3б, $l=1$), причем начиная с толщиной $l=10$ (рис. 3в) дифференциальные коэффициенты некогерентного отражения от плазменных слоев и полупространства становятся сравнимы по величине и совпадают в пределе очень толстых слоев (рис. 3г, $l=100$). Следует отметить, что если рассеяние в тонком слое происходит одинаково интенсивно в обе внешние области (рис. 3а), то переход к промежуточным толщинам слоя сопровождается увеличением преимущественной доли рассеянного излучения вперед (рис. 3б), что проявляется также и в случае толстых слоев (рис. 3в).

Выполненные в настоящей работе исследования спектров некогерентного рассеяния электромагнитных волн слоем слабоионизированной плазмы показали, что характер взаимодействия заряженных частиц с границами может существенным образом влиять как на уровень рас-

сиянного излучения, так и на ширину его линии. В связи с этим полученные результаты могут оказаться полезными при расшифровке экспериментальных спектров некогерентного рассеяния электромагнитных волн ограниченными плазменными объектами с целью изучения на основе этих спектров поглощающих свойств поверхности, ограничивающей плазму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. Вопросы теории плазмы / Под ред. Леоновича М. А. — М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 3.
2. Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме. — Харьков: Гос. ун-т. 1965.
3. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. — М.: Мир, 1971.
4. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
5. Шеффилд Дж. Рассеяние электромагнитного излучения в плазме. — М.: Атомиздат, 1976.
6. Кроссиньянни Б., Ди Порто П., Берлотти М. Статистические свойства рассеянного света. — М.: Наука, 1980.
7. Ахиезер И. А. // ЖТФ. 1963. Т. 33. Вып. 8. С. 935.
8. Попов В. С., Якименко И. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 6. С. 882.
9. Якименко И. П. В кн.: Проблемы теории плазмы. — Киев: Наукова думка, 1976. С. 80.
10. Голубинский П. К., Загородний А. Г., Якименко И. П. // Изв. вузов. Физика. 1987. Т. 30. № 5. С. 79.
11. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 7. С. 890.
12. Usenko A. S., Yakimenko I. P., Zagorodny A. G. Proc. Contr. Pap. Intern. Conf. Plasma Phys. — Kiev: Naukova dumka. 1987. V. 4. P. 185.
13. Загородний А. Г., Якименко И. П. // Физика плазмы. 1978. Т. 4. Вып. 2. С. 420.
14. Голубинский П. К., Загородний А. Г., Якименко И. П. Препринт ИТФ. 87-146Р. Киев, 1987.
15. Dogherty J. P., Farley D. T. // Proc. Roy. Soc. 1960. V. A259. № 1296. P. 79.
16. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Ситенко А. Г. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. Вып. 2(8). С. 664.
17. Williams R. H., Chappel W. R. // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 3. P. 591.
18. Загородний А. Г., Якименко И. П. // Сб.: Физика многочастичных систем. — Киев: Наукова думка, 1982. Вып. 1. С. 72.
19. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 2. С. 168.
20. Зельдович Я. Б., Мышкин А. Д. Элементы математической физики. — М.: Наука, 1973.
21. Razi Naqvi K., Mork K. J., Walderstrom S. // Chem. Phys. Lett. 1982. V. 92. № 2. P. 156.
22. Usenko A. S., Zagorodny A. G. // Mol. Phys. 1987. V. 61. № 5. P. 1213.
23. Карслу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.

Институт теоретической физики
АН УССР

Поступила в редакцию
17 июля 1989 г.

INCOHERENT SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY A WEAKLY-IONIZED PLASMA LAYER

A. G. Zagorodnij, A. S. Usenko

The differential coefficients of incoherent electromagnetic waves reflected and transmitted by a weakly-ionized plasma layer are calculated for arbitrary values of the coefficients of the particle absorption by the boundaries. The effect produced by the electron interaction with the boundaries on the frequency and angular distributions of the scattering emission is studied in detail.

УДК 621.371

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СВЧ ДИАГНОСТИКИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА

Ю. Г. Цельсов, А. С. Кондратьев

Разработана методика определения температуры ионизированного газа по результатам зондирования плотности электронов. Описывается применение методики для измерения распределения температуры в попечном сечении осесимметричного ионизированного газового потока с помощью СВЧ диагностики. С использованием математической модели потока в виде слоистого диэлектрического цилиндра проведен анализ влияния неравномерного распределения температуры по радиусу потока на средние температурные характеристики, полученные по результатам зондирования. Расчетные данные сравниваются с экспериментальными.

Измерение высокой температуры газа является серьезной технической проблемой, связанной с ограниченной термостойкостью контактных датчиков и ограниченной областью применения неконтактных методов [1]. Наиболее термостойкие вольфрамо-рениевые термопары имеют верхний температурный предел 2100 К в окислительной газовой среде и 3300 К в инертной среде. При этом измерения должны быть весьма кратковременными. Известные неконтактные методы либо позволяют измерять только поверхностную температуру газового потока (пиromетрия [2]), либо требуют помещения датчиков в зону влияния потока (ультразвуковые методы [3]), что искажает его структуру и приводит к необходимости применения защиты измерительной аппаратуры.

В настоящей работе предлагается простой и достаточно эффективный метод определения равновесной температуры ионизированного многокомпонентного газа по результатам зондирования плотности электронов и применение этого метода для измерения температуры осесимметричного газового потока с использованием СВЧ диагностики [4]. Метод применим в широком диапазоне температур.

Как известно [5], высокотемпературный газ всегда содержит свободные электроны, концентрация которых зависит от его химического состава и температуры. В многокомпонентном газе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия, плотность электронов удовлетворяет уравнению Саха для каждой ионизированной компоненты. Для большинства практически применяемых газов равновесная ионизация сводится к совокупности следующих элементарных реакций [5]:



где A , B — компоненты газа, A^+ , B^- — положительные и отрицательные ионы соответственно, e — электрон. Строгий расчет температуры газа требует решения системы нелинейных уравнений большой размерности, включающей в себя систему уравнений Саха и уравнения химического равновесия [7]. Такой подход к решению задачи сопряжен с большими вычислительными трудностями. Поэтому целесообразно использовать

ряд упрощающих предположений, отражающих реальные свойства исследуемого газа.

Из всех газовых компонент, участвующих в процессе ионизации по схеме (1), практически всегда можно выделить две доминирующие, одна из которых определяется наименьшим потенциалом ионизации (частицы типа *A*), другая — наибольшей энергией связи или средством к электрону (частицы типа *B*). Для концентраций доминирующих компонент и электронов имеют место следующие соотношения [6]:

$$n_e \ll n_{A+} \simeq n_{B-}. \quad (2)$$

Учитывая (2), можно полную систему уравнений Саха, описывающую процесс ионизации всех компонент, заменить системой двух уравнений для доминирующих компонент

$$\begin{aligned} \frac{n_{A+} \cdot n_e}{n_A} &= g_A T^{3/2} \exp \left\{ -\frac{U_A}{T} \right\}, \\ \frac{n_{B-} \cdot n_e}{n_B} &= g_B T^{3/2} \exp \left\{ -\frac{U_B}{T} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где U_A — потенциал ионизации компоненты *A*; U_B — энергия средства к электрону компоненты *B*; g_A , g_B — размерные константы, содержащие статистические веса рассматриваемых компонент [5]; T — абсолютная температура газа, измеряемая в энергетических единицах.

Перемножая уравнения (3) и учитывая соотношения (2), получим

$$n_e^2 = \frac{n_A}{n_B} g_A g_B T^3 \exp \left\{ -\frac{U_A + U_B}{T} \right\}. \quad (4)$$

Уравнение (4) связывает плотность электронов с температурой газа при известных концентрациях компонент. Это уравнение можно использовать для расчета температуры в заданной точке газового потока при известной плотности электронов, полученной по результатам измерений. Нетрудно показать, что на положительной полуоси уравнение (4) имеет единственный корень, который может быть найден численно. Однако, поскольку плотность электронов и концентрации компонент известны, как правило, лишь приближенно, первостепенное значение имеет погрешность метода. Исследуем этот вопрос.

Считая плотность электронов функцией температуры и концентрации компонент, можно записать следующее выражение, связывающее значения абсолютных погрешностей Δn_e , Δn_A , Δn_B и ΔT :

$$(\Delta n_e)^2 = \left(\frac{\partial n_e}{\partial n_A} \right)^2 (\Delta n_A)^2 + \left(\frac{\partial n_e}{\partial n_B} \right)^2 (\Delta n_B)^2 + \left(\frac{\partial n_e}{\partial T} \right)^2 (\Delta T)^2. \quad (5)$$

Поделив обе части (5) на n_e^2 , получим выражение для относительной погрешности:

$$(\delta n_e)^2 = \left(\frac{\partial \ln n_e}{\partial n_A} \right)^2 (\Delta n_A)^2 + \left(\frac{\partial \ln n_e}{\partial n_B} \right)^2 (\Delta n_B)^2 + \left(\frac{\partial \ln n_e}{\partial T} \right)^2 (\Delta T)^2. \quad (6)$$

Используя (4), из уравнения (6) получим

$$(\delta n_e)^2 = \frac{(\Delta n_A)^2}{4n_A^2} + \frac{(\Delta n_B)^2}{4n_B^2} + \left(\frac{3}{2T} + \frac{U_A + U_B}{2T^2} \right)^2 (\Delta T)^2. \quad (7)$$

Перейдя в (7) к относительной погрешности всех величин, после несложных преобразований получим окончательное выражение для погрешности температуры:

$$\delta T \leq \sqrt{(\delta n_e)^2 + \frac{1}{4}(\delta n_A)^2 + \frac{1}{4}(\delta n_B)^2} / \left(\frac{3}{2} + \frac{U_A + U_B}{2T} \right). \quad (8)$$

Из (8) следует, что погрешность температуры пропорциональна погрешностям концентраций компонент, а сам коэффициент пропорциональности растет одновременно с температурой и падает с ростом потенциалов ионизации. Оценим величину погрешности δT для некоторых характерных значений температуры и потенциалов ионизации. В искусственных плазменных образованих часто используют щелочные присадки, в частности перхлорат калия [6]. В таких газах ионизацию определяют атомы калия, имеющие потенциал ионизации $U_A = 4,34$ эВ, и атомы хлора, имеющие энергию сродства к электрону $U_B = 3,63$ эВ. Пусть ошибка по концентрациям n_A , n_B и n_e составляет 50%. Тогда при характерной для рассмотренных плазменных образований температуре 2320 К, или 0,2 эВ, из уравнения (8) получим, что величина относительной погрешности температуры не превышает 2%. Отмеченное свойство уравнения (8) позволяет определять температуру газа с погрешностью, существенно меньшей, чем погрешности входящих в (4) значений концентраций, что указывает на высокую точность предложенного метода определения температуры в рамках используемой модели.

Описанный метод был применен для определения температуры осесимметричной ионизированной газовой струи с дозвуковой скоростью истечения по результатам двухчастотного радиопросвещивания [4]. Метод двухчастотного радиопросвещивания сводится к измерению значений затухания радиосигнала передающей антенны, располагающейся вблизи исследуемой струи, на двух выбранных частотах. По измеренным значениям затуханий определяются средние значения плотности электронов и частоты соударений v в исследуемом сечении струи. По найденному среднему значению n_e можно определить из уравнения (4) среднее значение температуры \tilde{T} .

Рассмотренный метод основан на использовании математической модели струи в виде плоского однородного диэлектрического слоя с потерями. Такой подход не учитывает неравномерное распределение температуры в газовом потоке и может давать существенную ошибку при определении \tilde{T} , когда поперечный размер струи сравним с длиной зондирующей волны. В последнем случае на величине затухания существенно сказываются дифракционные эффекты, связанные с влиянием формы струи и неоднородностью распределения радиофизических параметров по ее объему. Учет дифракционных эффектов можно провести с помощью более строгой математической модели газового потока в виде бесконечного слоистого кругового диэлектрического цилиндра с меняющейся от слоя к слою комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ , связанной с распределением плотности электронов и частотой соударений соотношением [8]

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[(1 - \alpha) - j \frac{v}{\omega} \alpha \right], \quad (9)$$

где $\alpha = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e (\omega^2 + v^2)}$, e — заряд электрона, m_e — масса электрона, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, ω — круговая частота.

Значение α затухания радиосигнала, проходящего сквозь плазменный цилиндр, определяется формулой

$$\alpha = 10 \lg (P_1/P_2),$$

где $P_{1,2}$ — мощность принятого радиосигнала при наличии и в отсутствие цилиндра. Для определения указанных величин передающая антена

На моделируется заданным распределением электрического и магнитного токов вида

$$I_z^{\theta}(\varphi) = \begin{cases} I_0^{\theta}, & |\varphi - \pi| \leq \Delta/2 \\ 0, & |\varphi - \pi| > \Delta/2 \end{cases}; \quad (10)$$

$$I_{\varphi}^m = -jW_0 I_z^{\theta}, \quad (11)$$

где Δ — угловая ширина антенны; φ — угловая координата в цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра; I_0^{θ} — амплитуда тока; W_0 — волновое сопротивление среды. Индексы «э» и «м» относятся к электрическому и магнитному токам соответственно. Приемная антenna имеет тот же угловой размер Δ и располагается на прямой, соединяющей центры обеих антенн и проходящей через ось цилиндра.

Для определения величин P_1 и P_2 использовались известные формулы из [9]

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_z^{1,2} H_{\varphi}^{1,2}],$$

где $E_z^{1,2}$ и $H_{\varphi}^{1,2}$ — составляющие электромагнитного поля сторонних источников (10), (11) при наличии и отсутствии цилиндра в точке расположения приемной антенны. Для определения этих величин можно использовать подход, основанный на применении аппарата волновых матриц передачи отдельных слоев, образующих цилиндр [10]. Задача решается в двумерном приближении. Элементы матриц определяются с помощью метода собственных функций [9]. При значительных поперечных электрических размерах струи для определения затухания целесообразно применение асимптотических методов [11].

Использование этой математической модели позволяет с помощью формул (4) и (9) по известным значениям затухания восстановить истинные радиальные распределения диэлектрической проницаемости $\epsilon(r)$, плотности электронов $n_e(r)$, температуры $T(r)$. Однако решение такой задачи сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Поэтому целесообразно, используя априорную информацию о характере распределения температуры, аппроксимировать радиальное распределение диэлектрической проницаемости аналитически с неизвестными коэффициентами, число которых значительно меньше числа слоев.

Используя результаты экспериментальных исследований, проведенных Ю. П. Финатьевым с помощью термопарных измерений, для углеводородных газовых струй на дозвуковых скоростях при нормальном атмосферном давлении радиальное распределение температуры можно аппроксимировать следующей функцией:

$$T(r) = (T_0 - T_n) \cdot 2^{-3r/D} + T_n, \quad (12)$$

где T_0 — температура на оси струи; T_n — температура затопленного пространства; D — диаметр струи, определяемый по результатам визуальных наблюдений светящейся области. Примерный вид зависимости $T(r)$ приведен на рис. 1 (см. на вклейке). Соответственно распределение $n_e(r)$ задается формулой

$$n_e(r) = n_e^0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{U_A + U_B}{2} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right\}, \quad (13)$$

где n_e^0 — плотность электронов в приосевой области.

Поскольку T_n и D известны, задача нахождения $T(r)$ сводится к определению константы T_0 . При заданной зависимости $v(r)$ это можно сделать на основании лишь одного измерения затухания на заданной

Таблица 1

\tilde{n}_e , м $^{-3}$	\tilde{T} , К	n_e^0 , м $^{-3}$	T_0 , К	\tilde{v} , с $^{-1}$	a , дБ
1	12	$0,7 \cdot 10^{16}$	2362		
			$0,45 \cdot 10^{17}$	2550	$0,56 \cdot 10^{14}$
			$0,25 \cdot 10^{17}$	2488	$0,56 \cdot 10^{14}$
2	13	$0,12 \cdot 10^{16}$	2206		
			$0,85 \cdot 10^{16}$	2380	$0,32 \cdot 10^{14}$
3	8,7	$0,13 \cdot 10^{17}$	1983		
			$0,45 \cdot 10^{16}$	2321	$0,32 \cdot 10^{14}$
			$0,21 \cdot 10^{18}$	2228	$0,24 \cdot 10^{14}$
			$0,93 \cdot 10^{17}$	2159	$0,24 \cdot 10^{14}$
				2023*	$-3,9$

* Измерения с помощью термопары.

частоте. В результате методика измерения \tilde{T}_0 сводится к следующему.

1) По экспериментально полученным значениям затухания с помощью газовой струи в виде плоского однородного слоя определяются средние значения \tilde{v} и \tilde{n}_e в рассматриваемом сечении, по которым определяется \tilde{T} . Величина $v(r)$, как показывает анализ [12], меняется с изменением радиуса пропорционально изменению $T(r)$. Поскольку такая зависимость значительно слабее экспоненциальной (13), распределение $v(r)$ заменяется в (9) на \tilde{v} .

2) Полученные значения концентрации n_e и температуры \tilde{T} используются в качестве начального приближения при расчете затухания с использованием математической модели струи в виде слоистого цилиндра. Производится вариация значения n_e^0 до совпадения расчетного и экспериментального значений затухания. Расчет основывается на использовании формул (9)–(13).

3) По найденному распределению $n_e(r)$ восстанавливается зависимость $T(r)$, аппроксимированная формулой (12). Поскольку распределение $n_e(r)$ из формулы (13) зависит от искомого значения T_0 , для восстановления истинной зависимости $n_e(r)$ используется следующий подход. Первоначально по п. 2 находится значение n_e^0 для $T_0 = \tilde{T}$. Затем это значение используется в (12) для нахождения следующего приближения к T_0 . Этот процесс повторяется несколько раз до стабилизации найденных значений.

Описанная методика была использована при определении значений n_e^0 и T_0 для ионизированных струй, содержащих продукты разложения прехлората калия. Расстояния от апертур передающей и приемной антенн до оси струи были выбраны соответственно 32 см и 35 см; размер апертур составлял 6 см; рабочая длина волны — 3,2 см. Расчет затухания проводился численно по программам, написанным на ФОРТРАНе и поставленным на ЭВМ ЕС-1061.

В табл. 1 для трех экспериментов представлены средние значения \tilde{n}_e и \tilde{T} (первые строчки), а также результаты вычисления последовательных приближений к n_e^0 и T_0 . Как видно из представленных данных, сходимость достигается за две итерации. Средние значения плотности электронов и температуры могут существенно отличаться от значений в приосевой области. В последней строке таблицы (для третьего эксперимента) приведено значение температуры, измеренной с помощью термопары в приосевой области струи на расстоянии 15 см от плоскости радиопропсвечивания.

Методика позволяет рассчитать зависимость значений затухания от расстояний до передающей и приемной антенн, используя которые можно определить оптимальные (с точки зрения безопасности работы и точности измерений) расстояния. Зависимости $\alpha(R_0)$, где R_0 — расстояние до передающей антенны, для струй в проведенных экспериментах представлены на рис. 2. Зависимость затухания от расстояния до приемной антенны оказывается слабой.

Приведенная методика позволяет достаточно просто и эффективно определять величину средней по сечению температуры и оценивать распределение температуры в исследуемом сечении, не требуя при этом существенных вычислительных затрат и большого количества измерений. Она может быть рекомендована для использования в температурных исследованиях широкого класса ионизированных газовых струй в диапазоне температур, соответствующих низкотемпературной плазме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куинн Т. Температура.— М.: Мир, 1985.
2. Гордов А. Н. Основы пирометрии.— М.: Металлургия, 1964.

3. Кажис Р. И. Ультразвуковые информационно-измерительные системы. — Вильнюс: Мокслас, 1986.
4. Голант В. Е. СВЧ методы исследования плазмы. — М.: Наука, 1968.
5. Райзнер Ю. П. Физика газового разряда. — М.: Наука, 1987.
6. Цельсов Ю. Г. // Труды МЭИ. 1981. Вып. 553. С. 91.
7. Слынъко Л. Е. В кн.: Плазмохимические реакции и процессы. — М.: Наука, 1977. С. 164.
8. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах: / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. Кн. 1.
9. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М: Радио и связь, 1983.
10. Сazonov D. M., Frолов N. Я. // ЖТФ. 1965. Т. 35. № 6. С. 990.
11. Казюлин А. Ф. // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 12. С. 2632.
12. Теоретические и экспериментальные исследования процесса ослабления радиосигналов. // Вопросы ракетной техники. 1966. № 9. С. 3.

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
31 июля 1989 г.

APPLICATION OF MICROWAVE DIAGNOSTIC METHOD FOR
AXISYMMETRIC IONIZED GAS STREAM
TEMPERATURE MEASUREMENT

Yu. G. Tsel'sov, A. S. Kondratjev

A technique is developed for ionized gas temperature determination by the results of electron concentration probing. Application of this technique to the temperature distribution measurement in axisymmetric ionized gas stream cross section by means of microwave diagnostics is described. Using the stream mathematical model as layered dielectric cylinder, analysis is carried out of influence of temperature distribution along the stream radius on mean temperature characteristics, obtained by the results of probing. The calculated data are compared with those found by the experiment.

УДК 543.42:621.378.

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ СДВИГА И УШИРЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ ДАВЛЕНИЕМ ГАЗА

B. A. Скворцов

Предложен метод расчета сдвига и уширения молекулярных спектральных линий давлением газа. Этот метод существенно упрощен по сравнению с другими, основанными на квазиклассической ударной теории Андерсона, в результате чисто классического описания молекул возмущенного газа. Расхождение расчета с экспериментом, найденное для большого числа линий, оказалось почти таким же, что и для андерсоновских методов. Рассчитаны сдвиг и уширение линий при возмущении тяжелыми многоатомными полярными молекулами, для некоторых случаев получены аналитические выражения параметра сдвига.

В настоящее время возросший уровень техники спектроскопии газов микроволнового и инфракрасного (ИК) диапазонов привел к появлению большого числа достаточно надежных измерений не только уширения, но и сдвига центра спектральных линий давлением газа. Наиболее точные расчеты этих эффектов проводятся на основе квазиклассической ударной теории Андерсона [1]. В работах [2] был развит простой «штартковский» подход к интерпретации сдвигов, который хорош для понимания механизма сдвига и позволяет лишь провести оценки его величины. В данной работе метод расчета сдвига и уширения молекулярных линий, с одной стороны, максимально упрощен, а с другой — почти сохраняет точность андерсоновских методов в [1].

1. Ограничимся рассмотрением переходов между уровнями вращательного спектра молекул, учитывая их вырождение только по квантовым числам M . В этом случае изолированная линия описывается единственным лоренцевским контуром (см. [3]). В приближении квазиклассической ударной теории из выражений (21.20) в работе [3] для параметров сдвига и уширения линии, определенных как сдвиг центра линии и ее полуширина на уровне половины интенсивности отнесенных к давлению возмущающего газа, имеем

$$\Delta v_c = \frac{v}{kT} \int_0^\infty \rho e^{-\Gamma} \sin \eta d\rho; \quad (1)$$

$$\Delta v_y = \frac{v}{kT} \int_0^\infty (1 - e^{-\Gamma} \cos \eta) \rho d\rho, \quad (2)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура газа, v и ρ — относительная скорость и прицельное расстояние соударяющихся молекул $\eta = \eta_v - \eta_n$, $\Gamma = \Gamma_v + \Gamma_n$; $\eta_{v,n}$, $\Gamma_{v,n}$ — усредненные по M действительные и мнимые части S -матрицы столкновений верхнего и нижнего уровня рассматриваемого перехода. С точностью до членов второго порядка теории возмущений S -матрица n -го уровня с энергией W_n в состоянии с квантовым числом M равна (см. [4])

$$S_{nm} = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{mm} dt - \frac{i}{\hbar^2} \sum_m \int_0^\infty \exp(i\omega_{nm}\theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} V_{nm}(t) V_{mn}(t-\theta) dt, \quad (3)$$

где $\omega_{nm} = (W_n - W_m)/\hbar$, V_{nm} — матричные элементы энергии взаимодействия V исследуемой молекулы 1 с возмущающей молекулой 2.

Наше упрощение теории Андерсона сводится к чисто классическому описанию молекулы 2, которая в точке нахождения молекулы 1 создает возмущающее электрическое поле. Если возмущающий газ состоит из полярных молекул типа симметричного волчка, то дипольный момент молекулы μ_2 прецессирует вокруг направления вектора момента импульса J_2 с угловой скоростью Ω и имеет постоянную составляющую μ_0 , вдоль J_2 и составляющую $\mu_{\text{вр}}$, вращающуюся в плоскости, перпендикулярной J_2 . Поэтому есть основание аппроксимировать возмущающее поле в виде составляющей, направленной вдоль оси z , и составляющей, вращающейся в плоскости xy лабораторной системы отсчета,

$$\mathbf{E}_z = \hbar E_0 f(t), \quad \mathbf{E}_{xy} = E_{\text{в}}(i \cos \Omega t + j \sin \Omega t) f(t); \quad (4)$$

$$E_0 = \mu_0 / \rho^3, \quad E_{\text{в}} = \mu_{\text{вр}} / \rho^3, \quad (5)$$

где функция $f(t)$ описывает форму импульса возмущающего поля. Матричные элементы энергии возмущения $V = -\mu_1(\mathbf{E}_z + \mathbf{E}_{xy})$ примут вид

$$V_{MM} = -\mu_{MM}^{(z)} E_0 f(t); \quad (6)$$

$$V_{nm} = -[\mu_{nm}^{(z)}(M) E_0 + \mu_{nm}^{(x)}(M) E_{\text{в}} e^{\pm i \Omega t}] f(t), \quad (7)$$

знаки « \pm » соответствуют переходам с $\Delta M = \pm 1$. Для уровня с вращательным квантовым числом J_1 , подставив (6), (7) в (3) и усреднив по M , получим

$$S_n = \eta_n - i \Gamma_n,$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{\hbar^2(2J_1+1)} \sum_m |\mu_{nm}^{(z)}|^2 \left(E_0^2 I_1^{(0)} + \frac{1}{2} E_{\text{в}}^2 I_1 \right); \quad (8)$$

$$\eta_n = \frac{1}{\hbar^2(2J_1+1)} \sum_m |\mu_{nm}^{(z)}|^2 \left(E_0^2 I_2^{(0)} + \frac{1}{2} E_{\text{в}}^2 I_2 \right); \quad (9)$$

$$I_1 + i I_2 = \int_0^\infty \exp[i(\omega_{nm} \pm \Omega)\theta] d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t-\theta) dt, \quad (10)$$

$$|\mu_{nm}^{(z)}|^2 = \sum_{M=-J_1}^{+J_1} |\mu_{nm}^{(z)}(M)|^2,$$

где выражения для $I_1^{(0)}$ и $I_2^{(0)}$ получаются при $\Omega = 0$.

2. Вычисления проводились в моноскоростном приближении следующим образом. Сначала для заданного значения J_2 возмущающей молекулы считались η и Γ , затем по (1) и (2) считались $\Delta v_c(J_2)$ и $\Delta v_y(J_2)$ и, наконец, проводилось усреднение по J_2 :

$$\Delta v_c = C_1 \sum_{J_2} \Delta v_c(J_2) P(J_2); \quad (11)$$

$$\Delta v_y = C_1 \sum_{J_2} \Delta v_y(J_2) P(J_2); \quad (12)$$

$$P(J_2) = \frac{S(2J_2+1)}{Q_r} \exp \left[-\frac{\hbar B}{kT} J_2(J_2+1) \right], \quad S = \sum_{K_2=-J_1}^{+J_1} \exp(-\sigma K_2),$$

$$\sigma = \frac{\hbar B}{kT} \left(\frac{A}{B} - 1 \right),$$

где K_2 — квантовое число проекции J_2 на ось молекулы, A и B — ее вращательные постоянные, Q_r — вращательная статистическая сумма, смысл C_1 пояснен ниже.

Для каждого J_2 в выражения (5) подставлялись средние значения составляющих дипольного момента:

$$\mu_0 = \mu_2 \cos \alpha, \quad \mu_{\text{вр}} = \mu_2 \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle K_2 \rangle}{\sqrt{J_2(J_2+1)}}, \quad \langle K_2 \rangle = \frac{2}{S} \sum_{K_2=1}^{J_2} K_2 \exp(-\sigma K_2^2),$$

при $J_2=0$ $\cos \alpha=1$, так как молекула не вращается.

Принималась гауссова форма импульса возмущающего поля

$$f(t) = e^{-t^2/2\tau^2}, \quad (13)$$

где $\tau=\rho/v$ — время пролета. При этой форме из (10) получим

$$I_1 = \pi \tau^2 \exp[-(\omega_{nm} \pm \Omega)^2 \tau^2]; \quad (14)$$

$$I_2 = 2\sqrt{\pi} \tau^2 F((\omega_{nm} \pm \Omega) \tau), \quad (15)$$

где

$F(u) = e^{-u^2} \int_0^u e^{t^2} dt$ — интеграл Досона [6], который аппроксимировался как $F(u) \approx u/(0,854 + u^2)$. Подставляя (14), (15) в (8) и (9), получим

$$\eta_n(J_2) = \sum_m \frac{B_m}{x^4} \left\{ F(a_m x) \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} [F((a_m+b)x) + F((a_m-b)x)] \sin^2 \alpha \right\}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n(J_2) = & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_m \frac{B_m}{x^6} \left\{ \exp(-a_m^2 x^2) \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} [\exp(-(a_m+b)^2 x^2) + \right. \\ & \left. + \exp(-(a_m-b)^2 x^2)] \sin^2 \alpha \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$B_m = \frac{2\sqrt{\pi} C_3 \omega_0^4 \mu_2^2 |\mu_{nm}^{(2)}|^2}{\hbar^2 (2J_1+1) v^6}, \quad (18)$$

где ω_0 — какая-нибудь характерная частота (исследуемой линии либо нижнего вращательного перехода молекулы I и т. п.), $a_m = \omega_{nm}/\omega_0$, $b = \Omega/\omega_0$, $x = \omega_0 t$ — безразмерная переменная, по которой проводился численный счет интегралов (1) и (2). Суммирование в (16) и (17) проводилось лишь по соседним к n уровням, например, при $n=J_1$, $m=J_1-1$ и J_1+1 ; вклад вращательно-колебательных и более высоких переходов мал из-за их относительно больших частот.

Введение постоянных коэффициентов C_1 в (11), (12) и C_2 в (18) связано с неопределенностью до множителя порядка единицы значения полей в (5) и τ в (13), кроме этого в моноскоростном приближении v имеет смысл некоторой эффективной скорости, которая связана неопределенным множителем со средней скоростью относительного движения молекул. Аналогичный коэффициент вводился в выражение для Ω , которое в соответствии с классическим значением в [5] имеет вид

$$\Omega = 4\pi C_3 B \sqrt{J_2(J_2+1)} \quad (19)$$

либо

$$\Omega = 4\pi C_3 B J_2. \quad (20)$$

Коэффициенты были одними и теми же для всех молекул и всех типов переходов. В теории Андерсона подобная «степень свободы» связана с выбором минимального прицельного расстояния.

Таблица 1

Метод расчета Δv_c и Δv_y	Выражение для Ω	C_1	C_2	C_3
Раздельный вклад полей E_z и E_{xy}	(20)	1,27	0,13	1,22 <i>a</i>
	(19)	1,155	0,15	1,08 <i>b</i>
Совместное действие полей E_z и E_{xy}	(19)	1,6	0,1	1,65 <i>c</i>
	(20)	1,6	0,1	1,3 <i>d</i>
	(20)	1,0	1,0	0,85 <i>e</i>

Примечание: *a*, *b*, *c*, *d* — для расчета Δv_c ,
e — для расчета Δv_y .

Таблица 2

Параметры самосдвиги линий вращательных переходов молекулы аммиака NH_3 в МГц/Тор

Переход	Колебательное состояние	Эксперимент из [7, 8]	Расчет	
			Настоящая работа	Теория Андерсона из [9]
$J=0-1$	основное	6,1	6,0	5,2
$s(1,0)-a(0,0)$	$v_2=1$	5,6	4,3	4,8
$a(2,0)-s(3,0)$	$v_2=1$	3,7	3,8	2,9
$s(1,1)-a(1,1)$	$v_2=1$	-2,4	-1,95	-1,7
$s(2,1)-a(2,1)$	$v_2=1$	-2,4	-3,2	-2,8
$a(1,1)-s(2,1)$	$v_2=1$	3,9	3,8	3,2
$a(2,1)-s(3,1)$	$v_2=1$	3,3	3,3	2,4
$s(2,2)-a(2,2)$	$v_2=1$	1,5	1,5	1,8
$a(2,2)-s(3,2)$	$v_2=1$	-0,2	-1,6	-0,6
$s(0,0)-a(1,0)$	$v_4=1$	5,85	4,2	4,9
$a(0,0)-s(1,0)$	$v_4=1$	5,75	6,4	5,2

Методика счета отрабатывалась для линий вращательных и инверсионных переходов молекулы аммиака NH_3 в возбужденном колебательном состоянии $v_2=1$, частоты которых соизмеримы с частотами вращения возмущающего поля. При этом в сдвиг вращательная часть возмущения дает значительный вклад, величина и знак которого резко меняются от линии к линии. Сдвиг считался либо раздельно для E_z и E_{xy} с последующим суммированием, либо для суммарного возмущающего поля. В среднем результаты счета Δv_c по различным методикам (см. табл. 1) отличаются не намного при значительном различии для некоторых линий. Оптимальной оказалась методика (а) (см. табл. 1), ей в табл. 2 соответствуют значения Δv_c , для которых при среднем значении величины измеренного параметра сдвига $|\Delta v_c|=3,7$ МГц/Тор среднее значение величины разности между измеренным и рассчитанным параметрами сдвига $\delta v_c=0,6$ МГц/Тор для наших расчетов и 0,7 МГц/Тор для теории Андерсона в [9]. По той же методике для аммиака рассчитаны сдвиги 16 линий ИК диапазона вращательно-колебательных переходов $v_2=0-1$, для которых экспериментальные и расчетные значения приведены в [10, 11]. Для этих линий $|\Delta v_c|=1,7$ МГц/Тор, $\delta v_c=0,5$ МГц/Тор для наших расчетов и 0,45 МГц/Тор для андерсонской теории. Измеренные величины параметра уширения для пяти линий из табл. 2 приведены в [8], а их расчет по теории Андерсона в

[10]. При среднем значении $\Delta v_y^0 = 13,6$ МГц/Тор среднее расхождение с теорией $\delta v_y = 0,85$ МГц/Тор в расчетах [10] и 0,7 МГц/Тор в наших расчетах по методике (e) табл. 1, выбор которой менее критичен, чем при вычислении сдвига.

Расчеты могут быть упрощены, если возмущающие молекулы распределены по значительному числу значений J_2 и по ним можно не проводить усреднения. При этом в выражение для Ω следует подставить какое-либо характерное значение J_2 , например, $J_0 \approx (kT/2\hbar B)^{1/2}$, соответствующее максимуму распределения молекул по J_2 . В (16) и (17) надо подставить $\cos \alpha$, усредненное по всем J_2 [7].

$$\langle |\cos \alpha| \rangle = V\bar{B}/(V\bar{A} + V\bar{B}). \quad (21)$$

Дальнейшее упрощение расчетов зависит от величины Ω_0 , соответствующей $J_2 = J_0$. Если $\Omega_0 \gg |\omega_{nm}|$, то вкладом вращательной части возмущения в (16), (17) можно пренебречь

$$\eta_n = \sum_m \frac{B_m a_m \langle |\cos \alpha| \rangle^2}{x^3 (0,854 + a_m^2 x^2)}; \quad (22)$$

$$\Gamma_n = \sum_m \frac{\sqrt{\pi} B_m \langle |\cos \alpha| \rangle^2}{2x^4} \exp(-a_m^2 x^2). \quad (23)$$

Таблица 3

Сдвиг и уширение линий перехода $J=0-1$ NH₃ и $I_{01}-I_{10}$ H₂O* при возмущении тяжелыми многоатомными полярными молекулами.

Величины параметров сдвига Δv_c и уширения Δv_y даны в МГц/Тор.

Молекула	Возмущающий газ	Расчет, настоящая работа		Эксперимент из [12]	
		Δv_c	Δv_y	Δv_c	Δv_y
NH ₃	C ₆ H ₅ Cl	9,2	20,0	9,2	15
NH ₃	C ₃ H ₇ ON	17,5	38,0	14,3	30
H ₂ O	(C ₂ H ₅) ₃ SiH	5,5	11,8	4,4	9,0
H ₂ O	(C ₂ H ₅) ₃ GeH	4,7	10,0	4,0	9,5

*Эта линия считается в двухуровневом приближении.

Если $\Omega_0 \ll |\omega_{nm}|$, то в (16), (17) можно пренебречь величиной b , при этом выражения для η_n и Γ_n получаются из (22), (23), в которых надо принять $\langle |\cos \alpha| \rangle = 1$. Для этого случая в табл. 3 приведены результаты впервые выполненных расчетов сдвига и уширения при возмущении тяжелыми многоатомными полярными молекулами (очевидно, что при медленном вращении тип молекул не играет роли). Значения коэффициентов C_1 и C_2 даны в табл. 1 (c), (e). С теми же C_1 и C_2 в приближении $\Omega_0 \gg |\omega_{nm}|$ были рассчитаны Δv_c и Δv_y : для линий $J=0-1$ молекул типа симметричного волчка NH₃, PH₃, CH₃Cl, CH₃Br, CH₃I, CF₃H, CH₃CN, CH₃CCH; для NH₃ при возмущении газом PH₃ (т. е. для пары NH₃/PH₃) и для пары PH₃/NH₃; для пар CH₃Cl с CH₃F, CH₃Br и CH₃I; для линии $I_{01}-I_{10}$ H₂O в паре с NH₃ и PH₃. Экспериментальные данные по этим 15 линиям имеются в работах [7, 12], для них среднее значение величины параметра сдвига $|\Delta v_c^0| = 2$ МГц/Тор и среднее расхождение с расчетом $\delta v_c = 0,3$ МГц/Тор. Надежные измерения параметра уширения имеются для девяти линий, для которых среднее $\Delta v_y^0 = 20$ МГц/Тор и $\delta v_y = 2$ МГц/Тор. Расчеты, выполненные по теории Андерсона, для части из этих линий имеются в работах

[9, 13, 14]; они показывают примерно такое же расхождение с экспериментальными данными.

В случаях адиабатических и неадиабатических соударений и при $\Omega_0 \gg |\omega_{nm}|$ или $\Omega_0 \ll |\omega_{nm}|$ интеграл (1) может быть выражен аналитически. Если исследуемый переход можно рассматривать как двухуровневую систему с частотой ω_0 (например переход $I_{01} - I_{10}$ H₂O и инверсионные переходы NH₃ в основном колебательном состоянии) или рассматривать вращательные переходы ($J_1 - 1$) - J_1 с частотой $\omega = J_1 \omega_0$, то для адиабатических столкновений получим

$$\Delta v_c = \frac{0,4377 C_1 v^3 R^{2/5}}{k T \omega_0^2}, \quad (24)$$

$$R = 2B_m \langle |\cos \alpha| \rangle^2 = \frac{2LK_1^2}{J_1(J_1+1)} \text{ — для двухуровневых систем,}$$

$$R = \frac{4LK_1^2}{J_1(J_1^2-1)^2} \quad (R=L \text{ при } J_1=1) \text{ — для вращательных переходов}$$

$$L = \frac{2\sqrt{\pi} C_2 \mu_1^2 \mu_{\text{эфф}}^2 \omega_0^6}{3\hbar^3 v^6},$$

где $\mu_{\text{эфф}} = \mu_2 \langle |\cos \alpha| \rangle$ — эффективный дипольный момент возмущающей молекулы. Для неадиабатических столкновений в случае двухуровневых систем

$$\Delta v_c = \frac{1,27 C_1 v^3 R}{k T \omega_0^2} \left(\frac{\sqrt{0,854}}{x_0} + \arctg \frac{x_0}{\sqrt{0,854}} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (25)$$

$$x_0 = (1,3R)^{1/4},$$

а для вращательных переходов —

$$\begin{aligned} \Delta v_c = & \frac{1,27 C_1 v^3 L}{k T \omega_0^2} \left[\frac{\pi(3J_1^2 + K_1^2 - 1)}{4J_1^2 - 1} + \frac{4J_1^2(J_1^2 - K_1^2)}{4J_1^2 - 1} \arctg \frac{J_1 x_0}{\sqrt{0,854}} - \right. \\ & - \frac{(J_1 + 1)((J_1 + 1)^2 - K_1^2)}{2J_1 + 1} \arctg \frac{(J_1 + 1)x_0}{\sqrt{0,854}} - \\ & \left. - \frac{(J_1 - 1)((J_1 - 1)^2 - K_1^2)}{2J_1 - 1} \arctg \frac{(J_1 - 1)x_0}{\sqrt{0,854}} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$x_0 = (2,6L)^{1/4}.$$

При малых аргументах круговых тангенсов (26) перейдет в

$$\Delta v_c = \frac{1,27 C_1 v^3 I}{k T \omega_0^2} \left[\frac{\pi(3J_1^2 + K_1^2 - 1)}{4J_1^2 - 1} - \frac{4J_1 x_0}{\sqrt{0,854}} \right]. \quad (27)$$

Расхождение δ между численным счетом параметра сдвига и по формулам (24) — (26) для неадиабатических столкновений определяется величиной аргумента круговых тангенсов в (25) и (26), т. е. значениями R для двухуровневых систем и LJ_1^4 для вращательных переходов, $\delta < 10\%$ при R или $2LJ_1^4 < 0,05$ и $\delta < 2-3\%$ при R или $2LJ_1^4 < 0,01$; для адиабатических столкновений $\delta < 10\%$ при $R > 15$ и $\delta < 2-3\%$ при $R > 50$. Так, для линий в табл. 3 $R > 300$ и значения Δv_c вычисляются по формуле (24) с $\delta < 0,5\%$, при этом C_1 и C_2 такие же, что и при численном счете.

Из выражений (24), (25) и (27), считая x_0 достаточно малым,

можно получить зависимость сдвига от различных параметров: для адиабатических столкновений

$$\Delta v_c \sim \frac{(\mu_1 \mu_2 \zeta |\cos \alpha|)^{4/5} v^{3/5}}{T \omega_0^{2/5}},$$

для неадиабатических столкновений:

$$\Delta v_c \sim \frac{\omega_0}{T} \left(\frac{\mu_1 \mu_2 \zeta |\cos \alpha|}{v} \right)^{3/2} — \text{для двухуровневых систем},$$

$$\Delta v_c \sim \frac{(\mu_1 \mu_2 \zeta |\cos \alpha|) \omega_0^2}{T v^3} — \text{для вращательных переходов.}$$

Отсюда следует, в частности, степенная зависимость параметра сдвига от температуры $\Delta v_c \sim T^{-a}$, где $a=0,7$ при адиабатических столкновениях, а при неадиабатических $a \sim 1,75$ для двухуровневых систем и $a=2,5$ для вращательных переходов. Экспериментальные значения (см. [15]) для вращательных переходов $J=0-1$ равны: для NH_3 $a=0,8$ (здесь $R=61,6$, т. е. это случай адиабатических столкновений), для CH_3Cl , CH_3Br , CH_3I среднее $a=1,95$ (для них среднее значение $2LJ_1^4=0,007$ — это случай неадиабатических столкновений; более точный расчет по (26) дает $a=1,8$).

Согласно (24) для всех вращательных переходов с $K_1=0$ сдвиг равен нулю, кроме нижнего перехода $J_1=0-1$. Это согласуется с тем, что для адиабатических столкновений смещение уровней описывается статическим эффектом Штарка, который во втором порядке теории возмущений после усреднения по M равен нулю для всех уровней с $K=0$ кроме нижнего $J=0$ (см. [16]).

3. Отметим, что выбор формы импульса возмущающего поля не очень критичен. В дипольном приближении $E_z = \mu_0/r^3$, $r = (\rho^2 + v^2 t^2)^{1/2}$, поэтому

$$E_z = \frac{\mu_0}{\rho^3} (1 + t^2/\tau^2)^{3/2}, \quad \tau = \rho/v,$$

т. е. форма импульса в этом случае $f(t) = (1 + t^2/\tau^2)^{3/2}$. Для этой более естественной, чем гауссова, формы импульса I_1 и I_2 в (10) выражаются через модифицированные функции Бесселя первого порядка. Численный счет параметров сдвига и уширения для большого числа линий показал близость результатов для обеих форм импульса возмущающего поля.

Усреднение по максвелловскому распределению скоростей соударяющихся молекул, проведенное для значительного числа линий, дало результаты, близкие к случаю моноскоростного приближения не только для уширения, но и для сдвига линий. Это противоречит категорическому утверждению авторов работы [9], что во избежание больших ошибок при вычислении сдвига линий необходимо усреднение по скоростям.

В изложенном способе расчета сдвига и уширения линий упрощенная картина взаимодействия молекул при соударениях связана с необходимостью введения трех эмпирических коэффициентов (т. е. с увеличением числа «степеней свободы» по сравнению с теорией Андерсона), что компенсируется не только существенным упрощением расчетов, но и большей физической прозрачностью. Именно поэтому впервые удалось получить аналитические выражения для параметра сдвига, вычислить сдвиг и уширение при возмущении тяжелыми многоатомными поллярными молекулами любого типа (такие случаи никогда не считались в теории Андерсона из-за их сложности). Проделанные вычисления показали, что физической причиной трудностей расчета сдвига является

ся учет вклада в него вращательной части возмущения, так как для одной и той же молекулы этот вклад при соизмеримости частот вращения поля и исследуемых линий резко меняется от линии к линии не только по величине, но и по знаку. Этим объясняется, что при расчете сдвига таких линий в [9, 10] для согласования расчета с экспериментом авторам пришлось подобрать соответствующую методику определения минимального прицельного расстояния.

