

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С АПРЕЛЯ 1958 г.

Том 33, № 11

Нижний Новгород

ноябрь 1990

СОДЕРЖАНИЕ

Блиох П. В., Ярошенко В. В. Трансформация гравитационных волн в электромагнитные на границе плазменного потока	1199
Перель М. В. Перевозбуждение мод в анизотропном волноводе Земля—ионосфера на трансэкваториальных трассах при наличии двух близких точек вырождения	1208
Казаков В. А., Африканов С. А. Достижение границ немарковскими дифференцируемыми процессами	1217
Ефимов С. П., Юдин Л. А. Инвариант дисперсии и тензор энергии-импульса в макроскопической электродинамике	1221
Котюсов А. Н. Параметрическая неустойчивость заряженных частиц в переменном электрическом поле	1228
Попов Г. В., Ярошук И. О. Излучение точечного источника в слоистой случайно-неоднородной среде (анализ спектральных компонент поля)	1232
Пыхалов А. А., Сарычев В. Т. Реализация метода максимальной энтропии в спектральном оценивании обращением матрицы исходных данных	1237
Кукушкин А. В. Применение базиса разрывных решений волнового уравнения к описанию дифракции поверхностной волны на обрыве тонкого планарного диэлектрического волновода	1242
Листвин В. Н. Эволюция мощности рассеянного излучения в дихроичном одномодовом волоконном световоде	1257
Кац А. В., Спевак И. С. Резонансная дифракция света на синусоидальной границе хорошо проводящей среды при падении, близком к нормальному	1263
Воронцов М. А., Шишаков К. В., Шмальгаузен В. И. Адаптивные системы фокусировки излучения с локальным контуром оптической обработкой связи	1272
Красильников В. Н., Тюхтин А. В. Излучение заряда, пересекающего систему тонких параллельных проводов	1278
Кравцов И. А., Малышев В. М., Мещеряков А. В. Сравнительный анализ шумовых характеристик генераторов Ганна миллиметрового и сантиметрового диапазонов	1284
Запевалов В. Е., Цимлинг Ш. Е. Многолучевые гиротроны	1288

Краткие сообщения и письма в редакцию

Файнштейн С. М., Яшин Ю. Я., Яшина Н. Ф. О приближении заданного поля при резонансном трехволновом взаимодействии в неоднородной плазме	1295
Деревягина Е. И., Кацельсон Б. Г. О соотношении непрерывной и дискретной составляющих поля поверхностных источников шума в волноводе	1297
Виноградов Д. В., Денисов Г. Г., Петелин М. И., Шер Э. М. О критериях адиабатичности нерегулярных квазиоптических волноведущих структур	1299
Быковский Ю. А., Кульчин Ю. Н., Битрик О. Б. Статистические характеристики когерентного излучения в многомодовых волоконных световодах	1301
Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н. Спектр резонансных частот неоднородного дискового диэлектрического резонатора	1304
Шлапаковский А. С. Нелинейное взаимодействие релятивистского электронного пучка с азимутально-несимметричной замедленной волной	1307
Шипов Н. В. О пороге черенковского излучения в холестерике с большим шагом спирали	1309

Аннотации депонированных статей

Богданов Ф. Г., Кеванишивили Г. Ш., Чихладзе Г. Г. Электродинамическая теория волноводного тройника в E -плоскости	1207
Процко С. В., Титов А. Д. Исследование индикаторис рассеяния угловых отражателей в форме трехгранных углов ($\pi/2, \pi/2, \pi$ — четное)	1262, 1312

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, | В. И. ГАПОНОВ |,
В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРА-
ТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИ-
КОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР,
В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурashкина

Сдано в набор 30.08.90. Подписано к печати 26.03.91.
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.
Усл. печ. л. 10,1. Усл. кр.-отт. 12,12. Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 1260 экз.
Заказ 1670. Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика». Телефон 36-01-71.

Нижегородская областная типография управления издательств, полиграфии
и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 533.951

ТРАНСФОРМАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЕННОГО ПОТОКА

П. В. Блиох, В. В. Ярошенко

В линейном приближении ОТО рассматривается взаимодействие гравитационного излучения с плазменными потоками. Показано, что ГВ, падающая на границу плазменного потока из вакуума, возбуждает три электромагнитные волны — одну отраженную и две прошедшие.

Гравитационные волны (ГВ), распространяясь в плазме, вызывают в ней электрические токи, порождающие, в свою очередь, электромагнитные поля. В настоящей работе обсуждаются специфические эффекты, связанные с наличием границ. Мы покажем, что ГВ, падающая на границу плазменного потока из вакуума, возбуждает три электромагнитные волны. Одна из них — отраженная — распространяется на встречу ГВ в вакууме, а две другие — бегут с разными фазовыми скоростями в глубь потока.

Исследование трансформации ГВ в электромагнитные возмущения в плазменных потоках представляет интерес для изучения возможностей детектирования ГВ как в лабораторных условиях, так и в космической среде, где потоки заряженных частиц могут иметь самые разнообразные масштабы от планетарных до галактических [1].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим плоскую ГВ, падающую из вакуума на плазменный поток. Она порождает электромагнитные волны в среде и в вакууме. Требуется определить все параметры электромагнитного излучения (амплитуду, фазовую скорость, поляризацию), а также изменения скорости и плотности частиц среды. Мы будем пренебречь обратным влиянием возмущений среды на ГВ, т. е. воздействие ГВ на частицы потока рассматривается как заданная сила. Такая постановка задачи предполагает малую передачу энергии ГВ частицам среды и электромагнитному полю, что подтверждается последующими расчетами.