Кроме самостоятельного значения предложенный подход может оказаться полезным при дальнейшем развитии теории сдвига и уширения спектральных линий. Например, представляется возможность довольно просто вычислить матрицу столкновений для любых по величине возмущений и проверить корректность обычно применяемых методов, где ограничиваются вторым порядком теории возмущений. Эта задача находится в стадии решения.

Автор благодарен А. Ф. Крупнову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также В. Н. Маркову за помощь при проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson P. W. // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 647; Murphy J. S., Boggs J. E. // J. Chem. Phys. 1967. V. 47. P. 691; Frost B. S. // J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. 1976. V. 9. P. 1001; Mehrotra S. C., Boggs J. E. // J. Chem. Phys. 1977. V. 66. P. 5306.
2. Крупнов А. Ф., Сквортцов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 3. С. 284; Крупнов А. Ф., Мельников А. А., Сквортцов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 6. С. 625.
3. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юков Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий.—М.: Наука, 1979.
4. Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров.—М.: Физматгиз, 1963.
5. Ландау Л. Д., Либкиц Е. М. Механика.—М.: Физматгиз, 1958.
6. Справочник по специальным функциям.—М.: Наука, 1979.
7. Белов S. P., Казаков V. P., Киринов A. F. et. al. // J. Mol. Spectr. 1982. V. 94. P. 264.
8. Белов С. П., Крупнов А. Ф., Мельников А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 6. С. 718.
9. Buffa G., Tarrini O. // J. Mol. Spectr. 1983. V. 101. P. 271.
10. Baldacchini G., Marchetti S. et. al. // J. Chem. Phys. 1982. V. 76. P. 5271.
11. Clar H. J., Schieder R. et. al. // J. Mol. Structure. 1988. V. 190. P. 447.
12. Belov S. P., Krupnov A. F. et. al. // J. Mol. Spectr. 1983. V. 101. P. 258.
13. Hom R. C. Thesis. Harvard University. USA. 1978.
14. Wensink W. A. Thesis. University Utrecht. Netherlands. 1979.
15. Белов С. П., Марков В. Н., Крупнов А. Ф. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28 № 8. С. 1067.
16. Таунс Ч., Шавлов А. Радиоспектроскопия.—М.: ИЛ, 1959.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 сентября 1989 г.

SIMPLIFIED CALCULATION OF PRESSURE SHIFT AND BROADENING OF MOLECULAR LINES

V. A. Skvortsov

The method is suggested of calculation of the pressure shift and broadening of molecular spectral lines, which is essentially simplified as compared with methods based on semiclassical impact Anderson's theory, only classical description of molecules of perturbing gas is obtained as a result, a difference between calculation and the experiment has been found for large number of lines and is proved to be almost the same as for Anderson's methods. The shift and broadening in perturbation by heavy polyatomic polar molecules are calculated. Analytical expressions for shift parameter in some cases are obtained.

УДК 537.312.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ И НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ

А. А. Белов, А. В. Степанов, О. В. Лопатников

Предложена и апробирована методика исследования флюктуаций в конденсаторах, основанная на использовании их нелинейных свойств. Методика позволяет получить информацию о шумах диэлектрика оез по-мех, вызванных внешними факторами, не влияющими на нелинейные свойства конденсаторов.

Низкочастотные флюктуации в разнообразных радиофизических устройствах и материалах — резисторах, транзисторах, магнитных материалах, электролитах и др. — являются предметом интенсивного исследования в течение длительного времени. Вместе с тем чрезвычайно мало работ посвящено экспериментальному исследованию флюктуаций в диэлектриках и конденсаторах и разработке методов таких исследований. Можно указать лишь работы [1, 2], в которых низкочастотные флюктуации в конденсаторах измерялись генераторным методом. При использовании этого метода исследуемый конденсатор включается в колебательный контур генератора и исследуются флюктуации выходного сигнала генератора. Чувствительность этого метода невысока и в значительной степени ограничена шумами других элементов генератора, неконтролируемыми изменениями паразитных емкостей генератора и регистрирующей системы и т. п. Кроме того, с помощью этого метода трудно выделить отдельные составляющие флюктуаций в конденсаторе (например, флюктуации в диэлектрике, флюктуации в других элементах конденсатора и пр.).

В данной работе флюктуации в конденсаторах исследованы с помощью оригинальной методики, позволяющей регистрировать лишь флюктуации, обусловленные процессами в диэлектрике или на его поверхности. Поэтому такие исследования могут представлять интерес как для радиофизики, так и для физики диэлектриков.

Методика исследования. Методика основана на использовании нелинейных свойств диэлектрика, используемого в конденсаторе. Нелинейность емкости промышленных конденсаторов исследовалась в [3], где показано, что емкость конденсаторов с диэлектриком из слюды, полистирола и фторопласта растет с увеличением приложенного напряжения приблизительно по квадратичному закону $C(u) = C_0(1+\alpha u^2)$. При изменении напряжения от нуля до рабочего напряжения емкость слюдяного и фторопластового конденсаторов увеличивается на $1 \cdot 10^{-2}\%$, а емкость полистиролового конденсатора — на $4 \cdot 10^{-2}\%$. Экспериментально было установлено, что при многократном изменении напряжения на конденсаторе от $-U_{\text{раб}}$ до $U_{\text{раб}}$ и обратно зависимость емкости конденсатора от напряжения испытывает случайные изменения (рис. 1, см. на вклейке). Эта неповторяемость зависимости емкости от напряжения обусловлена случайными процессами в диэлектрике, например, процессами, сопровождающими движение заряженных частиц в диэлектрике, или процессами на границе диэлектрик — электроды.

Качественное объяснение нелинейных свойств конденсаторов и флюктуаций их параметров можно дать на основе известных представ-

лений о механизмах поляризаций и электропроводности диэлектриков. При невысоких значениях температуры электропроводность диэлектрика связана с движением слабозакрепленных ионов, которые вследствие теплового возбуждения могут двигаться уже в отсутствие электрического поля. Поле только упорядочивает их движение. Движение ионов создает объемные заряды и приводит к росту измеренного значения емкости, если измерения проводятся в квазистатическом режиме. С увеличением напряженности электрического поля проводимость диэлектрика увеличивается, что сопровождается увеличением емкости. Таким образом, нелинейность емкости может быть связана с процессами электропроводности.

Число подвижных носителей заряда в диэлектрике флюктуирует, поэтому флюктуируют и измеренные значения емкости и проводимости конденсатора. Экспериментальное исследование флюктуаций емкости, вызываемых описанным механизмом, может дать существенную информацию о процессах в диэлектрике. Однако применение традиционных методик не дает возможности выделить эту составляющую флюктуаций из общего шума конденсатора.

Экспериментальное исследование флюктуаций, обусловленных нестационарностью условий движения зарядов в диэлектрике, можно проводить, используя его нелинейные параметры. Вследствие нелинейности диэлектрика спектр тока, проходящего через конденсатор, к которому приложено гармоническое напряжение, должен содержать не только составляющую с частотой приложенного к конденсатору напряжения, но и высшие гармоники этой частоты. Флюктуации амплитуд и фаз высших гармоник тока должны быть связаны с флюктуациями проводимости диэлектрика. Таким образом, исследование флюктуаций амплитуд и фаз высших гармоник тока, порождаемых конденсатором, к которому приложено гармоническое напряжение, дает возможность исследовать флюктуации в диэлектрике конденсатора.

В отсутствие флюктуаций зависимость проводимости диэлектрика от напряжения должна в первом приближении описывать четной функцией, поэтому в спектре тока через конденсатор в отсутствие флюктуаций должны были бы быть только нечетные гармоники. На практике из-за флюктуаций четность зависимости проводимости от напряжения нарушается и в спектре тока должны появляться четные гармоники. Они представляют особый интерес для экспериментального исследования флюктуаций, так как среднее значение амплитуд четных гармоник равно нулю, а это дает возможность использовать аппаратуру со значительным усилением. Наибольшая из четных гармоник — вторая. Если к конденсатору приложено гармоническое напряжение $u = A \cos \omega t$ с амплитудой A и частотой ω , вторую гармонику тока можно представить выражением

$$i_2 = I_2(t) \cos [2\omega t + \varphi_2(t)], \quad (1)$$

где амплитуда $I_2(t)$ и фаза $\varphi_2(t)$ изменяются во времени по случайному закону. Как было показано выше, среднее значение амплитуды $I_2(t)$ равно нулю, фаза же $\varphi_2(t)$ может иметь отличное от нуля среднее значение. Поэтому $\varphi_2(t)$ можно записать в виде

$$\varphi_2(t) = \varphi_{20} + \psi(t),$$

где φ_{20} — среднее значение фазы второй гармоники тока, а $\psi(t)$ — случайная величина с нулевым средним значением.

Спектр флюктуирующего тока (1) располагается вблизи частоты 2ω , т. е. частоты второй гармоники напряжения, приложенного к конденсатору. Формально можно рассматривать этот ток как следствие эквивалентных флюктуаций емкости и сопротивления утечки конденсатора. В этом случае относительные флюктуации емкости и сопротивления утечки могут быть выражены через амплитуду и фазу флюктуа-

ционного тока (1). Расчет дает для относительных флюктуаций емкости и сопротивления утечки выражения

$$\frac{\delta C}{C_0} = \frac{I_2(t)}{\omega C_0 A} \sin \varphi_{20} \cos \omega t; \quad (2)$$

$$\frac{\delta R}{R_0} = \frac{2I_2(t)R_0}{A} \cos \varphi_{20} \cos \omega t. \quad (3)$$

Здесь C_0, R_0 — средние значения емкости и сопротивления утечки конденсатора, $\delta C/C_0$ и $\delta R/R_0$ — относительные флюктуации соответственно емкости и сопротивления. Из выражений (2) и (3) следует, что в отличие от спектра тока (1) спектры эквивалентных флюктуаций емкости и сопротивления утечки сосредоточены вблизи частоты ω приложенного к конденсатору напряжения.

Экспериментальная установка и результаты исследований. Основой экспериментальной установки для исследования флюктуации в диэлектрике конденсаторов была мостовая схема, образованная четырьмя конденсаторами (рис. 2). Три конденсатора имели воздушный диэлектрик, а четвертым являлся исследуемый конденсатор 1. На одну диагональ моста подавалось гармоническое напряжение генератора с частотой 400 кГц. Для того чтобы вторая гармоника в спектре выходного сигнала генератора не вносила погрешности в результаты измерений, между генератором и мостовой схемой был включен полосовой фильтр 2, пропускающий только основную гармонику генератора. Ко второй диагонали моста была подключена катушка индуктивности, которая вместе с конденсаторами моста образовывала колебательный контур, настроенный на удвоенную частоту генератора 3. Сигнал с этого колебательного контура через усилитель подавался на фазовый детектор 4, с помощью которого выделялись амплитудные флюктуации квадратурных составляющих второй гармоники на выходе моста. Далее эти низкочастотные флюктуации анализировались с помощью коррелометра Хб-4 7 и анализатора спектра СК4-56 8. Мост тщательно балансировался для того, чтобы сигнал генератора, имеющий большую амплитуду, не перегружал канал регистрации второй гармоники. При этом вторая гармоника, генерируемая исследуемым конденсатором, не подавлялась.

Расчет второй гармоники напряжения на выходе мостовой схемы приводит к соотношению

$$u_2 = \frac{1}{8} QA \left(\frac{\delta C}{C_0} \cos 2\omega t + \frac{\delta R}{R_0} \sin 2\omega t \right), \quad (4)$$

где относительные флюктуации $\delta C/C_0$ и $\delta R/R_0$ определены выражениями (2) и (3), Q — добротность колебательного контура, включенного на выходе измерительного моста. Минимальное напряжение на выходе моста, которое можно было зарегистрировать измерительным трактом при полосе анализатора спектра, равной 10 Гц, составляло $2 \cdot 10^{-8}$ В. В результате при $A = 10^2$ В и $Q = 10^2$ чувствительность установки составляла $(\delta C/C_0)^2_{\min} \approx 4 \cdot 10^{-22}$. Это на пять порядков лучше, чем в [2, 3].

Были исследованы промышленные конденсаторы с диэлектриком из слюды (типа КСО), полистирола (типа ПСО) и фторопласта (типа ФТ) с различными значениями рабочего напряжения конденсатора U_p . Амплитуда переменного напряжения с частотой 400 кГц, воздействующего на конденсатор, варьировалась от 10 до 100 В. Измерялись низкочастотные флюктуации амплитуды второй гармоники напряжения с частотой 800 кГц, и с помощью соотношения (4) рассчитывались относительные флюктуации амплитуд первых гармоник емкости $\delta C/C_0$ и сопротивления утечки $\delta R/R_0$.

Результаты измерений спектральной плотности флуктуаций емкости и сопротивления утечки представлены на рис. 3 (сплошная кривая и крестики $S_{\delta C/C}$, пунктирная и треугольники — $S_{\delta R/R}$). В области частот ниже 100 Гц спектры флуктуаций имели вид $1/f^{\gamma}$, а на более высоких частотах выходили на плато, обусловленное шумом экспериментальной установки. Для всех исследованных конденсаторов флуктуации емкости и сопротивления утечки имели приблизительно одинаковую величину. Показатель спектра γ для флуктуаций емкости ($\gamma \approx 1,0 \div 1,4$) был больше, чем показатель γ для флуктуаций сопротивления утечки ($\gamma \approx 0,8 \div 1,1$). Такое соотношение наблюдалось для всех исследованных конденсаторов. Распределение флуктуаций, изменившееся с помощью коррелометра X6-4, было нормальным.

Установлено, что относительные флуктуации емкости и сопротивления утечки не зависят от амплитуды внешнего переменного напряжения, приложенного к конденсатору. Это означает, что наблюдаемые нами флуктуации параметров конденсаторов не вызваны действием приложенного к конденсатору высокочастотного напряжения, а имеют место и в отсутствие этого напряжения. Высокочастотное напряжение только выявляет эти флуктуации.

Наибольшим уровнем флуктуаций обладали слюдяные конденсаторы, наименьшим — конденсаторы с диэлектриком из фторопласта (примерно на порядок ниже). Эти результаты согласуются с данными работы [1]. Однотипные конденсаторы имели значительный разброс уровня флуктуаций. Так, для слюдяных конденсаторов наибольшее отклонение уровня флуктуаций от среднего значения составляло 50%. Конденсаторы с большим значением рабочего напряжения обладали меньшим уровнем флуктуаций. Это может быть связано с тем, что конденсаторы с большим рабочим напряжением имеют увеличенные объем и площадь поверхности диэлектрика. Независимо от механизма шумообразования (объемного или поверхностного) это должно приводить к уменьшению относительных флуктуаций параметров.

Было установлено, что уровень флуктуаций не зависит от величины дополнительного постоянного напряжения, прикладываемого к конденсатору. Это также согласуется с представлением о том, что флуктуации параметров конденсаторов вызваны процессами в диэлектрике, которые не зависят от внешнего поля (по крайней мере, при значениях напряженности поля, меньших напряженности поля пробоя диэлектрика).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочкин Г. Н., Мальцев А. А., Якимов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 1. С. 126.
2. Мальцев А. А., Якимов А. В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1975. Т. 18. № 8. С. 113.
3. Белов А. А., Вахрамеев А. Н. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 925-В88. Деп. от 3 февраля 1988 г.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
9 ноября 1989 г.

NONLINEAR BEHAVIOUR AND FLUCTUATIONS IN CAPACITORS

A. A. Belov, A. V. Stepanov, O. V. Lopatnikov

The method of capacitor noise measurement has been developed and experimentally tested. It utilizes nonlinear properties of capacitor and can extract dielectric noise from any external interference, which does not affect the nonlinearity of capacitor.

УДК 52—77;537.87;621.371

ПЕРЕНОС ПОЛЯРИЗАЦИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

A. V. Кукушкин, M. P. Ольяк

Для произвольного поля излучения, прошедшего слой магнитоактивной плазмы со статистически однородными флуктуациями электронной концентрации, получены аналитические выражения для матрицы когерентности и параметров Стокса в режиме слабых и сильных флуктуаций. Обсуждаются масштабы пространственной корреляции обыкновенной и необыкновенной волн в режиме слабых и сильных флуктуаций.

Исследованию переноса поляризации космического излучения посвящено чрезвычайно много работ в связи с важностью этого вопроса для интерпретации экспериментальных данных. Основные результаты этих работ и астрофизические аспекты данной задачи изложены, например, в [1–3]. В [4, 5] получены уравнения переноса поляризации при распространении излучения в случайно-неоднородной плазме. В [6] исследованы параметры Стокса радиоизлучения, прошедшего случайный фазовый экран.

Для полного анализа физических свойств космических радиоисточников зачастую необходимы интерферометрические измерения с учетом поляризации. В этой связи представляет интерес исследование пространственной когерентности параметров Стокса.

В настоящей работе получены решения уравнений для матрицы когерентности произвольного поля излучения, прошедшего слой магнитоактивной плазмы со статистически однородными флуктуациями электронной концентрации. Аналитические выражения для матрицы когерентности и параметров Стокса получены для режима слабых и сильных флуктуаций волнового поля методом фейнмановских интегралов по траекториям.

1. Рассмотрим следующую задачу. Пусть на входе в слой случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы задана матрица когерентности поля излучения $S_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha(\mathbf{p}_1, 0) E_\beta^*(\mathbf{p}_2, 0) \rangle$, где $\mathbf{p}_{1,2}$ — векторы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (вдоль оси z), $\mathbf{p} = \{x, y\}$, α, β — пробегают значения x, y , угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по микроскопическим характеристикам поля излучения (фактически — временное усреднение за интервал $T \gg 1/\Delta f \gg f_0^{-1}$, где f_0 , Δf — центральная частота и ширина полосы регистрируемых частот) и ансамблю реализаций среды. Волну с произвольной поляризацией разложим по базису нормальных волн с правой и левой круговой поляризацией

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_{-1} + E_l \mathbf{e}_{+1}, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_{\mp 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)$, и выразим параметры Стокса через компоненты матрицы когерентности:

$$I = \frac{c}{8\pi} \langle |E_r|^2 + |E_l|^2 \rangle,$$

$$Q = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \langle E_r E_l^* \rangle, \quad (2)$$

$$U = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{Im} \langle E_r E_l^* \rangle,$$

$$V = \frac{c}{8\pi} \langle |E_r|^2 - |E_l|^2 \rangle.$$

Для компонент матрицы когерентности следует система уравнений

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial \Gamma_{\perp}}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_{\perp 1}}{k_+} - \frac{\Delta_{\perp 2}}{k_-} \right) \Gamma_{\perp} + k_0^2 \left(\frac{\delta \epsilon_1^+}{k_+} - \frac{\delta \epsilon_2^-}{k_-} \right) \Gamma_{\perp} = \\ = \frac{\alpha}{2} k_0^2 \left(\frac{I_+^+}{k_-} - \frac{I_-^-}{k_+} \right) \exp \left\{ -i \int_0^z dz' (k_+(z') - k_-(z')) \right\}, \\ 2ik_{\pm} \frac{\partial I^{\pm}}{\partial z} + (\Delta_{\perp 1} - \Delta_{\perp 2}) I^{\pm} + k_0^2 (\delta \epsilon_1^{\pm} - \delta \epsilon_2^{\pm}) I^{\pm} = \\ = -\frac{k_0^2}{2} \left\{ \frac{\alpha}{k_{\pm}} \left\{ \frac{\Gamma_{\perp}^*(\rho_2, \rho_1, z)}{\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z)} \right\} \exp \left[\mp i \int_0^z dz' (k_+(z') - k_-(z')) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^*}{k_{\pm}^*} \exp \left[\pm i \int_0^z dz' (k_+^*(z') - k_-^*(z')) \right] \left\{ \frac{\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z)}{\Gamma_{\perp}^*(\rho_2, \rho_1, z)} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = U_{\perp}^+(k_+, \rho_1, z) U_{\perp}^-(k_-, \rho_2, z); \quad (5)$$

$$I^{\pm} = I^{\pm}(\rho_1, \rho_2, z) = U_{\perp}^{\pm}(k_{\pm}, \rho_1, z) U_{\perp}^{\pm*}(k_{\pm}^*, \rho_2, z). \quad (6)$$

Величина U_{\perp}^{\pm} является комплексной амплитудой фурье-компоненты поля $E(\rho, z)$:

$$E_{l,r}(\rho, z) = U_{\perp}^{\pm}(k_{\pm}, \rho, z) \exp \left\{ i \int_0^z dz' k_{\pm}(z') \right\}, \quad (7)$$

$k_{\pm} = k_0 \sqrt{\langle \epsilon^{\pm} \rangle}$, $\epsilon^{\pm}(\rho_{1,2}, z)$, $\delta \epsilon^{\pm}(\rho_{1,2}, z) = \delta \epsilon_{1,2}^{\pm}$ — суть детерминированная и случайная компоненты тензора диэлектрической проницаемости для левополяризованной и правополяризационной волн, $|\delta \epsilon^{\pm}| \ll \langle \epsilon^{\pm} \rangle$.

Для ϵ^{\pm} следует выражение

$$\epsilon^{\pm} = 1 - \frac{v(1+is)^2 - v^2(1+is) - (1/2)uv \sin^2 \theta \mp v\sqrt{u}(1+is-v) \cos \theta}{(1+is)^3 - u(1+is) - v(1+is)^2 + uv \cos^2 \theta}. \quad (8)$$

Тогда для параметра α в (3), (4) можно записать

$$\alpha = -\frac{uv \sin^2 \theta}{(1+is)^3 - u(1+is) - v(1+is)^2 + uv \cos^2 \theta}. \quad (9)$$

Здесь $u = \omega_H^2/\omega^2$, $v = \omega_p^2/\omega^2$, $s = v_{\text{эфф}}/\omega$, ω_H , ω_p — гиротропная и плазменная частоты соответственно, $v_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений между электронами, θ — угол между вектором напряженности магнитного поля \mathbf{H} в среде и осью z . Считаем, что вектор \mathbf{H} детерминирован и расположен в плоскости y, z .

Получим решения уравнений (3), (4) в нулевом приближении при $\alpha=0$, а затем оценим поправочные члены. При вычислении компонент

Матрицы когерентности члены, обусловленные поглощением за счет соударений между электронами, мы не выписываем, но при нахождении параметров Стокса учтем, что ϵ^\pm и $\delta\epsilon^\pm$ могут быть комплексными, и оценим соответствующие члены, характеризующие поглощение.

Для Γ_\perp решение можно представить в виде фейнмановского интеграла по траекториям:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_\perp \rangle = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 p'_1 d^2 p'_2 P_0(p'_1, p'_2, \omega) \iint DR(z) Dp(z) \times \\ & \times \exp \left\{ iK \int_0^z dz' \frac{dR(z')}{dz'} \frac{dp(z')}{dz'} + \frac{iq}{2} \int_0^z dz \times \right. \\ & \left. \times \left[\left(\frac{dR(z')}{dz'} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dp(z')}{dz'} \right)^2 \right] - D_S z - \Phi_S[p(z), z] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $K = (1/2)(k_+ + ik_-)$, $q = k_+ - k_-$.

На траектории $R(z')$, $p(z')$ наложены условия $R(0) = R_0 = (1/2)(p'_1 + p'_2)$, $R(z) = R = (1/2)(p_1 + p_2)$, $p(0) = p_0 = p'_1 - p'_2$, $p(z) = p = p_1 - p_2$; $D_S z$ — дисперсия флуктуаций разности фаз обычновенной и необыкновенной волны:

$$D_S z = \frac{1}{8} \frac{z L_0}{\epsilon^+ \epsilon^-} [K^2 \sigma_e^2 - K q (\sigma_e^2 - \sigma_E^2) + q^2 \sigma_E^2]. \quad (11)$$

При этом

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 \approx & \left[1 - \frac{\omega_p^2 - (1/2)\omega_H^2(1 + \cos^2 \theta)}{\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2} \right]^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N^2}, \\ \sigma_e^2 \approx & \frac{4\omega_H^2 \omega_p^4 \cos^2 \theta}{\omega^4 [\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2]^2} \frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N^2}, \\ \sigma_e^2 \approx & \left[1 - \frac{\omega_p^2 - (1/2)\omega_H^2(1 + \cos^2 \theta)}{\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2} + \frac{\omega_H \omega \cos \theta}{\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2} \right]^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$\langle (\delta N)^2 \rangle$ — дисперсия флуктуаций электронной концентрации, L_0 — внешний масштаб неоднородностей электронной концентрации, z — толщина слоя неоднородной плазмы.

В приближении марковского случайного процесса для структурной функции флуктуаций разности фаз обычновенной и необыкновенной волны вдоль «разностной» траектории $p(z')$ следует выражение

$$\Phi_E(0, \mathbf{x}_\perp) \approx \frac{K^2}{\epsilon^+ \epsilon^-} \int_0^z dz' \int d^2 \mathbf{x}_\perp \Phi_E(0, \mathbf{x}_\perp) [1 - \cos(\mathbf{x}_\perp p(z'))], \quad (13)$$

$\Phi_E(0, \mathbf{x}_\perp)$ — пространственный спектр флюктуаций «эффективной» диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon = (\delta\epsilon^+ + \delta\epsilon^-)/2$, \mathbf{x}_\perp — волновой вектор флюктуаций в плоскости x , y .

2. Введем поперечный радиус когерентности R_C соотношением

$$\Phi_S[R_C, z] = 1,$$

из которого следует, что R_C — это величина поперечного разнесения то-

чек наблюдения, на которой происходит декорреляция флуктуаций разности фаз.

Рассмотрим случай слабого рассеяния в среде, т. е. ситуацию, при которой справедливо неравенство

$$R_c \gg R_F, \quad (14)$$

где R_F — размэр зоны Френеля.

В этом случае существенный вклад в формирование полей в точках наблюдения $\{\rho_{1,2}, z\}$ дают невозмущенные траектории (решение уравнений движения для свободной частицы $(\delta v^\pm = 0)$):

$$R(\xi) = R_0 + \frac{R - R_0}{z} \xi, \quad \rho(\xi) = \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{z} \xi,$$

где $\xi \in (0, z)$. Для оценок области применимости неравенства (14) можно полагать $k_\pm \approx k_0 = 2\pi f_0/c$. В работах [7, 8] было показано, что режим слабых ненасыщенных флуктуаций для радиоволн метрового и дециметрового диапазона имеет место при рассеянии в межпланетной среде при больших элонгациях ($\phi > \pi/2$) и в ионосфере на частотах выше 30 МГц. Используя выводы, сделанные в [7, 8], и проинтегрировав по траекториям и по переменным ρ'_1, ρ'_2 в плоскости $z=0$, получим

$$\langle \Gamma_\perp(R, \rho, z) \rangle = \int d^3 n B(n) \exp\{iK n \rho + iqnR - (i/2)qn^2 z - D_s z - \Phi_S(\rho, z)\}. \quad (15)$$

Для вывода (15) потребовалось выполнение очевидного неравенства $R_c \gg \sqrt{qz}/K$, которое является более слабым, чем (14).

Аналогичные выкладки дает для $I^\pm(\rho_1, \rho_2, z)$ выражение

$$\begin{aligned} \langle I^\pm(\rho_1, \rho_2, z) \rangle &= \langle I^\pm(\rho, z) \rangle = \int d^2 n B^\pm(n) \times \\ &\times \exp\{i(K \pm q/2)n\rho - (K \mp q/2)^2 \Phi_S^\pm(\rho, z)/K^2\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Phi_S^\pm(\rho, z) = \frac{K^2}{\varepsilon^+ \varepsilon^-} \int_0^z dz' \int d^3 k_\perp \Phi_{\pm}(0, k_\perp) [1 - \cos(k_\perp \rho)].$$

В (15), (16) введены поляризационные распределения радиояркости $B(n)$, $B^\pm(n)$:

$$\begin{aligned} B(n) &= \int d^2 \rho'_1 \int d^2 \rho'_2 \Gamma_\perp(\rho'_1, \rho'_2, 0) \exp(-ik_+ n \rho'_1 + ik_- n \rho'_2), \\ B^\pm(n) &= \int d^2 \rho'_1 \int d^2 \rho'_2 I^\pm(\rho'_1, \rho'_2, 0) \exp(-ik_\pm n \rho'_1 + ik_\pm n \rho'_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Имея компоненты матрицы когерентности (15), (16), можно, используя (2), получить выражения для параметров Стокса в виде интегралов от фурье-компонент поляризационных распределений радиояркости $B(n)$, $B^\pm(n)$ с учетом поглощения излучения за счет столкновений между электронами:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} I(\rho, z) \\ V(\rho, z) \end{aligned} \right\} &\approx \frac{c}{8\pi} \int d^3 n \left\{ B_-(n) \exp\left[-iqn\rho/2 + q_1 z + q_2 nR - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(K+q/2)^2}{K^2} \Phi_S^-(\rho, z)\right] \pm B^+(n) \exp\left[iqn\rho/2 - q_1 z - q_2 nR - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(K-q/2)^2}{K^2} \Phi_S^+(\rho, z)\right] \right\} \exp\left[iKn\rho - K_1 z - K_2 nR\right]; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{cases} U(\rho, z) \\ Q(\rho, z) \end{cases} \approx \frac{c}{4c} \int d^3 n |B(n)| \exp \left\{ -D_S z - \Phi_S(\rho, z) - K_I z i K_n \rho - K_I n R \right\} \begin{cases} \sin C(\rho, R, K, q) \\ \cos C(\rho, R, K, q) \end{cases}, \quad (19)$$

где

$$K = (1/2) \operatorname{Re}(k_+ + k_-), \quad K_I = \operatorname{Im}(k_+ + k_-),$$

$$q = \operatorname{Re}(k_+ - k_-), \quad q_I = \operatorname{Im}(k_+ - k_-),$$

$$C(\rho, R, K, q) = q n R - (1/2) q n^2 z + q z + \beta(\rho, z) + 2\chi_0,$$

$\beta(\rho, z) \approx 2v_{\text{эфф}}\omega_H^{-1}[D_S z + \omega_H^2 \omega^{-2} \Phi_s(\rho, z)]$, $2\chi_0$ — начальный угол поворота плоскости линейной поляризации.

Параметр $\beta(\rho, z)$ характеризует влияние мнимой части $\delta\omega^\pm$ на поворот плоскости линейной поляризации. Оценки $\beta(\rho, z)$ для радиодиапазона и реально возможных значений ρ дают основание считать, что и в ионосфере, и в межзвездной и межпланетной средах в силу малости $v_{\text{эфф}}/\omega$ (а именно это мы предполагаем при выводе (18), (19)) выполняются неравенства $\beta(\rho, z) \ll 1$ и $\beta(\rho, z) \ll qz$. Поэтому в дальнейшем влияние $\beta(\rho, z)$ на фарадеевское вращение учитывать не будем.

Рассмотрим выражения (18), (19), отражающие влияние среды на поляризацию излучения, прошедшего слой случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы, для точечного источника. В этом случае зависимость между параметрами Стокса I_0, Q_0, U_0, V_0 на входе в случайно-неоднородный слой и на выходе из него имеет вид

$$\begin{aligned} I(\rho, z) \approx & \left\{ I_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \Phi_S^+(\rho, z) - \frac{1}{2} \Phi_S^-(\rho, z) - q_I z \right] - \right. \\ & - V_0 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \Phi_S^+(\rho, z) - \frac{1}{2} \Phi_S^-(\rho, z) - q_I z \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Phi_S^+(\rho, z) - \frac{1}{2} \Phi_S^-(\rho, z) - K_I z \right\}, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} V(\rho, z) \approx & \left\{ V_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \Phi_S^+(\rho, z) - \frac{1}{2} \Phi_S^-(\rho, z) - q_I z \right] - \right. \\ & - I_0 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \Phi_S^+(\rho, z) - \frac{1}{2} \Phi_S^-(\rho, z) - q_I z \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Phi_S^+(\rho, z) - \frac{1}{2} \Phi_S^-(\rho, z) - K_I z \right\}; \end{aligned}$$

$$U(\rho, z) \approx \{U_0 \cos(qz) + Q_0 \sin(qz)\} \exp\{-D_S z - \Phi_S(\rho, z) - K_I z\}, \quad (20b)$$

$$Q(\rho, z) \approx \{Q_0 \cos(qz) - U_0 \sin(qz)\} \exp\{-D_S z - \Phi_S(\rho, z) - K_I z\}.$$

Первая пара соотношений (20) описывает возникновение поляризованного по кругу излучения из неполяризованного в случае, когда все начальные параметры Стокса, кроме I_0 , равны нулю. Вторая пара выражений (20) описывает поворот плоскости линейной поляризации. Множители $\exp[-\Phi_S(\rho, z)]$ и $\exp[-(1/2)\Phi_S^-(\rho, z) - (1/2)\Phi_S^+(\rho, z)] \approx \approx \exp[-\Phi_S(\rho, z)]$ определяют меру когерентности флукутаций волнового поля при разносе точек наблюдения, фактически они являются пе-

редаточными функциями рассеивающей среды и практически не зависит от величины магнитного поля. Эти члены обеспечивают подавление всех пространственных частот ρ/λ , превышающих пространственную частоту когерентности R_C/λ . Как известно, вращение плоскости поляризации (фарадеевское вращение) на угол $2\chi = qz$ обеспечивается интерференцией обычновенной и необыкновенной волн. Соответственно множитель $\exp(-Ds z)$ в (20б) определяет потерю когерентности при фарадеевском вращении за счет декорреляции флюктуаций фаз обычновенной волны. В отличие от экспоненциального фактора $\exp(-K_1 z)$, где K_1 — суммарный коэффициент поглощения обычновенной и необыкновенной волн, обусловленный соударениями, член $\exp(-Ds z)$ не приводит к потере энергии излучения, происходит лишь переход ее из когерентной составляющей в некогерентную.

Функции sh и ch в (20а) обеспечивают возникновение круговой поляризации как за счет разности коэффициентов поглощения лево- и правополяризованных волн (фактор $q_1 z$), так и за счет декорреляции флюктуаций фазы обычновенной и необыкновенной волн при разносе точек наблюдения.

Введем параметры ξ_l , ξ_c , характеризующие степень линейной и круговой поляризации фурье-компонент распределения радиояркости:

$$\xi_l = \sqrt{Q^2 + U^2}/I, \quad \xi_c = V/I. \quad (21)$$

Тогда из (20) следует, что

$$\begin{aligned} \xi_l(\rho, z) &\approx \frac{\xi_l^0 \exp(-Ds z)}{ch(B(\rho, z)) - \xi_c^0 sh(B(\rho, z))}, \\ \xi_c(\rho, z) &= \frac{\xi_c^0 - th(B(\rho, z))}{1 - \xi_c^0 th(B(\rho, z))}, \end{aligned} \quad (22a)$$

где ξ_l^0 , ξ_c^0 — значения ξ_l , ξ_c при $z=0$,

$$B(\rho, z) = (1/2) [\Phi_s^+(\rho, z) - \Phi_s^-(\rho, z)] - q_1 z. \quad (22b)$$

Как видно из (22а), степень линейной поляризации излучения убывает с увеличением толщины слоя, заполненного неоднородностями. Это происходит вследствие декорреляции флюктуаций фазы нормальных волн, что описывается членом $\exp(-Ds z)$, в то время как степень круговой поляризации при $\rho=0$ не изменяется. При учете поглощения убывание линейной поляризации усиливается фактором $[ch(q_1 z)]^{-1}$, а круговая поляризация возникает в среде (фактор $th(q_1 z)$), даже если $\xi_c^0 = 0$, за счет отличия коэффициентов поглощения нормальных волн. При разносе точек наблюдения декорреляция фаз нормальных волн на базе ρ также приводит к возникновению круговой поляризации. В этом случае степень линейной поляризации убывает как $\{ch[(1/2)(\Phi_s^+(\rho, z) - \Phi_s^-(\rho, z))]\}^{-1}$. В общем случае, когда существенными являются оба фактора — поглощение и рассеяние, степень круговой поляризации зависит от соотношения между коэффициентом декорреляции $(1/2)[\Phi_s^+(\rho, z) - \Phi_s^-(\rho, z)]$ и поглощением $q_1 z$, причем при $B(\rho, z) \rightarrow \pm \infty$ $\xi_c(\rho, z) \rightarrow \pm 1$.

3. Рассмотрим случай насыщенных флюктуаций, при котором выполняется неравенство $R_C \ll R_F$, противоположное (14). Как было показано в [7, 8], в этом случае поле в точке наблюдения формируется суперпозицией большого числа лучей. Физический объем каждого луча ограничен поперечным масштабом когерентности $\sim R_C$ и отделяет область синфазных значений поля. Линейные размеры этой области меняются случайным образом как вдоль отдельного луча, так и от луча

к лучу. Энергия рассеянного поля перераспределяется в области пространства, существенно большей, чем область, ограниченная зоной Френеля R_F . Характерный поперечный размер (R_s) этой области по порядку величины можно оценить как

$$R_s \sim z\sigma_s \approx R_F^2/R_C, \quad (23)$$

где $\sigma_s \sim (KR_C)^{-1}$ — эффективная ширина углового спектра рассеянных волн. Как показано в [9, 10], выражения для функции когерентности поля на одной поляризации оказываются одинаковыми в режиме сильных и слабых флуктуаций, во всяком случае в приближении марковского случайного процесса.

Таким образом, выражения (20а) для параметров Стокса $I(\rho, z)$ и $V(\rho, z)$ оказываются применимыми и для режима сильных флуктуаций. Поэтому рассмотрим недиагональные элементы матрицы когерентности $\langle E, E' \rangle$. Методика их вычисления для сильных флуктуаций фактически аналогична методике определения функции межчастотной корреляции полей на одной поляризации, которая изложена в работе [8]. Используя результаты этой работы для $\langle \Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) \rangle = \langle \Gamma_{\perp}(R, \rho, z) \rangle$, можно получить выражение

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{\perp} \rangle = & \frac{\exp(-D_s z)}{\cos(vz)} \int d^2 n B(n) \exp \left[iq_n R + \right. \\ & \left. + iK_n \rho - \frac{i}{2} q n^2 z + \frac{i}{2} \kappa v \operatorname{tg}(vz) \rho^2 \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где $\kappa = (K^2 - q^2/4)/q$, $v = \sqrt{2i\gamma q}$, $\gamma = (1/2)H_E''(0)$, $H_E(\rho) = H_E(\rho)$ — структурная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости плазмы, $\rho = |\rho|$. При выводе (24) предполагается квадратичная зависимость структурной функции $H_E(\rho) = \gamma\rho^2$. Как показано в [8], это справедливо при рассеянии волн дециметрового-декаметрового диапазона в межзвездной среде, когда радиус когерентности оказывается меньше внутреннего масштаба l_0 турбулентных флуктуаций диэлектрической проницаемости плазмы.

В выражении (24) и, соответственно, в параметрах Стокса U и Q есть два масштаба корреляции в пространстве волновых чисел обычной и необыкновенной волны. Первый масштаб определяется множителем $\exp(-D_s z)$ и обсуждался в п. 2. Второй характерный масштаб корреляции по q определяется множителем $(\cos(vz))^{-1}$. Этот член практически не зависит от времени усреднения и связан со стохастической многолучевостью в среде [8]. При $|vz| \gg 1$ $(\cos(vz))^{-1} \sim \exp(-\sqrt{q}\sigma_s^2)$, $\sigma_s^2 \sim \gamma z$. Длина когерентного цуга l_q волнового пакета, составленного из право- и левополяризованных волн, связана с разностью волновых чисел q соотношением $l_q \sim 1/q$. В то же время максимальное значение разности хода рассеянных волн l_s по порядку величины определено соотношением $l_s \sim z\sigma_s^2$. Отсюда следует, что параметр $q\sigma_s^2 = l_s/l_q$, т. е. определяет отношение разности хода рассеянных волн к длине когерентного цуга. При $l_s/l_q \ll 1$ рассеянные волны (обыкновенная и необыкновенная) складываются когерентным образом. В результате интерференции нормальных волн при $q\sigma_s^2 \ll 1$ для параметров Стокса $U(\rho, z)$ и $Q(\rho, z)$ точечного источника следует выражение

$$\begin{cases} Q(\rho, z) \\ U(\rho, z) \end{cases} = \begin{cases} \cos(2\chi_0 + qz) \\ \sin(2\chi_0 + qz) \end{cases} \sqrt{Q_0^2 + U_0^2} \exp[-D_s z - K^2 \gamma \rho^2 z], \quad (25)$$

где $2\chi_0$ — начальный угол поворота плоскости линейной поляризации.

При нулевой базе ($\rho=0$) и при выполнении неравенства $D_s z \ll 1$ интерференция нормальных волн приводит к фарадеевскому вращению

плоскости линейной поляризации на угол $2\chi = qz$, как и в случае слабых флуктуаций. Масштаб пространственного разнесения, на котором происходит разрушение интерференции и, как следствие, линейной поляризации (при $\xi_0 \neq 0$), равен радиусу когерентности R_C .

В другой предельной ситуации, когда $\sqrt{l_s/l_q} = \sqrt{qz\sigma_s^2} \gg 1$, для параметров Стокса U, Q имеем

$$\begin{cases} Q(p, z) \\ U(p, z) \end{cases} = \begin{cases} \cos(2\chi_0 + 2\chi(p, z)) \\ \sin(2\chi_0 + 2\chi(p, z)) \end{cases} 2\sqrt{Q_0^2 + U_0^2} \times \exp\{-D_s z - \sqrt{qz\sigma_s^2} - (1/2)K^2 p^2 \sqrt{\gamma/q}\}, \quad (26)$$

где

$$2\chi(p, z) = qz + \sqrt{qz\sigma_s^2} - (1/2)K^2 p^2 \sqrt{\gamma/q}. \quad (27)$$

Рассмотрим показатель экспоненты в (26). Первый член — $D_s z$ — определяет меру корреляции фаз обычной и необычной волн, приходящих из одного направления. Второй член — $\sqrt{l_s/l_q}$ — обусловлен декорреляцией фаз нормальных волн, приходящих из различных направлений в пределах угла рассеяния σ_s . Третий член — $K^2 p^2 \sqrt{\gamma/q}/2$ — определяет меру когерентности полей обычной и необычной волны при пространственном разнесении точек наблюдения. При этом в (26) появляется новый масштаб пространственной когерентности R_{eff} . Определим его соотношением

$$(1/2) K^2 \sqrt{\gamma/q} R_{eff}^2 = 1. \quad (28)$$

Учитывая определение l_q и l_s , введенное ранее, можно выразить R_{eff}^2 через длину когерентного цуга l_q и разность хода рассеянных волн l_s : $R_{eff}^2 = z/(K^2 \sqrt{l_s l_q})$. Заметим, что $R_{eff}^2 \gg R_C^2$. Это можно объяснить следующим образом. Дополнительная случайная добавка $\sim l_s$ к оптической длине пути нормальной волны одного типа в точке с координатами $\{p_1, z\}$ частично компенсируется тем, что оптическая длина пути волны другого типа, пришедшей в точку с координатами $\{p_2, z\}$, увеличивается на $\lambda z/l_q$ при наличии магнитного поля в среде распространения. Максимальная разность хода, при которой волны разной поляризации еще когерентны (l_q), возникает также при суперпозиции волн одной поляризации, разность углов прихода которых составляет величину $\theta_q \sim \sqrt{l_q/z}$. Тогда R_{eff} в (28) можно представить в виде произведения R_C и $R_q \approx (K\theta_q)^{-1}$:

$$R_{eff} = (R_C R_q)^{1/2}. \quad (29)$$

Таким образом, в случае сильных флуктуаций уменьшается доля линейно поляризованной компоненты в рассеянном излучении. В то же время при разносе точек наблюдения имеет место эффект усиления пространственной когерентности этой компоненты в сравнении со случаем слабых флуктуаций, так как $R_{eff}/R_C = \sqrt{l_s/l_q} \gg 1$.

4. В общем случае для магнитоактивной плазмы необходимо определять параметры Стокса через компоненты матрицы когерентности $\langle D_\alpha(p_1, z) D_\beta^*(p_2, z) \rangle$ вектора электрической индукции $D_{r,l}$. Однако для реальных радиоастрономических наблюдений при выполнении неравенства $\omega_h, \omega_p, \nu_{\text{эфф}} \ll \omega$ можно ограничиться использованием выражений (2) и следующих из них формул для параметров Стокса. В работе оценивались поправки к параметрам Стокса за счет правой части уравнений (3), (4). Результаты анализа сводятся к следующему. Поправку $I^{(1)} \sim \alpha$ к параметру I можно считать малой при выполнении неравенства

$$\omega_H^2 \omega_p^2 \sin^2 \theta / \omega^4 \ll 1, \quad (30)$$

которое автоматически выполняется при распространении радиоволн в космической плазме и ионосфере. Для линейно поляризованного излучения поправки к Q и U также малы при выполнении неравенства (30), однако для случая излучения с произвольной поляризацией и ориентацией магнитного поля поправки $Q^{(1)}$, $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ могут быть сравнимы с Q , U , V и даже превышать их по величине. В частности, при квазипоперечном распространении ($\theta \sim \pi/2$) неполяризованного излучения в магнитоактивной плазме линейно поляризованные компоненты возникают только в квадратичных по магнитному полю членах $Q^{(1)}$, $U^{(1)}$ (эффект Коттон-Мутона). В этом случае ряды теории возмущений для Q и U сходятся к $Q^{(1)}$, $U^{(1)}$ при выполнении неравенства (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Растворение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
2. Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме. — М.: Наука, 1977.
3. Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Слантьев Н. А. Растворение и поляризация излучения в космической среде. — М.: Наука 1979.
4. Ерухимов Л. М., Кирш П. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 12. С. 1783.
5. Spangler S. R. // Astrophys. J. 1982. V. 261. P. 310.
6. Тамойкин В. В., Замек И. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 1. С. 31.
7. Кукушкин А. В., Литвиненко Л. Н. Материалы IX Всесоюзной школы по дифракции и распространению радиоволн. — Казань, 1988.
8. Кукушкин А. В. Препринт РИАН УССР № 30. — Харьков, 1989.
9. Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И. // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 481.
10. Dashen R. // J. Math. Phys. V. 20(5). 1979. P. 894.

Радиоастрономический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
17 июля 1989 г.

TRANSFER OF RADIO EMISSION POLARIZATION IN A RANDOM MAGNETOACTIVE PLASMA

A. V. Kukushkin, M. R. Ol'yak

Analytic expressions for the coherence matrix and Stokes parameters for the regime of weak and strong fluctuations are obtained for a field passed through a magnetoactive plasma layer with the statistically uniform fluctuations of electron density. Spatial correlation scales of ordinary and extraordinary waves are discussed for weak and strong fluctuations.

УДК 538.574; 551.463

ОСОБЕННОСТИ ДИАГНОСТИКИ МЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВОЛНОВОДА С ПОМОЩЬЮ СЛОЖНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

И. Р. Каратникова, А. Г. Нечаев, А. И. Хилько

Обсуждаются особенности рассеяния сложных сигналов на меняющихся во времени случайных неоднородностях волновода. Показано, что временная изменчивость неоднородностей может приводить к существенному ослаблению рассеянного сигнала по сравнению с приближением «замороженных» неоднородностей. Причем в «просветной» схеме зондирования для этого необходимо излучать достаточно длинные импульсные последовательности, а в однопозиционной — сигналы, имеющие после согласованной обработки достаточно большую длительность. Рассмотрены возможности определения параметров частотного спектра для часто встречающихся типов неоднородностей.

Исследование различных аспектов рассеяния полей в случайно-неоднородных средах чаще всего осуществляется в предположении «квазизамороженности» неоднородностей [1–5]. Вместе с тем в ряде практических ситуаций, например в гидро- и атмосферной акустике, характерные времена флуктуаций могут быть сравнимы с периодом модуляции сигнала [1, 2, 5]. В этом случае «резонансный» характер рассеяния проявится для гармонических полей в случайных доплеровских смещениях несущей частоты, приводящих к существенному уширению спектра рассеянного поля, а для сложных широкополосных сигналов — в заметном рассогласовании рассеянного сигнала с излученным. Указанное явление имеет важное значение при зондировании неоднородностей сложными импульсами [6, 7], поскольку может привести к существенному ослаблению рассеянного сигнала при согласованном приеме и тем самым к ухудшению отношения интенсивности информационного сигнала к интенсивности шума. С другой стороны, это явление может быть использовано для определения характеристик временной изменчивости неоднородностей.

Обсудим особенности диагностики меняющихся во времени случайных неоднородностей волновода с помощью сложных импульсных сигналов. С этой целью рассмотрим акустический волновод с полем скорости звука $c(z) + \delta c(x, y, z, t)$, где $(x, y, z) = (\mathbf{r}, z)$ — декартова система координат. Считаем, что волновод ограничен абсолютно мягкой неровной поверхностью $z = \zeta(x, y, t)$ и поверхностью $z = D$ с произвольным коэффициентом отражения. Пусть источник звука, расположенный в точке $(\mathbf{r}_s, z_s) = (0, 0, z_s)$, излучает импульс $\tilde{F}(t) \exp(i\omega_* t)$, длительность которого T , а ширина частотного спектра Δf . В приемной системе, расположенной в точке $(\mathbf{r}_R, z_R) = (a, 0, z_R)$, принятый сигнал согласованно обрабатывается — сворачивается с эталонным (комплексно-сопряженным излученному) сигналом [8]. Полагая излученное поле достаточно узкополосным, коэффициенты возбуждения мод источником $A_s(n)$ и приемником $A_R(n)$ в полосе Δf считаем не зависящими от частоты. Предположим, что флуктуации скорости звука $\delta c(|\delta c|/c \ll 1)$ и возмущения в рельфе поверхности ζ статистически независимы, стационарны, однородны по горизонтальным переменным (x, y) и доста-

точно медленно меняются во времени: $T_{c,\zeta} \gg l_{c,\zeta}/c$, ω_*^{-1} , где l_c , l_ζ и T_c , T_ζ — радиусы пространственной (по x , y) и временной корреляции неоднородностей. Кроме того, будем считать, что возвышения рельефа поверхности удовлетворяют условию малости параметра Рэлея [2, 4]. В рамках принятых предположений фурье-трансформанта комплексной амплитуды однократно рассеянной компоненты поля $\tilde{P}^{(1)}(x, y, z, t) \times \exp(i\omega_* t)$ на выходе приемной системы будет иметь вид [3, 4, 6]

$$P_R^{(1)}(\omega) = i \sum_{v,m=1}^N A_s(v) A_R(m) \iint_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' b_v^m(r', \omega') F(\omega - \omega') \times \\ \times H_0^{(2)}[h_m(\omega + \omega_*) |r_R - r'|] H_0^{(2)}[h_v(\omega - \omega' + \omega_*) |r_s - r'|]; \quad (1)$$

$$b_v^m(r', \omega') = \frac{1}{8\pi} \varphi'_m(0) \varphi'_0(0) \zeta(r', \omega') + \frac{h^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz'}{c^3(z)} \varphi_v(z') \varphi_m(z') \delta c(r', z', \omega'), \quad (2)$$

где $\varphi_m(z)$ и $h_v(\omega)$ — соответственно собственные функции волновода и постоянные распространения мод при $\delta c = 0$ и $\zeta = 0$, $H_0^{(2)}(\xi)$ — функция Ганкеля второго рода, $h = \omega_*/c$ — волновое число звука на оси волновода, $c = \min c(z)$, N — число мод. Используя (1) и (2), для интенсивности сигнала после согласованного фильтра [8]

$$P_R(\tau, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega P_R^{(1)}(\omega) F^*(\omega - \Omega) \exp[-i(\Omega - \omega)\tau] \quad (3)$$

получим

$$\langle |P_R(\tau, \Omega)|^2 \rangle = \sum_{n,m,v,\mu=1}^N A_s(n) A_R(m) A_s^*(v) A_R^*(\mu) I_{nm}^{vv}(\tau, \Omega); \\ I_{nm}^{vv}(\tau, \Omega) = \frac{8}{\pi h^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 r}{r_1 r_2} \exp[i(h_v - h_n)r_1 + i(h_\mu - h_m)r_2] \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \times \\ \times W_{nm}^{vv} \left[\frac{h_n + h_v}{2} \frac{r_1}{r_1} - \frac{h_m + h_\mu}{2} \frac{r_2}{r_2}; \omega' \right] F_H \left(\tau - \frac{r_1}{v_n} - \frac{r_2}{v_m}; \omega' - \Omega \right) \times \\ \times F_H^* \left(\tau - \frac{r_1}{v_n} - \frac{r_2}{v_\mu}; \omega' - \Omega \right), \quad (4)$$

где $F_H(\tau, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) F^*(\omega - \Omega) \exp[-i(\Omega - \omega)\tau]$ — функция неопределенности излученного сигнала, $W_{nm}^{vv}(k_x, k_y, \omega)$ — спектр функции корреляции неоднородностей $\langle b_n^m(x_1, y_1, t_1) b_v^{\mu*}(x_2, y_2, t_2) \rangle$ по разностным переменным $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$ и $(t_1 - t_2)$, $v_n = (dh_n/d\omega)_{\omega_*}^{-1}$ — групповая скорость моды, $r_1 = r_R - r$, $r_2 = r - r_s$. Функция I_{nm}^{vv} описывает взаимную корреляцию компонент, полученных в результате рассеяния из моды n в моду m и из моды v в моду μ . Осуществляя усреднение (3) по пространственному масштабу, превышающему все горизонтальные масштабы интерференции мод $l_{nm} = 2\pi/|h_n - h_m|$, получим

$$\langle |P_R(\tau, \Omega)|^2 \rangle \simeq \sum_{n,m=1}^N |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 I_{nm}^{vv}(\tau, \Omega); \quad (5)$$

$$I_{nm}^{mn}(\tau, \Omega) = \frac{8}{\pi h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 r}{r_1 r_2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left| F_H \left(\tau - \frac{r_1}{v_n} - \frac{r_2}{v_m}, \omega - \Omega \right) \right|^2 W_{nm}^{mn} \left(h_n \frac{r_1}{r_1} - h_m \frac{r_2}{r_2}; \omega \right). \quad (6)$$

Из выражений (5), (6) видно, что интенсивность рассеянного сигнала определяется сверткой частотного спектра неоднородностей и квадрата модуля функции неопределенности излученного сигнала, а также зависит от формы пространственного спектра и положения рассеивающей области.

Заметим, что для очень коротких импульсов $T \ll T_c, T_\zeta$ вместо (6) можно записать

$$\tilde{I}_{nm}^{mn}(\tau, \Omega) \approx \frac{8}{\pi h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 r}{r_1 r_2} \left| F_H \left(\tau - \frac{r_1}{v_n} - \frac{r_2}{v_m}, -\Omega \right) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega W_{nm}^{mn} \left(h_n \frac{r_1}{r_1} - h_m \frac{r_2}{r_2}; \omega \right). \quad (7)$$

Формула (7) описывает случай статических или «замороженных» неоднородностей. На ее основе осуществляется диагностика пространственных масштабов флюктуаций [6, 7]. Чтобы описать влияние временной изменчивости неоднородностей на интенсивность рассеянного сигнала, введем величину

$$Q(\tau, \Omega) = \frac{\langle |P_R(\tau, \Omega)|^2 \rangle}{\langle |\bar{P}_R(\tau, \Omega)|^2 \rangle} = \frac{\sum_{n, m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 I_{nm}^{mn}}{\sum_{n, m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 \tilde{I}_{nm}^{mn}}, \quad (8)$$

которая будет показывать, насколько ослабляется интенсивность рассеянного сигнала по сравнению со случаем «замороженных» неоднородностей, имеющих точно такой же пространственный спектр.

Диагностика временных масштабов флюктуаций на основе формул (5)–(7) заключается в нахождении по измеренной величине Q параметров частотного спектра. Пространственный спектр при этом считается априорно известным или установленным из предшествующих измерений при $T \ll T_c, T_\zeta$. Ниже рассмотрим возможности диагностики временных масштабов флюктуаций для двух предельных схем наблюдения: «просветной» и однопозиционной. В однопозиционной схеме рассеянный сигнал, приходящий в приемную систему, формируется практически одной пространственной гармоникой спектра ($k \approx 2h$) [1–4], что принципиально позволяет определять дисперсионное соотношение для неоднородности и восстанавливать частотный спектр, варьируя частоту зондирующего поля. В «просветной» схеме источник и приемник разнесены, а неоднородности являются достаточно крупномасштабными ($l_c, l_\zeta \gg \lambda$), в силу чего рассеивающая область концентрируется вблизи отрезка прямой, соединяющей источник и приемник. В этом случае рассеянный сигнал формируется всем пространственным спектром неоднородностей [1–7], и для успешной диагностики необходимо дополнительно привлекать информацию о структуре частотного спектра флюктуаций.

1. В схеме совмещенного излучения и приема ($a=0$ и $r=r_2=-r_1$) из формулы (6) имеем

$$I_{nm}^{mn}(\tau, \Omega) \approx \frac{16}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi W_{nm}^{mn} [-(h_n + h_m) \cos \varphi; -(h_n + h_m) \sin \varphi; \omega] \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} |F_H(t - \tau, \omega - \Omega)|^2, \quad (9)$$

Рассмотрим импульсный сигнал с линейной частотной модуляцией (для определенности считаем излученную энергию неизменной при варьировании параметров импульса)

$$F(t) = \left(\frac{2}{\pi T^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{t^2}{T^2} + i \alpha t^2 \right], \quad (10)$$

имеющей функцию неопределенности

$$F_H(\tau, \Omega) = \exp \left[-\frac{\tau^2}{2T^2} - \frac{1}{2} \left(q \frac{\tau}{T} \frac{\Omega T}{2} \right)^2 + i \frac{\Omega \tau}{2} \right], \quad (11)$$

где $q = \alpha T^2 = \pi \Delta f T$ — база сигнала. При $\tau \gg T$ для ЛЧМ сигнала

$$J_1(\tau, \omega) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} |F_H((t - \tau), \omega)|^2 \approx \left(\frac{\pi}{1 + q^2} \right)^{1/2} \frac{T}{\tau} \exp \left[-\frac{\omega^2 T^2}{4(1 + q^2)} \right].$$

Подставляя (7) и (9) в (8), получим

$$Q_1(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) f_1(\tau, \Omega, \omega), \quad (12)$$

где

$$S(\omega) =$$

$$\frac{\sum_{n,m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 \int_0^{2\pi} d\phi W_{nm}^{mn} [-(h_n + h_m) \cos \varphi; -(h_n + h_m) \sin \varphi; \omega]}{\sum_{n,m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_0^{2\pi} d\phi W_{nm}^{mn} [-(h_n + h_m) \cos \varphi; -(h_m + h_n) \sin \varphi; \omega']} ,$$

$$f_1(\tau, \Omega, \omega) = \frac{J_1(\tau, \omega - \Omega)}{J_1(\tau, -\Omega)} = \exp \left[-\frac{\omega(\omega + 2\Omega)T^2}{4(1 + q^2)} \right].$$

Из формулы (12) видно, что для ЛЧМ сигнала $Q_1(\tau, \Omega) = Q_1(\Omega)$ не зависит от τ .

Если источник излучает только моду с номером n , а приемник принимает моду с номером m , то для неоднородностей, имеющих в горизонтальной плоскости вид бегущей волны, $S(\omega) = \delta(\omega - \Omega_0)$, где $\Omega_0 = \Omega_d(h_n + h_m)$, $\Omega_d(k)$ — дисперсионное соотношение для неоднородностей. Тогда

$$Q_1(\Omega) = \exp(-\Omega_0^2 \tau_0^2 - 2\Omega_0 \Omega \tau_0^2),$$

где $4\tau_0 = 2T/\sqrt{1+q^2}$ — длина излученного импульса после согласованной фильтрации. Отсюда следует, что в области $\Omega > -\Omega_0/2$ за счет временной изменчивости неоднородностей будет происходить ослабление ($Q_1 < 1$) информационного сигнала. Для изотропных неоднородностей $S(\omega) = (1/2)[\delta(\omega - \Omega_0) + \delta(\omega + \Omega_0)]$. Тогда

$$Q_1(\Omega) = \exp(-\Omega_0^2 \tau_0^2) \operatorname{ch}(2\Omega_0 \Omega \tau_0^2).$$

В этом случае $Q < 1$ при $|\Omega| < Q_1$, где $Q_1 = (2\Omega_0 \tau_0^2)^{-1} \ln [\exp(\Omega_0^2 \tau_0^2) + \sqrt{\exp(\Omega_0^2 \tau_0^2) - 1}]$.

Если используются точечный источник и точечный приемник (при этом излучается и принимается много мод), то для неоднородностей, имеющих вид бегущей волны, спектр $S(\omega)$ представляется в виде некоторой суммы δ -функций — $\delta(\omega - \Omega'_0)$, где частоты Ω'_0 лежат в интервале от $\Omega_d(2h)$ до $\Omega_d(2h \cos \theta_0)$ (θ_0 — критический угол волновода).

В этом случае при оценке эффектов спектр $\hat{S}(\omega)$ аппроксимируем гауссовой функцией

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega_0} \exp \left[-\frac{(\omega - \Omega_0)^2}{\omega_0^2} \right], \quad (13)$$

где $\Omega_0 \approx \Omega_d(2h \cos \theta_*)$, $0 \leq \theta_* \leq \theta_0$, $\omega_0 \approx \Omega_d(2h) - \Omega_d(2h \cos \theta_0)$. Частоты Ω_0 и ω_0 характеризуют положение и ширину спектра $S(\omega)$. Учитывая малость угла θ_0 , имеем

$$\frac{\omega_0}{\Omega_0} \approx h \theta_0^2 \left(\frac{1}{\Omega_d} \frac{d\Omega_d}{dk} \right)_{k=2h}.$$

В частном случае рассеяния звука на поверхностном волнении глубокого моря $\Omega_d(k) \approx \sqrt{gk}$ и $\Omega_0/\omega_0 \approx \theta_0^2/4 \ll 1$.

Для спектра (13) получим

$$Q(\Omega) = (1 + \omega_0^2 \tau_0^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + \frac{(\Omega \omega_0 \tau_0^2 - \Omega_0/\omega_0)^2}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2} \right]. \quad (14)$$

Аналогично для изотропных неоднородностей

$$S(\omega) = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\pi}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\omega - \Omega_0)^2}{\omega_0^2} \right] + \exp \left[-\frac{(\omega + \Omega_0)^2}{\omega_0^2} \right] \right\}; \quad (15)$$

$$Q_i(\Omega) = \frac{\exp[-(\Omega_0^2 \tau_0^2 - \Omega^2 \omega_0^2 \tau_0^2)/(1 + \omega_0^2 \tau_0^2)]}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \tau_0^2}} \operatorname{ch} \left[\frac{2\Omega \omega_0 \tau_0^2}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2} \right]. \quad (16)$$

Определение характерных масштабов временной изменчивости неоднородностей Ω_0 и ω_0 осуществляется по измеренной величине Q_1 на основе формул (14) или (16). При этом помимо Ω необходимо варьировать и длительность τ_0 свернутого импульса. Например, если $\Omega_0 \gg \omega_0$, то параметр Ω_0 определяется при достаточно коротких длительностях $\tau_0 \ll 1/\omega_0$: $\Omega_0 \approx -\ln Q_1(0)/\tau_0$, а параметр ω_0 при больших длительностях $\tau_0 \gg 1/\omega_0$ из формулы для $Q(0)$ ($Q_1(0)$, определяемые по (14) и (16), совпадают). На рис. 1а (см. на вклейке) приведены зависимости $Q_1(0)$ от параметров $b = \omega_0 \tau_0$ (кривые 1–3) и $d = \Omega_0 \tau_0$ (кривые 4–6) при фиксированных значениях $\delta = 1/\beta = \omega_0/\Omega_0$ (кривая 1— $\delta = 0$, 2— $\delta = 1$, 3— $\delta = 10$, 4— $\beta = 0$, 5— $\beta = 1$, 6— $\beta = 10$). Как следует из расчетов, при $b > 10$ или $d > 10$ ослабление уровня рассеянного сигнала превышает 10 дБ. Таким образом, при $\tau_0 \gg \omega_0^{-1}$ или $\tau_0 \gg \Omega_0^{-1}$ информационный сигнал от меняющихся во времени неоднородностей существенно ослабляется по сравнению со случаем «замороженных» неоднородностей, имеющих точно такой же пространственный спектр. При зондировании сложными сигналами с небольшой базой ($q \leq 1$) это происходит для длинных импульсных посылок ($T \gg 2/\omega_0$ или $T \gg 2/\Omega_0$), а для сигналов с большой базой ($q \gg 1$) — для достаточно узкополосных импульсов ($\Delta f \ll \omega_0/2\pi$ или $\Delta f \ll \Omega_0/2\pi$). В связи с этим отметим, что необходимость при определении Ω_0 и ω_0 в однопозиционной схеме применять сигналы с большой длительностью τ_0 существенно ограничивает возможности пространственного разрешения.

Рассмотрим теперь зависимость интенсивности рассеянного сигнала от параметров зондирующего импульса. Из (5) и (9) получим

$$\langle |P_R(\tau, \Omega)|^2 \rangle = \frac{16}{h^3} \sum_{n, m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 u_1(\tau, \Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi W_{nm}^{mn} [-(h_n + h_m) \cos \varphi; -(h_n + h_m) \sin \varphi; \omega],$$

где $u_1(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) J_1(\tau, \omega - \Omega)$. Для неоднородностей с гауссовым спектром (13) имеем

$$u_1(\tau, \Omega) = \frac{2\tau_0 \sqrt{\pi}}{\tau \sqrt{1 + \omega_0^2 \tau_0^2}} \exp \left[-\frac{\tau_0^2 (\Omega - \Omega_0)^2}{(1 + \omega_0^2 \tau_0^2)} \right]. \quad (18)$$

Если относительная частотная отстройка $\beta = \frac{|\Omega - \Omega_0|}{\omega_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$,

то u_1 является монотонно возрастающей функцией b (или длительности свернутого импульса τ_0). Если $\beta > 1/\sqrt{2}$, то при $b_m = (2\beta^2 - 1)^{-1/2}$ функция $u_1(b)$ достигает максимума $u_1(b_m) = \sqrt{2\pi/e} [\tau |\Omega - \Omega_0|]^{-1}$. На рис. 16 приведены зависимости $\omega_0 u_1(b)/2\sqrt{\pi} = u$ для нескольких значений β (кривая 1 — $\beta=0$, 2 — $\beta=1$, 3 — $\beta=2$, 4 — $\beta=4$).

Как следует из расчетов при $b \gg 1$, интенсивность рассеянного сигнала $u_1(\tau, \Omega) \simeq (2\sqrt{\pi}/\omega_0 \tau) e^{-\beta^2}$ практически не зависит от τ_0 . Это объясняется взаимной компенсацией двух факторов. Первый фактор при росте τ_0 вызывает рост интенсивности рассеянного сигнала за счет увеличения «озвученной» области, формирующей рассеянный сигнал в момент τ . Второй вызывает спад за счет уменьшения частотного интервала согласованной фильтрации и, следовательно, уменьшения области спектра неоднородностей $S(\omega)$, дающей вклад в рассеянный сигнал. Действительно, для сигналов с небольшой базой ($q < 1$, $\tau_0 \approx T/2$), например для тональных импульсов ($q=0$), частотный интервал анализа равен $\Delta f \approx 1/\pi T \approx 1/2\pi\tau_0$, а для сигналов с большой базой ($q \gg 1$, $\tau_0 \approx 1/2\pi\Delta f$) — величине $\Delta f \approx 1/2\pi\tau_0$.

Для «замороженных» неоднородностей при $\Omega=0$ (частотной отстройки нет) работает только первый фактор и $u_1 \sim \tau_0$. Интенсивность $I_{\text{ш}}$ шумовой помехи, как правило, пропорциональна ширине частотного интервала анализа, поэтому отношение ρ интенсивности рассеянного сигнала $\langle |P_R|^2 \rangle$ к интенсивности шума $I_{\text{ш}}$ растет с увеличением длительности τ_0 , но не так эффективно, как для «замороженных» неоднородностей.

2. Рассмотрим «просветную» схему, когда источник и приемник удалены друг от друга на расстояние a , а между ними расположены неоднородности с горизонтальными масштабами $l \gg \lambda \sqrt{a \Delta f / c}$ [6, 7]. В этом случае, осуществляя замену $r_1 \approx a - x$, $r_2 = x$, $k = yha/(a-x)x$, вместо (6) приближенно получим

$$I_{nm}^{mn}(\tau, \Omega) \approx \frac{8}{\pi a h^2} \int_0^a dx \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk W_{nm}^{mn}(h_n - h_m, k, \omega) \times \\ \times \left| F_H \left[\tau + \frac{a}{v_n} - x \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_m} \right); \omega - \Omega \right] \right|^2. \quad (19)$$

Введем функцию

$$J_2(\tau, \omega) = \frac{1}{\tau_a} \int_0^a dt |F_H(\tau - t, \omega)|^2,$$

где $\tau_a = a \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_m} \right|$. Тогда

$$J_{nm}^{mn}(\tau, \Omega) = \frac{8}{\pi h^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J_2\left(\tau + \frac{a}{v_{nm}}, \omega - \Omega\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk W_{nm}^{mn}(h_n - h_m, k, \omega), \quad (20)$$

где $v_{nm}=v_n$ при $v_n < v_m$ и $v_{nm}=v_m$ при $v_n > v_m$. Формулу (7) можно записать в таком виде:

$$\tilde{J}_{nm}^{mn}(\tau, \Omega) = \frac{8}{\pi h^3} J_2\left(\tau + \frac{a}{v_{nm}}; -\Omega\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk W_{nm}^{mn}(h_n - h_m, k, \omega). \quad (21)$$

Для уже использованной выше модели сигнала подсветки (10) проанализируем коэффициент $Q_2(\tau, \Omega)$, который определяется выражением (8). Полагая межмодовую дисперсию несущественной ($\tau_a \approx 0$ и $J_2(\tau, \omega) \approx \sim |F_H(\tau, \omega)|^2$) и используя (8), (20) и (21), получим

$$Q_2(\tau - a/c; \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) f_2(\tau, \omega, \Omega), \quad (22)$$

где

$$S(\omega) = \frac{\sum_{n,m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk W_{nm}^{mn}(h_n - h_m, k, \omega)}{\sum_{n,m} |A_s(n)|^2 |A_R(m)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dk W_{nm}^{mn}(h_n - h_m, k, \omega')},$$

$$f_2(\tau, \omega, \Omega) = J_2(\tau; \omega - \Omega) / J_2(\tau; -\Omega) = \exp\left[-\frac{\omega^2 T^2}{4} - \omega\left(q\tau - \frac{\Omega T^2}{4}\right)\right].$$

Нетрудно видеть, что для неоднородностей со спектрами вида (13) и (15) коэффициент ослабления $Q_2(\tau - a/c, \Omega)$ описывается теми же формулами (14) и (16), в которых, однако, τ_0 заменено на $T/2$, а $(\omega_0 \Omega \tau_0^2)$ на $\left(q \frac{\omega_0 \tau}{2} - \frac{\Omega \omega_0 T^2}{4}\right)$. При этом Q_2 есть функция только пере-

менной $\tilde{\tau} = q\tau/2 - \Omega T^2/4$. В случае $\tilde{\tau} = 0$ зависимость Q_2 от параметров $d = (1/2)\Omega_0 T$ и $b = (1/2)\omega_0 T$ при фиксированных значениях δ и $\beta = 1/2$ описывается кривыми, представленными на рис. 1.

Заметим, что различие в спектрах (13) и (15) для рассматриваемой схемы наблюдения обусловлено не только различием в характеристиках неоднородностей, как это было в однопозиционной схеме, а связано также и с различными условиями приема сигнала. Дело в том, что между различными участками частотного и углового (в горизонтальной плоскости) спектров рассеянного поля в силу дисперсионного соотношения неоднородностей имеется взаимно однозначное соответствие [2]. Поэтому в общем случае анизотропных по горизонтали неоднородностей приемная система, обладающая диаграммой направленности, будет осуществлять некоторую фильтрацию частотного спектра рассеянного сигнала. Спектр вида (13) будет характеризовать предельную ситуацию с достаточно узкой диаграммой направленности приемной системы и с сильно выраженной горизонтальной анизотропией неоднородностей. Спектр (15) будет характеризовать другой предельный случай: или изотропных неоднородностей, или достаточно широкой диаграммы направленности приемной системы.

Рассмотрим часто встречающийся на практике степенной спектр [2], имеющий в первом предельном случае вид

$$S_V(\omega) \simeq \begin{cases} 2\omega_0^4/\omega^5, & \omega \geq \omega_0 \\ 0, & \omega < \omega_0 \end{cases}, \quad (23)$$

где ω_0 — константа. На рис. 2 и 1а (кривая 7) представлены зависи-
1376

ности $Q_2(b, \tilde{\beta})$, соответствующие спектру (23), от параметров $b = \omega_0 T / 2$ и $\tilde{\beta} = 2\omega_0 T$ (рис. 2 кривая 1— $b=0,1$, 2— $b=1$, 3— $b=2$). Как следует из расчетов, при $b > 1$ интенсивность $Q_2 \ll 1$. Для второго предельного случая

$$S(\omega) = (1/2) [S_V(\omega) + S_V(-\omega)]. \quad (24)$$

Соответствующие этой форме спектра зависимости $Q_2(b, \tilde{\beta})$ приведены на рис. 2 (кривая 4— $b=0,3$, 5— $b=1$, 6— $b=2,5$).

При $\tilde{\beta}=0$ зависимости $Q_2(b, 0)$ для спектров (23) и (24) совпадают.

Другая форма степенного спектра, характерная, например, для изотропных в горизонтальной плоскости высокочастотных океанических внутренних волн [9], описывается зависимостью

$$S(\omega) = \frac{A}{2} \frac{\omega^4}{\omega_0^5} \exp(-3|\omega|/\omega_0 - 0,7), \quad (25)$$

где $A=\text{const}$. Результаты расчета $Q_2(b, \tilde{\beta})$ для спектра (25) представлены на рис. 2 (кривая 7— $b=1$, 8— $b=4$). Из рис. 2 (кривые 4÷8) видно, что при $b > 1$ и $\tilde{\beta} \leq 5$ также наблюдается существенное ослабление рассеянного сигнала.

Диагностика неоднородностей, имеющих степенные спектры (23)—(25), сводится к определению параметра ω_0 , величина которого находится путем варьирования длины излученного импульса T на основе представленных на рис. 1, 2 зависимостей Q_2 . При этом необходимость использования сигналов с большой длительностью T в случае большой базы $q \gg 1$ не приводит к ухудшению пространственного разрешения.

Зависимость интенсивности рассеянного сигнала от параметров сигнала «подсветки» обсудим аналогично тому, как это было сделано для однопозиционной схемы. Из формул (20), (21) и (5) получим

$$\left\langle \left| P_R \left(\tau - \frac{a}{c}, \Omega \right) \right|^2 \right\rangle = \quad (26)$$

$$= \frac{8}{\pi h^3} \sum_{n, m} |A_s(n)| |A_R(m)|^2 u_2(\tau, \Omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk W_{nm}^{mn}(h_n - h_m, k, \omega),$$

где $u_2(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) J_2(\tau, \omega - \Omega)$. Для неоднородностей, описываемых спектром (13),

$$u_2(\tau, \Omega) = \left(1 + \frac{\omega_0^2 T^2}{4} \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\tau^2}{T^2} - \frac{(\tilde{\Omega} - \Omega_0)^2 T^2/4}{1 + \omega_0^2 (T^2/4)} \right], \quad (27)$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega - 2q\tau/T^2$. Сравнивая (27) и (17), можно заметить, что кривая, приведенная на рис. 1б, описывает также зависимость функции $(1/2)\omega_0 T u_2(\tau, \Omega) e^{-\beta^2}$ от параметра $b = \omega_0 T / 2$ при фиксированных значениях $\beta = |\tilde{\Omega} - \Omega|/\omega_0$. Для сигналов большой длительности ($b \gg 1$) $u_2(\tau=0, \Omega) \simeq (2/\omega_0 T) e^{-\beta^2}$. Таким образом, с увеличением длительности сигнала T интенсивность рассеянного сигнала падает. Физический смысл такого эффекта нетрудно понять на примере тонального импульса ($q=0$): с ростом T , в силу оптимальной фильтрации, частотный интервал анализа $\delta f = 1/\pi T$ уменьшается, т. е. уменьшается и область спектра неоднородностей $S(\omega)$, дающая вклад в рассеянный сигнал.

При этом увеличения озвученной области, как это имело место в схеме совмещенного излучения и приема, не происходит. При малой базе сигнала ($q \leq 1$), как указывалось выше, частотный интервал анализа $\delta f \approx 1/\pi T$, поэтому отношение ρ не меняется при варьировании T . При большой базе сигнала ($q \gg 1$) $\delta f \approx \Delta f$ и отношение ρ ухудшается с увеличением длительности импульса T . Заметим, что для «замороженных» неоднородностей при $\tilde{\Omega} = 0$ интенсивность $u_2(\tau = 0, \Omega)$ не зависит от T .

Количественная оценка значений функции $u_2(\tau, \Omega)$ для степенных спектров (23)–(25) легко может быть получена по известным зависимостям $Q(\tilde{\beta}, b)$ на основе соотношения

$$u_2(\tau, \Omega) = Q_2(b, \tilde{\beta}) \exp(-\tau^2/T^2 - \tilde{\beta}^2/4b^2).$$

Проведенный выше анализ показывает, что временные флюктуации неоднородностей волновода могут приводить к значительному ослаблению принятого рассеянного сигнала по сравнению со случаем «замороженных» неоднородностей. Эффект разрушения структуры зондирующих сигналов наиболее существенно проявляется в случае «просветной» схемы при излучении достаточно длинных импульсов, а в случае использования однопозиционной схемы наблюдений—при большой длительности импульсов с выхода согласованного фильтра. Путем изменения параметров зондирующих импульсов (что эквивалентно варьированию характеристик согласованного фильтра приемной системы) можно осуществить диагностику частотного спектра неоднородностей волновода. Процесс диагностики неоднородностей волновода состоит в следующем. На первом этапе необходимо на основе использования коротких зондирующих импульсов (их длина должна удовлетворять предположению о «замороженности» неоднородностей), осуществить реконструкцию пространственного спектра неоднородностей (см., например, работы [6, 7]). Вторым этапом является зондирование неоднородностей сигналами большой длительности (при этом неоднородности меняются за время длительности сигнала), что позволяет путем подбора характеристик излучаемых импульсов определить основные характеристики частотного спектра флюктуаций неоднородностей, таких, например, как центр тяжести спектра и его ширину. При этом критерием оптимизации параметров зондирующего сигнала является максимизация величины Q (предполагается, что за время анализа флюктуации среды можно считать стационарными). В работе основные выражения, определяющие возможности диагностики временных флюктуаций неоднородностей волновода, получены в общем виде (в рамках принятых приближений) и позволяют проанализировать другие конкретные формы зондирующих сигналов и спектров неоднородностей. Для реальных волноводов (например, геофизических) на основе экспериментальных наблюдений разработаны эмпирические модели основных типов неоднородностей [4–9, 9]. Используя априорно рассчитанные зависимости величины Q для различных типов неоднородностей от параметров зондирующих сигналов, можно существенно сократить перебор параметров, заменив последовательный перебор проверкой гипотез.

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. С. 523.
2. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — М.: Гидрометеоиздат, 1982. С. 264.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. Т. 2. С. 463.
4. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. С. 426.
5. Распространение звука во флюктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. — М.: Мир, 1982. С. 334.

6. Нечаев А. Г., Хилько А. И. Препринт ИПФ АН СССР № 178: Горький 1987.
7. Нечаев А. Г., Хилько А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 1. С. 65.
8. Лезин Ю. С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. — М.. Сов. радио. 1969. С. 344.
9. Сабилин К. Д. В кн.: Акустика океана. Современное состояние / Под ред. Л. М. Бреховских и И. Б. Андреевой.—М.: Наука, 1982. С. 209

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
11 июля 1989 г.

PECULIARITIES OF DIAGNOSTICS OF VARIABLE IN TIME RANDOM WAVEGUIDE INHOMOGENEITIES USING INTRICATE PULSED SIGNALS

I. R. Karetikova, A. G. Nечаев, A. I. Khil'ko

The peculiarities of scattering of intricate signals by random waveguide inhomogeneities variable in time are discussed. It is shown that the temporal dependence of inhomogeneities can lead to essential weakening of the scattered signal as compared to the approach of «frozen» inhomogeneities. To achieve this, it is necessary to emit long enough pulses in a probing scheme using a signal scattered backwards and in a probing scheme using a signal scattered forwards. It is necessary to emit signals with sufficiently long duration due to matched treatment. Using this effect the ways to determine the parameters of frequency spectrum for the types of inhomogeneities which are widely spread are considered

УДК 538.3+621.372.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ АВТОНОМНЫХ БЛОКОВ: МЕТОД Л-МАБ

Т. И. Никольская, В. В. Никольский

Предложен новый дискретизационный метод (метод Л-МАБ). С целью усовершенствования метода МАБ было найдено новое решение уравнений Маковелла, которое может быть использовано в представлении внутреннего поля с целью расширения поверхностного базиса посредством линейных функций. Показано, что метод Л-МАБ имеет существенное преимущество по скорости счета (или по точности при прежней скорости). Рассмотрены различные волноводные задачи.

Предложенный нами метод минимальных автономных блоков (МАБ) был впервые реализован несколько более десяти лет назад [^{1, 2}]. Этот весьма гибкий метод был применен к многим задачам прикладной электродинамики (дифракция в волноводах, микрополосковые линии на гиротропных подложках и пр.) и даже в нелинейной оптике, что частично отражено в нашей монографии [³].

Существенно повысившаяся за прошедшее десятилетие эффективность ЭВМ позволяет вновь вернуться к методу МАБ как к средству построения более сложных и адекватных моделей электродинамических структур для разных целей, включая САПР.

При этом естественно ввести возможные улучшения в ранее разработанный подход [^{4, 5}]. В данной работе более подробно рассматривается и практически проверяется принципиальное улучшение локальной аппроксимации поля путем дополнения минимального базиса констант на входах автономного блока системой линейных функций. По смыслу декомпозиционного метода расширение граничного базиса не может быть произведено произвольно: необходимо, чтобы элементы этого базиса были поперечными проекциями полей виртуальных каналов и, соответственно, непрерывно переходили в базисы Трефтца, представляющие поле внутри автономного блока (т. е. в соответствующие решения уравнений Максвелла). Таким образом, модификация метода МАБ оказывается глубокой; правомерно говорить о новом методе, для которого мы вводим символическое обозначение Л-МАБ.

В данной работе метод Л-МАБ излагается в двумерном варианте. Новые волны виртуальных каналов имеют в этом случае характер бездисперсных H -волн. На примерах показано, что хотя порядок матрицы рассеяния двумерного Л-МАБ по сравнению с МАБ вдвое больше, при равных порядках окончательного многоканального представления моделируемого объекта точность метода Л-МАБ существенно выше (количество блоков оказывается в четыре раза меньше).

1. Сущность метода Л-МАБ. Выделение автономного блока в пространстве производится так же, как и в методе МАБ. Ограничиваюсь случаем декартовых координат (ср. § 2.1 в [³]), имеем параллелепипед (рис. 1а, см. на вклейке); при электрической поляризации в двумерном варианте вектор E параллелен оси y , а поле не зависит от y . Но в отличие от МАБ новые блоки Л-МАБ имеют в своих виртуальных каналах (на гранях) не только однородные T -волны, но и неоднородные H -волны. Соответствующие распределения поперечных компонент

на первом входе показаны на рис. 1б, в. Волна H первого канала (положительного направления) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2(1)} &= \mathbf{y}_0 k(x - \Delta_x/2) \exp(-ikz), \\ \mathbf{H}_{2(1)} &= W^{-1} [-x_0 k(x - \Delta_x/2) + iz_0] \exp(-ikz), \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = (\omega/c)(\epsilon\mu)^{1/2}$, $W = 120\pi(\mu/e)^{1/2}$. Аналогично строятся остальные волны виртуальных каналов. Такого рода волновые решения уравнений Максвелла при строгом линейном поперечном распределении поля распространяются по тому же закону, что и T -волны. Индексация в (1) соответствует обычно используемому нами правилу: первый индекс — номер собственной волны, второй (в скобках) — номер канала.

Базисные волны на гранях Л-МАБ имеют компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1(1)} &= \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{e}_{1(2)} = \mathbf{y}_0, \\ Wh_{1(1)} &= -x_0, \quad Wh_{1(2)} = x_0, \\ \mathbf{e}_{1(3)} &= \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{e}_{1(4)} = \mathbf{y}_0, \\ Wh_{1(3)} &= z_0, \quad Wh_{1(4)} = -z_0 \end{aligned} \quad (2)$$

(минимальный базис констант, используемый для МАБ) и

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2(1)} &= \mathbf{y}_0 k(x - \Delta_x/2), \quad \mathbf{e}_{2(2)} = \mathbf{e}_{2(1)}, \\ Wh_{2(1)} &= -x_0 k(x - \Delta_x/2), \quad h_{2(2)} = -h_{2(1)}, \\ \mathbf{e}_{2(3)} &= \mathbf{y}_0 k(z - \Delta_z/2), \quad \mathbf{e}_{2(4)} = \mathbf{e}_{2(3)}, \\ Wh_{2(3)} &= z_0 k(z - \Delta_z/2), \quad h_{2(4)} = -h_{2(3)} \end{aligned} \quad (3)$$

(дополнительно введенная система линейных функций).

Для нахождения матрицы рассеяния Л-МАБ решаются задачи дифракции, постановка которых остается прежней (§ 2.1 в [3]), но теперь в качестве падающих волн наряду с T -волнами фигурируют также H -волны виртуальных каналов. Общее представление поля — для всех режимов дифракции — внутри Л-МАБ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A_{1(1)} \mathbf{e}_{1(1)} \exp(-ikz) + A_{1(2)} \mathbf{e}_{1(1)} \exp(ikz) + \\ &+ A_{1(3)} \mathbf{e}_{1(3)} \exp(-ikx) + A_{1(4)} \mathbf{e}_{1(3)} \exp(ikx) + \\ &+ A_{2(1)} \mathbf{e}_{2(1)} \exp(-ikz) + A_{2(2)} \mathbf{e}_{2(1)} \exp(ikz) + \\ &+ A_{2(3)} \mathbf{e}_{2(3)} \exp(-ikx) + A_{2(4)} \mathbf{e}_{2(3)} \exp(ikx), \\ \mathbf{H} &= A_{1(1)} \mathbf{h}_{1(1)} \exp(-ikz) - A_{1(2)} \mathbf{h}_{1(1)} \exp(ikz) + \\ &+ A_{1(3)} \mathbf{h}_{1(3)} \exp(-ikx) - A_{1(4)} \mathbf{h}_{1(3)} \exp(ikx) + \\ &+ A_{2(1)} (\mathbf{h}_{2(1)} + iz_0 W^{-1}) \exp(-ikz) - A_{2(2)} (\mathbf{h}_{2(1)} - iz_0 W^{-1}) \exp(ikz) + \\ &+ A_{2(3)} (\mathbf{h}_{2(3)} - ix_0 W^{-1}) \exp(-ikx) - A_{2(4)} (\mathbf{h}_{2(3)} + ix_0 W^{-1}) \exp(ikx). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку в рассматриваемых режимах дифракции волна типа n ($n=1,2$) падает на заданный вход S_β ($\beta=1, \dots, 4$) Л-МАБ, то для первичного поля $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ на любом входе S_α ($\alpha=1, \dots, 4$) имеем выражение

$$\mathbf{E}_\alpha^0 = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{n(\beta)}, \quad \mathbf{H}_\alpha^0 = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{h}_{n(\beta)}. \quad (5)$$

Из условия излучения

$$(E - E^0, e_{k(\alpha)} \alpha + |W|^2 (H - H^0, h_{k(\alpha)}) \alpha = 0 \quad (6)$$

(скалярное произведение понимается в смысле интегрирования по S_α) путем подстановки представления полного внутреннего поля E, H (4) при переборе α и k получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{m(y)}$ из (4):

$$\begin{pmatrix} M_{1(1)}^{1(1)} & \dots & M_{2(4)}^{1(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1(1)}^{2(4)} & \dots & M_{2(4)}^{2(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1(1)} \\ \vdots \\ A_{2(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1(1)}^{n(\beta)} \\ \vdots \\ F_{2(4)}^{n(\beta)} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матричные элементы $M_{m(\gamma)}^{k(\alpha)}$ в (7) по происхождению являются коэффициентами при $A_{m(y)}$, выделяемыми в сумме $(E, e_{k(\alpha)}) \alpha + W^2 (H, h_{k(\alpha)}) \alpha$. Справа в (7) $F_{k(\alpha)}^{n(\beta)} = (e_{n(\beta)}, e_{k(\alpha)}) \alpha + W^2 (h_{n(\beta)}, h_{k(\alpha)}) \alpha$.

После решения системы (7) для всех режимов дифракции элементы $S_{kn}^{\alpha\beta}$ матрицы рассеяния S блока Л-МАБ находятся при помощи одной из следующих формул:

$$S_{kn}^{\alpha\beta} = \frac{(E - \delta_{\alpha\beta} e_{n(\beta)}, e_{k(\alpha)}) \alpha}{(e_{k(\alpha)}, e_{k(\alpha)}) \alpha}, \quad S_{kn}^{\alpha\beta} = - \frac{(H - \delta_{\alpha\beta} h_{n(\beta)}, h_{k(\alpha)}) \alpha}{(h_{k(\alpha)}, h_{k(\alpha)}) \alpha} \quad (8)$$

(представления E, H (4) вносятся в (8) с найденными из (7) коэффициентами). При реализации метода Л-МАБ система уравнений (7) решается на ЭВМ; элементы матрицы S фигурируют в численной форме.

В отличие от различных типов декомпозиции [3] при использовании Л-МАБ был применен иерархический подход: в области задачи сначала выделяются первичные автономные блоки (равномерно или неравномерно); затем каждый из этих блоков равномерно делится на Л-МАБ. При этом после нахождения матриц рассеяния всех Л-МАБ рекомпозиционно определяются многоканальные матрицы рассеяния первичных блоков. На следующей стадии определяются многоканальные матрицы рассеяния объединения первичных блоков.

2. Исследование и применение метода Л-МАБ. Начнем с рассмотрения тестового примера, в котором схема решения задачи дифракции на некотором элементе внутри прямоугольного волновода применяется к отрезку регулярного волновода; расчеты проводились для волновода шириной $a=60$ мм при $f=3$ ГГц; длина отрезка $l=60$ мм. Результаты, получаемые методами МАБ и Л-МАБ, сведены в табл. 1, где N — число блоков в поперечном сечении волновода. При сопоставлении результатов в методе Л-МАБ число N берется каждый раз вдвое меньшее (при этом одинаковы порядки многоканальных матриц рассеяния).