Стремясь предельно упростить задачу, будем рассматривать электромагнитные волны в холодной бесстолкновительной плазме на основе уравнений движения для отдельных частиц и системы уравнений Максвелла. Влияние ГВ учитывается путем замены обычных производных ковариантными с метрикой

$$g^{ik} = g^{ik(0)} + h^{ik}, \quad (1)$$

где h^{ik} — малые поправки, описывающие слабую ГВ на фоне галилеева метрического тензора $g^{ik(0)} = g_{ik}^{(0)}$ ($g_{a0}^{(0)} = 0$, $g_{00}^{(0)} = -1$, $g_{ab}^{(0)} = \delta_{ab}$, латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, греческие — 1, 2, 3 и относятся к пространственным компонентам).

Уравнение движения частицы, имеющей заряд q и массу m , в электромагнитном поле F_{ik} имеет вид [2]

$$mc\left(\frac{du^a}{ds} + \Gamma_{kl}^a u^k u^l\right) = \frac{q}{c} F_k^a u^k. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{F}_k^a = \dot{g}^{am}\tilde{F}_{mk}$, $u^k = \frac{dx^k}{ds} - 4$ — скорость, $\Gamma_{kl}^a = \frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$ — символы Кристоффеля, которые в линейном по h_{ik} приближении с учетом ТТ-калибровки [3] равны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^a &= 0, \quad \Gamma_{0\beta}^a = -\frac{1}{2} (\partial h_{\alpha\beta}/\partial x^0), \\ \Gamma_{\beta\gamma}^a &= -\frac{1}{2} (\partial h_{\alpha\gamma}/\partial x^\beta + \partial h_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma - \partial h_{\gamma\beta}/\partial x^\alpha), \\ x^0 &= ct, \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ограничиваюсь нерелятивистским приближением (отбрасываем члены $\sim v_\alpha^2/c^2$), перепишем уравнение (2) для трехмерной скорости v_α ($u^\alpha \simeq v_\alpha/c$, $u^0 \simeq 1$) и перейдем от тензора электромагнитного поля F_{ik} к векторам E и H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{q}{m} \left(E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{v}H]_\alpha \right) &= \\ = v_\beta \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} v_\beta v_\gamma \left(\frac{\partial h_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial h_{\gamma\beta}}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{q}{m} h_{\alpha\beta} \left(E_\beta + \frac{1}{c} [\mathbf{v}H]_\beta \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Нас интересуют только те изменения скорости и электромагнитные поля, которые связаны с ГВ. Поэтому составляющие возмущающей силы в правой части (4) должны рассматриваться как величины второго и третьего порядка малости по $h_{\alpha\beta}$. Однако если возмущения происходят на фоне каких-то исходных значений V_0 , E_0 или H_0 , то правую часть (4) можно линеаризовать по $h_{\alpha\beta}$. В данной работе мы не будем учитывать фоновых значений E_0 и H_0 , но невозмущенные скорости отдельных частиц V_{0s} (индекс s обозначает сорт частиц, имеющих массу m_s и заряд q_s) предполагаются отличными от нуля. Заметим, что учет собственного магнитного поля приводит к появлению в уравнении движения дополнительной силы Лоренца $\sim v_0^2/c^2$, т. е. к релятивистским поправкам, которыми мы пренебрегаем. Таким образом, приходим к следующим линеаризованным уравнениям движения:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + (V_{0s}\nabla)v_s - \frac{q_s}{m_s} \left(E + \frac{1}{c} [V_{0s}H] \right) = A_s, \quad (5)$$

где вектор возмущающего ускорения имеет следующие составляющие:

$$A_{s\alpha} = V_{0s\beta} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} V_{0s\beta} V_{0s\gamma} \left(\frac{\partial h_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial h_{\gamma\beta}}{\partial x_\alpha} \right). \quad (6)$$

Уравнение движения (4) в постоянном магнитном поле H_0 рассматривалось в [4], где исследовалось влияние ГВ на излучение электромагнитных волн одной частицей. В отличие от [4] мы рассматриваем коллективные процессы в плазменном потоке, что требует добавления к (5) уравнений Максвелла для самосогласованных полей E и H . Уравнения поля, вообще говоря, также зависят от $h_{\alpha\beta}$, но в линейном приближении при отсутствии фоновых значений E_0 и H_0 * их следует записать с невозмущенной метрикой $g_{ik}^{(0)}$, т. е. в обычном трехмерном виде:

* Преобразование ГВ в электромагнитное излучение в постоянном магнитном поле токов здесь не учитывается.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (7)$$

где $\mathbf{J} = \sum_s q_s (n_{0s} \mathbf{v}_s + n_s V_{0s})$, n_{0s} — исходная плотность частиц, n_s , \mathbf{v}_s — возмущения плотности и скорости. Кроме того, необходимо учесть уравнения непрерывности для частиц каждого сорта:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{0s} \mathbf{v}_s + n_s V_{0s}) = 0. \quad (8)$$

Система уравнений (5) — (8) описывает в линейном по $h_{\alpha\beta}$ приближении возмущения, вызываемые ГВ в плазменном потоке.