Таблица 1

МАБ				Л-МАБ			
N	$ S $	φ_{11}^{21}	ошибка, %	N	$ S $	φ_{11}^{21}	ошибка, %
4	0,000685	-2,194550	5,3	2	0,005500	-2,096399	0,6
8	0,000013	-2,110896	1,3	4	0,000334	-2,084686	0,038
12	0,000009	-2,095842	0,57	6	0,000066	-2,084053	0,0077
16	0,000003	-2,090606	0,32	8	0,000021	-2,083396	0,0024

Как видно из таблицы, в случае Л-МАБ значительно уменьшилась фазовая ошибка (точное значение фазы коэффициента передачи $\varphi_{11}^{21} = -2,083897$ рад). Интересно, что даже при $N=2$ (в поперечном сечении волновода только два блока Л-МАБ) ошибка такая же, как при

$N=12$ в случае МАБ. Ложный коэффициент отражения S_{11}^{11} остается достаточно малым. Очень наглядно улучшение аппроксимации синусоидального распределения поля падающей волны H_{10} в случае Л-МАБ по сравнению с МАБ (рис. 2); взято $N=4$ и $N=8$. Ломаная для Л-МАБ, как видно, весьма близка к синусоиде.

Характерен также пример моделирования процесса дифракции на бесконечно тонкой идеально-проводящей диафрагме в прямоугольном волноводе (рис. 3); как известно, магнитное поле имеет в данном случае неинтегрируемую в квадрате краевую особенность; для любого дискретизационного подхода это создает трудности. В то же время для диафрагмы половинной ширины имеется аналитическое решение, получаемое методом Винера—Хопфа [6], что позволяет провести полезное сопоставление. На рис. 3—5 по оси абсцисс откладывается число МАБ в поперечном сечении волновода; при этом число Л-МАБ вдвое меньше. Результаты метода Л-МАБ показаны сплошными линиями, метода МАБ — штриховыми. Все размеры на рисунках указаны в миллиметрах; для рис. 3—5 $\lambda=100$ мм. На рис. 3а показано первичное равномерное разбиение области задачи (равномерно измельчаемое с ростом N). На рис. 3б первичное разбиение неравномерно. В обоих случаях преимущество метода Л-МАБ очевидно. Сходимость к точному решению значительно быстрее при первичном неравномерном разбиении, что естественно. Отметим, что при этом в случае Л-МАБ резко уменьшилась фазовая ошибка.

Рассматривалась также дифракция на тонком идеально проводящем стержне квадратного сечения (рис. 4) и на диэлектрическом параллелепипеде (рис. 5). В последнем случае проведено сопоставление с результатами проекционного метода высокого порядка [7] (по модулю коэффициента отражения).

В случае тройника со штырем (рис. 6) мы не имели сопоставимых результатов. На рис. 6 представлены частотные зависимости модулей элементов матрицы рассеяния по основной волне, полученные методом Л-МАБ при $N=15$ (на сторону поперечного сечения стержня приходится пять Л-МАБ).

Следующие два примера построены с целью сопоставления наших результатов и данных, полученных совершенно иными методами. Так рассматривался фильтр на основе прямоугольного волновода с металлическими включениями [8]. На рис. 7 (вверху) показана конфигурация фильтра и пояснена система первичных разбиений области; большинство узких зон имеет ширину 0,5 мм, только поперечные узкие зоны в районе малых (крайних) металлических включений имеют ширину 0,2 мм. Каждая из первичных подобластей затем разбивается на N^2 Л-МАБ. На рис. 7 представлена характеристика фильтра, полученная при $N=2$ и $N=3$, а также характеристика из [8].

В другом случае моделировался фазовращатель [9] в виде ступенчатого диэлектрического включения в прямоугольном волноводе ($\epsilon=2,54$), конфигурация представлена на рис. 8 (вверху). При первичном разбиении поперечное сечение волновода содержало тринадцать подобластей (при этом средняя — широкая — диэлектрическая секция окаймлена узкими зонами шириной 0,5 мм); число первичных разбиений в продольном направлении для каждой из секций указано на рис. 8. Как и ранее, каждая из первичных подобластей равномерно разбивается на N Л-МАБ. На рис. 8 показана частотная зависимость модуля коэффициента отражения в децибелах, полученная нами при $N=2$ в сравнении с характеристикой из [9].

Довольно близкое совпадение результатов метода Л-МАБ и двух других совершенно различных подходов [8, 9] свидетельствует о его эффективности; существенна гибкость метода: и металлические, и ди-

электрические включения рассчитывались при помощи одной программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский В. В., Лаврова Т. И. // Краткие тексты докл. VII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн.—М., 1977. Т. 1. С. 206.
2. Никольский В. В., Лаврова Т. И. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 2. С. 241.
3. Никольский В. В., Никольская Т. И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики.—М.: Наука, 1983.—304 с.
4. Никольская Т. И., Никольский В. В. // Тезисы X Всесоюзного семинара по методам решения внутренних краевых задач электродинамики.—Вильнюс. 1988. С. 38.
5. Никольская Т. И., Никольский В. В. В кн.: Автоматизированное проектирование устройств СВЧ.—М.: МИРЭА, 1989. С. 4.
6. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.—М.: Сов. радио, 1966.—431 с.
7. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / Под ред. В. В. Никольского.—М.: Радио и связь, 1982.—272 с.
8. Mansour R. R., Macphie R. H. // IEEE Trans. 1986. V. MTT-34. № 12. P. 1490.
9. Agndt F., Borgemann J., Vahldieck R // IEEE Trans. 1984. V. MTT-32. № 1. P. 34.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
25 августа 1989 г.

AN IMPROVEMENT UPON THE MINIMAL AUTONOMIC BLOCK METHOD: THE L-MAB METHOD

T. I. Nikol'skaya, V. V. Nikol'skij

A new discretization method, so-called L-MAB method, is proposed. In order to improve the MAB method a new solution of Maxwell equations was found which can be used for internal field representations to broaden the surface basis by linear functions. It is shown that the L-MAB method has the advantage for computational speed (or for the accuracy with the same speed). Various waveguide problems are considered.

УДК 621.372.853

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

B. N. Почекняев, L. V. Скрыпник

В работе излагается приближенный метод определения собственных скалярных и векторных функций частично заполненного прямоугольного волновода. Предложенный подход основывается на представлении относительной диэлектрической проницаемости среды в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит в поперечном сечении от одной координаты, и аппроксимации кусочно-неоднородного заполнения волновода рядом Фурье. Решение получено в функциях Матье.

Рассмотрим прямоугольный волновод, частично заполненный диэлектриком прямоугольного поперечного сечения (рис. 1, см. на вклейке). Постоянная распространения такого волновода известна [1]. Для определения внешних параметров волноводных устройств с диэлектрическим заполнением необходимо знание собственных векторных функций частично заполненного прямоугольного волновода. Целью работы является разработка приближенной методики определения собственных функций такого волновода в явном виде.

Методика основана на представлении относительной диэлектрической проницаемости среды $\epsilon(x, y)$ как суммы функций, каждая из которых в поперечном сечении волновода зависит только от одной из поперечных координат x и y :

$$\epsilon(x, y) = \epsilon(x)/2 + \epsilon(y)/2, \quad (1)$$

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} \epsilon_r & \text{при } x_1 < x < x_1 + c, y_1 < y < y_1 + d \\ \epsilon_0 & \text{при } x < x_1, x > x_1 + c, y < y_1, y > y_1 + d \end{cases},$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon_r d/b & \text{при } x_1 < x < x_1 + c \\ \epsilon_0 & \text{при } x < x_1, x > x_1 + c \end{cases},$$

$$\epsilon(y) = \begin{cases} \epsilon_r c/a & \text{при } y_1 < y < y_1 + d \\ \epsilon_0 & \text{при } y < y_1, y > y_1 + d \end{cases},$$

где ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика; ϵ_0 — относительная диэлектрическая проницаемость воздуха; c и d — геометрические размеры поперечного сечения диэлектрика; a и b — поперечные размеры волновода; координаты x_1 и y_1 определяют местоположение диэлектрика (рис. 1, см. на вклейке).

В этом случае согласно [2] волновое уравнение для среды без потерь

$$\Delta_{\perp} U_z + [k_0^2 \epsilon(x, y) - \gamma^2] U_z = 0 \quad (2)$$

в декартовых координатах допускает разделение переменных.

Отыскивая решения уравнения (2) методом Фурье в виде

$$U_z = X(x) Y(y),$$

где $U_z = \begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix}$ — продольные компоненты поля, получим линейные диф-

Ференциальные уравнения с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} X''(x) + \kappa_x^2 \varepsilon(x) X(x) &= 0, \\ Y''(y) + \kappa_y^2 \varepsilon(y) Y(y) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где κ_x , κ_y — составляющие поперечного волнового числа, подлежащие определению.

При центральном расположении диэлектрика ступенчатые функции $\varepsilon(x)$ и $\varepsilon(y)$ аппроксимируем рядом Фурье:

$$\varepsilon(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-\cos 2k\pi x/a), \tag{4}$$

$$\varepsilon(y) = b_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (-\cos 2k\pi y/b),$$

где

$$a_0/2 = [1/(a-0)(b-0)] \int_0^a \int_0^b \varepsilon dx dy = \varepsilon_0 \{1 + (\varepsilon_r - 1) cd/ab\} = \varepsilon_{cp},$$

$$b_0/2 = [1/(b-0)(a-0)] \int_0^b \int_0^a \varepsilon dy dx = \varepsilon_0 \{1 + (\varepsilon_r - 1) cd/ab\} = \varepsilon_{cp},$$

$$a_k = \int_0^a \varepsilon (-\cos 2k\pi x/a) dx =$$

$$= (\varepsilon_r d/b - \varepsilon_0) (1/k\pi) 2 \sin(k\pi c/a) \cos[k\pi(2x_1 + c)/a],$$

$$b_k = \int_0^b \varepsilon (-\cos 2k\pi y/b) dy =$$

$$= (\varepsilon_r c/a - \varepsilon_0) (1/k\pi) 2 \sin(k\pi d/b) \cos[k\pi(2y_1 + d)/b].$$

Уравнения (3) после подстановки в них (4) являются уравнениями Хилла. Найдем приближенные решения уравнений

$$X''(x) + [a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-\cos 2k\pi x/a)] \kappa_x^2 X(x) = 0,$$

$$Y''(y) + [b_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (-\cos 2k\pi y/b)] \kappa_y^2 Y(y) = 0,$$

которые с учетом $\xi = (\pi/a)x$, $\eta = (\pi/b)y$ имеют канонический вид

$$\begin{aligned} X''(\xi) + (\theta_{\xi_0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{\xi_k} \cos 2k\xi) X(\xi) &= 0, \\ Y''(\eta) + (\theta_{\eta_0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{\eta_k} \cos 2k\eta) Y(\eta) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\theta_{\xi_0} = [(a_0/2)/(\pi/a)^2] \kappa_x^2, \quad \theta_{\eta_0} = [(b_0/2)/(\pi/b)^2] \kappa_y^2,$$

$$\theta_{\xi_k} = [-\kappa_x^2/2(\pi/a)^2] a_k, \quad \theta_{\eta_k} = [-\kappa_y^2/2(\pi/b)^2] b_k.$$

Их решения имеют вид [3]

$$X(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \begin{cases} \cos[(s+m)\xi], \\ \sin[(s+m)\xi] \end{cases},$$

$$Y(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \begin{cases} \cos[(t+n)\eta] \\ \sin[(t+n)\eta] \end{cases},$$

где ρ_m , ρ_n , s , t — величины, подлежащие определению.

Применим хорошо известный прием, заключающийся в интегрировании дифференциальных уравнений (5) при помощи рядов (6).

Подставляя в уравнения (5) выражения (6), получим в общем случае системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов ρ_m и ρ_n , условиями совместности которых являются равенства нулю их детерминантов Хилла.

Детерминанты Хилла обращаются в нуль, если

$$\sin^2(\pi s/2) = \Delta_s(0) \sin^2[\pi\sqrt{\theta_{\xi_0}}/2],$$

$$\sin^2(\pi t/2) = \Delta_t(0) \sin^2[\pi\sqrt{\theta_{\eta_0}}/2],$$

где $\Delta \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}(0)$ определены в [3]. Получив отсюда значения s и t , находим коэффициенты ρ_m и ρ_n . Собственные скалярные функции с учетом краевых условий задач Дирихле и Неймана представляются двойным рядом:

$$\Psi_h = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_h^{mn} \cos[(s+m)\xi] \cos[(t+n)\eta],$$

$$\Psi_e = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_e^{mn} \sin[(s+m)\xi] \sin[(t+n)\eta],$$
(7)

где C_h^{mn} , C_e^{mn} — нормированные амплитудные множители, определяемые через коэффициенты ρ_m и ρ_n .

Собственные скалярные функции, полученные при решении уравнений Хилла, требуют трудоемких вычислений коэффициентов ρ_m , ρ_n .

Для упрощения задачи ограничим число членов ряда и оценим получаемую точность.

Рассмотрим уравнения (5), ограничиваясь только одним членом ряда. После преобразования получим более простые и хорошо изучённые уравнения Матье:

$$X''(\xi) + (\theta_\xi - 2q \cos 2\xi) X(\xi) = 0,$$
(8)

$$Y''(\eta) + (\theta_\eta - 2p \cos 2\eta) Y(\eta) = 0,$$

$$\theta_\xi = \kappa_x^2 e_{cp}/(\pi/a)^2,$$

$$q = [\kappa_x^2/(\pi/a)^2] [(\varepsilon_r d/b - \varepsilon_0)/\pi] \sin(\pi c/a) \cos[\pi(2x_1 + c)/a],$$

$$\theta_\eta = \kappa_y^2 e_{cp}/(\pi/b)^2,$$

$$p = [\kappa_y^2/(\pi/b)^2] [(\varepsilon_r c/a - \varepsilon_0)/\pi] \sin(\pi d/b) \cos[\pi(2y_1 + d)/b].$$

Между величинами θ_ξ , θ_η и q , p существует связь [4]:

$$\theta_\xi = m^2 + \alpha_1 q + \alpha_2 p^2 + \dots,$$
(9)

$$\theta_\eta = n^2 + \beta_1 + p + \beta_2 p^2 + \dots$$

Индексы m и n соответствуют числу полуволн по поперечным координатам x и y , коэффициенты α_1 , α_2 , β_1 , β_2 определены в [4]. Частная проверка показывает, что в случае полого волновода ($c=0$, $d=0$) па-

раметры q и p равны нулю и уравнения (8) переходят в (3) с учетом обратной замены переменной и равенства единице величин $\varepsilon(x)$ и $\varepsilon(y)$:

$$X''(x) + (\pi/a)^2 \theta_\xi X(x) = 0,$$

$$Y''(y) + (\pi/b)^2 \theta_\eta Y(y) = 0.$$

Но так как в этом случае (9) принимает вид

$$\theta_\xi = m^2, \quad \theta_\eta = n^2,$$

то имеем известные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$X''(x) + \kappa_m^2 X(x) = 0, \quad \kappa_m^2 = (m\pi/a)^2$$

$$Y''(y) + \kappa_n^2 Y(y) = 0, \quad \kappa_n^2 = (n\pi/b)^2.$$

Решения для уравнений (8) запишем через функции Матье:

$$X(\xi) = A_\xi \begin{cases} Ce_m(q, \xi) \\ Se_m(q, \xi) \end{cases},$$

$$Y(\eta) = A_\eta \begin{cases} Ce_n(p, \eta) \\ Se_n(p, \eta) \end{cases},$$

где A_ξ, A_η — постоянные множители.

В уравнениях (9) будем ограничиваться первыми тремя членами, так как даже третий член $a_2 q^2 \ll 1$ ($b_2 p^2 \ll 1$). Уравнения для определения κ_x и κ_y

$$[(a_1/2)^2/8(\pi/a)^4] \kappa_x^4 + [a_0/2(\pi/a)^2 - a_1/2(\pi/a)^2] \kappa_x^2 - m^2 = 0,$$

$$[(b_1/2)^2/8(\pi/b)^4] \kappa_y^4 + [b_0/2(\pi/b)^2 - b_1/2(\pi/b)^2] \kappa_y^2 - n^2 = 0.$$

Для определения собственных скалярных функций запишем продольные компоненты поля, учитывая известные граничные условия:

для H - и E -волн

$$H_z = A_z C e_m(q, \xi) C e_n(p, \eta),$$

(10)

$$E_z = B_z S e_m(q, \xi) S e_n(p, \eta),$$

где A_z, B_z — амплитудные коэффициенты.

Нормируя выражения (10), как показано в [5]; запишем собственные скалярные функции H - и E -волн рассматриваемого волновода:

$$\Psi_h = \sqrt{[(2-\delta_{0m})(2-\delta_{0n})/ab][64/(64+q^2+p^2+q^2p^2)]} C e_m(q, \xi) C e_n(p, \eta), \quad (11)$$

$$\Psi_e = 16/\sqrt{ab(64+q^2+p^2+q^2p^2)} S e_m(q, \xi) S e_n(p, \eta),$$

$$Ce_j \begin{Bmatrix} q, \xi \\ p, \eta \end{Bmatrix} = \cos \left(j \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - v\pi/2 \right) - \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} \left\{ \cos \left[(j+2) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - v\pi/2 \right] / 4(j+1) - \right. \\ \left. - \cos \left[(j-2) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - v\pi/2 \right] / 4(j-1) \right\} + \begin{Bmatrix} q^2 \\ p^2 \end{Bmatrix} \left\{ \cos \left[(j+4) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - \right. \right. \\ \left. \left. - (j+2) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - v\pi/2 \right] / 4(j+2) - \cos \left[(j-4) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - (j-2) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} - v\pi/2 \right] / 4(j-2) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -v\pi/2 \Big] / 32(j+1)(j+2) + \cos \left[(j-4) \left\{ \frac{\xi}{\eta} \right\} - v\pi/2 \right] / 32(j-1)(j-2) - \\
& - \cos \left[j \left\{ \frac{\xi}{\eta} \right\} - v\pi/2 \right] [2(j^2+1)/(j^2-1)^2] / 32 \dots \Big\} , \\
v &= 0 \text{ для } Ce_j, \quad v = 1 \text{ для } Ce_j \ (j \geq 3),
\end{aligned}$$

где $\delta_{0j} = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$ ($j=m, n$) — символ Кронекера.

Из выражений (11) следует, что нормированные множители и сами собственные скалярные функции частично заполненного волновода при $c=0, d=0$ переходят в нормированные множители и аналогичные функции полого волновода. Из теории функций Маттье следует, что при $Se_m(q, \xi), Se_n(p, \eta)$ индексы m и n не могут принимать нулевые значения, однако и в прямоугольном волноводе не могут существовать E -волны с нулевыми индексами. На рис. 2 показаны зависимости для функций Маттье при $q=2,6$ и $p=0,55$.

Собственные векторы функции определяются [5] через собственные скалярные функции. Определим поперечную электрическую собственную векторную функцию волны квази H_{10} частично заполненного волновода. Собственная скалярная функция волны квази H_{10} такого волновода имеет вид

$$\Psi_{h10} = \sqrt{2 \cdot 64/ab(64+q^2+p^2+q^2p^2)} Ce_1(q, \xi) Ce_0(p, \eta). \quad (12)$$

Подставляя тригонометрическое представление функции Маттье [4], ограничиваясь в нем, например, двумя членами и используя соотношение

$$\boldsymbol{\epsilon}_h = (1/\kappa_h) [\nabla \Psi_h \boldsymbol{z}^0],$$

найдем искомую собственную векторную функцию:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_{h10} = & \sqrt{2 \cdot 64/ab(64+q^2+p^2+q^2p^2)} (1/\kappa_{h10}) \{ [(\pi/a)\sin(\pi/a)x - \\
& - (p\pi/2a)\sin(\pi/a)\cos(2\pi y/b) - (3q\pi/8a)\sin(3\pi x/a) + \\
& + (3qr\pi/16a)\sin(3\pi x/a)\cos(2\pi y/b)] \boldsymbol{y}^0 + \\
& + [(2r\pi/2b)\cos(\pi x/a)\sin(2\pi y/b) - (2qr\pi/16b)\cos(3\pi x/a) \times \\
& \times \sin(2\pi y/b)] \boldsymbol{x}^0 \}.
\end{aligned}$$

При отсутствии заполнения $c=0, d=0$ ($q=0, p=0$) найденное выражение переходит в собственную векторную функцию волны H_{10} полого волновода:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{h10} = \sqrt{2/ab} \sin(\pi x/a) \boldsymbol{y}^0.$$

Собственные векторные функции полностью заполненного волновода совпадают с соответствующими функциями полого волновода [5]. Действительно, при $c=a, d=b$ ($q=0, p=0$) имеем аналогичный результат. Влияние второго члена аппроксимации в уравнении (5) исследовалось численно.

В табл. 1 приведены значения собственных функций (12) в зависимости от количества членов ряда в аппроксимации (4) и от количества членов ряда в решении (11) при $c/a=0,3; d/b=0,6; \epsilon_r=10$.

Таблица 1

<i>i</i>	<i>k</i>		
	1 член	2 члена	3 члена
1 член	0,92	0,94	0,97
2 члена	0,96	—	—
3 члена	0,98	—	—

Из табл. 1 видно, что погрешность, получаемую при удержании в уравнении (5) одного члена ряда, можно компенсировать увеличением числа членов ряда в тригонометрическом представлении функции Матье, описывающих искомые собственные функции.

Такое представление позволяет легко контролировать процесс внутренней сходимости. Поскольку выражения для внешних параметров являются функционалами собственных функций, то при их отыскании собственные функции можно ограничивать двумя-тремя членами ряда в тригонометрическом представлении функций Матье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Почекняев В. Н., Скрыпник Л. В. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. № 5.
2. Колесников П. М. Теория неоднородных световодов и резонаторов. — Минск: Наука и техника, 1982. — 296 с.
3. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, т. 1 — 1958. — 960 с; т. 2 — 1960 — 990 с.
4. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953. — 475 с.
5. Машковцев Б. М., Цибизов К. Н., Емелин Б. Ф. Теория волноводов. — М: Наука, 1966. — 351 с.

Поступила в редакцию
3 октября 1989 г.

THE PROPER FUNCTIONS OF THE PARTICALLY-FILLED RECTANGULAR WAVEGUIDE

V. N. Pochernyaev, L. V. Skrypnik

State on article the approximate method of define the proper functions of the partially-filled rectangular waveguide. This method based on idea of relative dielectric permeability as sum of two functions, each of that is depend in cross-section only of the one coordinate. The cross-section of the partially-filled waveguide approximated by Four'e series. Determination is Matheau functions.

УДК 621.3.032.266

К ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБЧАТЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

B. A. Сыровой

Сформулированы уравнения релятивистского пучка, локализованного вблизи произвольной поверхности вращения. Построена новая форма уравнений приповерхностного пучка, не содержащая второй производной потенциала. Рассмотрены вопросы регуляризации асимптотических разложений при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом (ρ -режим) и температурой (T -режим). Результаты теории антипараксиальных разложений используются для построения адекватной теории приповерхностных пучков.

В работах [1, 2], где приведена полная библиография по общей теории параксиальных и приповерхностных течений, разрабатывавшейся В. Н. Даниловым, осесимметричные приповерхностные потоки получались как частный случай узких пучков, локализованных вблизи произвольной поверхности. По понятным причинам двумерные приповерхностные пучки представляют особый интерес и как самостоятельная модель, и как элемент более сложных построений [3] и потому заслуживают специального рассмотрения.

Ниже на основании результатов [2] приведена наиболее удобная форма соответствующих уравнений, содержащая вторые производные U'' , f'' потенциала на базовой поверхности и траекторной функции. В параксиальной теории известно преобразование [4], позволяющее исключить из уравнения U'' . В работе [5] эта форма использована для формирования непульсирующего бриллюэновского потока, берущего начало с экранированного от магнитного поля катода. Аналогичный вид придан уравнению релятивистского приповерхностного потока.

Рассмотрены вопросы регуляризации асимптотических разложений при эмиссии в ρ - и T -режимах, сводящиеся к введению в теорию искривленных эмиттирующих поверхностей в наиболее сложном варианте с ненулевым касательным к катоду магнитным полем. Выполнение условий термоэмиссии в ρ -режиме изучалось в асимптотической теории (см. [1, 2]) достаточно подробно. Вместе с тем требования практики не ограничиваются только этим случаем: при расчете электронно-оптической системы пушек для МЦР [6, 7], например, исследовалась эмиссия, ограниченная температурой, хотя анализ велся и не асимптотическими методами. Регуляризация строится с использованием результатов антипараксиальной теории (координатные разложения специальной структуры, ортогональность старта). Проведено сравнение разложений вблизи катода для теории приповерхностных пучков с асимптотически точными результатами антипараксиального подхода [8].

1. Уравнения трубчатых релятивистских пучков. Уравнения осесимметричного релятивистского приповерхностного пучка получены в [2] как частный случай общих соотношений для произвольной базовой поверхности. Они приведены в криволинейной системе $x^1 = l$, $x^2 = \phi$, $x^3 = s$, связанной с базовой трубкой тока $s = 0$, параметрические уравнения которой в меридиональной плоскости R , z есть

$$R = R_0(l), \quad z = Z_0(l). \quad (1)$$

Здесь l — длина дуги образующей, ϕ — азимут, s — расстояние, отсчи-

также по нормали к $s=0$. Удобнее, однако, работать в системе $x^1=l$, $x^2=s$, $x^3=\psi$ (рис. 1, см. на вклейке); связь l, s с R, z при этом задается формулами

$$R=R_0+Z'_0 s, \quad z=Z_0-R'_0 s. \quad (2)$$

Главные кривизны k_1, k_2 базовой поверхности выражаются через функции (1) при помощи соотношений

$$k_1=R''_0/Z'_0, \quad k_2=-Z'_0/R'_0, \quad (3)$$

дающих $k_1>0$ для вогнутой кривой рис. 1. В формулах [2] кривизны имеют противоположный знак. Чтобы добиться совпадения, необходимо перейти к системе $x^1=l$, $x^2=-\psi$, $x^3=s$ (рис. 2), которая в случае правой тройки дает противоположное по отношению к рис. 1 направление s . Параметризация поверхности $s=0$ в декартовых координатах $y^i=Y^i(\xi^1, \xi^2)$ при этом имеет вид $(\xi^1=l, \xi^2=-\psi)$

$$Y^1=R_0(\xi^1)\cos\xi^2, \quad Y^2=-R_0(\xi^1)\sin\xi^2, \quad Y^3=Z_0(\xi^1),$$

что в соответствии с формулами [2] дает соотношения (3). Из замены $x^2 \rightarrow -x^2$, $s \rightarrow -s$ вытекает также появление минуса перед $P_2(\xi)$ — ковариантной компоненты обобщенного импульса и E_s — нормального к поверхности $s=0$ электрического поля.

Изменение знаков у k_1, k_2, P_2, s, E_s имеет следствием приводимые ниже соотношения теории трубчатых релятивистских потоков в нормировке [2]. Уравнение приповерхностного пучка с подобными трубками тока принимает вид

$$\tilde{V}_l(\tilde{V}_l f')' + \bar{P}_\omega(l) = [\sigma - N(l)]f, \quad \bar{P}=\text{const}, \quad f' \equiv df/dl. \quad (4)$$

Здесь, и ниже V_l, V_ψ — компоненты скорости, а $\tilde{V}_l, \tilde{V}_\psi$ — компоненты импульса при $s=0$; σ — скалярная плотность заряда; N — эффективный «фон»; f — траекторная функция: $s=\xi f(l)$, где ξ — координата точки старта при $l=0$; $P_3=\bar{P}\xi$ — ковариантная компонента обобщенного импульса, соответствующая азимуту ψ .

Функции ω и N определены соотношениями

$$\begin{aligned} \omega &= R_0^{-1} [2(k_2-k_1)\tilde{V}_\psi - \Omega_l - (V_\psi/V_l)\Omega_\psi], \\ N &= n + (U+1)\bar{N} = R_0^{-1}(U+1)(R_0 U')' + 2(k_1^2 \tilde{V}_l^2 + k_2^2 \tilde{V}_\psi^2) - \\ &- K(\tilde{V}_l^2 + \tilde{V}_\psi^2) + \Omega_l^2 + \Omega_\psi^2 + 2k_1 \tilde{V}_l \Omega_\psi - 2k_2 \tilde{V}_\psi \Omega_l - \tilde{V}_\psi \Omega_s' - E_s^2, \\ n &= 3(k_1^2 \tilde{V}_l^2 + k_2^2 \tilde{V}_\psi^2) - (k_1 + 3k_2) \tilde{V}_\psi \Omega_l + (3k_1 + k_2) \times \\ &\times \tilde{V}_l \Omega_\psi - \tilde{V}_\psi \Omega_s' + \Omega_l^2 + \Omega_\psi^2 - E_s^2, \\ \bar{N} &= R_0^{-1}(R_0 U')' - T E_s, \quad T = k_1 + k_2, \quad K = k_1 k_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь U — скалярный потенциал, $\Omega_l, \Omega_s, \Omega_\psi$ — компоненты напряженности магнитного поля на базовой поверхности, T, K — ее полная и гауссова кривизны.

Интеграл энергии, сохранение P_3 (теорема Буша) и выражение для E_s записутся следующим образом:

$$U+1=(1-V_l^2-V_\psi^2)^{-1/2}, \quad R_0 \tilde{V}_\psi - \int R_0 \Omega_s dl = P_{30} = \text{const},$$

$$E_s = (U+1)(k_1 V_l^2 + k_2 V_\psi^2) + V_l \Omega_\psi - V_\psi \Omega_l.$$

Компоненты импульса p_l , p_ψ в потоке, распределение потенциала ϕ , выражение для плотности пространственного заряда ρ и компонент напряженности магнитного поля H_l , H_s , H_ψ приведены ниже:

$$\begin{aligned} p_l &= (\phi+1)v_l = \tilde{V}_l + \varepsilon \left(-\frac{\bar{P}}{R_0 f} \frac{V_\psi}{V_l} + k_1 \tilde{V}_l + \Omega_\psi \right) s, \\ p_\psi &= (\phi+1)v_\psi = \tilde{V}_\psi + \varepsilon \left(\frac{\bar{P}}{R_0 f} + k_2 \tilde{V}_\psi - \Omega_l \right) s, \\ \phi &= U + \varepsilon E_s s + \varepsilon^2 \frac{1}{2}(\rho - \bar{N}) s^2, \quad \rho = \varepsilon^2 \frac{R_0(0)f(0)J}{R_0 V_l f}, \\ H_l &= \varepsilon \Omega_l + \varepsilon^2 (\Omega'_s + k_1 \Omega_l - \rho V_\psi) s, \quad H_\psi = \varepsilon \Omega_\psi + \varepsilon^2 (k_2 \Omega_\psi + \rho V_l) s, \\ H_s &= \varepsilon \Omega_s + \varepsilon^2 [-R_0^{-1}(R_0 \Omega_l)' + T \Omega_s] s, \quad \sigma = \varepsilon^2 (U+1) \rho. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь ε — указатель порядка малости следующих за ним членов, соответствующий малому параметру асимптотической теории [2]. Члены с ρV_ψ , ρV_l в H_l , H_ψ определяют собственное магнитное поле.

В уравнение (4) симметрично входят вторые производные траекторной функции f и потенциала U на базовой поверхности, как и в уравнение параксиального релятивистского пучка с прямой осью. Известно, что последнее за счет введения новых переменных γ , θ может быть преобразовано к виду [4], в котором присутствует θ'' , но нет γ'' :

$$\gamma = U+1, \quad f = \theta(\gamma^2-1)^{-1/4}.$$

Эта форма параксиального уравнения была успешно использована [5] для решения задачи о непульсирующем бриллюэновском потоке, берущем начало с экранированного от магнитного поля катода.

Аналогичное представление допускает и уравнение (4). Выделим из фона N члены с производными U :

$$N = (U+1)[U'' + U'(R'_0/R_0)] + \bar{n}.$$

Уравнение (4) при этом запишется так:

$$\tilde{V}_l^2 f'' + \tilde{V}_l \tilde{V}'_l f' + \bar{P}_\omega(l) = (\sigma - \bar{n})f - (U+1)[U'' + U'(R'_0/R_0)]f.$$

Интеграл энергии из (6) приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \gamma &= U+1, \quad \tilde{V}_l^2 + \tilde{V}_\psi^2 = \gamma^2 - 1, \quad \tilde{V}_l^2 = \gamma^2 - 1 - \tilde{V}_\psi^2, \\ \tilde{V}_l \tilde{V}'_l &= \gamma \gamma' - \tilde{V}_\psi, \quad \tilde{V}'_\psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Вводя новую переменную θ по формуле

$$f = \theta/\tilde{V}_l = \theta(\gamma^2 - 1 - \tilde{V}_\psi^2)^{-1/2}, \quad (9)$$

преобразуем уравнение (4) к исковому виду:

$$\tilde{V}_l^2 \theta'' - \tilde{V}_l \tilde{V}'_l \theta' + [2\tilde{V}_l^2 - \gamma'^2 + (1/2)(\tilde{V}_\psi^2)'] \theta + \bar{P} \tilde{V}_l \omega(l) =$$

$$= [\sigma - \bar{n} - \gamma\gamma' (R'_0/R_0)]\theta.$$

Для более компактной записи здесь наряду с γ сохранена и переменная \tilde{V}_l . Компонента \tilde{V}_ψ и ее производные находятся при помощи формулы из (6):

$$\tilde{V}'_\psi = \Omega_s - \tilde{V}_\psi (R'_0/R_0), \quad \tilde{V}''_\psi = \Omega'_s - \Omega_s (R'_0/R_0) - (R''_0/R_0 - 2R'^2_0/R_0^2) \tilde{V}_\psi. \quad (11)$$

2. Уравнения нерелятивистского пучка. Для выяснения вопросов, связанных с регуляризацией асимптотических разложений (7), потребуется система, описывающая нерелятивистские потоки. Уравнение (4) в этом случае принимает вид

$$V_l(V_l f')' + \bar{P}_\omega(l) = (\rho - N)f. \quad (12)$$

Функции (5) описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \omega &= R_0^{-1} [2(k_2 - k_1)V_\psi - \Omega_l - (V_\psi/V_l)\Omega_\psi], \\ N &= n + \bar{N} = R_0^{-1}(R_0 U')' + 2(k_1^2 V_l^2 + k_2^2 V_\psi^2) - 2KU + \\ &\quad + \Omega_l^2 + \Omega_\psi^2 + 2k_1 V_l \Omega_\psi - 2k_2 V_\psi \Omega_l - V_\psi \Omega'_s, \\ n &= 3(k_1^2 V_l^2 + k_2^2 V_\psi^2) - (k_1 + 3k_2)V_\psi \Omega_l + (3k_1 + k_2)V_l \Omega_\psi - \\ &\quad - V_\psi \Omega'_s + \Omega_l^2 + \Omega_\psi^2, \quad \bar{N} = R_0^{-1}(R_0 U')' - TE_s. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (6) заменяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} 2U &= V_l^2 + V_\psi^2, \quad V'_\psi = \Omega_s - (R'_0/R_0)V_\psi, \\ E_s &= k_1 V_l^2 + k_2 V_\psi^2 + V_l \Omega_\psi - V_\psi \Omega_l. \end{aligned} \quad (14)$$

Для параметров нерелятивистского потока вместо (7) имеем

$$\begin{aligned} v_l &= V_l + \varepsilon \left(-\frac{\bar{P}}{R_0 f} \frac{V_\psi}{V_l} + k_1 V_l + \Omega_\psi \right) s, \quad v_\psi = V_\psi + \varepsilon \left(\frac{\bar{P}}{R_0 f} + k_2 V_\psi \Omega_l \right) s, \\ \varphi &= U + \varepsilon E_s s + \varepsilon^2 (1/2)(\rho - \bar{N}) s^2, \quad R_{00} V_l f = R_{00} f_0 J, \\ H_l &= \varepsilon \Omega_l + \varepsilon^2 (\Omega'_s + k_1 \Omega_l) s, \quad H_s = \varepsilon \Omega_s + \varepsilon^2 [-R_0^{-1}(R_0 \Omega_l)' + T \Omega_s] s, \\ H_\psi &= \varepsilon \Omega_\psi + \varepsilon^2 k_2 \Omega_\psi s, \quad R_{00} = R_0(0), \quad f_0 = f(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение для ρ в (15) развернуто в уравнение сохранения тока, а соотношения для H определяют внешнее магнитное поле.

Если учесть, что в случае релятивистского пучка разложение для φ из (7) начинается с U , что вблизи катода $U \sim l^{1/3}$ в ρ -режиме и $U \sim l$ в T -режиме, а релятивистские эффекты учитываются множителем $1 + U$, то отсюда можно сделать вывод о том, что для регуляризации асимптотических разложений достаточно рассмотреть уравнения нерелятивистского потока.

3. Регуляризация приповерхностных разложений при эмиссии в ρ -режиме. Регуляризация разложения для потенциала из (15) означа-

ет выполнение условий эмиссии в ρ -режиме на криволинейной поверхности, причем члены асимптотического ряда порядка ε и ε^2 должны убывать при приближении к катоду не медленнее U . Регуляризация достигается введением деформированной продольной координаты ζ :

$$\zeta = l - \varepsilon^2 \Lambda s^2, \quad \Lambda = \text{const}. \quad (16)$$

В системе ζ, s, ψ катод определяется уравнением

$$\zeta = 0 \text{ или } l = \Lambda s^2. \quad (17)$$

Из теории антипараксиальных разложений [8] известно, что вблизи катода параметры потока могут быть представлены в виде специальных координатных разложений по t :

$$t = \zeta^{1/3}. \quad (18)$$

В случае гладкой базовой поверхности ряды для функций R_0, k_1, k_2 строятся по $t^3 = \zeta$, а первые члены ряда для Ω описывают внешнее магнитное поле, которое также является аналитической функцией переменной ζ :

$$\begin{aligned} V_l &= V_{l2}t^2 + V_{l3}t^3 + \dots, & V_\psi &= V_{\psi3}t^3 + V_{\psi4}t^4 + \dots, \\ U &= U_4t^4 + U_5t^5 + \dots, \\ \Omega_l &= \Omega_{l0} + \Omega_{l3}t^3 + \dots, & \Omega_s &= \Omega_{s0} + \Omega_{s3}t^3 + \dots, \\ \Omega_\psi &= \Omega_{\psi0} + \Omega_{\psi3}t^3 + \dots, \\ \rho &= \rho_{-2}t^{-2} + \rho_{-1}t^{-1} + \dots, & R_0 &= R_{00} + R_{03}t^3 + \dots, \\ k_1 &= k_{10} + k_{13}t^3 + \dots, & k_2 &= k_{20} + k_{23}t^3 + \dots, & f &= f_0 + f_3t^3 + f_4t^4 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

После разложения первого члена ряда

$$U(l) = U(\zeta + \varepsilon^2 \Lambda s^2) \approx U(\zeta) + \varepsilon^2 U'(\zeta) \Lambda s^2$$

выражение для ϕ принимает вид

$$\varphi = U(\zeta) + \varepsilon E_s(\zeta) + \varepsilon^2 \{(1/2)[\rho(\zeta) - \bar{N}(\zeta)] + \Lambda U'(\zeta)\} s^2. \quad (20)$$

Рассмотрим в первую очередь соотношение для V'_ψ из (14); подстановка в него формул (19) дает

$$V_{\psi3} = \Omega_{s0}, \quad V_{\psi4} = V_{\psi5} = 0, \quad V_{\psi6} = \frac{1}{2} \left[\Omega_{s8} - \left(\frac{R_{03}}{R_{00}} \right) \Omega_{s0} \right]. \quad (21)$$

Регуляризацию начнем с выражения для E_s из (14). Первые два слагаемых в правой части имеют порядок t^4 и t^6 ; приравнивая нулю коэффициенты при t^2, t^3 , получаем

$$\Omega_{\psi0} = 0, \quad V_{\psi3}\Omega_{l0} = 0. \quad (22)$$

Учитывая формулу для $V_{\psi3}$ из (21), приходим к ограничениям на ориентацию вектора Ω на катоде:

$$\Omega_{\psi0} = 0, \quad \Omega_{s0}\Omega_{l0} = 0. \quad (23)$$

Соотношения (23) означают, что в плоскости z, R магнитное поле направлено либо по касательной $\Omega_{s0} \neq 0, \Omega_{l0} = 0$, либо по нормали $\Omega_{s0} = 0, \Omega_{l0} \neq 0$ к катоду, в то время как азимутальное поле равно нулю. Для релятивистского пучка это условие выполнено на внутренней трубке тока, которую и следует брать в качестве базовой поверхности.

Отдельные слагаемые, образующие функцию ω из (13), имеют с учетом (23) порядок t^3, t^0, t^4 ; для n из (13) порядок слагаемых $t^4, t^6, t^3, t^5, t^8, t^0, t^6$; фон \bar{N} в (13) после выполнения дифференцирования образован членами порядка t^{-2}, t и t^4 .

Подставим разложения (19) в выражения для ω, n, \bar{N} из (13), удерживая слагаемые порядка t^3 , что необходимо для уничтожения членов этого порядка в (20). В результате получим

$$\omega = \omega_0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \omega_3 t^3, \quad \omega_0 = R_{00}^{-1} \Omega_{00},$$

$$\omega_3 = R_{00}^{-1} [2(k_{20} - k_{10}) V_{\psi 3} - \Omega_{10} (\Omega_{13}/\Omega_{10} - R_{03}/R_{00})],$$

$$n = n_0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + n_3 t^3, \quad n_0 = \Omega_{10}^2, \quad n_3 = -V_{\psi 3} \Omega_{83} + 2\Omega_{10} \Omega_{13},$$

$$\bar{N} = \bar{N}_{-2} t^{-2} + \bar{N}_{-1} t^{-1} + \bar{N}_0 + \bar{N}_1 t + \bar{N}_2 t^2 + \bar{N}_3 t^3, \quad (24)$$

$$\bar{N}_{-2} = \frac{4}{9} U_4, \quad \bar{N}_{-1} = \frac{10}{9} U_5, \quad \bar{N}_0 = 2U_6, \quad \bar{N}_1 = \frac{28}{9} U_7 + \frac{4}{3} \left(\frac{R_{03}}{R_{00}} \right) U_4,$$

$$\bar{N}_2 = \frac{40}{9} U_8 + \frac{5}{3} \left(\frac{R_{03}}{R_{00}} \right) U_5, \quad \bar{N}_3 = 6U_9 + 2 \left(\frac{R_{03}}{R_{00}} \right) U_6.$$

Вторая группа членов в n из (13) не дает вклада в n_3 в силу (22). Слагаемые в левой части уравнения (12) имеют порядок t и t^0 , так что члены порядка t^{-2}, t^{-1} в правой части должны самосбалансироваться: $U'' = \rho$. Это соотношение, уравнение сохранения тока из (15) и интеграл энергии из (14) приводят к первым коэффициентам разложений:

$$V_{12} = \left(\frac{9J}{2} \right)^{1/3}, \quad 2U_4 = V_{12}^2 = \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3}, \quad (25)$$

$$\rho_{-2} = \frac{4}{9} U_4 = \frac{2}{9} \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3}, \quad V_{13} = U_5 = \rho_{-1} = 0.$$

Преобразуем уравнение (4) к следующему виду, разделив обе части на f и добавив к каждой из них n :

$$(\sigma - N) + n = \sigma - (U+1)\bar{N} = \rho / (U+1) - (U+1)\bar{N} = F + f^{-1}\bar{P}\omega + n, \quad (26)$$

$$F = f^{-1}V_1(V_1 f')'.$$

Разложение для $\sigma - (U+1)\bar{N}$ следует из (24) и с учетом (25) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma - (U+1)\bar{N} &= (\rho_0 - \bar{N}_0) + (\rho_1 - \bar{N}_1)t + \\ &\quad + (\rho_2 - \bar{N}_2 - 2\rho_{-2}\bar{U}_4)t^2 + (\rho_3 - \bar{N}_3)t^3. \end{aligned} \quad (27)$$

Символом тильда здесь отмечены релятивистские поправки. Подставляя в правую часть уравнения (26) формулы (19) и используя (24), получим еще одно разложение для $\sigma - (U+1)\bar{N}$:

$$\sigma - (U+1)\bar{N} = (f_0^{-1}\bar{P}\omega_0 + \Omega_{10}^2) + (2/3)V_{12}^2 \bar{f}_3 t + (4/3)V_{12}^2 \bar{f}_4 t^2 + \quad (28)$$

$$+ [f_0^{-1}\bar{P}_{\omega_0}(\bar{\omega}_3 - \bar{f}_3) + 2V_{l2}V_{l4}\bar{f}_3 + (20/9)\bar{f}_5 + n_3]t^3,$$

$$\bar{f}_k \equiv f_0^{-1}f_k, \quad \bar{\omega}_3 \equiv \omega_0^{-1}\omega_3.$$

Запишем теперь условия регуляризации члена порядка ε^2 в (20), используя (27) и выражения для N_k из (24):

$$\rho - \bar{N} = (\rho_0 - \bar{N}_0) + (\rho_1 - \bar{N}_1)t + (\rho_2 - \bar{N}_2)t^2 + (\rho_3 - \bar{N}_3)t^3 + \dots, \quad (29)$$

$$\rho_0 - 2U_6 = 0, \quad (4/3)U_4\Delta + 1/2[\rho_1 - (28/9)U_7 + 4/3\bar{R}_{03}U_4] = 0,$$

$$\rho_2 - (40/9)U_8 = 0, \quad 2U_6\Delta + (1/2)[\rho_3 - (6U_9 + 2\bar{R}_{03}U_6)] = 0, \quad \bar{R}_{03} \equiv R_{00}^{-1}R_{03}.$$

Дополнительные связи на вошедшие в (29) коэффициенты накладываются уравнением (26), уравнением сохранения тока из (15) и интегралом энергии из (8). Первая группа связей получается приравниванием правых частей в (27), (28) при использовании соотношений регуляризации (29):

$$f_0^{-1}\bar{P}_{\omega_0} + \Omega_{l0}^2 - 0, \quad (2/3)V_{l2}^2\bar{f}_3 = -(8/3)U_4\Lambda, \quad (4/3)V_{l3}^2\bar{f}_4 = -2\rho_{-2}\bar{U}_4, \quad (30)$$

$$f_0^{-1}\bar{P}_{\omega_0}(\bar{\omega}_3 - \bar{f}_3) + 2V_{l2}V_{l4}\bar{f}_3 + (20/9)\bar{V}_{l2}^2\bar{f}_5 - V_{\psi 3}\Omega_{s3} + 2\Omega_{l0}\Omega_{l3} = -4U_6\Lambda.$$

Три первых соотношения (30) приводят к определению константы \bar{P} и заключениям относительно коэффициентов f_3, f_4 разложения траекторной функции. Используя выражения для ω_0 из (24) и связь V_{l2} с U_4 из (25), имеем

$$(f_0R_{00})^{-1}\bar{P} = \Omega_{l0}, \quad \bar{f}_3 = -2\Lambda, \quad \bar{f}_4 = -(1/3)\bar{U}_4. \quad (31)$$

Уравнение сохранения тока из (15) приводит ко второй группе связей:

$$\rho_{-2}V_{l4} + \rho_0V_{l2} = 0, \quad \rho_{-2}V_{l5} + \rho_1V_{l2} + J(\bar{R}_{03} + \bar{f}_3) = 0, \quad \rho_{-2}V_{l6} + \rho_0V_{l4} +$$

$$+ \rho_2V_{l2} + \bar{f}_4 = 0, \quad \rho_{-2}V_{l7} + \rho_0V_{l5} + \rho_1V_{l4} + \rho_3V_{l2} + J\bar{f}_5 = 0. \quad (32)$$

Наконец, интеграл энергии из (8) дает следующие связи:

$$2U + U^2 = (U + 1)^2(V_l^2 + V_{\psi}^2),$$

$$2U_6 = 2V_{l2}V_{l4} + V_{\psi 3}^2, \quad U_7 = V_{l2}V_{l5}, \quad 2U_8 + \bar{U}_4^2 = 2V_{l2}V_{l6} +$$

$$+ V_{l4}^2 + 2V_{l2}^2\bar{U}_4, \quad U_9 = V_{l2}V_{l7} + V_{l4}V_{l5} + V_{\psi 3}V_{\psi 6}. \quad (33)$$

Прежде чем переходить к решению уравнений (29)–(33), выясним вопрос об ортогональности старта [8] и вычислим главные кривизны эмиттера в точке $l=s=0$.

Поверхность катода $\xi=0$ и трубка тока $\xi=\text{const}$ в его окрестности в криволинейной системе l, s с коэффициентами Ляме $h_1=1-k_1s, h_2=1$ задаются уравнениями

$$\xi = l - \Lambda s^2 = 0, \quad \xi = s/f \approx f_0^{-1}(1 - \bar{f}_3 l)s. \quad (34)$$

Компоненты градиента функций $\zeta(l, s)$, $\xi(l, s)$ определены формулами

$$\nabla \zeta = \{h_1^{-1}(\partial \zeta / \partial l), \partial \zeta / \partial s\} = \{h_1^{-1}, -2\Lambda s\},$$

$$\nabla \xi = \{h_1^{-1}(\partial \xi / \partial l), \partial \xi / \partial s\} = \{-(h_1 f_0)^{-1} \bar{f}_3 s, \bar{f}_0^{-1}(1 - \bar{f}_3 l)\}.$$

Скалярное произведение двух этих векторов суть

$$\nabla \zeta \cdot \nabla \xi = -(h_1^2 f_0)^{-1} \bar{f}_3 s - 2\bar{f}_0^{-1} \Lambda(1 - \bar{f}_3 l)s. \quad (35)$$

Вблизи катода, т. е. при малых ζ, l членом в скобке можно пренебречь по сравнению с единицей. Используя связь \bar{f}_3 с Λ из (31), выражение (35) можно переписать в виде

$$\nabla \zeta \cdot \nabla \xi = (h_1^2 f_0)^{-1} \bar{f}_3 (h_1^2 - 1) s. \quad (36)$$

Для ортогональности старта правая часть в (36) тождественно по s должна обращаться в нуль:

$$h_1 = 1 - k_1(0)s \equiv 1. \quad (37)$$

Таким образом, ортогональность старта на поверхности катода возможна лишь в том случае, когда кривизна базовой трубы тока на нем равна нулю:

$$k_1(0) = 0. \quad (38)$$

Условие (38) представляет собой ограничение на форму базовой поверхности, которое следует учитывать при ее задании. Заметим, что это условие соответствует точным в асимптотическом смысле результатам антипараксиальной теории, согласно которой при выполнении соотношений (23) кривизна трубы тока пропорциональна логарифмической производной от плотности тока вдоль катода. При произвольном задании базовой поверхности частицы покидают катод с неортогональностью порядка ϵ . Обратим внимание также на тот факт, что базовая трубка тока по построению ортогональна искривленному эмиттеру: $h_1 = 1$ при $s = 0$.

В системе l, s катод задается уравнением (17), разрешив которое относительно s , имеем

$$s = s(l) = (l/\Lambda)^{1/2}. \quad (39)$$

Параметрические уравнения катода (параметр — длина дуги базовой поверхности, а не катода) получим, использовав связь (2) и уравнение (39):

$$R = R(l) = R_0(l) + Z'_0(l)s(l), \quad z = Z(l) = Z_0(l) - R'_0(l)s(l). \quad (40)$$

Для вычисления главной кривизны κ_1 применим известную формулу дифференциальной геометрии:

$$|\kappa_1| = |(R''Z' - R'Z'')/(R'^2 + Z'^2)^{3/2}|. \quad (41)$$

Значение κ_1 при $l = s = 0$ выражается через производные функций (40), которые при $s \rightarrow 0$ неограниченно возрастают. Выделяя главные члены в числителе и знаменателе (41), имеем

$$R'^2 + Z'^2 \approx (4\Lambda^2 s^2)^{-1}, \quad R''Z' - R'Z'' \approx -(4\Lambda^2 s^3)^{-1}, \quad (42)$$

$$|\kappa_1| = |2\Lambda|.$$

Знак κ_1 следует из геометрических соображений: при $\Delta > 0$ уравнение (17) определяет вогнутую поверхность (нормаль к ней совпадает с направлением движения частиц), которая имеет положительную кривизну:

$$\kappa_1 = 2\Lambda. \quad (43)$$

Вторая главная кривизна катода κ_2 определена соотношением

$$\kappa_2 = -\sin \theta / R_0 = -R'_0 / R_0,$$

где угол θ изображен на рис. 1 (см. на вклейке). Пользуясь разложением R_0 из (18), для κ_1, κ_2 и полной кривизны катода \bar{T} при $l=s=0$ с учетом (31) имеем

$$\kappa_1 = 2\Lambda, \quad \kappa_2 = -\bar{R}_{03}, \quad \bar{T} = 2\Lambda - \bar{R}_{03} = -(\bar{f}_3 + \bar{R}_{03}). \quad (44)$$

Последовательное рассмотрение троек уравнений из (29), (32), (33) дает возможность сформулировать условия регуляризации в окончательной форме. В результате получаем ($\bar{\Omega}_{ss} \equiv \Omega_{s0}^{-1} \Omega_{ss}$)

$$\begin{aligned} V_{14} &= -\frac{9}{20} V_{12}^{-1} \Omega_{s0}^2, \quad 2U_6 = \rho_0 = \frac{1}{10} \Omega_{s0}^2, \\ V_{15} &= \frac{4}{15} V_{12} \bar{T}, \quad U_7 = \frac{8}{15} U_4 \bar{T}, \quad \rho_1 = \frac{11}{15} \rho_2 \bar{T}, \\ V_{16} &= -\frac{27}{1400} J^{-1} \Omega_{s0}^4 - \frac{11}{7} \bar{J}, \quad U_8 = V_{12} \left(\frac{9}{2800} J^{-1} \Omega_{s0}^4 + \frac{13}{112} \bar{J} \right), \\ \rho_2 &= V_{12} \left(\frac{1}{70} J^{-1} \Omega_{s0}^4 + \frac{25}{126} \bar{J} \right); \\ V_{17} &= V_{12}^{-1} \left\{ \left[\frac{39}{280} \bar{T} - \frac{27}{56} (\bar{\Omega}_{ss} + \kappa_2) \right] \Omega_{s0}^2 - \frac{1}{28} V_{12}^2 \bar{f}_5 \right\}, \\ U_9 &= \left[\frac{27}{1400} \bar{T} + \frac{1}{56} (\bar{\Omega}_{ss} + \kappa_2) \right] \Omega_{s0}^2 - \frac{1}{28} V_{12}^2 \bar{f}_5, \\ \rho_3 &= \left[\frac{11}{700} \bar{T} + \frac{3}{28} (\bar{\Omega}_{ss} + \kappa_2) \right] \Omega_{s0}^2 - \frac{3}{14} V_{12}^2 \bar{f}_5. \end{aligned} \quad (45)$$

Для определения коэффициента \bar{f}_5 , через который выразились V_{17}, U_9, ρ_3 , служит последнее соотношение регуляризации (30). Принимая во внимание (22) при анализе члена $\bar{P}\omega_3/f_0$, имеем

$$V_{12}^2 \bar{f}_5 = \frac{9}{20} (\bar{T} \Omega_{10}^2 - \kappa_1 \Omega_{s0}^2 + \Omega_{s0} \Omega_{ss} - \Omega_{10} \Omega_{13}). \quad (47)$$

Подстановка (47) в три последние формулы из (46) дает ($\bar{\Omega}_{13} \equiv \Omega_{10}^{-1} \Omega_{13}$)

$$\begin{aligned} V_{17} &= V_{12}^{-1} \left[-\frac{9}{560} (\bar{T} - \bar{\Omega}_{13}) \Omega_{10}^2 + \left(\frac{87}{560} \kappa_1 - \frac{12}{35} \kappa_2 - \frac{279}{560} \bar{\Omega}_{ss} \right) \Omega_{s0}^2 \right], \\ U_9 &= -\frac{9}{560} (\bar{T} - \bar{\Omega}_{13}) \Omega_{10}^2 + \left(\frac{39}{2800} \kappa_1 + \frac{13}{350} \kappa_2 + \frac{1}{560} \bar{\Omega}_{ss} \right) \Omega_{s0}^2, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\rho_2 = -\frac{27}{280} (\bar{T} - \bar{\Omega}_{13}) \Omega_{10}^2 + \left(\frac{157}{1400} x_1 + \frac{43}{350} x_2 + \frac{3}{280} \bar{\Omega}_{33} \right) \Omega_{50}^2 .$$

Полностью определенные через форму катода и условия на нем коэффициенты $U_4 \dots U_9$ ограничивают произвол в задании потенциала на базовой поверхности:

$$U = U_4 l^{4/3} + U_6 l^2 + U_7 l^{7/3} + U_8 l^{8/3} + U_9 l^3 + \bar{U}(l) ,$$

где \bar{U} — произвольная функция, причем $\bar{U} \sim l^{10/3}$ при $l \rightarrow 0$. Траекторные коэффициенты f_3, f_4, f_5 описывают при этом решение вблизи катода и позволяют начать интегрирование уравнения (4) на некотором расстоянии от особенности. При задании формы границы и решении уравнения (4) относительно U коэффициенты $U_4 \dots U_9$ и f_3, f_4, f_5 меняются ролями.

4. Регуляризация приповерхностных разложений при эмиссии в T -режиме. В соответствии с [8] параметром прикатодных разложений при эмиссии в T -режиме является

$$t = \xi^{1/2} .$$

Представим гидродинамические параметры потока при $s=0$ и функцию $f(l)$ в виде

$$\begin{aligned} V_l &= V_{l0} t + V_{l2} t^2 + \dots, \quad V_\psi = V_{\psi 2} t^2 + V_{\psi 3} t^3 + \dots, \quad U = U_2 t^2 + U_3 t^3 + \dots, \\ \Omega_l &= \Omega_{l0} + \Omega_{l2} t^2 + \dots, \quad \Omega_s = \Omega_{s0} + \Omega_{s2} t^2 + \dots, \\ \Omega_\psi &= \Omega_{\psi 0} + \Omega_{\psi 2} t^2 + \dots, \\ \rho &= \rho_{-1} t^{-1} + \rho_0 + \dots, \quad R = R_{00} + R_{02} t^2 + \dots, \quad k_1 = k_{10} + k_{12} t^2 + \dots, \\ k_1 &= k_{20} + k_{22} t^2 + \dots, \quad f = f_0 + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \dots \end{aligned} \tag{49}$$

Для регуляризации разложения (20) необходимо добиться уничтожения членов порядка t, t^0, t^{-1}, \dots , если такие члены будут присутствовать в слагаемых за ε и ε^2 .

Подстановка (49) в уравнение для V_ψ из (14) дает

$$V_{\psi 2} = \Omega_{s0}, \quad V_{\psi 3} = 0. \tag{50}$$

В выражении для E_s из (20), (14) все члены имеют порядок t^2 и выше, за исключением $V_l \Omega_\psi \sim t$. Коэффициент при этой степени t может быть обращен в нуль за счет азимутального поля на катоде:

$$\Omega_{\psi 0} = 0. \tag{51}$$

По сравнению с ρ -режимом ограничения на Ω менее строги: в T -режиме отсутствует второе условие (23).

Подстановка (49) в \bar{N} из (5) дает следующую асимптотику этой функции:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \bar{N}_{-1} t^{-1} + \bar{N}_0 + \bar{N}_1 t + \dots, \quad \bar{N}_{-1} = (3/4) U_3, \\ \bar{N}_0 &= 2 U_4 + \bar{R}_{02} U_2, \quad \bar{N}_1 = (15/4) U_5 + \bar{R}_{02} U_3. \end{aligned} \tag{52}$$

Рассмотрим теперь член порядка ε^2 в (20):

$$\begin{aligned} (1/2)(\rho - \bar{N}) + \Lambda U' &= (1/2)[(\rho_{-1} - \bar{N}_{-1}) t^{-1} + (\rho_0 - \bar{N}_0) + (\rho_1 - \bar{N}_1) t] + \\ &\quad + \Lambda(U_2 + (3/2)U_3 t) + \dots, \end{aligned}$$

Требуя обращения в нуль коэффициентов при t^{-1} , t^0 , t , получаем следующие условия регуляризации в дополнение к (51):

$$\rho_{-1} = \bar{N}_{-1}, \quad \rho_0 = \bar{N}_0 - 2\Lambda U_2, \quad \rho_1 = \bar{N}_1 - 3\Lambda U_3. \quad (53)$$

Приступим к рассмотрению уравнения (4), вычислив предварительно коэффициенты разложений функций ω , σ и n через последнюю, зная (52), найдем $N = (U+1)\bar{N} + n$. С учетом (51) получаем

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_2 t^2 + \dots, \quad \sigma = \sigma_{-1} t^{-1} + \sigma_0 + \sigma_1 t + \dots, \quad n = n_0 + n_2 t^2 + \dots, \\ \omega_0 &= -\Omega_{10}/R_{00}, \quad \sigma_{-1} = \rho_{-1}, \quad \sigma_0 = \rho_0, \quad \sigma_1 = \rho_1 - \rho_{-1} \tilde{U}_2, \quad n_0 = \Omega_{10}^2, \\ N &= N_{-1} t^{-1} + N_0 + N_1 t + \dots, \quad N_{-1} = \bar{N}_{-1}, \\ N_0 &= \bar{N}_0 + n_0, \quad N_1 = \bar{N}_1 + \bar{N}_{-1} \tilde{U}_2. \end{aligned} \quad (54)$$

Левая часть уравнения (4) при малых t имеет порядок единицы, а балансировка членов порядка t^{-1} в правой части осуществляется за счет первого соотношения (53). Приравнивая члены порядка t^0 и t , в которые входят вовлеченные в условия регуляризации коэффициенты ρ_0 , ρ_1 , имеем

$$\begin{aligned} (1/2)V_{11}^2 f_2 + \bar{P}\omega_0 &= (\rho_0 - N_0)f_0 = (-2\Lambda U_2 - n_0)f_0, \\ (3/2)V_{11}^2 f_3 + (3/2)V_{11}V_{12}f_2 &= (\rho_1 - N_1)f_0 = (-3\Lambda U_3 - 2\rho_{-1}\tilde{U}_2)f_0. \end{aligned} \quad (55)$$

Последние равенства в (55) получены с учетом (54), (53).

Интеграл энергии в (33) с использованием второго соотношения (50) дает

$$\begin{aligned} 2U_2 &= V_{11}^2, \quad U_3 = V_{11}V_{12}, \quad 2U_4 = V_{12}^2 + 2V_{11}V_{13} + V_{13}^2 - 3\tilde{U}_2^2, \\ U_5 &= V_{11}V_{14} + V_{12}V_{13} + 3\tilde{U}_2\tilde{U}_3. \end{aligned} \quad (56)$$

Наконец, уравнение сохранения тока из (15) приводит к соотношениям для коэффициентов при t^0 , t , t^2 :

$$\begin{aligned} \rho_{-1}V_{11} &= J, \quad \bar{\rho}_0 + \bar{V}_{12} = 0, \quad \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_0 \bar{V}_{12} + \bar{V}_{13} + \bar{f}_2 + \bar{R}_{02} = 0, \\ \bar{\rho}_k &\equiv \rho_k/\rho_{-1}, \quad \bar{V}_{lk} \equiv V_{lk}/V_{11}. \end{aligned} \quad (57)$$

Остается получить явные выражения для коэффициентов разложений в (49) через геометрию катода, плотность тока эмиссии J и электрическое поле E на нем:

$$l = 0, \quad dU/dl = U_2 = E. \quad (58)$$

Условие (58) вместе с первыми соотношениями из (56), (57) дает

$$U_2 = E, \quad V_{11} = \sqrt{2E}, \quad \rho_{-1} = J/\sqrt{2E}. \quad (59)$$

Второе соотношение из (57), U_3 из (56) вместе с ρ_{-1} из (53), (52) служат для определения следующих коэффициентов:

$$U_3 = (4/3)J/\sqrt{2E}, \quad V_{12} = (2/3)J/E, \quad \rho_0 = -(1/3)J^2/E^3. \quad (60)$$

Уравнения (55) теперь могут быть разрешены относительно коэффициентов разложения траекторной функции

$$\bar{f}_2 = -2\Lambda - (\Omega_{l0}/E) [\Omega_{l0} - \bar{P}/(R_{00}f_0)], \quad \bar{f}_3 = (2/3)(J/E\sqrt{2E}) (2\Lambda + \bar{f}_2 - \bar{E}). \quad (61)$$

Последнее соотношение (57), U_4 из (56) и ρ_0 из (53), (52) дают с учетом (61)

$$U_4 = -\frac{1}{6} \frac{J^3}{E^2} + \frac{1}{2} (2\Lambda - \bar{R}_{02})E, \\ V_{l3} = \frac{1}{2\sqrt{2E}} \left[-\frac{7}{9} \frac{J^3}{E^2} + (2\Lambda - \bar{R}_{02})E - \Omega_{s0}^2 - 3\tilde{E}^2 \right], \quad (62)$$

$$\rho_1 = \frac{J}{\sqrt{2E}} \left[\frac{5}{12} \frac{J^3}{E^3} + \frac{3}{4} (2\Lambda - \bar{R}_{02}) + \frac{1}{4} \frac{\Omega_{s0}^2}{E} + \frac{\Omega_{l0}}{E} \left(\Omega_{l0} - \frac{\bar{P}}{R_{00}f_0} \right) + \frac{3}{4} \tilde{E} \right].$$

Выражение для ρ_1 из (53) совместно с \bar{N}_1 из (52) при уже найденном ρ_1 позволяет вычислить U_5 , а последняя формула в (56) — найти V_{ll} :

$$\rho_1 = \bar{N}_1 - 3\Lambda U_3 = \frac{15}{4} U_5 + \left(\frac{3}{2} \bar{R}_{02} - 3\Lambda \right) U_3,$$

$$U_5 = \frac{J}{\sqrt{2E}} \left[\frac{1}{9} \frac{J^2}{E^3} + \frac{11}{15} (2\Lambda - \bar{R}_{02}) + \frac{1}{15} \frac{\Omega_{s0}^2}{E} + \frac{4}{15} \frac{\Omega_{l0}}{E} \left(\Omega_{l0} - \frac{\bar{P}}{R_{00}f_0} \right) + \frac{1}{5} \tilde{E} \right], \quad (63)$$

$$V_{ll} = \frac{5}{27} \frac{J^3}{E^4} + \frac{1}{5} \frac{J}{E} (2\Lambda - \bar{R}_{02}) + \frac{1}{5} \frac{J\Omega_{s0}^2}{E^2} + \frac{2}{15} \frac{J\Omega_{l0}^2}{E^2} \left(\Omega_{l0} - \frac{\bar{P}}{R_{00}f_0} \right) - \frac{7}{5} \tilde{J}.$$

Вопрос о смысле константы \bar{P} , который при эмиссии в ρ -режиме был решен рассмотрением уже исследованных уравнений, остается открытым. Обратимся к асимптотическим разложениям для компонент скорости в (15). Член порядка ε в v_l в силу (49), (51) ведет себя вблизи $l=0$ как V_l , в то время как соответствующий член в v_ψ нуждается в регуляризации, наступающей при выполнении первого условия (31). Формулы (61), следовательно, принимают вид

$$\bar{f}_2 = -2\Lambda, \quad \bar{f}_3 = -(2/3)\tilde{J}/\sqrt{2E}. \quad (64)$$

Выражения для главных кривизн эмиттера отличаются от формул (44) только индексами коэффициентов:

$$\kappa_1 = 2\Lambda, \quad \kappa_2 = -\bar{R}_{02}, \quad \bar{T} = 2\Lambda - \bar{R}_{02} = -(\bar{f}_2 + \bar{R}_{02}). \quad (65)$$

С учетом этих обстоятельств коэффициенты в (62), (63) определяются формулами

$$U_4 = \frac{1}{2} \bar{T}E - \frac{1}{6} \frac{J^3}{E^3}, \quad V_{l3} = \frac{1}{2\sqrt{2E}} \left(\bar{T}E - \frac{7}{9} \frac{J^3}{E^2} - \Omega_{s0}^2 - 3\tilde{E}^2 \right), \\ \rho_1 = \frac{J}{\sqrt{2E}} \left(\frac{3}{4} \bar{T} + \frac{5}{12} \frac{J^2}{E^3} + \frac{1}{4} \frac{\Omega_{s0}^2}{E} + \frac{3}{4} \tilde{E} \right),$$

$$U_5 = \frac{J}{\sqrt{2E}} \left(\frac{11}{15} \bar{T} + \frac{1}{9} \frac{J^2}{E^3} + \frac{1}{15} \frac{\Omega_{s0}^2}{E} + \frac{1}{5} \tilde{E} \right),$$

$$V_{14} = \frac{1}{5} \frac{J}{E} \left(\bar{T} + \frac{25}{27} \frac{J^2}{E^3} + \frac{\Omega_{s0}^2}{E} - \frac{7}{5} \tilde{E} \right).$$

Условие ортогональности старта, как и при эмиссии в ρ -режиме, выполняется при ограничении (38).

4. Отношение прикатодных асимптотик к результатам антипараксиальной теории. В [9] обсуждался вопрос о неполном соответствии прикатодных разложений в параксиальной и антипараксиальной теориях. В то время как последняя дает точные локальные характеристики потока, свойственная параксиальному подходу приближенность рассмотрения приводит к утере части информации, содержащейся в точных уравнениях пучка. Интересно посмотреть, как обстоит дело в этом отношении с приповерхностными потоками.

При эмиссии в ρ -режиме в системе l, s , использовавшейся для построения приповерхностных асимптотик, теория антипараксиальных разложений [8] приводит при выполнении условий $J = \text{const}$, $\Omega_{\Phi 0} = 0$, $\Omega_{l0}\Omega_{s0} = 0$, $k_{10} = 0$ к следующему результату:

$$\begin{aligned} 2U = & \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3} l^{4/3} + \frac{1}{10} \Omega_{s0}^2 l^2 + \frac{8}{15} \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3} \bar{T} l^{7/3} + \left(\frac{9J}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{9}{1400} \frac{\Omega_{s0}^4}{J} + \frac{13}{56} \tilde{J} \right) l^{8/3} + \\ & + \left(\frac{13}{175} \bar{T} \Omega_{s0}^2 + \frac{1}{280} \Omega_{s0} \frac{\partial H_l}{\partial s} - \frac{9}{280} \Omega_{l0} \frac{\partial H_s}{\partial s} \right) l^3 + \dots \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь член \tilde{J} означает релятивистскую поправку. Производные по s в (67) можно выразить через $\partial H_s / \partial l = \Omega_{s3}$ и $\partial H_l / \partial l = \Omega_{l3}$ из уравнения для ротора и дивергенции H :

$$\partial H_l / \partial s = \Omega_{s3}, \quad \partial H_s / \partial s = -\Omega_{l3} + \kappa_2 \Omega_{l0} + k_2 \Omega_{s0}. \quad (68)$$

Подстановка (68) в U_9 из (67) дает

$$U_9 = -\frac{9}{560} \kappa_2 \Omega_{l0}^2 + \frac{9}{560} \Omega_{l0} \Omega_{s3} + \frac{13}{350} \kappa_2 \Omega_{s0}^2 + \frac{1}{560} \Omega_{s0} \Omega_{s3} + \frac{13}{350} \kappa_1 \Omega_{s0}^2. \quad (69)$$

Видно, что в (69) и (47) отличаются члены с $\kappa_1 \Omega_{l0}^2$, $\kappa_2 \Omega_{s0}^2$. Кроме того, приповерхностные асимптотики не дают релятивистской поправки в U_8 .

При эмиссии в T -режиме [8] антипараксиальное разложение для потенциала на оси при выполнении условий приповерхностной асимптотики имеет вид

$$\begin{aligned} \phi = & El + \frac{4}{3} \frac{J}{\sqrt{2E}} l^{3/2} + E \left(\frac{1}{2} \bar{T} - \frac{1}{6} \frac{J^2}{E^3} \right) l^2 + \\ & + \frac{J}{\sqrt{2E}} \left(\frac{11}{15} \bar{T} + \frac{1}{9} \frac{J^2}{E^3} + \frac{1}{15} \frac{\Omega_{s0}^2}{E} + \frac{1}{5} \tilde{E} \right) l^{5/2} + \dots \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь \tilde{E} — релятивистская поправка.

Сравнение с формулами (60), (62), (66) показывает, что регуляризация и антипараксиальные разложения дают в этом случае тождественный результат.

Заметим в заключение, что для произвольного приповерхностного пучка регуляризация в [2] проведена для нерелятивистских течений. Учет релятивистских поправок дает отличные от нуля значения коэффициентов V^{16} , U_8 :

$$V^{16} = -\frac{11}{7} (V \bar{G}_0^{\bar{1}\bar{1}})^{-1} \bar{J}, \quad U_8 = \frac{13}{112} V_{12} (V \bar{G}_0^{\bar{1}\bar{1}})^{-1} \bar{J}.$$

Обозначения в приведенных формулах соответствуют принятым в [2].

6. Решение внешней задачи. В работе [2] построено выражение для потенциала вне произвольного приповерхностного пучка с границей $s=s_e$ при подобных трубках тока. Учитывая упрощения, связанные с осесимметричностью, имеем

$$\begin{aligned} \varphi = & U + Es + (\rho - \bar{N}) s_e (s - (1/2) s_e) + \varphi_2 (s^2 - 2s_e s + s_e^2) + \\ & + \varphi_3 (s^3 - 3s_e^2 s + 2s_e^3) + \varphi_4 (s^4 - 4s_e^3 s + 3s_e^4), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} 2\varphi_2 = & -\bar{N}, \quad 6\varphi_3 = -2T\bar{N} - 2KE - \Delta_0 E - \Delta_1 U, \quad 12\varphi_4 = -3(T^2 - K)\bar{N} - \\ & - 3KTE + (1/2) \Delta_0 \bar{N} - (3/2) T(\Delta_0 E + \Delta_1 U) - \Delta_1 E - \Delta_2 U, \\ \Delta_0 U = & R_0^{-1} (R_0 U')', \quad \Delta_1 U = R_0^{-1} [R_0(k_1 - k_2) U']', \\ \Delta_2 U = & R_0^{-1} [R_0 k_1 (k_1 - k_2) U']'. \end{aligned}$$

В [9] сформулировано регуляризованное решение внешней задачи для нерелятивистского квазиаксиально-симметричного электростатического пучка. При этом расходящаяся часть разложения была сведена к потенциалу вне цилиндрического потока. Естественно ожидать, что при кольцевой геометрии роль нулевого приближения будет играть решение для ленточного пучка. Сохраняя в нерегуляризованном разложении (71) квадратичные члены, по аналогии с параксиальным случаем осуществим группировку расходящегося фрагмента ряда, членов со слабой расходимостью и регулярной части:

$$\begin{aligned} \varphi = & \left[U - \frac{1}{2} U''(s - s_e)^2 \right] + U' \left[\frac{f'}{f} s_e \left(s - \frac{1}{2} s_e \right) - \frac{1}{2} \frac{R'_0}{R_0} (s - s_e)^2 \right] + \\ & + U \left[2k_1 s + \left(\frac{f''}{f} + 3k_1^2 \right) (2s_e s - s_e^2) + k_1 T (s - s_e)^2 \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

Слагаемое, пропорциональное U' , можно исключить введением деформированной продольной координаты, которая на границе потока совпадает с деформированной координатой (16), (31) внутренней задачи:

$$\xi = l - e^2 L(l, s), \quad L = \frac{1}{2} \frac{R'_0}{R_0} (s - s_e)^2 - s'_e \left(s - \frac{1}{2} s_e \right). \quad (73)$$

Расходящийся фрагмент в первой квадратной скобке представляет собой два первых члена разложения решения для ленточного пучка с прямой осью и с потенциалом $U(\xi)$ на ней:

$$U - (1/2) U''(s - s_e)^2 + \dots = \operatorname{Re} U(\xi + i(s - s_e)). \quad (74)$$

Объединяя формулы (72) — (74), приходим к следующей форме регуляризованного решения:

$$\begin{aligned} \varphi = & \operatorname{Re} U(\xi + i(s - s_e)) + U(\xi) [2k_1 s + ((s_e''/s_e) + 3k_1^2)] \times \\ & \times (2s_e s - s_e^2) + k_1 T (s - s_e)^2]. \end{aligned} \quad (75)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сыровой В. А. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 7. С. 1492.
2. Сыровой В. А. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 8. С. 170б.
3. Акимов П. И., Плехов В. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. В печати.
4. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. — М.: Мир, 1980.
5. Алексахин Ю. И. Препринт ОИЯИ Р9-84-619. 1984.
6. Мануилов В. Н., Цимлинг Ш. Е. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 23. № 7. С. 1486.
7. Мануилов В. Н. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. № 11. С. 2425.
8. Сыровой В. А. // ПМТФ. 1966. № 3. С. 50.
9. Сыровой В. А. Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 12. С. 2586.

Всесоюзный электротехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
3 ноября 1989 г.

TO THE THEORY OF TUBULAR RELATIVISTIC ELECTRON BEAM

V. A. Syrovoj

The equations of relativistic beam located near an arbitrary surface with axial symmetry are formulated. The new form of equations without the second derivative of the potential is given. A study is made of asymptotic expansion regularization for emission in ρ - and T -regimes. The results of antiparaxial theory allowed one to construct the adequate theory of the beam near some surface.

УДК 621.385.69

К ТЕОРИИ ВИНТОВЫХ ПУЧКОВ С ЗАХВАЧЕННЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

В. Е. Запевалов, В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг

Приведены результаты численного траекторного анализа винтовых пучков с учетом электронов, отраженных от магнитной пробки и захваченных в адиабатическую ловушку. Установлен эффект их фазировки относительно траекторий прямого пучка. Даны оценки скоростного разброса интенсивных пучков при учете захваченных электронов.

1. Введение. Электронно-оптические системы (ЭОС), формирующие винтовые электронные пучки (ВЭП) с питч-фактором $g \equiv v_{\perp}/v_{\parallel} \geq 1$ (v_{\perp} — осцилляторная скорость, v_{\parallel} — скорость дрейфа электронов вдоль магнитного поля), как правило, включают область с плавно нарастающим магнитным полем (область перемагничивания). Здесь происходит накачка осцилляторной энергии частиц в соответствии с сохранением поперечного адиабатического инварианта

$$J_{\perp} = v_{\perp}^2/B = \text{const}. \quad (1)$$

На рис. 1 показана схема ЭОС гиротрона, в котором первичная закрутка электронов осуществляется магнетронно-инжекторной пушкой (см., например, [1]), А, Б — соответственно области пушки и перемагничивания (рис. см. на вклейке).

При определенных значениях тока пучка и коэффициента перемагничивания α (отношение магнитных полей на выходе и входе в область Б) некоторая часть электронов отражается в области Б от магнитной пробки и захватывается в ловушку, так как в пушке режим аналогичен закритическому режиму магнетрона и частицы испытывают повторные отражения. Эффект захвата представляется достаточно вероятным ввиду наличия разброса осцилляторных и, соответственно, дрейфовых скоростей, который возрастает с увеличением тока пучка и достигает в реальных системах формирования десятков процентов [2–4].

С другой стороны, заведомо интенсивные ВЭП при среднем питч-факторе $g \geq 1$ не обнаруживают существенных признаков неустойчивости, и, следовательно, в этих случаях число захваченных электронов (ЗЭ) при фиксированном токе пучка не превышает некоторого предельного уровня. Одно из объяснений этого факта состоит в том, что при достижении концентрации ЗЭ определенного порогового значения в облаке объемного заряда возникают поля, обеспечивающие сток «лишних» частиц. Отметим, что экспериментально в заведомо закритических режимах регистрируются анодные токи, что свидетельствует о радиальном дрейфе частиц, невозможном без появления азимутальной компоненты электрического поля, которая в свою очередь связана с нарушением азимутальной симметрии электронного облака.

При другой трактовке не требуется привлекать гипотезу о неустойчивости. Постулируется, что поле объемного заряда запертых электронов деформирует в прикатодной области скоростное распределение таким образом, что вновь поступающие частицы проходят область перемагничивания без отражений. До тех пор, пока не нарушается устойчивость пучка, повышение тока приводит лишь к некоторому возрастанию

нию стационарного числа запертых частиц. Однако изменение скоростного распределения неизбежно сопровождается возрастанием скоростного разброса.

Далее приводятся результаты численного анализа интенсивных ВЭП при наличии захваченных электронов. Показывается, что имеет место фазировка траекторий ЗЭ под действием поля объемного заряда прямого пучка. Даются оценки дополнительного скоростного разброса ВЭП, связанного с этим эффектом.

2. Траекторный анализ ВЭП с захваченными электронами. Численный траекторный анализ выполнялся по модифицированной программе ЭПОС [5]. Основными особенностями программы, обеспечивающими ее эффективность при анализе протяженных интенсивных криволинейных пучков, являются: применение методов вспомогательных зарядов и вспомогательных сеток, разделение полей близких и дальних зарядов, а также исключение «холостых» узлов вспомогательной сетки потенциалов. При учете отраженных электронов блок решения уравнений движения конструировался так, что каждая траектория считалась либо до выхода из области B , либо, если она соответствовала ЗЭ, до достижения заданного числа продольных колебаний. Вычисления выполнялись с двойной точностью (17 значащих цифр на ЭВМ типа ЕС-1055М), и существенно уменьшались шаги вспомогательных сеток по каждой из координат. Уравнения движения интегрировались многошаговым методом Адамса—Башфорта.

Моделирование эффектов захвата производилось на магнетронно-инжекторной системе формирования типа рис. 1, работающей в слабозакритическом режиме, что характерно для гиротронов длинноволновой части миллиметрового диапазона. Рассматривались два варианта пушек, формирующих пучки с квазиламинарными (рис. 2б) и регулярно пересекающимися траекториями (рис. 2а). Отметим, что в связи с аксиальной симметрией системы под «траекторией» в данном контексте следует понимать поверхность вращения, образованную семейством траекторий, выходящих из окружности с центром на оси симметрии. Далее указанные поверхности именуются как «слои».

В расчетах длина системы ориентировано составляла $5R_k$ (R_k — радиус эмиттера), а коэффициент перемагничивания $\alpha \approx 5$.

Геометрия электродов, магнитное поле, а также анодное напряжение выбирались такими, чтобы в холодной системе часть электронов захватывалась в ловушку при нулевых начальных скоростях. Следует отметить, что в реальных режимах пушек МЦР в ловушку попадают в основном частицы с ненулевыми (и достаточно большими, азимутальными начальными скоростями, связанными с особенностями структуры эмиттера (см., например, [2])). Использованный здесь прием позволяет, однако, резко уменьшить машинное время (при учете разброса начальных скоростей число трубок тока должно быть увеличено примерно на порядок).

На рис. 3 показаны траектории захваченного электрона как для систем с регулярно пересекающимися, так и квазиламинарными потоками. Время пролета от плоскости катода до плоскости отражения $T_1 \approx 20 T_c$ (T_c — средний циклотронный период), причем около $5 T_c$ электрон удерживается вблизи плоскости отражения. Смещение ведущего центра за это время не превышает 0,1—0,2 ларморовского радиуса. Согласно расчетным данным при малом токе уже после первого отражения фаза соответствующей траектории (электронного слоя — см. выше) отличается от фазы прямых траекторий на величину $\pi/2 - 3\pi/2$. Указанная разность фаз становится практически случайной функцией при последующих отражениях. Влияние поля пространственного заряда приводит к существенному уменьшению разности фаз, которая даже после двухкратного отражения не превышает $\pi/2$. Тем самым обнаруживается тенденция к фазовой фокусировке. Этот эффект, по-видимому, вызывается тем, что вдоль первичного пучка под действи-

вием объемного заряда формируется потенциальный рельеф, который корректирует траектории, воздействуя в основном на продольное движение частиц.

В квазиламинарном пучке разность фаз прямых и отраженных траекторий в окрестности катода близка либо к нулю, либо к π . Ввиду того, что при отражении от магнитной пробки и в прикатодной области ведущий центр остается на прежней магнитной силовой линии, возникает регулярное пересечение слоев, образованных прямыми и отраженными траекториями. Подобная структура потока характерна для пучков с первичными регулярно пересекающимися траекториями. Пересечение слоев в последнем случае приводит к существенному возрастанию скоростного разброса как функции тока пучка и в отсутствие ЗЭ [1, 4]. В квазиламинарных пучках рост скоростного разброса при увеличении тока значительно ослаблен, и только учет ЗЭ позволяет объяснить экспериментальные результаты (см. [6]).

3. Скоростной разброс в квазиламинарных пучках с ЗЭ. Рассмотрим случай, когда электронный слой, образуемый ЗЭ, испытывает регулярные пересечения с прямым квазиламинарным пучком. Возмущающий объемный заряд ЗЭ следует относить к току knI , где I — ток, создаваемый первичным пучком, k — коэффициент отражения от магнитной пробки, n — полное число продольных колебаний за время жизни захваченного электрона.

Оценим возникающий скоростной разброс δv_{\perp} прямого пучка, определив сначала изменение продольной к магнитному полю скорости электронов под действием поля объемного заряда ЗЭ, а затем из интеграла энергии — возмущение осцилляторной скорости. Поле объемного заряда найдем по теореме Гаусса, полагая, что слой, образованный траекториями ЗЭ, имеет вид конической поверхности со средним радиусом R (рис. 4). Легко получить в этом приближении, что продольная компонента электрического поля

$$E_{\parallel} \approx \frac{knI(v_y \cos \varphi + v_z \sin \varphi)}{2\pi e_0 R (v_y^2 + v_z^2)}, \quad (2)$$

где v_y, v_z — компоненты скорости, φ — угол между образующей эмиттера и магнитным полем. Используем далее выражения для v_y и v_z , полученные из уравнений эквивалентного плоского магнетрона в магнитном поле (см., например, [7]):

$$v_y = N \cos \varphi (\Phi \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin \Phi), \quad v_z = N \cos \varphi (\sin \Phi - \Phi), \quad (3)$$

где $N = U_a \cos \varphi / (B_k d)$, U_a — анодное напряжение, B_k — магнитное поле на катоде, d — расстояние катод—анод, $\Phi = \eta B_k t$ — пролетный угол.

Возмущение продольной кинетической энергии равно

$$\frac{\Delta m_0 v_{\perp}^2}{2} \approx m_0 v_{\parallel}^{(0)} \Delta v_{\parallel} = -e_0 \int_0^T E_{\parallel} v_{\parallel}^{(0)} dt = -\frac{e_0}{\eta B_k} \int_0^{\Phi_L} E_{\parallel} v_{\parallel}^{(0)} d\Phi. \quad (4)$$

Подстановка (2) в (4) с учетом (3) дает

$$v_{\parallel}^{(0)} \Delta v_{\parallel} = \frac{n k I \operatorname{tg} \varphi}{2 \pi e_0 R B_k} \int_0^{\Phi_L} \frac{\Phi \sin \Phi d\Phi}{\sin^2 \Phi + \Phi^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (5)$$

Для нахождения возмущения осцилляторной энергии воспользуемся интегралом энергии в дрейфовом приближении

$$\frac{m_0}{2} (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 + v_E^2) = e_0 U, \quad (6)$$

где $v_E = \dot{E}_k / \dot{B}_k$ — скорость поперечного дрейфа. Эта величина не испытывает существенных изменений со стороны поля объемного заряда, так как после смены знака v_y возмущение v_E также меняет знак. Усредненный потенциал U в (6) также можно полагать постоянным. В результате из (5) следует, что

$$v_{\perp}^{(0)} \Delta v_{\parallel} + v_{\perp}^{(0)} \Delta v_{\perp} = 0, \quad (7)$$

где $v_{\perp}^{(0)} = (E_k / B_k) \cos \varphi$ — невозмущенная осцилляторная скорость в прикатодной области. Таким образом, относительный разброс осцилляторных скоростей, который вследствие (1) является адиабатическим инвариантом, оказывается равным

$$\delta v_{\perp} \equiv \left| \frac{\Delta v_{\perp}}{v_{\perp}^{(0)}} \right| \approx \frac{n k I B_k}{2 \pi \epsilon_0 R E_k} K(\varphi, \Phi_L), \quad (8)$$

где

$$K(\varphi, \Phi_L) \approx \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \int_0^{\Phi_L} \frac{\Phi |\sin \Phi| d\Phi}{\sin^2 \Phi + \Phi^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (9)$$

Интеграл в (9) получен из (5) усреднением по восходящим и нисходящим участкам траектории и находится численно. Примем угол пролета $\Phi_L = 4\pi$, а $\varphi = 25^\circ$, что соответствует квазиламинарным пучкам [7]. Тогда $K = 2.06$. Отметим, что результат слабо зависит от φ и Φ_L . Так, при $\varphi = 15^\circ$, $\Phi_L = 4\pi$ $K = 2.02$. При увеличении Φ_L K медленно возрастает (примерно по логарифмическому закону). Следует иметь в виду, что при $\Phi_L \gg 4\pi$ слои перемешиваются и дальнейший вклад в δv_{\perp} от регулярных пересечений слоев исчезает.

Учитывая вышеизложенное, представим относительный скоростной разброс в виде

$$\delta v_{\perp} \approx 1,8 \frac{n k I}{\gamma h d i_{\perp}}, \quad (10)$$

где i_{\perp} — погонный (на единицу ширины эмиттера) ленгмюровский ток эквивалентного плоского диода:

$$i_{\perp} = \frac{4}{9} \epsilon_0 V^{2\eta} \frac{2\pi R_k}{d^2} U_a^{3/2}. \quad (11)$$

При характерных для пушек гиротронов значениях $l \approx d/3$, $h = d/4$

$$\delta v_{\perp} \approx 2.4 n k (I/I_{\perp}).$$

Коэффициент отражения k , входящий в (10), является для типичных параметров скоростного распределения малой величиной. Оценим, например, k , предполагая распределение электронов в пушке по осцилляторным скоростям нормальным, т. е.

$$dI = \frac{I}{V^{2\pi D}} \exp \left[-\frac{(v_{\perp} - \bar{v}_{\perp})^2}{2D} \right] dv_{\perp}, \quad (12)$$

где D — дисперсия осцилляторной скорости, \bar{v}_{\perp} — средняя осцилляторная скорость в прикатодной области. Можно показать (ср. [2]), что D связана со скоростным разбросом соотношением

$$\delta v_{\perp} \approx 1,8 \frac{\sqrt{2D}}{v_{\perp 0}}, \quad (13)$$

причем под δv_{\perp} здесь подразумевается стандартная величина, использу-

зумая в методе тормозящего слоя (ср., например, [3]). Доля отраженного тока определяется интегралом от (13) в диапазоне осцилляторных скоростей от $v_0/\sqrt{\alpha}$ до ∞ , где v_0 — полная скорость в рабочем пространстве, α — коэффициент перемагничивания. Окончательно получаем, что

$$k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1,82}{\delta v_{\perp}} \left(\frac{\sqrt{1+g_0^2}}{g_0} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (14)$$

где g_0 — питч-фактор в рабочем пространстве, erf — интеграл вероятностей. Приближенный характер (14) помимо гипотезы о нормальном распределении осцилляторных скоростей связан также с пренебрежением провисания потенциала в области перемагничивания (см., например, [8]). Примем, например, $g_0=1,5$. Тогда для $\delta v_{\perp}=10\%$ $k=1 \cdot 10^{-7}$. Для $\delta v_{\perp}=20\%$ $k=5 \cdot 10^{-3}$, для $\delta v_{\perp}=30\%$ $k=4 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, однократные отражения электронов от магнитной пробки практически не влияют на скоростное распределение. Естественно, что при многократных отражениях объемный заряд возрастает. Уже при учете возвратного движения от катода результирующий скоростной разброс удваивается. Здесь принципиальное значение имеет описанный в разд. 2 эффект фазовой фокусировки ЗЭ. При учете этого фактора в формулу (10) можно подставлять по результатам траекторного анализа $n=5$. Например, принимая первичный скоростной разброс $\delta v_{\perp}=30\%$ и, следовательно, $k=4 \cdot 10^{-2}$, получаем из (11) $\delta v_{\perp}=-0,48(I/I_{\text{п}})$. В результате при $I=0,1I_{\text{п}}$ отраженные электроны могут вносить заметный вклад в рост скоростного разброса.