2. НЕОГРАНИЧЕННАЯ СРЕДА. ВОЛНОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ.

Рассмотрим плоскую ГВ, распространяющуюся вдоль оси z . Ее поляризация определяется двумя величинами h_{\oplus} и h_{\times} , через которые выражаются отличные от нуля компоненты $h_{\alpha\beta}$:

$$h_{\oplus} = h_{xx} = -h_{yy}, \quad h_{\times} = h_{xy} = h_{yx}.$$

Зависимость h_{\oplus} и h_{\times} от координат и времени описывается множителем $\exp[i(kz - \omega t)]$, $k = \omega/c$. Нетрудно показать, что если невозмущенные скорости V_{0s} ориентированы вдоль оси z , то возмущения со стороны ГВ исчезают ($A_{sz} = 0$). Максимальный эффект наблюдается при $V_{0s} \perp 0z$. Поэтому далее рассматривается именно такая ориентация скоростей V_{0s} , причем для определенности будем считать, что V_{0s} направлены вдоль оси x . Тогда

$$\begin{aligned} A_{sx} &= -i\omega V_{0s} h_{\oplus} e^{ikz}, \quad A_{sy} = -i\omega V_{0s} h_{\times} e^{ikz}, \\ A_{sz} &= -\frac{i\omega V_{0s}}{2} \left(\frac{V_{0s}}{c} \right) h_{\oplus} e^{ikz}. \end{aligned} \quad (9)$$

Мы специально выделили множитель V_{0s}/c в A_{sz} , чтобы подчеркнуть малость продольной возмущающей силы. В последующих расчетах линейные по V_{0s}/c члены удерживаются только в тех случаях, когда отсутствуют члены нулевого порядка. Квадратичные слагаемые V_{0s}^2/c^2 нигде не учитываются.

Определив скорость \mathbf{v}_s из уравнений движения и плотность $n_s = -in_{0s}\omega^{-1}\partial v_{sz}/\partial z$ из уравнений непрерывности, находим ток \mathbf{J} . Исключив \mathbf{H} из уравнений Максвелла, получим систему дифференциальных уравнений для \mathbf{E} с заданным током в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_x + \frac{i}{\omega c^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \sum_s \omega_{ps}^2 V_{0s} &= -\frac{4\pi i \omega}{c^3} J_0 h_{\oplus} e^{ikz}, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_y &= -\frac{4\pi i \omega}{c^2} J_0 h_{\times} e^{ikz}, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_z + \frac{i}{\omega c^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \sum_s \omega_{ps}^2 V_{0s} &= -\frac{2\pi i \omega}{c^3} h_{\oplus} \sum_s q_s n_{0s} V_{0s}^2 e^{ikz}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\epsilon = 1 - \Omega_p^2/\omega^2$, $\Omega_p^2 = \sum_s \omega_{ps}^2$, $\omega_{ps}^2 = 4\pi q_s^2 n_{0s} / m_s$, $J_0 = \sum_s q_s n_{0s} V_{0s}$. При выводе (10) учитывалось, что условия $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, $\partial/\partial t = -i\omega$ относятся не только к ГВ, но и к электромагнитному полю. Поскольку мы рассматриваем пока безграничную среду, нам необходимо определить только вынужденное решение системы неоднородных уравнений

(10). Очевидно, что зависимость E_x от z в нем характеризуется тем же множителем $\exp(ikz)$, что и в ГВ, т. е. надо положить $\partial/\partial z = ik$ и решить систему получившихся неоднородных алгебраических уравнений. Таким образом находим

$$\begin{aligned} E_x &= -H_y = i \frac{4\pi J_0}{\omega(1-\varepsilon)} h_{\oplus} e^{ikz}, \\ E_y &= -H_x = i \frac{4\pi J_0}{\omega(1-\varepsilon)} h_{\oplus} e^{ikz}, \\ E_z &= \frac{4\pi i}{\omega c} h_{\oplus} \sum_{(s)} V_{0s} \left(\frac{J_0 \omega_{ps}^2}{\Omega_p^2} - \frac{q_s n_{0s} V_{0s}}{2} \right) e^{ikz}, \quad H_z = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты скорости V_{s_x} и возмущения плотностей потоков n_s легко определяются из уравнений движения и непрерывности с использованием (11). Мы их выписывать не будем, а перейдем к анализу полученных формул.

В зависимости от поляризации ГВ в потоке могут возбуждаться два типа электромагнитных волн. Если $h_{\oplus} = 0$, возникает чисто поперечная волна с $E_y, H_x \neq 0$, а при $h_{\oplus} = 0$ — продольно-поперечная волна с $E_x, E_z, H_y \neq 0$. В любом случае поперечные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} возбуждаются более эффективно, чем продольные, так как в амплитуде E_z имеется дополнительный множитель $\sim V_0/c$. Продольная составляющая H_z вообще не возбуждается. Порождаемые ГВ электромагнитные поля пропорциональны полному электрическому току J_0 , и при токовой компенсации поперечные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} исчезают. Что же касается E_z , то, вообще говоря, можно представить себе ситуацию, когда $J_0 = 0$, но $E_z \neq 0$. Например, два встречных потока одинаковой плотности $n_{0s} = n_0$ и заряда $q_s = q$ при $V_{01} = -V_{02} = V_0$ не создают тока, но $\sum_{(s)} q_s n_{0s} V_{0s}^2 = 2q n_0 V_0^2 \neq 0$, и, согласно (11), $E_z \neq 0$. Далее обратим внимание на знаменатели ε и $(1-\varepsilon)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ амплитуда E_z бесконечно возрастает благодаря резонансному возбуждению продольных плазменных колебаний. На этот резонанс с ГВ указывалось ранее в работе [5]. Конечное значение амплитуды E_z можно получить, если учесть затухание плазменных колебаний.