Разброс фаз при увеличении тока пучка зависит от двух факторов — скоростного разброса первичного пучка и влияния поля пространственного заряда у катода и в области пробки. Первый из этих факторов оказывает стабилизирующее действие на скоростное распределение: по мере увеличения скоростного разброса первичных электронов потенциальный рельеф размывается и фазовый разброс должен возрастать. Кроме того, экранирующее действие объемного заряда в прикатодной области понижает среднюю осцилляторную скорость, что способствует выводу ЗЭ в рабочее пространство и на коллектор. Возможно, что именно с этим связан описанный в [6] эффект быстрого возрастания скоростного разброса при относительно малом токе и последующее понижение δv_{\perp} с выходом этой величины на расчетную кривую скоростного разброса ламинарных пучков без учета ЗЭ.

В пучках с регулярно пересекающимися траекториями скоростной разброс первичных электронов быстро увеличивается с током в результате их собственного взаимодействия. Это приводит к размыванию потенциального рельефа и возрастанию фазового разброса отраженных электронов. Поэтому влияние последних ослабляется по сравнению с квазиламинарными пучками.

Отметим, что если захваченные электроны играют заметную роль в установлении стационарного скоростного распределения, то повышение коэффициента перемагничивания с целью увеличения питч-фактора не приводит к желаемым результатам: возрастает концентрация запертых частиц и экранирующее действие объемного заряда возвращает питч-фактор к старому значению. Этот эффект наблюдается в экспериментах с интенсивными винтовыми пучками.

Авторы выражают благодарность С. В. Лебедеву за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

- Гольденберг А. Л., Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 1. С. 141.
- Цимлинг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 8. С. 1247.
- Аводошин Е. Г., Николаев Л. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 4. С. 605.

4. Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 4. С. 491.
5. Лыгин В. К., Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // Электронная техника Сер. Электроника СВЧ. 1987. № 7 (401). С. 36.
6. Запевалов В. Е., Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 11. С. 1288.
7. Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 10. С. 1550.
8. Цимринг Ш. Е. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 6. С. 1284.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
9 августа 1989 г

TO THE THEORY OF HELICAL BEAMS WITH TRAPPED ELECTRONS

V. E. Zapevalov, V. N. Manuilov, Sh. E. Tsimring

Results of the numerical path analysis of helical beams taking into account the electrons reflected by a magnetic mirror and trapped into an adiabatic trap are presented. The effect of their phasing with respect to the direct beam paths is revealed. Estimates of velocity spread of intense beams with account of trapped electrons are given.

Аннотации депонированных статей

УДК 623.685.4
ГАСНТИ 29. 35. 47

О ВЛИЯНИИ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ТАНГЕНСА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ НА КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ СВЧ ВОЛН

T. N. Вербицкая, B. B. Демехин, B. Г. Пономаренко

В статье рассмотрена задача об отражении СВЧ излучения от двухслойного покрытия на плоской металлической подложке. Нижний (на металле) слой — феррит, верхний — вариконд. Параметры вариконда (нелинейного диэлектрика) изменяются управляемым электрическим полем. В результате анализа стандартного выражения для коэффициента отражения $|\Gamma|^2$ от слоистой (двухслойной) среды показана возможность управления значением $|\Gamma|^2$. В частности возможность уменьшения $|\Gamma|^2$ по сравнению с $|\Gamma|^2$ феррита в несколько раз.

Установлена аналитическая зависимость коэффициента отражения от тангенса диэлектрических потерь $\operatorname{tg} \delta_e$ вариконда. При этом снижение $\operatorname{tg} \delta_e$ приводит к уменьшению минимального значения $|\Gamma|^2$ и расширению диапазона длин волн, в котором осуществляется управление. Ширина его значительно превышает диапазон показателя преломления вариконда, что перспективно при разработке новых устройств и систем СВЧ техники.

*Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 1511-В91. Деп. от 8 апреля 1991 г.*

УДК 621.373.826

КАЧЕСТВО ОБРАЩЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В СИСТЕМАХ С ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ АПЕРТУРОЙ

В. Е. Киракосянц, В. А. Логинов, В. В. Слонов

Исследован многоканальный алгоритм ОВФ с частично заполненной апертурой. Оценивается качество ОВФ в зависимости от числа каналов алгоритма, отношения сигнал/шум, интенсивности турбулентности на трассе распространения, степени когерентности излучения задающего генератора системы.

В большинстве исследований, посвященных изучению возможностей фокусировки излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, рассматриваются оптические системы с компактной (полностью заполненной) апертурой [1]. Между тем в ряде случаев конструктивно и технологически удобнее использовать системы, обладающие «распределенной» структурой [2].

В работе исследуется многоканальная система с частично заполненной апертурой. Расстояние между отдельными субапертурой может существенно превышать размер субапертуры. В каждом канале системы осуществляется обращение волнового фронта (ОВФ) для компенсации искажений, вносимых в излучаемый сигнал турбулентной средой распространения. Будем считать, что алгоритм ОВФ реализуется с помощью гетеродинной схемы, как это подробно описано в [3]. Для когерентного сложения сигналов на объекте от различных каналов системы с «распределенной» структурой необходимо обеспечить заданные характеристики опорного сигнала гетеродинной схемы в каждом канале. Последнее накладывает достаточно жесткие ограничения на временную некогерентность общего задающего оптического квантового генератора (ЗГ) системы и на неточность выравнивания разностей хода от выходной апертуры ЗГ через излучающие субапертуры каждого канала системы до объекта. При этом рассматривается двухтактовый алгоритм работы системы. На первом такте с помощью импульсного зондирующего сигнала осуществляется предварительный подсвет объекта. Полученная на этом такте информация о состоянии турбулентной атмосферы, закодированная в отраженном от объекта сигнале, используется в алгоритме ОВФ при зондировании на следующем такте. Цель работы заключается в исследовании качества ОВФ в такой системе.

Пусть неполностью заполненная апертура Ω_a системы площади S_a состоит из N субапертур Ω_j , площадь каждой из которых равна $\Delta = S_a/N$. Общий интервал наблюдения $(0, T_1)$ разделим на два такта длиной $T_0 = T_1/2$. В начале каждого такта производится зондирование. Излучаемое апертурой поле на m -м такте ($m=1, 2$) запишем в виде

$$U_{0m}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} A_m(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_c t}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_a, \quad (1)$$

где $A_m(\mathbf{r}, t)$ — пространственно-временная модулирующая функция, ω_c — несущая частота.

Качество ОВФ будем характеризовать коэффициентом передачи энергии излучения на объект наблюдения за интервал времени $T_0 \leq t \leq T_1$

$$K = \bar{\mathcal{E}}_0 / \bar{\mathcal{E}}_{\text{изл}}, \quad (2)$$

где $\bar{\mathcal{E}}_0$ — средняя энергия излучения, доставляемая к объекту; $\mathcal{E}_{изл}$ — средняя излучаемая всей апертурой энергия. Тогда в соответствии с (1) выражение для излучаемой энергии принимает вид

$$\mathcal{E}_{изл} = \frac{1}{W} \int_{T_0}^{T_1} dt \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} U_0^2(\mathbf{r}, t) d^3 r ,$$

а энергия излучения, доставляемого к объекту Ω_0 , записывается как

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2W} \int_{T_0}^{T_1} dt \int_{\Omega_0} d^3 p \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} A(\mathbf{r}, t - T_0 - z_j/c) \times \right. \\ \left. \times G_0(z_j, p, \mathbf{r}) \exp\{\psi(z_j, p, \mathbf{r})\} d^3 r \right|^2 .$$

Здесь W — волновой импеданс свободного пространства, z_j — расстояние от объекта до j -й субапертуры, $G_0(z_j, p, \mathbf{r}) = (k/i2\pi z_j) \times \exp\{ikz_j + ik|\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2/2z_j\}$ — функция Грина однородной среды, $\psi(z_j, p, \mathbf{r})$ — набег комплексной фазы, связанный с распространением излучения в турбулентной атмосфере от точки (\mathbf{r}, z_j) j -й субапертуры до точки $(\mathbf{p}, 0)$ объекта. В предположении, что объект целиком находится в области изопланарности по отношению к площади одной субапертуры, и при выполнении условий $S_0 \Delta / \lambda^2 z_{min}^2 \ll 1$ (S_0 — площадь проекции объекта на картирующую плоскость, λ — длина волны, $z_{min} = \min_j(z_j, j=1, \dots, N)$), $\max_i |z_i - z_j| / z_0 \ll 1$ (z_0 — некоторое среднее расстояние от всех субапертур до объекта) энергия на объекте может быть записана в виде

$$\mathcal{E}_0 = \frac{S_0}{\lambda^2 z_0^2 2W} \int_{T_0}^{T_1} dt \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} A(\mathbf{r}, t - T_0 - z_j/c) \times \right. \\ \left. \times \exp\{ikr^2/2z_j - ikp_0 r/z_j + \psi(z_j, p_0, \mathbf{r})\} d^3 r \right|^2 , \quad (3)$$

где p_0 — некоторая точка объекта.

Комплексная амплитуда поля, формируемого на j -й субапертуре, в рассматриваемой схеме имеет вид

$$A_m(\mathbf{r}, t) = \\ = A_0 U(t - (m-1)T_0) \xi(t) \exp\{-ikr^2/2z_j + ikp_0 r/z_j\} \begin{cases} 1 & \text{при } m=1 \\ \hat{V}_j^*(\mathbf{r}, t) & \text{при } m=2 \end{cases} , \\ \mathbf{r} \in \Omega_j , \quad (4)$$

где A_0 — комплексная амплитуда поля, определяющая энергию излучения; $U(t)$ — регулярная модулирующая функция, описывающая форму зондирующего импульса; $\hat{V}_j(\mathbf{r}, t)$ — оценка функции $\exp\{\psi(z_j, p_0, \mathbf{r})\}$, реализуемая приемным устройством гетеродинного типа; $\xi(t)$ — случайный процесс, описывающий временную некогерентность ЗГ системы, относительно статистических характеристик которого будем предполагать следующее:

$$\overline{\xi(t)} = 0, \quad \overline{\xi(t_1) \xi^*(t_2)} = \gamma_\xi(t_1 - t_2), \quad \gamma_\xi(0) = 1 ,$$

* — знак комплексного сопряжения, описывающий операцию ОВФ, производимую при гетеродинировании над сигналом промежуточной частоты с помощью набора фазовращателей.

Рассмотрим сначала случай полной компенсации искажений на отдельных субапертурах системы:

$$\hat{V}_j(r, t) = \exp\{\psi(z_j, p_0, r)\}, \quad r \in \Omega_j. \quad (5)$$

Тогда, подставляя выражения (1), (3) — (5) в соотношение (2), получим

$$K = K_u \frac{1}{N^2} \sum_{i, j=1}^N \gamma_i \left(\frac{|z_i - z_j|}{c} \right) \frac{1}{T_{\text{эфф}}} \int_{T_0}^{T_1} U(t - T_0 - z_i/c) U^*(t - T_0 - z_j/c) dt, \quad (6)$$

где $T_{\text{эфф}} = \int_{T_0}^{T_1} |U(t - T_0)|^2 dt$ — эффективная длительность зондирующего импульса, причем $T_{\text{эфф}} \ll T_0$; $K_u = S_a S_0 / \lambda^2 z_0^2$ — коэффициент передачи энергии на точечный объект в идеальных условиях (однородная среда распространения, отсутствие ошибок оценивания, полная когерентность ЗГ системы). Из выражения (6) следует, что если задержки во всех каналах одинаковы, т. е. $z_j \approx z_0$, $j = 1, \dots, N$, что справедливо лишь для систем с компактной апертурой, то $K = K_u$. Различие задержек в каналах приводит к потерям доставляемой энергии. Действительно, в другом предельном случае, когда $|z_i - z_j|/c \gg T_{\text{эфф}}$ либо $|z_i - z_j|/c \gg \tau_\xi$ (τ_ξ — временной интервал когерентности излучения ЗГ), поля от отдельных субапертур складываются на объекте некогерентно и поэтому коэффициент передачи уменьшается в N раз — $K = K_u/N$.

Очевидно, для эффективной работы системы с разнесеными субапертурами необходимо выравнивание задержек в различных каналах. Естественно предположить, что такое представление на практике может быть осуществлено лишь с некоторыми ошибками. При этом комплексная амплитуда формируемого на j -й субапертуре поля (выражение (4)) должна быть записана теперь в виде

$$A(r, t) = A(r, t - \tau_j), \quad (7)$$

где τ_j — случайная величина задержки, вносимая в j -м канале, которую в сумме с задержкой на распространение z_j/c стремятся сделать одинаковой для всех каналов и равной некоторой величине τ_0 , $\tau_j = \tau_0 - z_j/c + \Delta\tau_j$, $\Delta\tau_j$ — ошибка установки задержки в j -м канале. Тогда, предполагая, что $\Delta\tau_j$, $j = 1, \dots, N$ — совокупность независимых гауссовых случайных величин с параметрами

$$\overline{\Delta\tau_j} = 0, \quad \overline{\Delta\tau_j^2} = \sigma_\tau^2,$$

и аппроксимируя корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$ функцией вида $\gamma_\xi(\tau) = \exp\{-(\tau/2\tau_\xi)^2\}$, получим

$$\gamma_\xi(\tau_i - \tau_j) = [1 + \delta\tau(1 - \delta_{ij})]^{-1/2}, \quad (8)$$

где через $\delta\tau$ обозначена нормированная на квадрат интервала когерентности дисперсия установки задержки σ_τ^2/τ_ξ^2 .

Что касается оценок $\hat{V}_j(r, t)$ функции $\exp\{\psi(z_j, p_0, r)\}$, $j = 1, \dots, N$, формируемых на интервале $(0, T_0)$ до начала момента излучения по данным наблюдения поля от предварительно подсвеченного на интервале $(0, T_0)$ объекта, то для рассматриваемой схемы величина $\hat{V}_j(r, t)$ описывает комплексную амплитуду сигнала на выходе фильтра промежуточной частоты (ФПЧ) j -го канала в момент времени t , среднее значение которой равно

$$\overline{\hat{V}_j}(r, t) = \frac{e\alpha}{2W} E_r^* E \Delta x_j \int_0^{T_0} d\tau h(t-\tau) \frac{1}{2} \int_0^{T_0} g(\tau-t_1) U(t_1-2z_j/c) dt_1, \quad (9)$$

а дисперсия дробовых шумов записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_V^2(t) &= e \frac{v_r + v_t}{2} \int_0^{T_0} h^2(t-\tau) d\tau + \frac{1}{8} e^2 v_r n_{\Phi 1} \times \\ &\times \int_0^{T_0} d\tau_1 \int_0^{T_0} d\tau_2 h(t-\tau_1) h(t-\tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1-t_1) g(\tau_2-t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь e — заряд электрона; $\alpha = \eta/\hbar\omega_c$, η — квантовая эффективность фотокатода детектора на частоте сигнала ω_c , $\hbar = h/2\pi$, h — постоянная Планка; E_r и E — комплексные амплитуды полей гетеродина и сигнала от объекта; v_r и v_t — интенсивности потоков фотоэлектронов, обусловленных излучением гетеродина, и темновых электронов; $n_{\Phi 1}$ — среднее число фотоэлектронов, приходящихся на одну пространственно-временную модулю фонового излучения; $g(t)$ и $h(t)$ — огибающие импульсных реакций оптического фильтра приемника (ОФ) и ФПЧ; $x_j = \frac{1}{\Delta} \int_{\Omega_j} \times$

$$\times \exp[\Psi(z_j, \rho_0, r)] d^2r.$$

Используя выражения (1), (3)–(5), (7)–(10) в предположении, что полоса пропускания ОФ много шире спектра сигнала, а амплитудно-частотная характеристика ФПЧ $h(t)$ согласована с временной модулирующей функцией $U(t)$, и учитывая, что на практике должно выполняться соотношение $\sigma_v/T_{\text{эфф}} \ll 1$, получим выражение для коэффициента передачи (2) в случае неполной компенсации искажений ВФ на отдельных субапертурах в следующем виде:

$$\begin{aligned} K &= K_u (1+N/\bar{q})^{-1} \bar{R}_2 \{ (1+\delta\tau)^{-1/2} (\bar{R}_2^2 / (\bar{R}_2)^2 + 1/\bar{q}) + \\ &+ (1/N) [1 - (1+\delta\tau)^{-1/2}] (\bar{R}_4 / (\bar{R}_2)^2 + N/\bar{q}) \}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } R_2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j|^2, \quad R_4 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j|^4, \quad \bar{q} = q \bar{R}_2, \quad q = n_{c0} / (1 + n_{\Phi 1} + v_t/v_r) — отношение сигнал/шум, \quad n_{c0} = \alpha \frac{|E|^2}{2W} S_a \int_0^{T_0} |U(t-2z_0/c)|^2 dt$$

— среднее число сигнальных фотоэлектронов, соответствующих энергии сигнала от объекта наблюдения, перехватываемого всей апертурой системы Ω_a . В частном случае малых ошибок выравнивания задержек в каналах ($\delta\tau \ll 1$) получим выражение, соответствующее компактной апертуре [3]. При квадратичной аппроксимации структурной функции комплексной фазы ψ , достаточно большом числе пятен когерентности сигнального поля, укладывающихся на приемной апертуре, $N_p \gg 1$, и обычно выполняемом условии $N_p/N \leq 1$ имеем

$$\bar{R}_2^2 \simeq \bar{R}_2^2, \quad R_2 \simeq (1+N_p/N)^{-1}, \quad \bar{R}_4 \simeq (1+2N_p/N)^{-1}. \quad (12)$$

Таким образом, выражения (11) и (12) позволяют оценить качество ОВФ в зависимости от целого ряда факторов: общего числа каналов алгоритма N , отношения сигнал/шум q , интенсивности турбулентности на трассе распространения, описываемой функциями \bar{R}_2 и \bar{R}_4 , норми-

рованной дисперсии ошибки установки задержки $\delta\tau$ в каналах. В частности, при малой «динамической» ошибке оценивания ВФ ($N_{\pi}/N \ll 1$) вместо выражения (11) получим

$$K = K_{\pi} (1 + N/q)^{-1} [1/N + (1 + \delta\tau)^{-1/2} (N - 1)/N + 1/q].$$

Если и шумовая составляющая ошибки оценивания атмосферных искажений ВФ мала ($q/N \gg 1$), то

$$K = K_{\pi} [1/N + (1 + \delta\tau)^{-1/2} (N - 1)/N]. \quad (13)$$

Выражение (13) характеризует потери доставляемого к объекту излучения, связанные лишь с неточностью выравнивания задержек в каналах по сравнению с величиной интервала когерентности излучения ЗГ. Очевидно, если ошибки в установлении величин задержки намного превышают интервал когерентности ($\delta\tau \gg 1$), сложение полей различных каналов на объекте будет некогерентным:

$$K = K_{\pi}/N.$$

В противоположном случае ($\delta\tau \ll 1$) возможна полная компенсация искажений, вносимых турбулентной атмосферой,

$$K \simeq K_{\pi}.$$

Полученные выражения позволяют сформулировать требования к точности выравнивания задержек в каналах в зависимости от степени когерентности излучения ЗГ системы, числа каналов, отношения сигнал/шум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. — М.: Наука, 1985.
2. Hayes C. L., Davis W. C // Appl. Opt. 1979. V. 18 № 24. P. 4106.
3. Бакут П. А., Киракосянц В. Е., Логинов В. А. // Изв. вузов. Физика. 1985. Т. 28. № 11. С. 64.

Научно-производственное объединение
«Астрофизика»

Поступила в редакцию
24 апреля 1989 г.

QUALITY OF THE WAVEFRONT REVERSAL IN THE SYSTEMS WITH PARTIALLY FILLED APERTURE

V. E. Kirakosyants, V. A. Loginov, V. V. Slonov

Multichannel algorithm of WR with partially filled aperture is studied. An estimate is given of the quality of WR as a function of the number of channels, the signal-to-noise ratio, the laser radiation coherency.

УДК 621.372.412:537.226.86

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

С. С. Недорезов

Рассмотрены собственные колебания пьезоэлектрических резонаторов. Показано, что анизотропия пьезоэлектрика обуславливает локализацию колебаний в направлении оси анизотропии. Получен частотный спектр таких колебаний, а также колебаний, локализованных как на границе электрода, так и в его центре. Проведенная систематика колебаний и полученные явные выражения для частотного спектра позволяют по экспериментальным значениям частот определить параметры пьезоэлектрических резонаторов.

Пьезоэлектрические материалы в последние годы находят все большее применение в микроэлектронике и технике СВЧ [1]. Широкое использование кварцевых резонаторов в качестве основных элементов стабилизации частоты в современной радиоэлектронной аппаратуре и связанные с этим высокие требования к точности поддержания частоты электрических колебаний генераторов и избирательности селективных устройств привели к необходимости детального исследования собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов [2–4].

В настоящей работе анализ частотного спектра колебаний проведен с учетом анизотропии пьезоэлектрика, исходя из уравнения (см. [2])

$$-\sum_{\alpha, \beta=1}^2 d^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 A}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Omega^2(x_1, x_2) A = \omega^2 A, \quad (1)$$

где

$$\Omega(x_1, x_2) = \begin{cases} \omega_n, & (x_1, x_2) \in D_m \\ \omega_{nF}, & (x_1, x_2) \notin D_m \end{cases}. \quad (2)$$

Здесь D_m — область электрода (рассматриваются плоские пьезоэлементы с осесимметричными электродами в форме круга радиусом r_0), ω_n — частота собственных колебаний пьезоэлектрической пластины с металлическим покрытием, ω_{nF} — частота колебаний свободной пластины. Компоненты тензора $d^{\alpha\beta}$ предполагаются (в пределах принятой точности) одинаковыми в обеих областях и выражаются (см. [2, 3]) определенным образом через пьезоэлектрические константы и моды собственных колебаний пластины с частотой ω_n .

Рассматриваемые в работе собственные колебания $A(x_1, x_2)$ экспоненциально затухают вне металлического электрода, так как $\omega_n < \omega < \omega_{nF}$. Переходная область на границе электрода от ω_n к ω_{nF} аппроксимируется ступенчатой функцией (2), что позволяет решать уравнение (1) с граничным условием непрерывности функции $A(x_1, x_2)$ и ее производной на окружности радиусом r_0 .

Уравнение (1) — уравнение с неразделяющимися переменными. Применяемые ниже эллиптические координаты для кругового электрода позволяют учсть анизотропию тензора $d^{\alpha\beta}$ и эффективно описать колебательные состояния, локализованные как вдоль оси анизотропии, так и на границе электрода. Для указанных типов колебаний получены явные выражения для частотного спектра. Содержащаяся в приводимых

уравнениях связь между данными колебаниями может быть учтена в виде соответствующих поправок к спектру, вычисляемых по теории возмущений.

Анализ собственных колебаний выпуклого пьезоэлемента проведен, исходя из уравнения (1), причем в соответствии с [2, 3]:

$$\Omega(x_1, x_2) = \begin{cases} \omega_n \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2Rh} \right), & (x_1, x_2) \in D_m \\ \omega_{nF} \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2Rh} \right), & (x_1, x_2) \notin D_m \end{cases}, \quad (3)$$

где ω_n — частота колебаний пластины толщиной h с металлическим покрытием (ω_{nF} — без металлического покрытия), R — радиус кривизны пьезоэлемента.

Данная задача рассматривалась в работе [2] вариационным методом. В работе [3] получен осцилляторный спектр колебаний (аналог спектра квантового осциллятора), обусловленных кривизной пьезоэлемента. В настоящей работе получена поправка к осцилляторному спектру, описывающая влияние размера электрода на частотный спектр.

Локализованные по углу φ колебательные состояния. В эллиптических координатах (ξ, φ) уравнение (1) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) A + \frac{r_0^2(1-\varepsilon)}{\nu_1} (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi)(\omega^2 - \Omega^2(\xi)) A = 0, \quad (4)$$

где r_0 — радиус электрода,

$$\Omega(\xi) = \begin{cases} \omega_n, & \xi < \xi_0 \\ \omega_{nF}, & \xi > \xi_0 \end{cases}, \quad \operatorname{th} \xi_0 = \gamma \varepsilon. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon = \nu_1/\nu_2$, ν_1 и ν_2 — собственные значения тензора $d^{\alpha\beta}$ ($\nu_1 \leq \nu_2$).

Решение ищем в виде

$$A(\xi, \varphi) = \sum_m f_m(\xi) g_m(\varphi), \quad (6)$$

где функции $g_m(\varphi)$ удовлетворяют уравнению Маттье

$$g_m''(\varphi) + (\alpha_m^2 - \gamma \cos^2 \varphi) g_m(\varphi) = 0, \quad (7)$$

а функция $f_m(\xi)$ — уравнениям

$$f_m''(\xi) + \left[\frac{r_0^2(1-\varepsilon)}{\nu_1} (\omega^2 - \Omega^2(\xi)) \operatorname{ch}^2 \xi - \alpha_m^2 \right] f_m(\xi) + \\ + (\Omega^2(\xi) - \omega_n^2) \sum_k s_{mk} f_k(\xi) = 0. \quad (8)$$

Здесь обозначено

$$\gamma = \frac{r_0^2(1-\varepsilon)}{\nu_1} (\omega^2 - \omega_n^2); \quad (9)$$

$$s_{mk} = \frac{r_0^2(1-\varepsilon)}{\nu_1} \int_0^{2\pi} g_m(\varphi) g_k(\varphi) \cos^2 \varphi d\varphi. \quad (10)$$

В области частот

$$\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega_{nF}^2 - \omega_n^2} \ll 1 \quad (11)$$

из (7), (8) для спектра ω_{mln} получаем

$$\omega_{mln}^2 = \omega_n^2 + \frac{4\nu_1}{r_0^2(1-\varepsilon)} K_{ml}^2, \quad (12)$$

где K_{ml}^2 — параметрические нули модифицированных функций Магье первого рода [5]

$$Ce_m(\xi_0, K^2) = 0, \quad Se_m(\xi_0, K^2) = 0. \quad (13)$$

В условиях $\nu \gg \alpha_m^2$, когда можно воспользоваться асимптотикой [5] нулей K_{ml}^2 , из (12) для ω_{mln} имеем

$$\omega_{mln}^2 = \omega_n^2 + \frac{\nu_1}{r_0^2} \left[\pi(l+s) + (2m+1) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}} \right]^2, \quad (14)$$

$$s = 1/2, 1; \quad l, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Формула (12) определяет точные значения частот ω_{mln} в пределе $\omega_{nF} \rightarrow \infty$ (в основном приближении по параметру (11)). Учитывая конечные значения ω_{nF} , в условиях сильной анизотропии ($\varepsilon \ll 1$) из (7), (8) получаем

$$\omega_{mln}^2 = \omega_n^2 + \frac{\nu_1}{r_0^2} [Z_l^2 + \sqrt{\varepsilon}(2m+1)Z_l], \quad (15)$$

где Z_l — корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg} Z = -\frac{Z}{\sqrt{\gamma_0 - Z^2}}, \quad \operatorname{tg} Z = \frac{\sqrt{\gamma_0 - Z^2}}{Z}, \quad Z > 0. \quad (16)$$

Здесь

$$\gamma_0 = r_0^2(\omega_{nF}^2 - \omega_n^2)/\nu_1.$$

Частотный спектр (15) соответствует колебательным состояниям, локализованным в узком интервале углов $\Delta\phi$ в направлении главной оси тензора $a^{\alpha\beta}$ (рис. 1а, см. на вклейке). Для интервала $\Delta\phi$ имеем оценку

$$\Delta\phi \sim \sqrt{2/\pi} \varepsilon^{1/4}.$$

Краевые колебательные состояния. При рассмотрении нелокализованных по углу ϕ колебательных состояний решение уравнения (4) удобно искать в виде

$$A(\xi, \phi) = \sum_l \chi_l(\phi) \psi_l(\xi), \quad (17)$$

где ортонормированные функции $\psi_l(\xi)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi_l''(\xi) + \left[\frac{r_0^2(1-\varepsilon)}{\nu_1} (\omega^2 - \Omega^2(\xi)) \operatorname{ch}^2 \xi - \beta_l^2 \right] \psi_l(\xi) = 0, \quad (18)$$

а функции $\chi_l(\phi)$ — уравнениям

$$\chi_l''(\phi) + (\beta_l^2 - \gamma \cos^2 \phi) \chi_l(\phi) + \cos^2 \phi \sum_k \sigma_{lk} \chi_k(\phi) = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$\sigma_{lk} = \frac{r_0^2(1-\varepsilon)}{\nu_1} (\omega_{nF}^2 - \omega_n^2) \int_{\xi_0}^{\infty} \psi_l(\xi) \psi_k(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Из (18), (19) при $m \gg 1$ получаем

$$\omega_{mln}^2 = \omega_n^2 + \frac{\pi^2 \nu_1}{4r_0^2 E^2(V\sqrt{1-\varepsilon})} \left[m^2 + s_l m^{4/3} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2/3} \varepsilon^{1/3} \frac{K(V\sqrt{1-\varepsilon})}{E^{1/3}(V\sqrt{1-\varepsilon})} \right], \quad (21)$$

где s_l — нули функции Эйри

$$\text{Ai}(-s_l) = 0, \quad (22)$$

асимптотика которых равна

$$s_l \approx \left[\frac{3\pi}{2} \left(l + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}, \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

В изотропном случае ($\varepsilon=1$) из (21) имеем

$$\omega_{mln}^2 = \omega_n^2 + \frac{\nu_1}{r_0^2} (m^2 + s_l m^{4/3} 2^{2/3}). \quad (24)$$

Частотный спектр (21) соответствует колебательным состояниям, локализованным (см. рис. 1б) у края металлической области (электрода).

Данные колебательные состояния являются аналогом магнитных поверхностных уровней в металлах [6, 7], которые (см. [8]) в основном приближении по магнитному полю не зависят от формы поверхностного потенциала. Следовательно, используемое при выводе формулы (21) условие $\psi_l(\xi_0)=0$ на границе электрода определяет частоты ω_{mln} в (21) лишь в основном приближении по малому параметру $1/m \ll 1$.

Локализованные собственные колебания. Частотный спектр собственных колебаний выпуклого пьезоэлемента определяется решением уравнения (1), в котором функция $\Omega(x_1, x_2)$ описывается формулой (3). Переходя к собственным осям тензора $d^{\alpha\beta}$, из (1) и (3) имеем

$$-\left(\nu_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \left[\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{\omega_n^2}{Rh} (x^2 + y^2) + W \right] A(x, y) = 0, \quad (25)$$

где

$$W = \left[\omega_{nF}^2 - \omega_n^2 + \frac{\omega_{nF}^2 - \omega_n^2}{Rh} (x^2 + y^2) \right] \theta(V\sqrt{x^2 + y^2} - r_0). \quad (26)$$

Здесь $\theta(x)=1$ при $x>0$ и $\theta(x)=0$ при $x<0$, r_0 — радиус электрода.

При условии

$$\lambda < r_0, \quad (27)$$

где

$$\lambda = \left(\frac{\nu_2 Rh}{\omega_n^2} \right)^{1/4} \quad (28)$$

— характерная длина, определяющая затухание колебаний, для частотного спектра ω_{mln} из (25) получаем

$$\omega_{mln}^2 = \omega_n^2 + \sqrt{\frac{\nu_2 \omega_n^2}{Rh}} (2m + 1 + V\sqrt{\varepsilon}(2l + 1)) + W_{mln}, \quad (29)$$

$$m, l = 0, 1, 2, \dots$$

Поправка W_{mln} к осцилляторному спектру, вычисляемая по теории возмущений, определяется матричными элементами $\langle mln | W | mln \rangle$

оператора \hat{W} в базисе собственных функций гармонического осциллятора. При $\lambda < r_0$ имеем

$$W_{mln} = \frac{\omega_{nl}^2 - \omega_n^2}{\pi 2^{l-m} m! l!} \left(1 + \frac{r_0^2}{Rh}\right) \Phi_l(\varepsilon) \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{2m-1} e^{-(r_0/\lambda)^2}, \quad (30)$$

где функция $\Phi_l(\varepsilon)$ определяется интегралом

$$\Phi_l(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_l^2(x) e^{-(1-\sqrt{\varepsilon})x^2} dx, \quad (31)$$

$H_l(x)$ — полином Эрмита.

Частотный спектр (29) соответствует колебательным состояниям, локализованным в центре электрода (рис. 1в). Полученная поправка W_{mln} к осцилляторному спектру описывает влияние размеров электрода на частотный спектр собственных колебаний выпуклого пьезоэлемента. Величина поправки существенно зависит от отношения длины затухания колебаний λ к радиусу электрода r_0 . В свою очередь величина λ (см. (28)) зависит от радиуса кривизны R пьезоэлемента и толщины h . Изменяя параметры r_0 , R и h резонатора, можно, таким образом, добиться соответствующего изменения (согласно формулам (28) — (30)) частот собственных колебаний.

Собственные колебания анизотропных пьезоэлектрических резонаторов систематизируются по частотам ω_n колебаний пластины, описывающих зависимость колебательных мод от переменной z , и частотам ω_{mln} вблизи соответствующей «основной» частоты ω_n с учетом зависимости колебательных мод от переменных x и y в плоскости пластины. Частоты ω_{mln} можно разделить на три типа в зависимости от характера локализации колебаний (см. рис. 1).

Вычисление частот ω_n и соответствующих этим частотам значений компонент тензора $d^{\alpha\beta}$ представляет собой самостоятельную задачу (см. [3]). Полученные явные выражения для ω_{mln} позволяют поставить обратную задачу — найти из экспериментальных значений частот компоненты тензора $d^{\alpha\beta}$, определяющего параметры пьезоэлектрического резонатора, связанные с колебательным спектром пьезоэлемента (поверхностную плотность заряда Q и плотность энергии E).

Таблица 1

Мода	$(\omega_{mln})_{\text{эксп.}}, \text{МГц}$	$(\omega_{mln})_{\text{выч.}}, \text{МГц}$
(0, 0, 1)	10·003847	10·003847
(0, 1, 1)	10·145780	10·145780
(1, 0, 1)	10·201188	10·201188
(0, 2, 1)	10·287002	10·285754
(2, 0, 1)	10·400037	10·394783

В таблице приведены экспериментальные значения [2] основной частоты ω_{001} и четырех «нежелательных» частот ω_{011} , ω_{101} , ω_{021} , ω_{201} для SC кварцевого резонатора и частоты, вычисленные по формуле (29) без учета поправки W при следующих значениях параметров:

$$\omega_1 = 9,8312447 \text{ МГц}, \quad \varepsilon = 0,51445436,$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\gamma_2}{Rh\omega_1^2}} = 2,062671 \cdot 10^{-2}.$$

Указанные значения трех параметров $(\omega_1, \varepsilon, \kappa)$ определялись из трех

уравнений, получаемых подстановкой в (29) экспериментальных значений ω_{001} , ω_{101} , ω_{011} . Вычисленные значения двух оставшихся частот ω_{021} и ω_{201} с относительной точностью $\sim 10^{-4}$ (см. таблицу) согласуются с их экспериментальными значениями. Учет поправки W в (29) приведет к уточнению вычисляемого спектра (при $(\lambda/r_0)^2 \sim 0,1$ имеем $W_{n00}/\omega_n^2 \sim 10^{-4}$), но для этого необходимо ввести значения еще трех дополнительных параметров: r_0/λ , $(\omega_{1F}^2 - \omega_1^2)/\omega_1^2$ и r_0^2/Rh , что целесообразно лишь при наличии большего числа измеренных частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. — Новосибирск: Наука, 1982. — 239 с.
2. Peach R. C. // Proc. 39th Annual Frequency Symposium. 1985. Р. 392.
3. Stevens D. S., Tiersten H. F. // Proc. 39th Annual Frequency Symposium. 1985. Р. 436
4. Постников И. И. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 10. С. 2052.
5. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Маттье. — М.: ИЛ, 1953. — 475 с.
6. Хайкин М. С. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. № 1. С. 212.
7. Nee T. W., Prange R. E. // Phys. Lett. A. 1967. V. 25. № 8. Р. 582.
8. Недорезов С. С. // Физика низких температур. 1988. Т. 14. № 11. С. 1179.

Поступила в редакцию
20 июня 1989 г.

LOCALIZED OSCILLATIONS OF PIEZOELECTRIC RESONATORS

S. S. Nedorezov

In the present work the author has considered natural oscillations of piezoelectric resonators. It has been shown that piezoelectric anisotropy induces the localization of oscillations in the direction of the anisotropy axis. Frequency spectrum of the given oscillations as well as oscillations localized both at the electrode edge and in its centre have been received. Resultant oscillations systematization and real expressions received for the frequency spectrum make it possible to define piezoelectric resonators parameters arising from experimental frequency results

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 537.029.62:551.501.81

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОТРАЖЕНИЙ ОТ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В УСЛОВИЯХ СВЕРХРЕФРАКЦИИ

*А. В. Волков, К. В. Латышев, К. В. Коцель,
Л. А. Славутский, Б. М. Шевцов, А. А. Шишкарев*

Спектральные характеристики отраженных от взволнованной морской поверхности радиолокационных сигналов содержат информацию о ее состоянии [1, 2]. При радиолокационном зондировании океана в ряде случаев необходимо учитывать условия распространения радиоволн, в частности, рефракцию в приповерхностном слое атмосферы [3].

Самостоятельный интерес представляет использование радиолокационных отражений от морской поверхности для изучения загоризонтного распространения радиоволн. В настоящей работе сообщается о результатах радиофизических исследований, позволивших получить данные о пространственных изменениях уровня радиолокационных отражений при наличии приповерхностного волновода испарения.

Исследования проводились с июня по сентябрь 1989 г. в 16-м рейсе НИС «Академик А. Несмеянов». Нами использовалась судовая навигационная станция «Океан М-03» с двумя локаторами кругового обзора (длины волн 3 и 10 см), приемно-передающие антенны которых расположены на высоте 25–26 м над уровнем моря (дальность горизонта ~20 км). Параллельно с радиолокационными измерениями при помощи метеозонда проводились контактные измерения профиля показателя преломления приповерхностного слоя атмосферы до высоты ~30 м. Для контроля приемно-передающих трактов РЛС отраженные сигналы принимались калиброванным приемником через рупорную антенну, расположенную на высоте 7 м над уровнем моря. Огибающие радиолокационных сигналов записывались на аналоговый магнитофон с полосой до 5 МГц, а затем вводились в ЭВМ либо непосредственно в ЭВМ через аналого-цифровой преобразователь с частотой оцифровки до 20 М1ц. Накопление информации осуществлялось таким образом, чтобы сигналы с каждого из локаторов и приемника могли параллельно записываться через время, соответствующее периоду повторения зондирующих импульсов (1,2 мс), в течение которого поверхность может считаться замороженной.

Поскольку статистическое распределение интенсивности отраженного сигнала $I(t)$ близко к экспоненциальному [1] и $\bar{I}^2 = \bar{I}^2$, изменение среднего уровня отраженного от поверхности сигнала в зависимости от дальности r оценивалось по соответствующему поведению дисперсии флуктуаций $\Delta I(r)$.

Анизотропия отражений в азимутальной плоскости, связанная с ветровым волнением, не превышала нескольких децибел, что согласуется с результатами [4]. Начиная с расстояний порядка километра параметры волнения влияют на абсолютную величину средней интенсивности отраженного сигнала, но слабо меняют ее пространственное поведение, если отсутствуют «группомасштабные» неоднородности раби [4].

Вышеизложенное позволило исследовать пространственные зависимости уровня радиолокационных отражений при изменении профиля показателя преломления при водного слоя атмосферы. На рис. 1 и 2 (см. на вклейке) приведены характерные нормированные зависимости $\Delta I(r)$ для длин волн 3 и 10 см соответственно, полученные при накоплении сигнала по 150 импульсным посылкам с одного азимутального направления. Кривые 1 на рисунках получены при наличии не слишком мощного приповерхностного волновода (высота 14 м, N — дефицит ~3N-ед), кривые 2 — в условиях, близких к нормальной рефракции. Полученные данные хорошо согласуются с результатами модельных расчетов, выполненных для соответствующего высотного поведения показателя преломления. Кривые 3 — расчетные функции ослабления при нормальной рефракции (с учетом двухкратного прохождения радиоизлучения), полученные методом, предложенным в [6]. Кривая 4 — функция ослабления в загоризонтной области при сверхрефракции, рассчитанная по методу нормальных волн. Комплексные постоянные распространения найдены при помощи метода погружения [7]. Зависимость соответствует «захвату» двух мод на длине волны 3 см. Для длины волны 10 см сильно затухающей оказывается даже первая мода и функция ослабления мало отличается от случая нормальной рефракции.

Согласие экспериментальных и расчетных зависимостей для двух длин волн радиоизлучения позволяет заключить, что рефракция оказывает определяющее влияние на уровень радиолокационных отражений в загоризонтной области. Это особенно проявляется на длине волны 3 см. Мелкомасштабные биения зависимостей обусловлены параметрами волнения.

Таким образом, реализованная методика радиолокационных измерений позволяет простыми средствами в реальном масштабе времени (время накопления 150 импульсных посылок с одного азимутального направления при вращении антенн локаторов составляло ~ 8 минут) оценить функцию ослабления радиоволн и, соответственно, условия распространения в приводном слое атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидко Ю. М., Калмыков А. И. и др. В кн.: Дистанционные методы изучения океана. — Горький: ИПФ АН СССР, 1987. С. 5.
2. Lira B. J., Vaggis D. E. // Radio Science. 1986. V. 21. № 1 P. 81.
3. Ко Н. // Microwaves and RF. 1985. V. 24. № 6. P. 107.
4. Долин А. С., Родин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 1. С. 79.
5. Гуськов М. П., Жидко Ю. М. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 11. С. 1318.
6. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.
7. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986. С. 256.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
15 декабря 1989 г.

УДК 551.510.535

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПРИ НАГРЕВЕ ИОНОСФЕРЫ ПРОХОДЯЩИМИ МОЩНЫМИ РАДИОВОЛНАМИ

Н. В. Бахметьев, Ю. А. Игнатьев, П. Б. Шавин

В апреле 1989 г. были продолжены экспериментальные исследования взаимодействия мощного декаметрового радиоизлучения с ионосферной плазмой F-слоя. Эксперименты проводились в вечернее и ночное время с 18.00 до 02.00 часов летнего московского времени. Нагрев ионосферы осуществлялся стендом «Сура» с максимальной эквивалентной мощностью $P_e = P \times G \approx 50-70$ МВт, излучавшим вертикально вверх в диапазоне частот $f_b = 4,785-9,05$ МГц циклами по четыре минуты с последующей паузой шесть минут. Излучалась обыкновенная магнитоионная компонента. В ходе эксперимента ионосферная обстановка контролировалась один раз в 15 мин с помощью автоматической ионосферной станции. При обработке ионограмм вертикального зондирования определялись значения критических частот F-слоя ионосферы с точностью 0,1 МГц. Для диагностики искусственных ионосферных неоднородностей электронной концентрации, возбуждаемых мощным радиоизлучением, использовалась установка, расположенная в 100 км западнее стенда «Сура». Передатчик пробных волн излучал импульсные сигналы длительностью 25 мкс с частотой повторения 50 Гц на фиксированной частоте $f_p = 2,95$ МГц. Излучение и прием пробных радиоволн проводились на антенные системы с шириной диаграммы направленности по уровню половины мощности около 100°.