Значительно интереснее особенность, возникающая при $\varepsilon = 1$ в формулах для поперечных составляющих. Здесь резонанс возникает благодаря совпадению фазовых скоростей ГВ ($V_{\phi} = c$) и поперечной волны в плазме ($V_{\phi} = c\sqrt{\varepsilon}$). С другой стороны, $\varepsilon = 1$ соответствует либо вакууму ($n_{0s} = 0$), либо нейтральной среде ($q_s = 0$). И в том, и в другом случаях электромагнитные волны, вообще говоря, не должны возбуждаться. Для того, чтобы разобраться в этом противоречии, рассмотрим для простоты один сорт частиц и проанализируем зависимость амплитуд E_x, E_y от n_{0s} и q_s :

$$E_{x,y} \sim \frac{4\pi J_0}{\omega(1-\varepsilon)} = \frac{\omega V_0 m}{q}. \quad (12)$$

Результат получился довольно неожиданным — зависимость от n_0 вообще выпала, а при $q \rightarrow 0$ амплитуда поля не только не исчезает, но, наоборот, бесконечно возрастает! Формально это можно объяснить тем, что при $q \rightarrow 0$ одновременно убывает вынуждающая сила, пропорциональная $\sim J_0 \sim q$, и уменьшается расстройка от резонанса $\sim (1-\varepsilon) \sim q^2$. Поскольку расстройка убывает быстрее, амплитуда вынужденных колебаний в резонансе стремится к бесконечности. Заметим, что введение затухания электромагнитных волн в плазме не меняет результата, так как все равно при $q \rightarrow 0$ $\varepsilon \rightarrow 1$.

Мы покажем, что все отмеченные «парадоксы» связаны с рассмотрением

рением плоской ГВ, которая заполняет все пространство и существует бесконечно долго. Поскольку трансформация волн происходит в каждой точке пространства, на бесконечной трассе могут возникать фиктивные расходимости, которые исчезают на конечных расстояниях и ограниченных промежутках времени. Для того, чтобы исследовать динамику резонансного возбуждения электромагнитных волн, необходимо «включить» взаимодействие ГВ со средой в каком-нибудь месте и проследить за возникающими при этом возмущениями. Таким образом, мы приходим к граничной задаче*.

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ПОТОКА

Рассмотрим полуограниченный плазменный поток, занимающий полупространство $z > 0$. Плоская ГВ падает на границу со стороны отрицательных z . Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, к вынужденному решению (11) необходимо добавить ту часть общего решения однородной системы уравнений (10), которая описывает отходящие от границы электромагнитные волны.

В системе (10) уравнение для E_y отщепляется, и интересующее нас полное решение имеет вид

$$\begin{aligned} E_y &= H_x = E_y^{(-)} e^{-ikz}, \quad z < 0, \\ E_y &= E_y^{(*)} e^{ikz} + E_y^{(+)} e^{ik\sqrt{\epsilon} z}, \quad z > 0, \\ H_x &= -E_y^{(*)} e^{ikz} - V \epsilon E_y^{(+)} e^{ik\sqrt{\epsilon} z}, \quad z > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Индексом (*) обозначена амплитуда вынужденного решения (11), а индексами (+) и (-) — амплитуда волн, бегущих соответственно в сторону положительных и отрицательных z .

Решения (10) для компонент продольно-поперечной волны E_x и E_z аналогичны (13) с соответствующим переобозначением амплитуд.

Электродинамические граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе потока и отсутствии E_z в вакууме. Условие отсутствия продольной составляющей поля в вакууме автоматически выполняется, так как полный заряд плазменного полупространства не меняется в процессе распространения в нем ГВ.

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} для поляризации E_x, H_y имеем

$$E_x^{(-)} = E_x^{(*)} + E_x^{(+)}, \quad E_x^{(-)} = -E_x^{(*)} - V \epsilon E_x^{(+)}. \tag{14}$$

Отсюда, подставив $E_x^{(*)}$ из (11) получаем следующие формулы для отраженной $E^{(\text{отр})}$ и прошедшей $E^{(\text{прош})}$ волн:

$$\begin{aligned} E_x^{(\text{отр})} &= H_y^{(\text{отр})} = -\frac{4\pi i J_0}{\omega(1-\epsilon)} \frac{(1-V\epsilon)}{(1+V\epsilon)} h_{\oplus} e^{-ikz}, \quad z < 0, \\ E_x^{(\text{прош})} &= \frac{4\pi i J_0}{\omega(1-\epsilon)} h_{\oplus} \left(e^{ikz} - \frac{2e^{ik\sqrt{\epsilon} z}}{(1+V\epsilon)} \right), \quad z > 0, \\ H_y^{(\text{прош})} &= \frac{4\pi i J_0}{\omega(1-\epsilon)} h_{\oplus} \left(e^{ikz} - \frac{2V\epsilon e^{ik\sqrt{\epsilon} z}}{(1+V\epsilon)} \right), \quad z > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

* Можно рассматривать и начальную задачу, когда плоская ГВ возникает во всем пространстве в какой-то момент времени, но такая постановка представляется слишком искусственной.