Как и в ранее проведенных работах (см., например, [1, 2]), кроме обычных сигналов вертикального зондирования при работе стенд «Сура» наблюдалась устойчивые и ярко выраженные сигналы обратного рассеяния от искусственной области возмущения. Для примера на рис. 1а (см. вклейке) приведен временной ход амплитуды сигнала обратного рассеяния (СОР), полученный при нагреве ионосферы на $f_b = 7,815$ МГц в 21^{431^m 17.04.89 г., критическая частота F-слоя ионосферы составляла в это время $f_0F2 = 8,1$ МГц. Период нагрева отмечен на оси времени штриховкой. Из рисунка видно, что при включении нагревного стендса приблизительно за 20 с развивается СОР, достигая установленного значения. После выключения нагревного стендса происходит постепенная релаксация уровня обратного рассеянного сигнала, продолжающаяся более трех минут. Несколько иной характер формирования имеет СОР при нагреве ионосферы мощным радиоизлучением с частотой, превышающей критическую частоту F-слоя ионосферы (см. рис. 1б, в). Из приведенных рисунков видно, что развитие сигнала обратного рассеяния происходит медленнее, чем в случае нагрева на частотах ниже критической частоты ионосферы. Критические частоты для этих случаев составляли $f_0F2 = 7,3$ МГц (рис. 1б) и $f_0F2 = 7,0$ МГц (рис. 1в). Подобный эффект наблюдался и при нагреве ионосферы на более высокой частоте $f_b = 9,05$ МГц. При разности $f_b - f_0F2$ более 1 МГц СОР не был зарегистрирован.}

В [2, 3] было показано, что за формирование сигнала обратного рассеяния на квадратной трассе ответственны искусственные ионосферные неоднородности с поперечными к геомагнитному полю размерами $l_{\perp} \geq 100-500$ м. Эти неоднородности генерируются за счет тепловой самофокусировочной неустойчивости (см., например, [4]). Для возбуждения самофокусировочной неустойчивости в ионосфере полем мощной радиоволны наличие точки отражения последней не является обязательным. Следовательно, этим можно объяснить эффект генерации искусственных неоднородностей при нагреве ионосферы приходящими мощными радиоволнами. Другой причиной, приводящей к развитию неоднородностей, может быть развитие самофокусировочной неустойчивости при нагреве ионосферы в условиях отражения необыкновенной магнитоописионной компоненты [5], в то время как обыкновенная уже не отражается, т. е. при $f_0F2 < f_s < f_x F2$ и недостаточно хорошей «развязке» поляризаций антенной системы нагревного комплекса (напомним, что нагрев осуществлялся на обыкновенной компоненте). Отметим, что «паразитное» излучение необыкновенной компоненты стенд «Сура» составляет около 20 дБ от уровня обыкновенной компоненты [6]. В обоих случаях напряженность поля волны нагрева E_0 существенно больше порогового поля $E_{\text{пор}}$, необходимого для возникновения самофокусировочной неустойчивости. Поэтому в любом случае полученные экспериментальные результаты позволяют связать формирование СОР на короткой трассе с использованием низких пробных частот с генерацией искусственных ионосферных неоднородностей тепловой самофокусировочной неустойчивостью*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беликович В. В., Зюзин В. А., Толмачева А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 5. С. 579.
2. Бахметьев Н. В., Игнатьев Ю. А., Толмачева А. В., Шавин П. Б. // Тезисы докл. 15-й Всесоюзной конференции по распространению радиоволн.— М.: Наука, 1987. С. 106.
3. Бахметьева Н. В., Гончаров Н. П., Игнатьев Ю. А. и др. / Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29. № 4. С. 799.
4. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Сб.: Тепловые нелинейные явления в плазме.— Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 81.
5. Васьков В. В. Геомагнетизм и аэрономия. 1976. Т. 16. № 2. С. 354.
6. Белов И. Ф., Бычков В. В., Гетманцев Г. Г. и др. Препринт НИРФИ № 167.— Горький, 1983.
7. Токарев Ю. В., Юрищев М. А. // Тезисы докл. Всесоюзного симпозиума Ионосфера и взаимодействие электромагнитных волн с ионосферной плазмой.— М.: 1989. Ч. 1. С. 44.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 сентября 1989 г.

УДК 621.372.823

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЬЦЕВОГО МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

В. Б. Казанский, | И. В. Коцаревская |

В работе исследуется усложненная модель металлодиэлектрического волновода, которая, обобщая известные частные конструкции, обладает большими функциональными возможностями в отношении пространственной селекции поля, разрежения его спектра, организации автономных каналов связи.

Экранированный металлодиэлектрический цилиндрический волновод образован периодическими (с периодом l) идеально проводящими бесконечно тонкими кольцами и соосными кусочно-однородными диэлектрическими втулками (рис. 1, см. на вклейке). Его собственные режимы описываются связанный однородной системой линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов поля [1]:

$$x_m - \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s \chi_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{m\circ}^s(-u) + 2 \sum_{s=-j}^{-1} x_s \tilde{W}_{m\circ}^s(-u) = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} y_s \frac{G_s}{\eta+s} \tilde{W}_{m\circ}^s(-u), \quad (1)$$

$$y_m - \sum_{s=-\infty}^{\infty} y_s \mu_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{m\circ}^s(u) + 2 \sum_{s=-j}^{-1} y_s \tilde{W}_{m\circ}^s(u) = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s x_s \frac{G'_s}{\eta+s} \tilde{W}_{m\circ}^s(u).$$

* После направления статьи в печать вышли Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума [7], в которых приводятся результаты экспериментов по возмущению ионосферы транзитным (проходящим) КВ радиоизлучением на частотах нагрева, в 2–3 раза превышающих частоту F -слоя.

Равенство нулю детерминанта системы (1) определяет постоянную распространения волн в произвольном частотном диапазоне независимо от характера поля, материальных и геометрических параметров структуры. Наряду с анализом аксиально-симметричных волн в длинноволновом приближении ($\kappa \ll 1$) [1] практический интерес представляет исследование и других типов волн в резонансной области ($\kappa \geq 1$). В общем случае задача решается численным экспериментом. Однако, не уменьшая практическую значимость задачи, с целью получения аналитического решения рассмотрим структуру с половинным заполнением ($u = \cos(\pi d/l) = 0$).

При $u=0$ полиномы Лежандра $P_s(0)=0$, если s — четный отрицательный или нечетный положительный индекс, а для остальных s

$$P_s(0) = (-1)^{s/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (s-1) \cdot (s+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (s-2) \cdot s}.$$

Из выражения для матричных элементов

$$\tilde{W}_{m\sigma}^s(u) = \frac{1}{2} P_s(u) \left\{ \frac{s+1}{s-m} \left[P_{m+1}(u) - P_m(u) \frac{P_{s+1}(u)}{P_s(u)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1-\eta}{m+\eta} \left[P_{m+1}(u) - P_m(u) \frac{P_{\eta-2}(u)}{P_{\eta-1}(u)} \right] \right\}$$

следует, что $\tilde{W}_{m\sigma}^s(0) = 0$, если $m=2j-1$ или $m=-2j$ и $s=2k-1$ или $s=-2k$ ($j, k \in N$, $j, k \neq 0$), а все остальные равны произведению сомножителей, каждый из которых зависит от своего индекса m или s .

Наличие вырожденного ядра в системе (1) позволяет записать трансцендентное уравнение для постоянных распространения только через диагональные элементы исходной матрицы:

$$\left[1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \chi_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{s\sigma}^s + 2 \sum_{s=-j}^{-1} \tilde{W}_{s\sigma}^s \right] \left[1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{s\sigma}^s + 2 \sum_{s=-j}^{-1} \tilde{W}_{s\sigma}^s \right] - \\ - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{G_s}{\eta+s} \tilde{W}_{s\sigma}^s \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{G'_s}{\eta+s} \tilde{W}_{s\sigma}^s = 0. \quad (2)$$

Ввиду особенности функции $\tilde{W}_{m\sigma}^s(0)$ пространственные гармоники с $s=2k-1$ и $s=-2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) исключаются из решения. Поле в структуре можно описать основной волной ($m=0$) и совокупностью четных положительных ($m=2k$) и нечетных отрицательных ($m=-2k+1$) дифракционных гармоник. Здесь проявляется специфика расположения (с периодом $0,5l$) ребер лент — вторичных источников излучения и, как следствие, разрежение спектра в два раза. Такой эффект наблюдается и в двухэлементных решетках при трансформации их в симметричную одноэлементную [2].

Кроме того, такая конструкция одинаково взаимодействует с E - и H -поляризованными относительно образующих колец волнами. Поэтому для симметричных волн H_{op} и E_{op} дисперсионные уравнения совпадают с точностью до малого параметра:

$$1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sigma_s \frac{|\eta+s|}{\eta+s} \tilde{W}_{s\sigma}^s + 2 \sum_{s=-j}^{-1} \tilde{W}_{s\sigma}^s = 0, \quad (3)$$

где $\delta_s = \mu_s$ для H_{op} -волн и $\delta_s = \chi_s$ для E_{op} -волн.

Характерные дисперсионные зависимости для волновода радиуса $R=R_1/0,696$ с диэлектрическим стержнем ($\epsilon_0=2,2$) радиуса R_1 , на котором нанесены металлические кольца с периодом $l=7,14 R_1$, показаны на рис. 1, 2. Здесь же пунктирыми линиями отмечены дисперсионные характеристики соответствующих типов волн «прототипного» регулярного цилиндрического волновода, радиус которого равен радиусу втулки R_1 , а внутренняя область заполнена диэлектриком ($\epsilon=2,2$).

В длинноволновом диапазоне постоянные распространения симметричных волн в основном определяются параметрами диэлектрической втулки, а их частоты отсеки близки к соответствующим значениям для «прототипного» волновода (рис. 1). Решетка из колец усиливает отражательную способность границы $r=R_1$, и поле концентрируется в центральной области. Степень концентрации зависит от типа поляризации и радиального индекса волны. С увеличением радиального индекса (вариаций поля вдоль радиуса) критические частоты сложнокомпозиционного волновода по сравнению с их прототипами сильнее смещены в низкочастотную область и сильнее искажается топология поля периодической поверхностью.

Различия фазовых параметров исследуемого и прототипного волноводов мини-

малыны у H_{01} -волны, особенно когда $1 < h_0/k < \sqrt{\epsilon_0}$ и практический волна распространяется внутри диэлектрического стержня. Волна типа H_{02} сильнее возмущена кольцами, но с переходом в режим медленных волн ($h_0/k > 1$) ее фазовая постоянная уменьшается, приближаясь к значению для соответствующего прототипа. Для H -поляризованных относительно образующих колец волн (волны E_{0p} -типа) отражательная способность периодической границы выражена значительно слабее, и поле формируется внутренней областью волновода (включая периферийную). В этом причина и заметного уменьшения фазовых постоянных по сравнению с прототипным волноводом.

Критические частоты гибридных волн относительно регулярного волновода смешены в низкочастотную область и тем сильнее, чем выше их азимутальный и радиальный индексы (рис. 2). Поле распределено по всей области волновода, а кольцевая граница серьезно нарушает его исходную топологию. Когда $h_0/k > 1$ и условия для распространения сохраняются только в центральном стержне волновода, оптическая плотность последнего играет решающую роль при формировании гибридных полей. Поэтому и сближаются дисперсионные зависимости металлоэлектрического и регулярного волноводов, причем фазовые постоянные у HE -волн остаются несколько большими, а у EH -волн — несколько меньшими, чем у их аналогов. Здесь проявляется их поляризационная особенность: если у EH -волн преобладает продольная компонента электрического поля E_z , то у HE -волн — магнитного поля H_z .

Таким образом, развитый в работе подход применительно к структуре с половинным заполнением периода позволяет не только получить прямые аналитические формулы для дисперсионного уравнения, реализовать высокоеффективный алгоритм расчета, но и дать наглядное объяснение разрежению спектра, поляризационной чувствительности, организации автономных каналов связи в одном волноводе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанский В. Б., Коцаревская И. В. Препринт РИ АН УССР № 15. — Харьков, 1988.
2. Ена А. И., Литвиненко Л. Н., Шестопалов В. П. / Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 1. С. 110.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 марта 1989 г.

УДК 539.393:539.219.1:538.569

УВЛЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ СОЛИТОНАМИ В СВЕРХРЕШЕТКЕ СО СПЕКТРОМ, ВЫХОДЯЩИМ ЗА РАМКИ УЧЕТА «БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ»

C. B. Крючков, Г. A. Сыродоев

В работах [1, 2] было показано, что в случае применимости одноминизонного приближения для энергетического спектра в сверхрешетке (СР) могут распространяться электромагнитные солитоны. Последнее связано с тем, что при определенных условиях уравнение для векторного потенциала A в СР принимает вид уравнения синус-Гордона (СГ). В [3, 4] рассмотрена возможность увлечения носителей тока полем уединенной волны.

Во всех этих работах выбиралась следующая зависимость энергии электрона ε от его квазимпульса p :

$$\varepsilon(p) = \frac{p_x^2}{2m} + \varepsilon_0(1 - \cos p_x d), \quad \hbar = 1. \quad (1)$$

Такой энергетический спектр соответствует одномерной СР в приближении сильной связи (с учетом вклада «ближайших соседей»).

Мы рассмотрим одномерную СР, когда справедлива аппроксимация

$$\varepsilon(p) = \frac{p_x^2}{2m} + \varepsilon_x(p_x). \quad (2)$$

Наиболее общий вид $\varepsilon_x(p_x)$ задается соотношением [6]

$$\varepsilon_x(p_x) = \sum_n \varepsilon_n \cos(np_x d). \quad (3)$$

Спектр (1) можно получить из (3), полагая $\varepsilon_1 = -\varepsilon_0$, $\varepsilon_n = 0$, при $n > 1$. Слагаемые

в (3), начиная с третьего ($n \geq 2$), описывают поправки, соответствующие выходу за рамки учета «ближайших соседей». В настоящее время появился ряд работ (см., например, [7] и ссылки в ней), в которых выход за рамки учета «ближайших соседей» приводит к принципиально новым результатам. В этой связи представляется интересным исследовать отклонение энергетического спектра электронов СР от простейшего (косинусоидального) на распространение в СР уединенных волн. В настоящем сообщении учтено влияние слагаемого с $n=2$ в выражении (3) на возможный наблюдаемый эффект — увлечение носителей тока полем уединенной электромагнитной волны. Таким образом будем исходить из следующей модели энергетического спектра:

$$\epsilon_x(p_x) = \epsilon_0(1 - \cos p_x d) - \epsilon_2 \cos(2p_x d). \quad (4)$$

Пусть характерная длина, на которой происходит изменение электромагнитного поля, велика по сравнению с де-бройлевской длиной волны и периодом СР, а характерное время изменения поля мало по сравнению со временем свободного пробега электрона. Тогда, поступая аналогично [1], получим для $F = (e/c)A_x d$ уравнение

$$\left(v^2 - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F = \frac{\omega_0^2}{V^2} (\sin F + \lambda \sin 2F). \quad (5)$$

Здесь V — скорость электромагнитной волны в отсутствие электронов,

$$\omega_0^2 = \epsilon_0 m d^2 \omega_p^2 \frac{I_1}{I_0}, \quad (6)$$

ω_p — ленгмюровская частота,

$$\lambda = \frac{2I_2 \epsilon_2}{I_1 \epsilon_0}; \quad (7)$$

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp \left\{ \frac{\epsilon_0}{kT} \left(\cos \varphi + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \cos 2\varphi \right) \right\} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (8)$$

T — температура; электронный газ считается невырожденным. Уравнение (5) представляет собой двойное уравнение синус-Гордона (2СГ) [8].

С математической точки зрения [9] уравнение 2СГ не является интегрируемым и не имеет солитонных решений в том смысле, что при $\lambda \neq 0$ после «столкновения» уединенные волны, описываемые уравнением (5), могут изменить свою форму. Такое поведение следует из численного решения уравнения 2СГ. Однако при малых значениях λ уравнение 2СГ близко (в некотором функциональном смысле) к вполне интегрируемому СГ-уравнению. Кроме того, известно аналитическое (кинковое) решение уравнения 2СГ, верное при произвольных значениях λ , а при $\lambda \rightarrow 0$ переходящее в односолитонное решение уравнения СГ. Это кинковое решение имеет вид [10]

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(F/2) &= (2\lambda + 1)^{1/2} \operatorname{csch}(\xi/\xi_0), \\ \xi &= z - vt, \quad \xi_0 = V(\gamma \omega_0)^{-1} (2\lambda + 1)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma = (1 - v^2/V^2)^{-1/2}$.

В качестве возможного наблюдаемого эффекта мы рассмотрим увлечение электронов уединенной волной (9). Проведя выкладки, аналогичные [5], получим плотность солитоноэлектрического тока

$$j_z = \frac{2en_0 \epsilon_0}{mv} \frac{2\lambda + 1}{\operatorname{ch}^2(\xi/\xi_0) + 2\lambda} \left[1 + \frac{4\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{\operatorname{sh}^2(\xi/\xi_0)}{\operatorname{ch}^2(\xi/\xi_0) + 2\lambda} \right], \quad (10)$$

где n_0 — концентрация электронов.

Количество заряда, переносимое через единицу площади поперечного сечения образца при прохождении одного кинка, при этом равно

$$q = \frac{4(2\lambda + 1)en_0 \epsilon_0 \xi_0}{mv} \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0 \lambda} [1 - \varphi(\lambda)] \right\}, \quad (11)$$

где $\varphi(\lambda) = [2\lambda \cdot (2\lambda + 1)]^{-1/2} \operatorname{Arcth} \left(\frac{2\lambda + 1}{2\lambda} \right)^{1/2}$. При $\lambda \ll 1$ имеем $\varphi(\lambda) = 1 - 4/3\lambda$.

Вводя, подобно [5], коэффициент увлечения электронов уединенной волной

$$K = q/en_0 \xi_0,$$

получаем

$$K = K_c \cdot f(\lambda). \quad (12)$$

Здесь $K_c = 4\epsilon_0/mv^2$ — коэффициент увлечения электронов солитонами при $\lambda=0$ [5],

$$f(\lambda) = (2\lambda + 1) \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{I_1}{2I_2} [1 - \varphi(\lambda)] \right\}, \quad (13)$$

причем при $\lambda \ll 1$ $f(\lambda) = 1 + \frac{4\epsilon_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{I_2}{I_1} + 1 \right).$

Существенным отличием результата (12) от [5] является температурная зависимость коэффициента увлечения K , определяемая зависимостью λ от T . На рисунке (см. на вклейке) представлены графики зависимости $f(\lambda)$ от kT при различных значениях параметра ϵ_2/ϵ_0 (1—0,1; 2—0,15; 3—0,2). Видно, что $K > K_c$. Из физических соображений ясно, что K должен быть обратно пропорционален эффективной массе электрона на дне мини-зоны. Электрон со спектром (4) обладает меньшей эффективной массой на дне мини-зоны, чем электрон со спектром (1). Этим объясняется тот факт, что учет слагаемого с $n=2$ в формуле (3) приводит к увеличению K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Эпштейн Э. М. // ФТТ. 1977. Т. 19. Вып. 7. С. 3456.
2. Тетерцов А. П. // УФЖ. 1978. Т. 23. Вып. 7. С. 1182.
3. Эпштейн Э. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 1. С. 3.
4. Крючков С. В. // ФТП. 1989. Т. 23. Вып. 7. С. 1314.
5. Эпштейн Э. М. // ФТП. 1980. Т. 14. Вып. 12. С. 2422.
6. Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетерцов А. П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. — М.: Наука, 1989. — 288 с.
7. Цвелик А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 49. Вып. 2. С. 99.
8. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир. 1988. — 694 с.
9. Аблович М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 479 с.
10. Ожогин В. И., Преображенский В. Л. // УФН. 1988. Т. 155. Вып. 4. С. 593.

Волгоградский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию
24 ноября 1989 г.

УДК 621.375.6

ДВУХЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ СВЧ УСИЛИТЕЛЯ НА ДИОДЕ ГАННА

Д. А. Усанов, С. С. Горбатов, А. А. Семенов

При увеличении амплитуды сигнала, подаваемого на диод Ганна, работающий в режиме усиления, вследствие нелинейности свойств диода в спектре выходного сигнала появляются субгармонические составляющие [1].

В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования спектра выходного сигнала СВЧ усилителя на диоде Ганна в случае, когда кроме основного сигнала на диод воздействует дополнительный СВЧ сигнал. При проведении исследований использовалась конструкция волноводного усилителя, аналогичная описанной в работе [2].

Центральная частота полосы усиления f составляла 10,2 ГГц; ширина полосы на уровне 3 дБ — 800 мГц, коэффициент усиления 10 дБ при напряжении смещения 9 В. При подаче на вход усилителя основного сигнала с мощностью P_{bx} до 8 мВт на его выходе наблюдался усиленный сигнал той же частоты. При увеличении уровня мощности P_{bx} в спектре выходного сигнала наблюдалось появление субгармонических составляющих и их комбинаций, соответственно при $P_{bx} = 8$ мВт появлялись составляющая $f/2$, при $P_{bx} = 15$ мВт — $f/4$, $P_{bx} = 17$ мВт — $f/8$. Амплитуды составляющих $f/2$ и $f/8$ были примерно на 10 дБ меньше амплитуды субгармоники $f/4$. При $P_{bx} = 17$ мВт наряду с возникновением субгармоники $f/8$ в окрестности $f/4$ наблюдалась область шумовой генерации. Появление субгармонических составляющих в выходном спектре усилителя можно объяснить на основе решения дифференциального уравнения колебательного контура с диодом Ганна, емкость которого зависит от амплитуды СВЧ сигнала.

При воздействии на диод Ганна дополнительным СВЧ сигналом наблюдалось его влияние на уровень пороговой мощности основного сигнала, при котором происходит возникновение субгармонических составляющих. Особенно сильным это влияние было в случае, когда частота дополнительного сигнала была близка к $f/4$. На рис. 1 (см. на вклейке) приведен спектр выходного сигнала усилителя при подаче выходного сигнала с частотой 10,2 ГГц, где I — спектральная составляющая, соответствующая

входному сигналу усилителя ($10,2$ ГГц), 2 — субгармоническая составляющая $f/2 = 5,1$ ГГц, 3 — субгармоническая составляющая $f/4 = 2,55$ ГГц; $4,5$ — спектральные составляющие $f/4 \pm f_{\text{доп}}$, где $f_{\text{доп}} = 2,7$ ГГц — частота сигнала от дополнительного генератора СВЧ.

На рис. 2 приведены зависимости входной пороговой мощности $P_{\text{вх}}$ основного сигнала, при которой возникает субгармоника $f/4$ от частоты в пределах полосы усиления в отсутствие (кривая 1) и при подаче (кривая 2) дополнительного сигнала СВЧ мощностью 50 мВт. Из приведенных на этом рисунке результатов следует, что воздействие дополнительного сигнала может более чем в $1,5$ раза понижать уровень пороговой мощности основного сигнала, при котором возникают субгармонические составляющие.

Аналогичное влияние дополнительный СВЧ сигнал оказывает также и на пороговую мощность возникновения субгармоники $f/2$, что следует из приведенных на рис. 2 зависимостей. Кривая 3 соответствует зависимости пороговой мощности $P_{\text{вх}}$ от частоты в отсутствие дополнительного СВЧ сигнала, 4 — зависимости при подаче дополнительного СВЧ сигнала.

Из результатов измерений следует также, что наряду с уменьшением уровня пороговой мощности воздействие дополнительного сигнала увеличивает амплитуды субгармонических составляющих. Это иллюстрируется приведенными на рис. 3 зависимостями отношения A амплитуды субгармоники $f/4$ при подаче дополнительного сигнала СВЧ к амплитуде этой же субгармоники в отсутствие дополнительного сигнала СВЧ от уровня мощности дополнительного сигнала $P_{\text{доп}}$ на частотах входного сигнала $10; 10,2; 10,4$ ГГц (кривые 1, 2, 3 соответственно). Результаты измерений, приведенные на рис. 3, свидетельствуют о том, что амплитуда субгармоники $f/2$ также несколько увеличивается при увеличении мощности дополнительного сигнала СВЧ (зависимости 4, 5, 6 измерены на частотах $10; 10,2; 10,4$ ГГц соответственно). Следует отметить скачкообразный характер возникновения субгармоник при изменении мощности дополнительного сигнала СВЧ, а также возбуждение шумовой генерации в окрестности субгармоники $f/4$ при $P_{\text{доп}} > 70$ мВт.

Учет установленных закономерностей может быть полезен при эксплуатации СВЧ усилителей на диодах Ганна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усанов Д. А., Горбатов С. С. Тезисы докл. VII Всесоюзного симпозиума «Плазма и неустойчивости в полупроводниках». — Паланга, 1989. Т. 1. С. 77.
2. Усанов Д. А., Посадский В. Н. и др. // Радиотехника и электроника. 1977. № 5. С. 1085.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 декабря 1989 г.

УДК 621.372.853.2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНЫХ ФЕРРИТОВЫХ X-ЦИРКУЛЯТОРОВ КВЧ ДИАПАЗОНА

Р. И. Андреева, В. А. Неганов, Т. А. Часовникова, А. Г. Глушенко

В настоящее время наибольшее распространение благодаря компактности и простоте конструкции нашли трехплечие мостовые циркуляторы и вентили на их основе (см., например, [1]). Использование таких устройств в качестве элементной базы позволяет создавать различные конструкции многоплечих развязывающих приборов. В ряде случаев целесообразным является разработка четырехплечих X-циркуляторов [2, 3]. В данной работе приводятся экспериментальные результаты моделирования новых X-циркуляторов КВЧ диапазона, в качестве резонаторов для которых используются прямоугольный ферритовый параллелепипед и сложная колебательная система, состоящая из комбинации ферритовых цилиндров.

1. X-циркуляторы с ферритовым резонатором цилиндрической формы. Исследуемый H -плоскостной четырехплечий циркулятор (рис. 1а, см. на вклейке) содержит в центре соединения согласующий металлический трансформатор, на котором располагается цилиндрический ферритовый резонатор, находящийся во внешнем магнитном поле постоянного магнита; соосно согласующему трансформатору в соединение введен металлический стержень. Было исследовано два типа металлических стержней: нерезонансный емкостной стержень (емкостной вариант) и индуктивный стержень четверть-волновой длины (индуктивный вариант).

На рис. 1б представлены экспериментальные дисперсионные характеристики X-циркулятора с емкостным стержнем (сечение волновода $3,6 \times 1,8$ мм 2). Параметр α_i ($i=2, 3, 4$) на этом рисунке определяет потери при передаче сигнала из первого плеча в плечо i , причем большая часть энергии сигнала, как видно из рисунка, из плеча 1 попадает в плечо 4, а плечи 2, 3 являются развязанными. Диаметр ферритового резонатора $d=1,21$ мм, высота феррита $h=0,995$ мм, высота согласующего

трансформатора была отработана экспериментально по минимуму КСВ и составляла $h_{tr}=0,5$ мм; диаметр металлического стержня равнялся диаметру ферритового резонатора. Рабочая полоса частот по развязкам 20 дБ для такой конструкции X-циркулятора была порядка 3,5%.

На рис. 1в приведены частотные характеристики X-циркулятора с индуктивным тонким металлическим стержнем. Ферритовый резонатор представлял собой диск высотой $h=0,44$ мм и диаметром $d=1,59$ мм. Полоса рабочих частот по развязкам более 20 дБ в соседнее плечо (α_{12}) составляет порядка 5%, а в плечо напротив (α_{13}) менее 2%.

Сравнение характеристик X-циркуляторов двух типов (емкостной и индуктивный варианты) показывает, что развязки в соседнее плечо в индуктивном варианте существуют в большей полосе частот ($\sim 5\%$), чем в емкостном варианте ($\sim 2,5\%$). И наоборот, циркулятор с емкостным стержнем имеет развязки в плечо, напротив, в гораздо большей полосе частот ($\sim 10\%$), чем в индуктивном варианте ($\sim 2\%$). Здесь необходимо отметить, что X-циркуляторы обоих типов согласованы в полосе частот порядка 15—20%.

2. X-циркулятор с ферритовым резонатором в форме прямоугольного параллелепипеда. С целью расширения рабочей полосы частот X-циркулятора был исследован ферритовый резонатор в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 2), который также располагался на согласующем металлическом трансформаторе. На рис. 2 приведены параметры устройства в пяти миллиметровом диапазоне длин волн при различных ориентациях ферритового элемента с размерами $a=b=1$ мм, $a=1.9h$ (a , b , h — длина, ширина и высота ферритового параллелепипеда). При подаче СВЧ сигнала в плечо 1 при определенном направлении подмагничивающего поля плечи 2, 3 будут развязаны. Обычно полосы рабочих частот по развязкам для этих плеч имеют различные величины. На рис. 2а, б приведены экспериментальные результаты для двух возможных вариантов при различных ориентациях граней ($\phi \neq \Phi_{opt}$); на рис. 2а — плечо 2 имеет большую полосу частот, чем плечо 3, на рис. 2б, наоборот, плечо 3 имеет большую полосу частот по развязкам. Следовательно, существует оптимальное положение элемента ($\phi = \Phi_{opt}$), при котором рабочие полосы по всем плечам совпадают (рис. 2в).

При электродинамическом моделировании X-циркулятора использовалась модель резонатора с магнитными стенками на боковой поверхности и верхнем основании ферритового параллелепипеда. В этом случае уравнение для определения собственных частот ненамагниченного резонатора принимает простой вид

$$f = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{2h}\right)^2},$$

где c — скорость света; ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости феррита; числа l, n, m характеризуют вариацию поля, соответственно, вдоль координат x, y, z ($l=0, 1, 2, \dots$, $n=0, 1, 2, \dots$, $m=1, 3, 5, \dots$). Наилучшие экспериментальные результаты были получены для резонатора с поперечным сечением в форме квадрата ($a=b$), высота которого была меньше размера волновода. Центральная рабочая частота циркулятора приблизительно соответствует колебанию (1, 1, 1) резонатора с магнитными стенками.

3. X-циркулятор с колебательной системой, состоящей из комбинации ферритовых цилиндров. С целью увеличения широкополосности X-циркулятора были исследованы более сложные ферритовые резонаторы. В частности, был рассмотрен ферритовый резонатор, состоящий из пяти ферритовых цилиндров. На рис. 3 приведены дисперсионные характеристики для такого устройства в пяти миллиметровом диапазоне длин волн (размеры центрального феррита: $d=0,94$ мм, $h=0,74$ мм; размеры дополнительных ферритов: $d=0,94$ мм, $h=0,73$ мм). Введение дополнительных ферритов позволяет получить требуемую структуру поля в области сочленения, изменить спектр собственных колебаний сложного резонатора и оптимизировать частотную характеристику. Это подтверждается сопоставлениями экспериментальных характеристик циркуляторов с различными ориентациями дополнительных ферритовых цилиндров.

Таким образом, сравнение экспериментальных характеристик разработанных X-циркуляторов показало, что лучшие параметры имеют устройства из комбинации резонаторов и с ферритовым прямоугольным параллелепипедом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вамберский М. В., Абрамов В. П., Казанцев В. И. Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ. — М.: Радио и связь, 1982.
2. Helzajn J. // IEEE Trans. 1970. V. MTT-18. P. 705.
3. Davis L. E., Coleman M. D., Cotter J. J. // IEEE Trans. 1964. V. MTT-12. P. 43.
4. Solbach K. // IEEE Trans. 1984. V. MTT-32. P. 722.

Куйбышевский электротехнический
институт связи

Поступила в редакцию
16 января 1990 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ 1/F ШУМА В АРСЕНИД-ГАЛЛИЕВЫХ И КРЕМНИЕВЫХ ЛПД

C. A. Корнилов, K. D. Овчинников, A. M. Рипак

Удобным объектом для изучения источников фликерного шума в сильных полях является лавинно-пролетный диод (ЛПД), работающий при глубоком насыщении скорости дрейфа носителей заряда.

В [1-3] фликерный шум в ЛПД связывался с флуктуациями дрейфовой скорости, причем для их описания использовалась формула Хоухе в локальной трактовке.

$$\frac{S_v(x, x', F)}{v^2} = \frac{\kappa \delta(x-x')}{n_i(x) AF}, \quad (1)$$

где v — дрейфовая скорость электронов или дырок, κ — коэффициент, характеризующий интенсивность первичного источника фликерного шума, $n_i(x)$ — концентрация носителей заряда данного знака, A — площадь поперечного сечения образца, $S_v(x, x', F)$ — взаимная спектральная плотность флуктуаций скорости на частоте F в сечениях x и x' , $\delta(x)$ — функция Дирака.

Применение (1) для анализа флуктуаций в генераторах на GaAs и Si ЛПД привело к удовлетворительному соответствуию с экспериментом по уровням флуктуаций амплитуды и частоты при токах, близких к номинальным.

До последнего времени формула Хоухе использовалась для анализа фликерного шума в образцах и приборах, в которых решетка и носители находились в близком к равновесию состоянии либо при слабом разогреве последних [4-7]. Несмотря на успешное применение (1) к анализу флуктуаций в генераторах на ЛПД возможность безоговорочного распространения этой формулы на случай сильного разогрева носителей заряда не очевидна.

Задачей настоящей работы было выяснение справедливости (1) для ЛПД в широком диапазоне рабочих токов, температуры и объема образцов. Исследовались однопролетные GaAs и Si ЛПД с барьером Шоттки или p^+ — n -переходом. Эксперимент давал возможность определить среднее по длине области дрейфа значение спектральной плотности $S_v(F)^*$ через спектральную плотность флуктуаций напряжения на диоде $S_U(F)$ (в статическом режиме работы последнего):

$$\frac{S_v(F)}{v^2} = \frac{3}{4} \frac{S_U(F)}{r_0^2 i_0^2}, \quad (2)$$

где r_0 — сопротивление пространственного заряда области дрейфа, i_0 — ток питания ЛПД.

В экспериментах на арсенид-галлиевых диодах было обнаружено, что на уровень фликерной составляющей $S_U(F)$ влияют ток питания i_0 и температура рабочей области T [8]. При этом оказалось, что уровень фликерной составляющей $S_U(F)$ является универсальной функцией напряжения на диоде U_0 вне зависимости от того, как это напряжение достигнуто: изменением температуры или тока. Этот результат иллюстрируется на рис. 1 (см. на вклейке), где представлены экспериментальные данные для двух диодов. При различных значениях i_0 и T все точки, в которых значения $S_U(F)$ близки, соответствуют близким U_0 . Дальнейший анализ эксперимента показал, что для арсенид-галлиевых ЛПД $S_v(F)$ аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{S_v(F)}{v^2} = \frac{C_0}{n_0^2 V_d F} \exp\left(-\frac{C_1}{E_{dr}}\right), \quad (3)$$

где C_0 и C_1 — постоянные, примерно одинаковые для всех ЛПД, причем $C_1 = 4.9 \cdot 10^5$ В/См, n_0 — концентрация свободных электронов в области дрейфа, E_{dr} — средняя напряженность поля по этой области, V_d — ее объем.

Исследование кремниевых диодов показало, что для них уровень фликерной составляющей в $S_U(F)$ также зависит от тока питания диодов и их температуры, причем показатель m степенной зависимости $S_U \sim i_0^m$ изменяется для разных диодов в пределах от 0,25 до 4. Что касается интенсивности флуктуаций скорости дрейфа $S_v(F)/v^2$, то обнаружено, что в отличие от арсенид-галлиевых ЛПД она явно не зависит от i_0 . Для ЛПД большего объема удалось аппроксимировать экспериментальные результаты следующим образом

$$*\frac{S_v(F)}{v^2} = \frac{1}{l_a^2} \int_{l_a}^{l_a} \int_{l_a}^{l_a} S_v(x, x', F) / v^2 dx dx', \quad \text{где } l_a \text{ — длина области умножения,}$$

l_a — длина рабочей области ЛПД.

$$\frac{S_v(F)}{v^2} = \frac{B_0}{F} \exp\left(-\frac{B_1}{E_{dr}}\right), \quad (4)$$

где B_0 и B_1 —постоянные. Для кремниевых ЛПД малого объема (диапазон 37 ГГц), характеризуемых более высокой напряженностью электрического поля в рабочей области, в зависимостях S_v/v^2 от E_{dr}^{-1} обнаружены довольно отчетливо выраженные экстремумы. Последнее иллюстрирует рис. 2, на котором представлены результаты измерений для трех диодов. Поскольку вид зависимостей $S_v(E_{dr})/v^2$ у диодов этих двух групп ЛПД оказался разным, то трудно сказать что-либо о влиянии объема рабочей области на интенсивность источника фликерных флуктуаций в кремниевых ЛПД.

Сопоставление полученных результатов с тем, что предсказывает формула Хоухса, показало их несоответствие. По (1) $S_v/v^2 \sim n_0^{-1}$. Эксперимент показал, что для GaAs ЛПД $S_v/v^2 \sim n_0^{-3}$ (формула (3)), а для Si ЛПД S_v/v^2 не зависит от n_0 .

Таким образом, согласие теоретических и экспериментальных данных для генераторов на ЛПД [1–3] следует рассматривать только как подтверждение гипотезы о флуктуациях скорости дрейфа как источника фликерных флуктуаций колебаний, но не как подтверждение справедливости (1) для ЛПД. В [2, 3] сравнение проводилось при определенном значении тока питания ЛПД, близком к номинальному. Отступление от этого тока привело бы к изменению экспериментально определяемой константы в (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнилов С. А., Овчинников К. Д., Павлов В. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 5. С. 607.
2. Корнилов С. А., Овчинников К. Д., Павлов В. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 6. С. 725.
3. Овчинников К. Д., Рипак А. М. // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. 1988. Вып. 3. С. 20.
4. Hooge F. N., Kleipreppening T. G. M., Vandamme L. K. J. // Rep. Prog. Phys. 1981. V. 44. P. 479.
5. Kleipreppening T. G. M. // Physica. 1978. V. 94B. P. 141.
6. Kleipreppening T. G. M. // Physica. 1981. V. 103B. P. 340.
7. Kleipreppening T. G. M. // Physica. 1982. V. 113B. P. 189.
8. Вальд-Перлов В. М., Корнилов С. А. и др. // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. 1989. Вып. 1 (198). С. 28.

Ленинградский электротехнический
институт связи

Поступила в редакцию
10 июля 1989 г.

От редакции

К сожалению, в опубликованной в № 9 1990 г. статье Д. В. Виноградова, Г. Г. Денисова «Преобразование волноводных волн в системах со скачком фазы коэффициентов связи» не напечатан следующий текст:

6. Виноградов Д. В., Денисов Г. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 6. С. 726.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1989 г.



НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВИКТОРЕ ИВАНОВИЧЕ ГАПОНОВЕ (1903—1990 гг.)

Виктор Иванович принадлежал к той категории потомственных русских интеллигентов, которые когда-то составляли интеллектуальный генофонд России. Родиной его родителей была Рязань; отец из семьи священника, мать родилась в дворянской семье. Через несколько лет после женитьбы родители Виктора Ивановича переехали в Варшаву, где отец возглавил Мариинскую женскую гимназию и преподавал в ней русский язык, мать после окончания гимназии работала классной наставницей.

Виктор Иванович родился в Варшаве. Вскоре родители вернулись в Рязань. В 1914 г., через год после смерти отца, семья переехала в Москву, где Виктор Иванович, самый младший из шести детей семьи Гапоновых, окончил школу в 1919 г. и начал свою трудовую деятельность в канцелярии Русского исторического музея, которую продолжил и после поступления осенью того года на физико-математический факультет Московского университета. С 1921 г. параллельно с учебой Виктор Иванович с увлечением занимается педагогической работой: он преподает на рабфаке им. Покровского (1921—22 гг.), затем на рабфаке ВХУТЕМАС (1922—23 гг.). С 1923 по 1933 гг. В. И. Гапонов сначала в качестве ассистента, затем доцента сотрудничает на кафедре общей физики Института народного хозяйства (в дальнейшем переведенную в Московский энергетический институт). Работу в МЭИ Виктор Иванович совмещает с исследовательской деятельностью в качестве старшего научного сотрудника во Всесоюзном электротехническом институте.

Научными исследованиями Виктор Иванович начал заниматься еще с 1922 г. в лаборатории профессора (академика) В. К. Аркадьева. В 1926 г. он поступает в аспирантуру МГУ к Б. А. Введенскому, с именем которого во многом связано становление в Союзе работ по проб-

лемам генерирования и распространения ультракоротких радиоволн, а также создания антенных систем УКВ диапазона. Исследования в указанной области Виктору Ивановичу пришлось прервать после переезда в г. Горький, где он переключается на начатые еще в Москве исследования по освоению сантиметрового и миллиметрового диапазона длин волн.

Начало сотрудничества В. И. Гапонова в Горьком (тогда Нижнем Новгороде) относится к 1932 году. Еще в 1930 г. НАРКОМПРОС распределил В. И. Гапонова, А. А. Андронова и М. Т. Грехову в Горьковский университет и Физико-технический институт. Однако окончательный переезд Виктора Ивановича со всей семьей в связи с семейными обстоятельствами задержался до начала 1933 г.

Сотрудничая в Нижнем Новгороде и бывая там наездами, В. И. Гапонов останавливался у А. А. Андронова и Е. А. Леонович в их единственной комнате (в доме № 17 по улице Минина). С 1933 г. жизнь В. И. Гапонова и его жены М. Т. Греховой неразрывно связана с Нижним Новгородом.

С первых же дней работы в университете Виктор Иванович был назначен заведующим кафедры общей физики. Оборудование для кафедры, поначалу не имевшей даже своего помещения, он добывал в институтах, где ранее работал и с которыми продолжал сотрудничество. Именно благодаря хорошему отношению к нему в МГУ, МЭИ, Институте народного хозяйства, благодаря его энтузиазму (достаточно сказать, что подавляющее большинство оборудования перевозилось лично в мешках, портфелях, рюкзаках и т. п.) на кафедре общей физики университета появился демонстрационный кабинет, оборудованный по уровню того времени лаборатории.

Сотрудники редакции и члены редколлегии журнала, люди других поколений, общаясь с этим мягким, остроумным и широко образованным человеком, зная его как одного из организаторов «Радиофизики», как его первого и долголетнего заместителя главного редактора, как одного из организаторов радиофизического факультета, как человека много лет возглавлявшего кафедру электроники на этом факультете, как автора одного из учебников по электронике, по которому многие учились, мало или ничего не знали о тех годах жизни и деятельности Виктора Ивановича.

По-видимому, Виктор Иванович прожил не очень простую жизнь—люди его склада не могли не понимать, что происходило вокруг них. Но и в тех непростых условиях они находили для себя вариант, позволявший принести пользу науке, которой они посвятили жизнь, пользу людям, ей преданным. Он не был честолюбивым человеком. Во всяком случае, не вызывает сомнений, что он мог достичь значительно большего официального признания. Возможно, что этому мешала глубокая интеллигентность этого человека, перед памятью о котором можно без лукавства низко склонить головы.

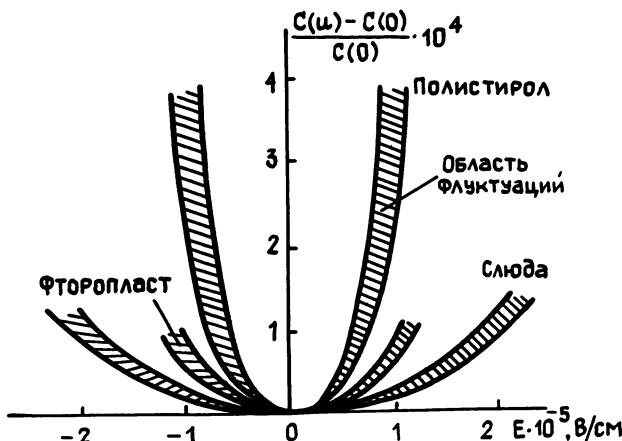


Рис. 1.

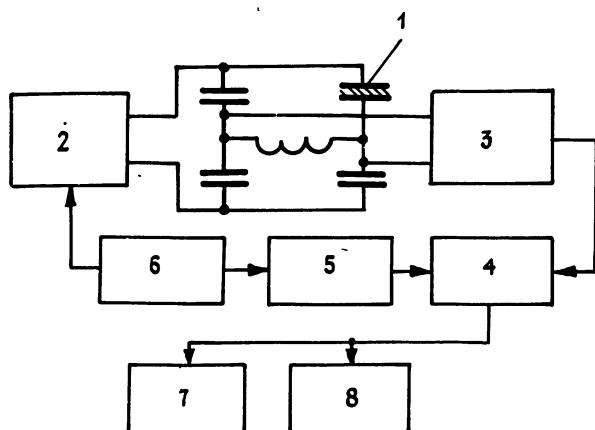


Рис. 2.

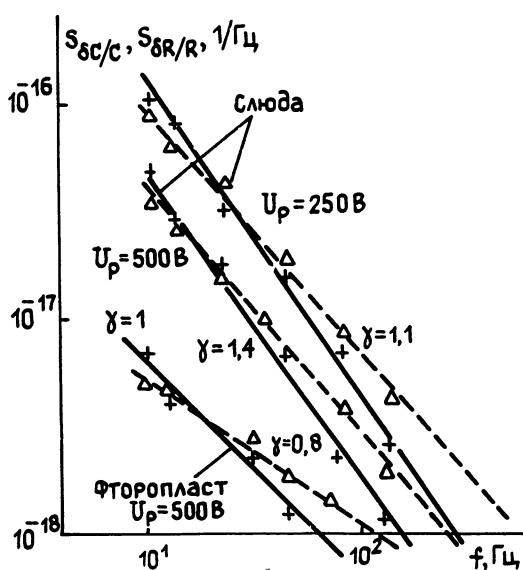


Рис. 3.

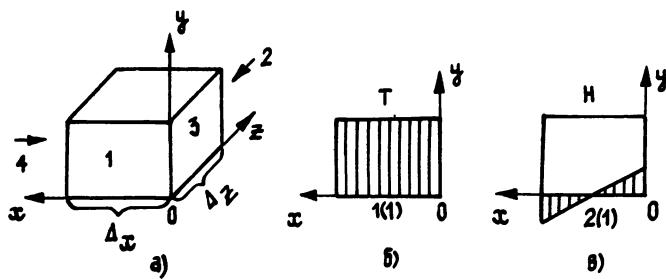


Рис. 1.

Рис. 2.