Формулы для E_y и H_x отличаются от (15) только заменой k_\oplus на k_\times .
Полученный результат показывает, что ГВ возбуждает на границе плазменного потока три электромагнитные волны: одну отраженную и две прошедшие. Амплитуда отраженной волны $E^{(\text{отр})} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ равна

$$E^{(\text{отр})} = \frac{4\pi J_0}{\omega(1+\sqrt{\epsilon})^2} h \quad (h = \sqrt{h_\times^2 + h_\oplus^2}). \quad (16)$$

Видно, что никаких особенностей при $\epsilon \rightarrow 1$ не возникает, и $E^{(\text{отр})} \rightarrow 0$, когда $q_s \rightarrow 0$ или $n_{0s} \rightarrow 0$, как и должно быть. С ростом ω амплитуда отраженной волны убывает, а масса частиц m_s входит только в выражение для ϵ , так как ускорение, действующее на частицы со стороны ГВ, от m_s не зависит.

Две прошедшие волны отличаются фазовыми скоростями, хотя и имеют одинаковую поляризацию. Одна из них распространяется со скоростью c (она порождается ГВ в каждой точке пространства), а вторая имеет фазовую скорость $c/\sqrt{\epsilon}$ и возникает на границе. Если $\omega < \Omega_p$, $\sqrt{\epsilon}$ становится мнимой величиной и вторая волна не распространяется (отраженная волна при этом все равно существует). Учет затухания в плазме приведет к ослаблению лишь второй волны. Та волна, которая бежит вместе с ГВ, остается незатухающей*. Интерференция двух прошедших волн приводит к периодическим изменениям результирующей амплитуды поля (при $\omega > \Omega_p$):

$$E^{(\text{прош})} = \frac{4\pi J_0 h}{\omega(1-\epsilon)} \sqrt{1 + \frac{4}{(1+\sqrt{\epsilon})^2} - \frac{4}{(1+\sqrt{\epsilon})} \cos[kz(1-\sqrt{\epsilon})]}. \quad (17)$$

На границе амплитуда $E^{(\text{прош})}$ минимальна и равна $E^{(\text{отр})}$. Далее с ростом z амплитуда растет, достигая максимума, равного $4\pi J_0(3+\sqrt{\epsilon})h \times [\omega(1-\epsilon)(1+\sqrt{\epsilon})]^{-1}$ на расстоянии $z = [k(1-\sqrt{\epsilon})]^{-1}$. При $\epsilon \rightarrow 1$ максимум поля отодвигается на бесконечность и никаких расходимостей на конечных расстояниях не возникает. Вблизи границы, в области $z \ll [k(1-\sqrt{\epsilon})]^{-1}$ (при $\epsilon \sim 1$ эта область становится очень большой) поле нарастает по квадратичному закону:

$$E^{(\text{прош})} \simeq \frac{4\pi J_0 h}{\omega(1+\sqrt{\epsilon})^2} (1 + 2k^2 z^2).$$

Когда $J_0 \rightarrow 0$, прошедшая волна также исчезает, как и отраженная.

Определим энергетический коэффициент трансформации ГВ в электромагнитную на границе $z=0$. Плотность потока энергии в ГВ равна [2]

$$S_{\text{ГВ}} = \frac{\omega^2 c^3}{16\pi G} h^2$$

(G — гравитационная постоянная). Для электромагнитной волны

$$S_{\text{ЭМ}} = \frac{c}{4\pi} [EH] \Big|_{z=0} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{4\pi J_0}{\omega(1+\sqrt{\epsilon})^2} \right)^2 h^2.$$

Отсюда находим коэффициент трансформации

$$p = \frac{S_{\text{ЭМ}}}{S_{\text{ГВ}}} = \frac{64\pi^2 G J_0^2}{\omega^4 c^2 (1+\sqrt{\epsilon})^4}. \quad (18)$$

* Если учесть затухание ГВ [6], то сопутствующая ей электромагнитная волна тоже, разумеется, затухнет.

Не представляет труда обобщить полученные результаты на косое падение ГВ и поток конечной толщины. При косом падении угол отражения равен углу падения, а углы преломления для двух составляющих электромагнитного поля будут разными. Та волна, которая распространяется в плазме вместе с ГВ со скоростью c , вообще не преломляется, а волна, бегущая со скоростью $c\sqrt{\epsilon}$, преломляется по закону Снеллиуса, т. е. направления их распространения расходятся на некоторый угол. Если ГВ представляет собой квазимонохроматический импульс длительностью $\tau \gg \omega^{-1}$, то две составляющие прошедшей волны разойдутся не только по направлениям, но и по времени прихода. Импульс, сопутствующий ГВ, распространяется с групповой скоростью $V_{gr} = c$, а тот, который возникает на границе, с $V_{gr} = c\sqrt{\epsilon}$. Если плазменный поток имеет конечную толщину $l > c\tau\sqrt{\epsilon}/(1-\sqrt{\epsilon})$, то на выходе из слоя возникнут два импульса электромагнитного излучения, причем амплитуда запаздывающего импульса несколько больше (в $2/(1+\sqrt{\epsilon})$ раз).

Вообще говоря, прохождение ГВ сквозь слой конечной толщины требует особого рассмотрения, хотя результат его достаточно очевиден — за счет отражения электромагнитных волн от второй границы внутри слоя возникает интерференционная структура. Мы ограничимся здесь рассмотрением предельного случая очень тонкого по сравнению с длиной волны слоя, когда интерференция себя еще не проявляет. В этом случае можно считать слой бесконечно тонким и вместо согласования E и H на двух границах учесть только скачок касательной составляющей H при $z=0$. Таким образом, вместо (14) получаем

$$E_x^{(-)} - E_x^{(+)} = 0, \quad H_y^{(-)} - H_y^{(+)} = \frac{4\pi}{c} j_x, \quad (19)$$

где $j_x = \sum_s q_s (\sigma_{0s} V_{sx} + \sigma_s V_{0s})$ — линейная плотность тока, индуцируемого ГВ, а σ_{0s} и σ_s — средняя и возмущенная поверхностные плотности заряда в слое.

Из двухмерного уравнения непрерывности при нормальном падении ГВ следует $\sigma_s = 0$, а из уравнения движения —

$$V_{sx} = \frac{i}{\omega} \frac{q_s}{m_s} E_x + V_{0s} h_\oplus.$$

Рассчитав таким образом j_x и учитывая, что $H_y^{(-)} = E_x^{(-)}$, а $H_y^{(+)} = -E_x^{(+)}$, находим из (19)

$$E_x^{(+)} = E_x^{(-)} = \frac{2\pi j_0 h_\oplus}{c(1 - i\Omega_{p\sigma}^2/\omega^2)}. \quad (20)$$

Здесь $j_0 = \sum_s q_s \sigma_{0s} V_{0s}$ — линейная плотность постоянного тока, $\Omega_{p\sigma} = [\sum_s 2\pi q_s^2 \sigma_{0s} k/m_s]^{1/2}$ — плазменная частота тонкого слоя.

Аналогичные формулы получаются и для $E_y^{(+)} = E_y^{(-)}$ с заменой h_\oplus на h_x . Амплитуды прошедшей и отраженной волн равны друг другу, а коэффициент трансформации энергии ГВ в электромагнитную равен

$$p = \frac{16\pi^3 G j_0^2}{\omega^2 c^4 (1 + \Omega_{p\sigma}^4/\omega^4)}. \quad (21)$$

Оценим коэффициенты трансформации, определяемые формулами (18), (21) для некоторых значений токов, которые могут быть реализованы в лабораторных условиях или существуют в космосе. Поперечные размеры токовой струи в лаборатории можно считать очень малыми по сравнению с длиной волны, и, следовательно, необходимо поль-

ваться формулой (21). Положив $j_0 \sim 10^5 \text{ A} \cdot \text{см}^{-1}$, $\omega \sim 10^2 \text{ с}^{-1}$ и считая, что $1 + \Omega_{pe}^4/\omega^4 \sim 1$, получим $r_{lab} \sim 10^{-33}$. Напряженность возбуждающего электромагнитного поля оценим по формуле (20). Пусть амплитуда ГВ $h_F \sim 10^{-18}$, что соответствует современным литеатурным данным [7]. Полагая, как и выше, $j_0 \sim 10^5 \text{ A} \cdot \text{см}^{-1}$, $1 - i\Omega_{pe}^2/\omega^2 \sim 1$, находим $E_{lab} \sim 10^{-11} \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$. В качестве примера космической токовой струи рассмотрим ток между спутником Юпитера Ио и самой планетой [8]. Если считать полный ток в трубке Ио равным 10^7 A , а в качестве характерного поперечного размера взять 100 км (область вблизи поверхности планеты), то $J_0 \sim 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{см}^{-2}$. Соответствующий коэффициент преобразования, рассчитанный по (18) при $\omega \sim 10^2 \text{ с}^{-1}$ и $\epsilon \sim 1$, равен $r_{cosm} \sim 10^{-29}$.

Коэффициенты трансформации ГВ в электромагнитную при разумных предположениях о токах оказываются очень низкими. Измерения же полей $E \sim 10^{-11} \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ даже в лабораторных условиях представляют задачу, по-видимому, не менее трудную, чем регистрация ГВ традиционными детекторами. С другой стороны, если рассмотренные здесь процессы преобразования происходят в космосе где-то в окрестности источника возбуждения ГВ, то существующие там токи могут намного превышать те значения, которые мы здесь выбрали. Тогда на Земле будет наблюдаться наряду с гравитационно-волновым и электромагнитное излучение. Возможно, что рассмотренная здесь специфика плазменного преобразования (удвоение электромагнитных импульсов и вполне определенная связь между поляризацией ГВ и радиоволн) поможет повысить надежность регистрации ГВ другими детекторами. Имеется также астрофизическая значимость детектирования совпадающих всплесков гравитационного и электромагнитного излучений [9].