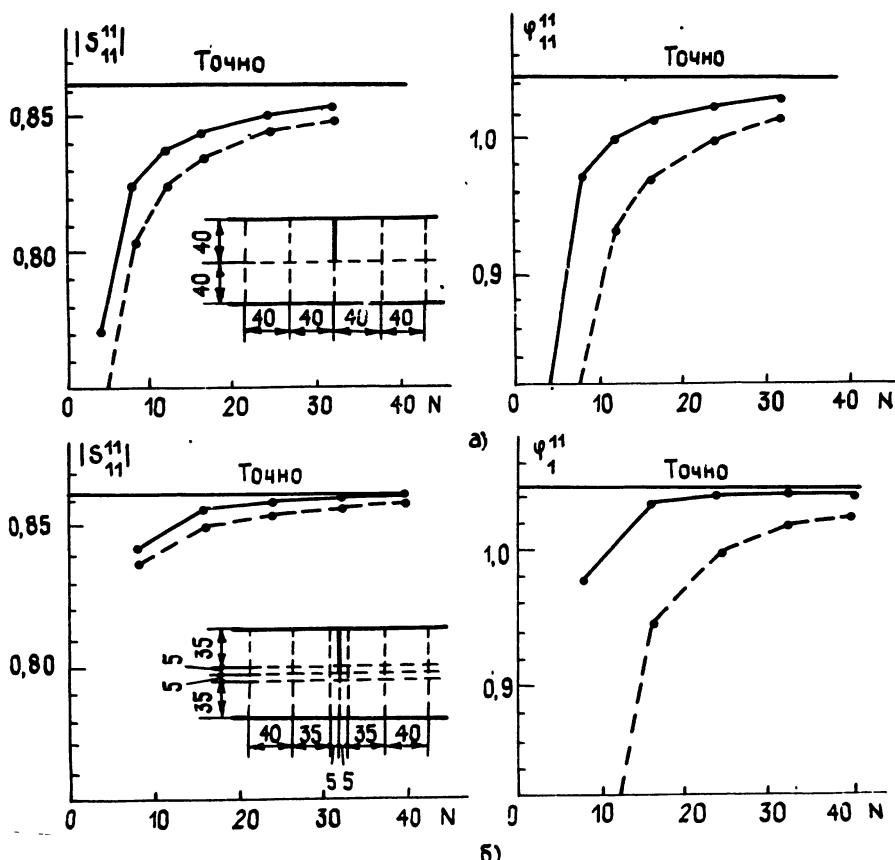
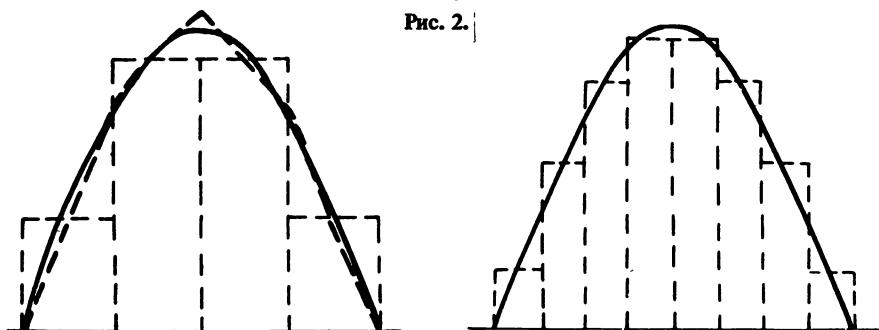


Рис. 3.

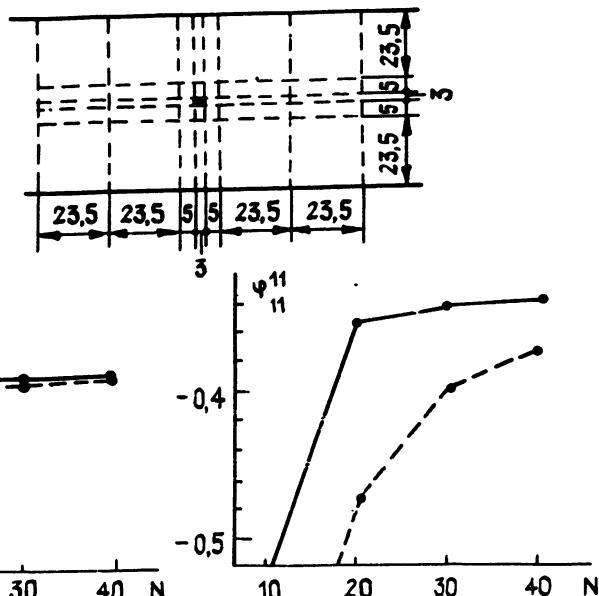


Рис. 4.

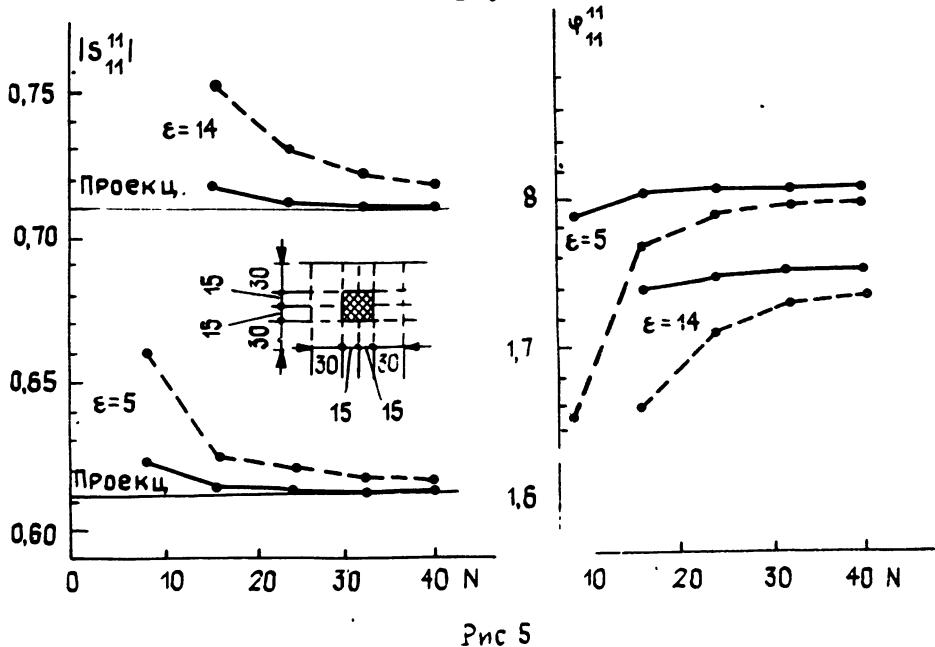


Рис 5

(Рис. 6, 7, 8 см. на след. полосе)

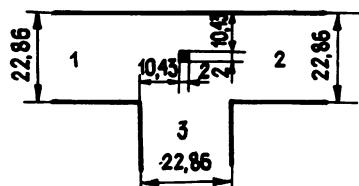
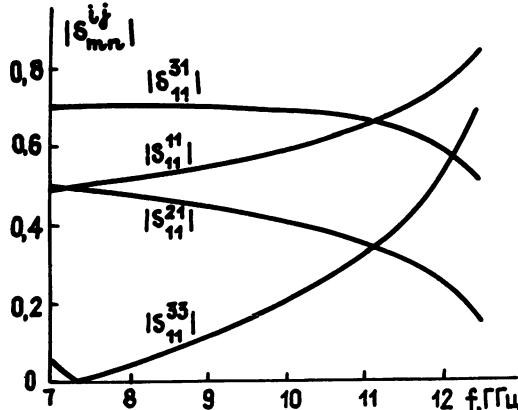


Рис. 6.

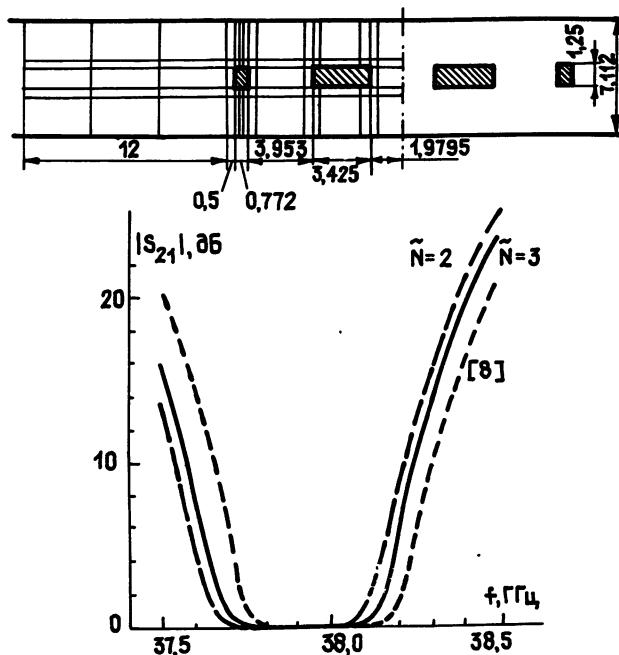


Рис. 7.

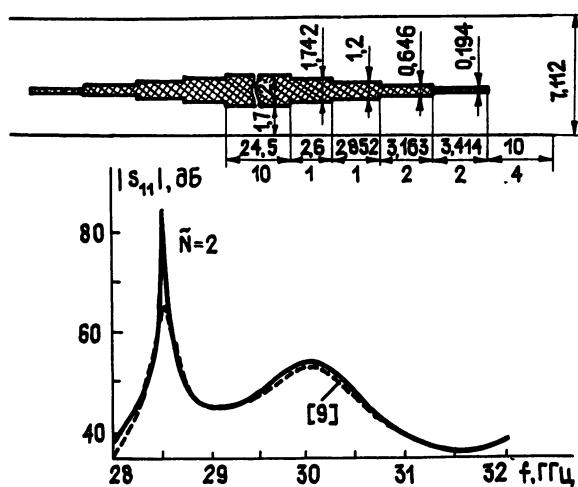


Рис. 8.

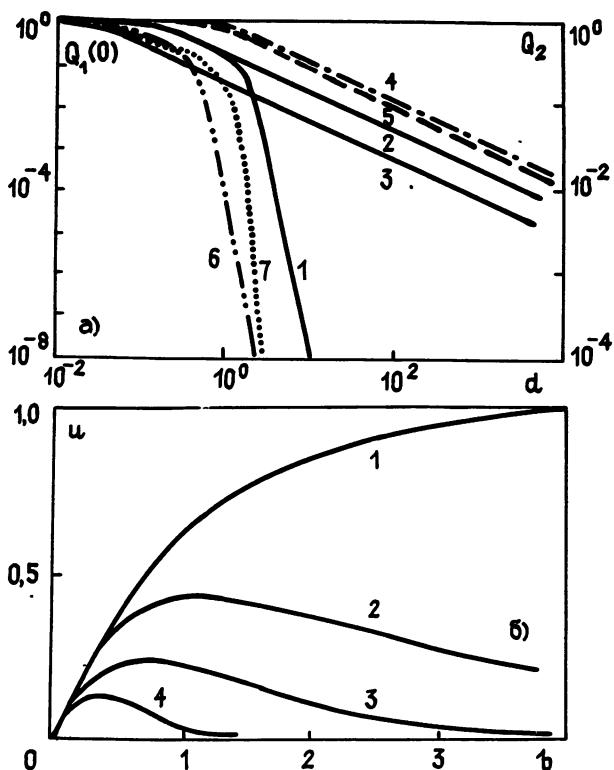


Рис.1.

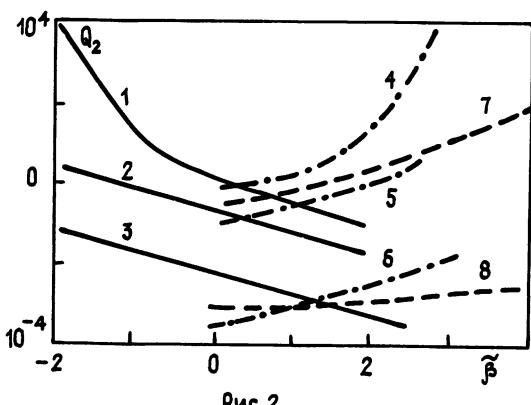


Рис.2.

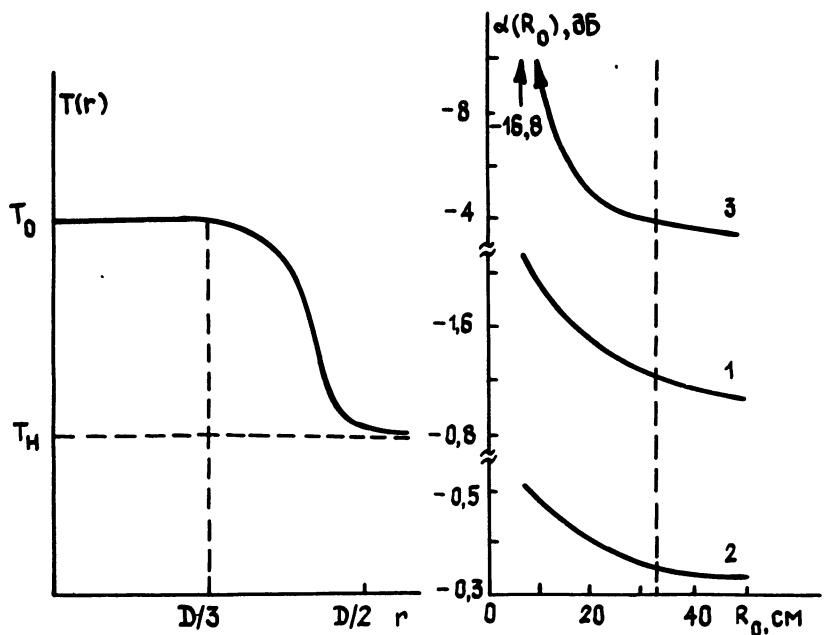


Рис. 1.

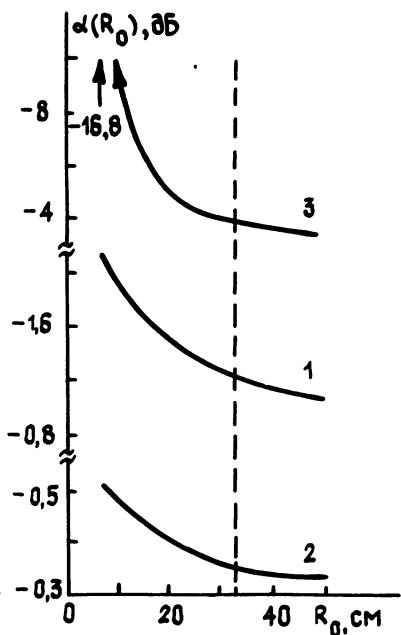


Рис. 2.

К ст. В. А. Сырового и др.

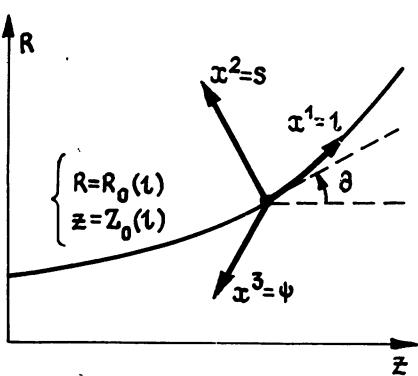


Рис. 1.

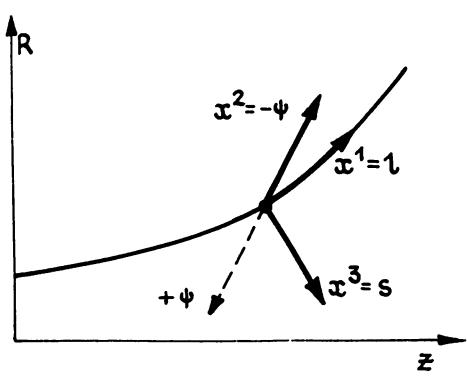


Рис. 2.

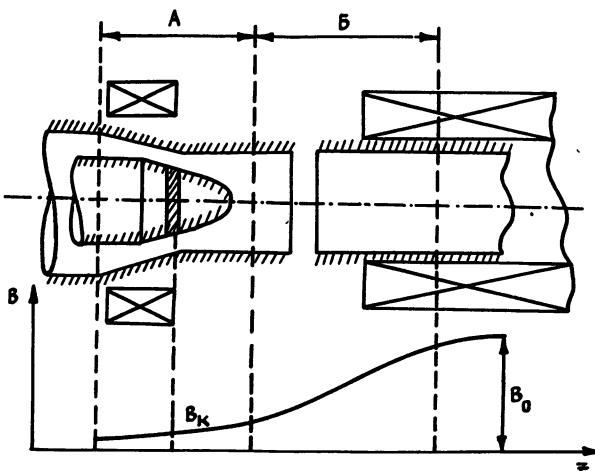


Рис. 1.

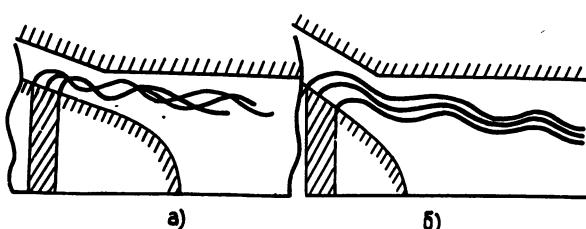


Рис. 2.

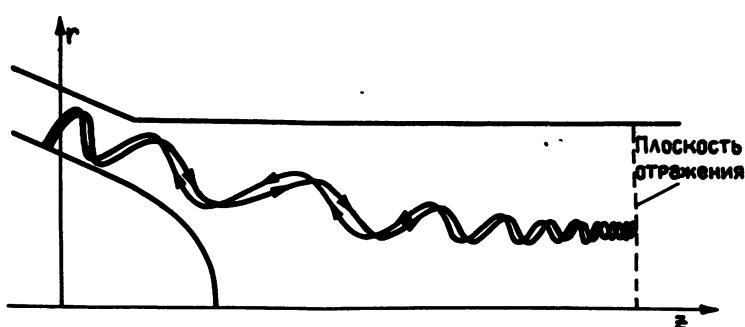


Рис. 3.

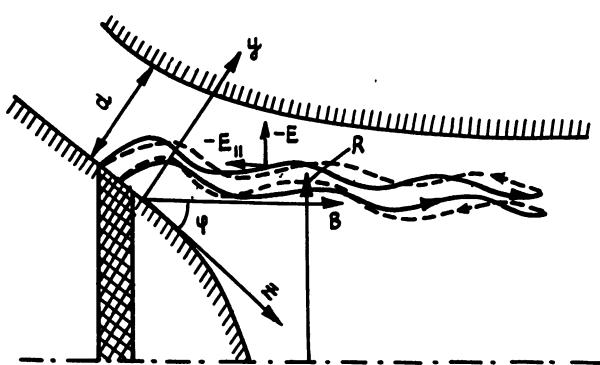


Рис. 4.

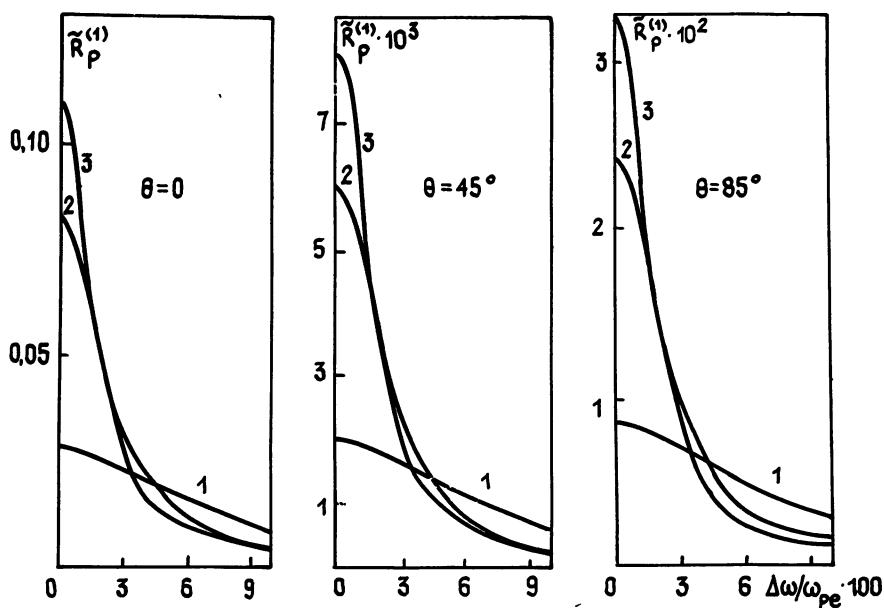


Рис. 1.

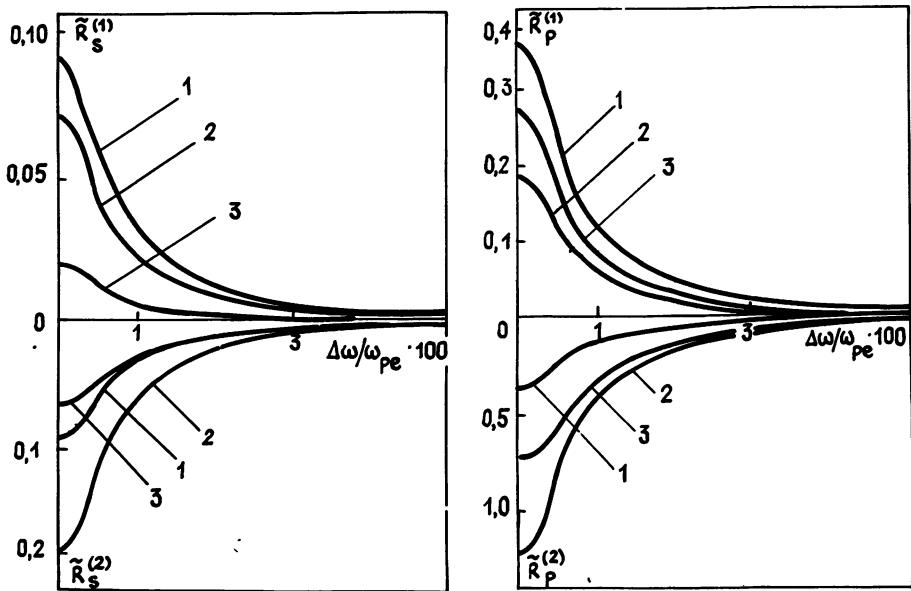


Рис. 2

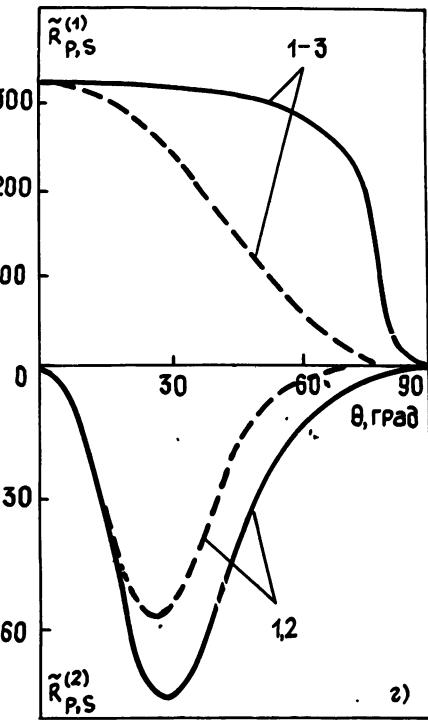
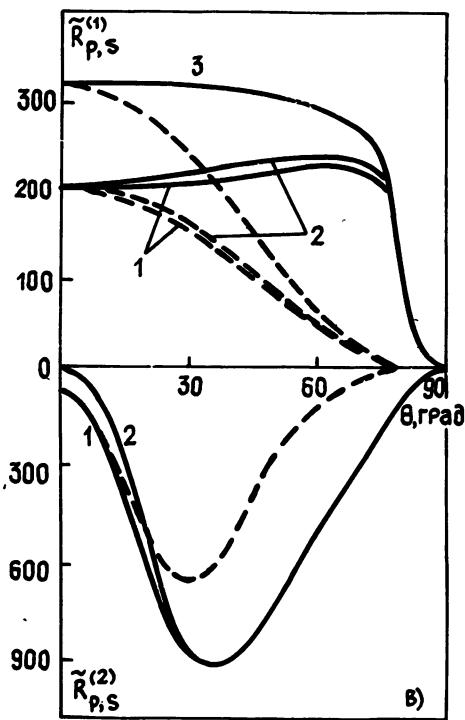
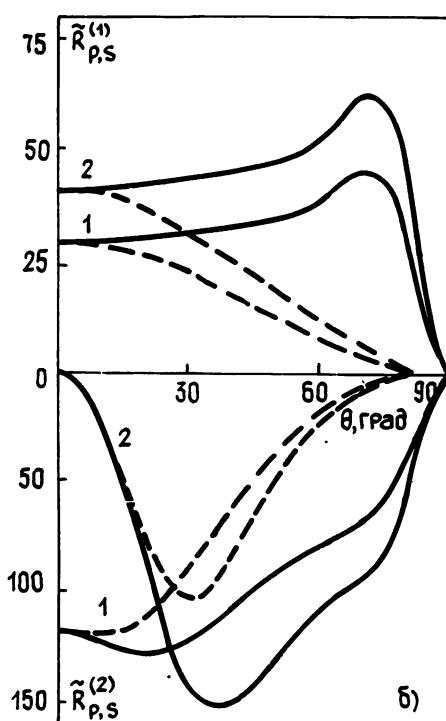
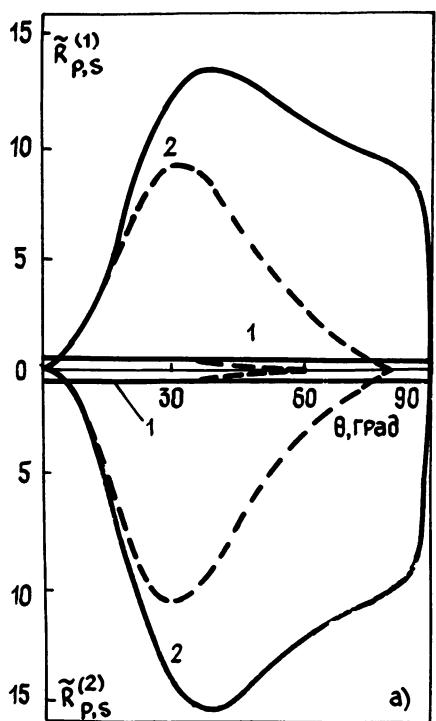


Рис. 3.

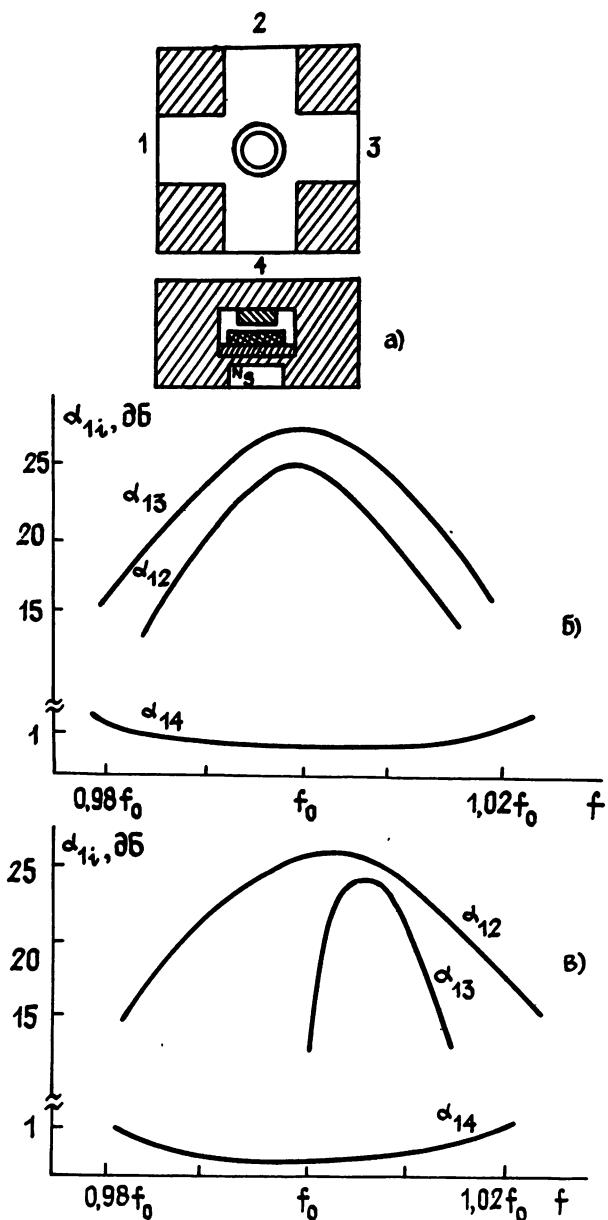


Рис. 1.

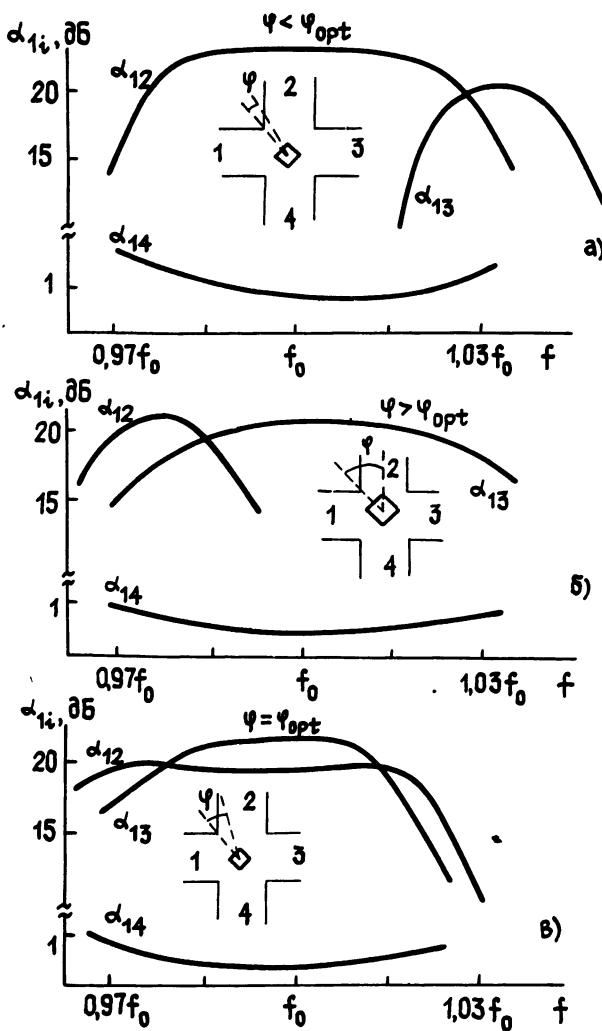


Рис. 2.

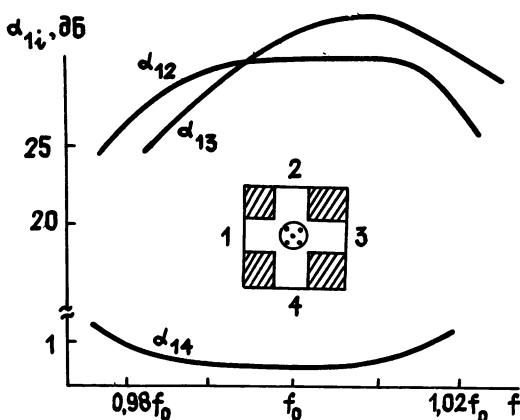


Рис. 3.

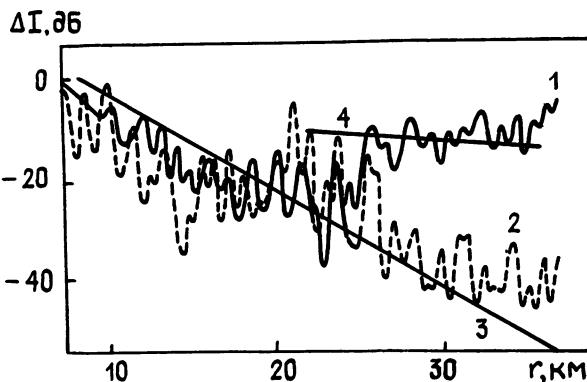


Рис. 1.

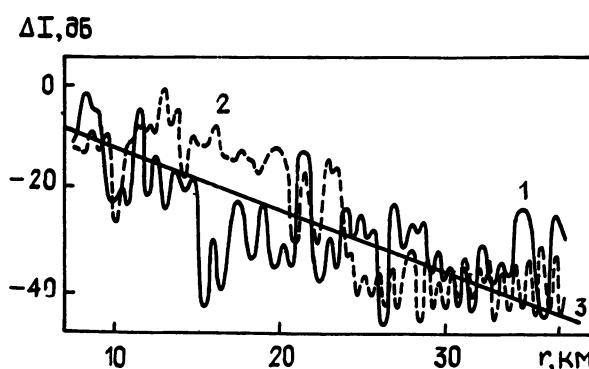


Рис. 2

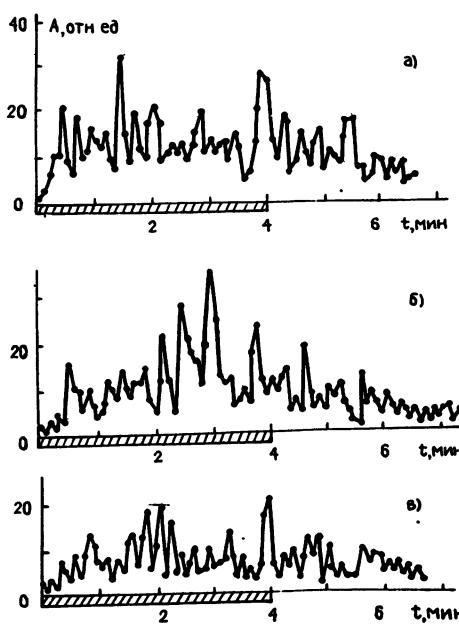


Рис. 1.

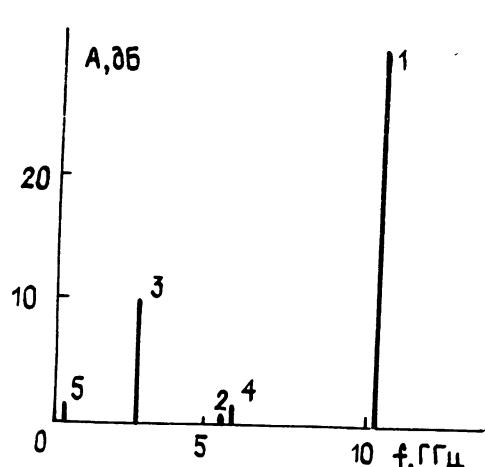


Рис. 1.

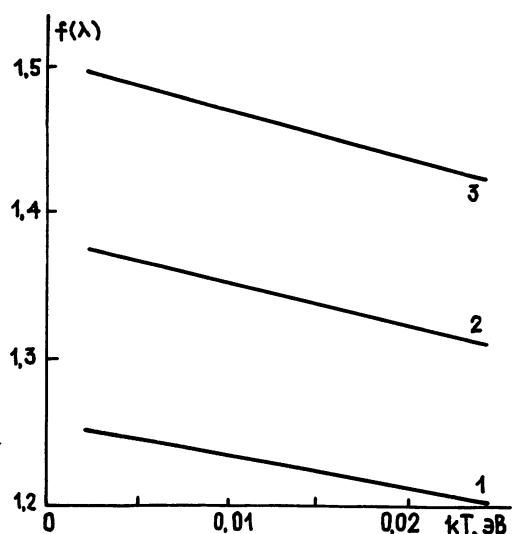


Рис. 1.

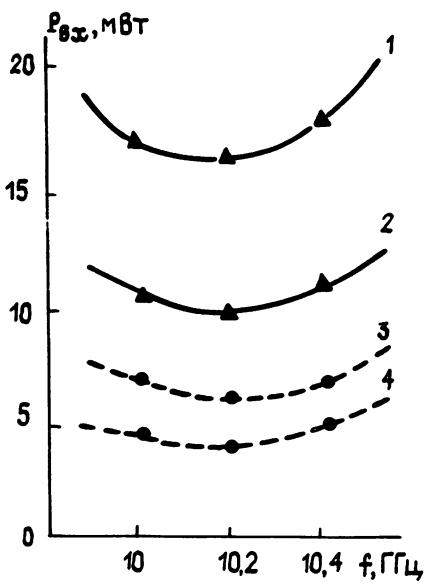


Рис. 2.

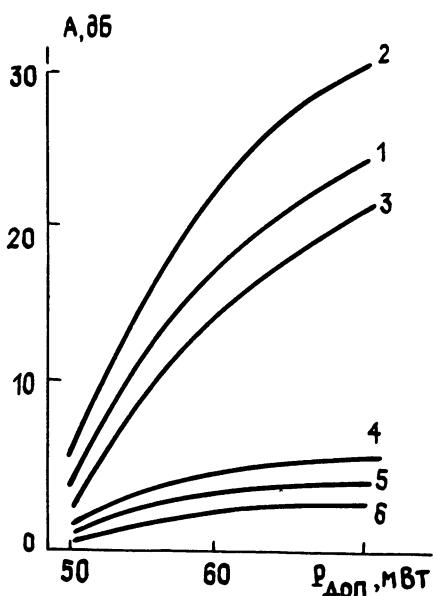


Рис. 3.

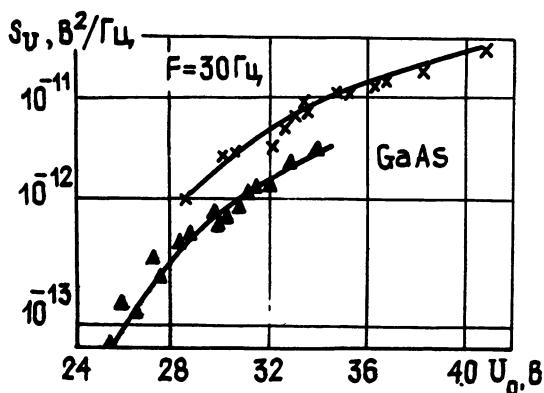


Рис. 1.

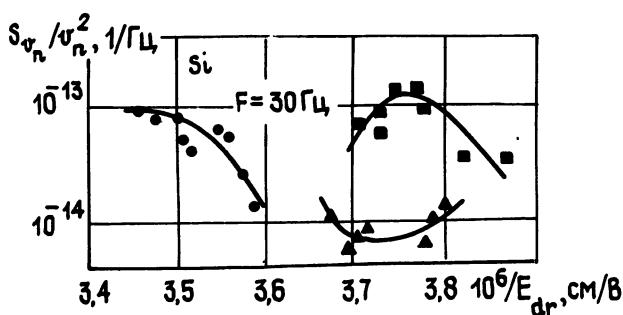


Рис. 2.

К ст. В. Б. Казанского и др.

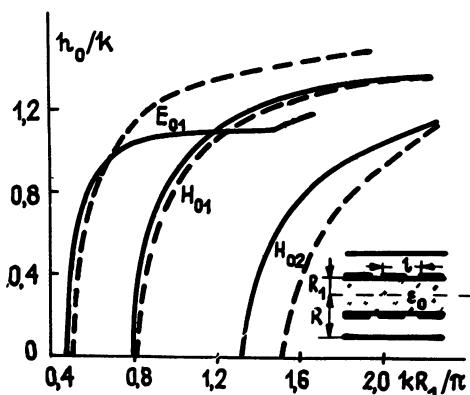


Рис. 1.

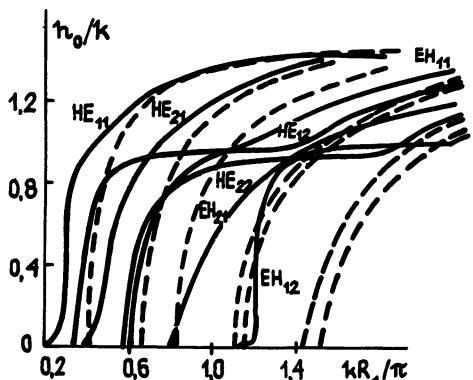


Рис. 2.

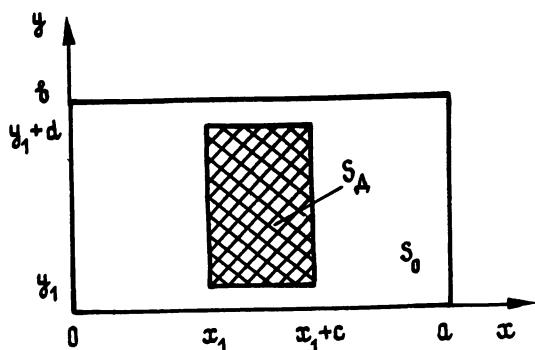


Рис. 1.

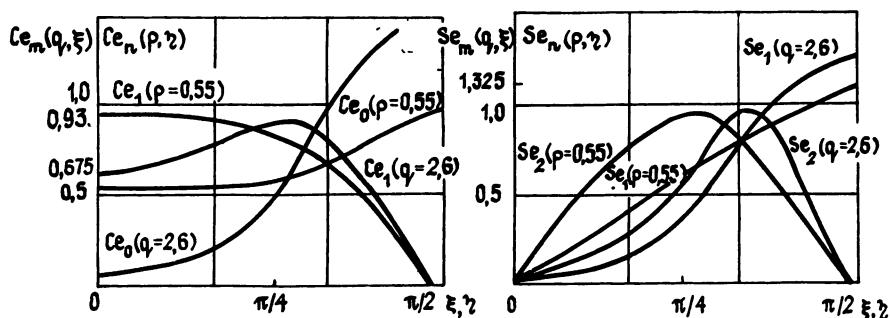


Рис. 2

К ст. С. С. Недорезова:

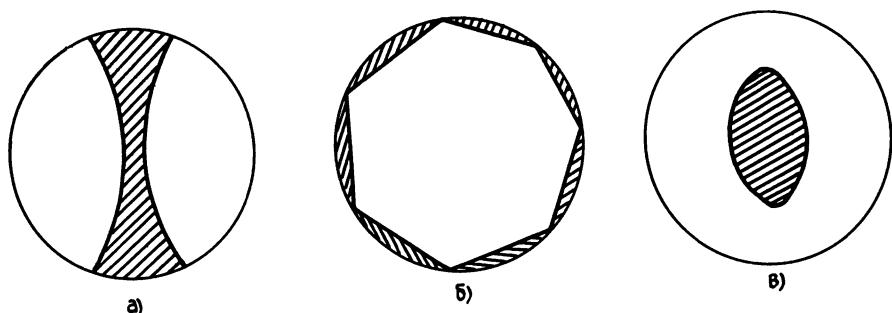


Рис. 1.

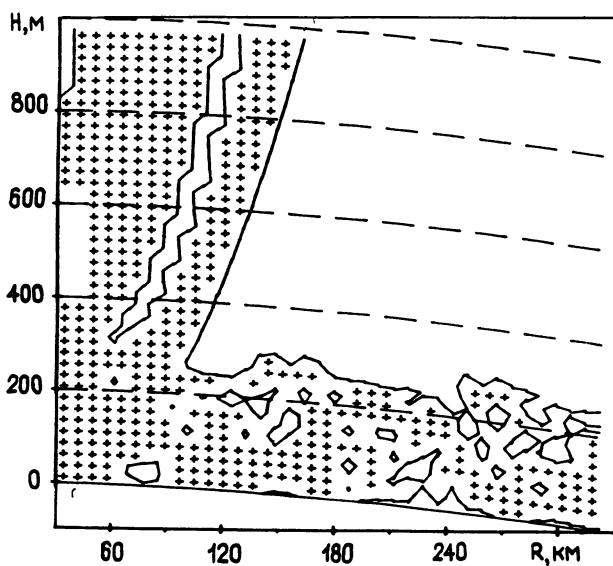


Рис. 1.

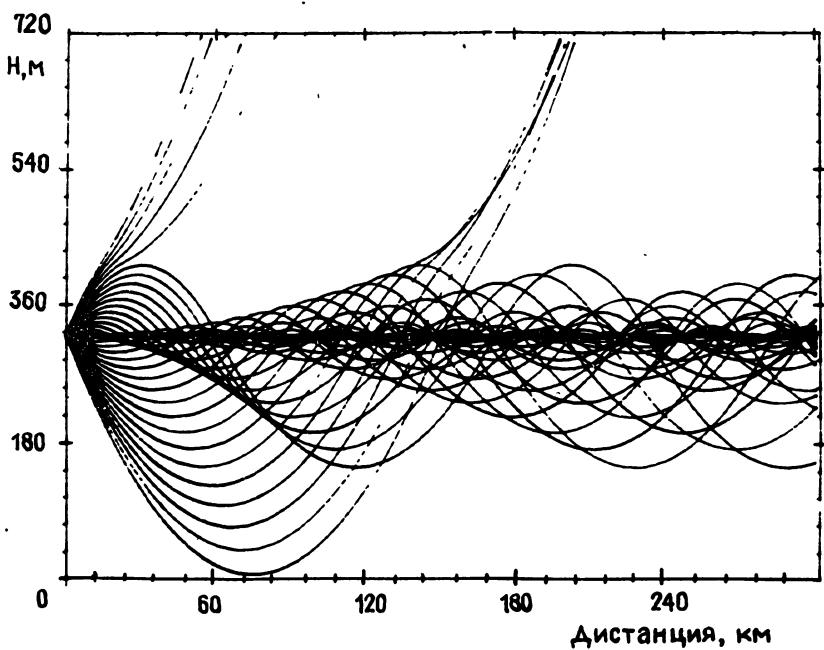


Рис. 2