В связи с малостью приведенных выше значений r возникает вопрос — нельзя ли каким-то образом повысить эффективность трансформации ГВ в электромагнитное излучение, выбрав более сложную конфигурацию плазменного потока? Вопрос этот закономерен хотя бы потому, что можно ожидать очень больших коэффициентов преобразования в плазменном полупространстве, поскольку объем плазмы в нем бесконечно велик, а линейная плотность тока, отнесенная к границе, также бесконечна. Почему этого не происходит можно понять, если сравнить формулы (18) и (21). Их основное отличие заключается в том, что величина $J_0/\omega^2 c$ в (18) заменяется на j_0/ω^2 в (21). Приравняв друг другу эти величины, получим $j_0 = J_0 k^{-1}$, т. е. эффективная трансформация ГВ в электромагнитное излучение происходит в слое толщиной k^{-1} , а основной объем плазмы как бы экранируется. Совершенно иная ситуация возникает, если разбить поток на N слоев толщиной много меньше длины волны. Если расстояние между слоями выбрать равным $\lambda/2$, то отраженные от них волны окажутся синфазными, и суммарная энергия волны, отраженной от слоистого потока, возрастает в N^2 раз. Этот пример указывает на возможность резонансной трансформации волн в пространственно-модулированном потоке. Резонансное взаимодействие возникает при модуляции потока вдоль оси z с разностным волновым числом $K = (\omega/c)(1 - \gamma_e)$. Существует еще одна возможность резонансного возбуждения: при $\omega \rightarrow \Omega_p$ амплитуда продольной составляющей поля E_z сильно возрастает (см. (11)). Однако может показаться, что этот резонанс возможен только для очень высокочастотных ГВ, причем понижение Ω_p косвенно влечет за собой и понижение J_0 , что снижает эффективность преобразования. В этой связи следует отметить, что существует принципиальная возможность снижения Ω_p до любой величины без уменьшения тока J_0 . Для этого достаточно ввести в состав плазмы наряду с электронами и ионами заряженные макрочастицы (пылинки), которые могут иметь очень малые исходные скорости, т. е. не будут влиять на J_0 . С другой стороны, учет их гравитационного взаимодействия друг с другом (самогравитации) приводит к следующему значению резонансной частоты для продоль-

ных колебаний в однокомпонентной плазме [10]: $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_p^2 - \omega_0^2}$, где $\omega_0 = (4\pi G n_0 m)^{1/2}$ — джинсовская частота макрочастиц. Продольная составляющая диэлектрической проницаемости стремится к нулю при $\omega \rightarrow \omega_{рез} < \omega_p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альвен Х. Космическая плазма. — М.: Мир, 1983. — 216 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973. — 504 с.
3. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 3 — М.: Мир, 1977. — 510 с.
4. Esposito F. P., Papadopoulos D. // Astrophys. J. 1981. V. 248. № 1. P. 783.
5. Игнатьев Ю. Г. // Изв. вузов. Физика. 1985. Вып. 1. С. 74.
6. Полнарев А. Г. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. Вып. 5. С. 1598.
7. Грищук Л. П. // УФН. 1988. Т. 156. Вып. 2. С. 297.
8. Смит Р. А. Модели декаметрового излучения Юпитера. В кн.: Юпитер. — М.: Мир, 1978. Т. 1. С. 433.
9. Альмади Э., Пиццелла Г. В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. — М.: Мир, 1982. С. 241.
10. Блиох П. В., Ярошенко В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 7. С. 778.

Радиоастрономический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
5 июня 1989 г.

THE TRANSFORMATION OF GRAVITY WAVES INTO ELECTROMAGNETIC ONES AT THE BOUNDARY OF A PLASMA FLOW

P. V. Bliokh, V. V. Yaroshenko

The interaction between an incident gravity wave and plasma flows is analysed in the linearized approximation of the general relativistic theory. It has been found that the gravity wave incident upon the boundary of the plasma flow from a vacuum can excite three electromagnetic waves one of which is the reflected wave and two others are the transmitted ones

Аннотации депонированных статей

УДК 621.372.8.001.24

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВОДНОГО ТРОЙНИКА В Е-ПЛОСКОСТИ

Ф. Г. Богданов, Г. Ш. Кеванишвили, Г. Г. Чихладзе

Предложена строгая электродинамическая теория волноводного тройника в Е-плоскости без ограничений на геометрию тройника и частоту падающей волны. В длинноволновой области получены аналитические выражения для дифракционных характеристик. Проведено исследование дифракционных зависимостей тройника в широкой частотной области.

Статья депонирована в ВИННИТИ.
рег. № 858-В91. Деп. от 21 февраля 1991 г.

УДК 621.372.8

**ПЕРЕВОЗБУЖДЕНИЕ МОД В АНИЗОТРОПНОМ
ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ — ИОНОСФЕРА
НА ТРАНСЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ТРАССАХ
ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ БЛИЗКИХ ТОЧЕК ВЫРОЖДЕНИЯ**

M. B. Перель

Построена схема последовательных приближений для описания трансформации мод в плоском анизотропном волноводе с медленно изменяющимися в заданном направлении параметрами. Явный вид матрицы трансформации получен для случая двух локальных точек двукратного вырождения, расположенных в комплексной плоскости симметрично относительно некоторой точки на трассе.

Вопросам трансформации мод при наличии точки вырождения собственных чисел посвящены обширные исследования [1–11]. На возможность вырождения собственных чисел в диапазоне СДВ при определенных параметрах Земли и изотропной ионосферы в рамках модели импедансного волновода было указано в работах Макарова, Новикова [1]; Ременцом [2] были исследованы условия возникновения ТМ-ТЕ-вырождения в вакуумном волноводе с анизотропным импедансом верхней стенки. Теоретически изучение трансформации мод на трассе, содержащей одну локальную точку вырождения, проведено в работах Баддена [3], Молоткова, Старкова [4], Бичуцкой, Новикова [5, 6]. Авдеев [7] исследовал трансформацию мод на трассе, содержащей локальную точку двукратного вырождения в несколько более широком классе нерегулярных волноводов. В работе Герасимова [8] проведено обобщение результатов для одной точки вырождения на случай сферического волновода. Орлов, Иванов численными расчетами [9] показали, что в диапазоне СДВ вблизи экватора при определенных азимутах распространения волн возможно ТМ-ТЕ- и ТМ-ТМ-вырождение. При этом использовалась анизотропная модель ионосферы. Из-за четности собственных чисел как функций широты точки вырождения располагаются парами симметрично относительно экватора. Численные расчеты [11] свидетельствуют о том, что перевозбуждение мод не происходит независимым образом на каждой из точек такой пары.

В настоящей работе рассмотрена трансформация мод на участке трассы, когда вблизи участка расположены две точки вырождения. Существенным обстоятельством является особенность собственных функций вблизи точек вырождения, отмеченная в работах [3–7]. Характер этой особенности для рассматриваемой здесь задачи обсуждается в Приложении 1. Учет этой особенности приводит к тому, что матрица перехода, описывающая перевозбуждение мод, не полностью определяется видом зависимости собственных значений в окрестности точки перехода. Для ее получения следует учитывать не только линейные, но и квадратичные члены разложения диэлектрической проницаемости по расстоянию на трассе до экватора.

Построение схемы последовательных приближений аналогично примененному в работе [11].

1. Электромагнитное поле задаем вектором-столбцом Φ с компонентами $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$. Свойства среды, заполняющей волновод

(анизотропной ионосферы), меняются в зависимости от высоты z и — более плавно — от продольной координаты x . Предполагаем, что от y свойства среды не зависят, поэтому $\Phi = \Psi \exp(i k_y y)$. Уравнения Максвелла можно написать в виде (см., например, [12, 13])

$$K\Psi = -i(\partial/\partial x)\Gamma\Psi, \quad (1)$$

где K — «поперечный» оператор, содержащий производные по z , зависящий от z и, кроме того, медленно меняющийся в зависимости от x как от параметра, Γ — числовая матрица. Явный вид оператора K и матрицы Γ приведен в Приложении 1. Предполагается, что на высотах $z=0$ и $z=H$ заданы импедансные граничные условия, причем значения элементов матрицы импеданса не зависят от x . Наряду с полями E и H введем обычным образом [12, 13] решение сопряженной задачи E^+ , H^+ и скалярное произведение

$$(\Psi^+, \Psi) = \int_0^H dz \sum_{j=1}^3 (E_j^{+*} E_j + H_j^{+*} H_j),$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

2. При отсутствии вырождения задача решается методом плавных возмущений. Вводится «медленная» координата ξ , $\xi = \varepsilon x$ ($\varepsilon \ll 1$), и решение уравнения (1) находится в виде

$$\Psi = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi \beta(\xi)\right) \sum_{l \geq 0} \varepsilon^l \Psi^{(l)}(z, \xi). \quad (2)$$

Уравнения нулевого приближения по ε показывают, что β является одним из собственных значений оператора K , а $\Psi^{(0)}$ — соответствующей ему собственной функцией ($\beta = \beta_n$, $\Psi^{(0)} = \psi_n$, $K\psi_n = \beta_n \Gamma \psi_n$). Функции ψ_n здесь и в дальнейшем будем считать ортонормированными,

$$(\psi_n^+ \Gamma \psi_m) = \delta_{nm}, \quad (3)$$

и удовлетворяющими условию отсутствия секулярностей в уравнении первого приближения

$$S_{nn} = i(\psi_n^+ \Gamma (\partial \psi_n / \partial \xi)) = 0. \quad (4)$$

Уравнение первого приближения имеет решение в виде

$$\Psi^{(1)} = - \sum_{m \neq n} \frac{S_{mn} \psi_m}{\beta_m - \beta_n}, \quad S_{mn} = i \left(\psi_m^+ \Gamma \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} \right). \quad (5)$$

Видно, что вклад моды m обратно пропорционален разности собственных значений $\beta_m - \beta_n$. Если для всех $m \neq n$ этот вклад мал, то справедливо адиабатическое приближение.

Другими словами, можно пользоваться нулевым приближением метода поперечных сечений, согласно которому поле представляется в виде суперпозиции адиабатических решений:

$$\Psi \approx \sum_s b_s \exp(i \int_{x_1}^x dx \beta_s(x)) \Psi_s(z, \xi), \quad (6)$$

где $\beta_s(x)$ — собственные значения оператора K , а $\Psi_s(z, \xi)$ — соответствующие собственные функции, b_s — коэффициенты возбуждения соответствующих мод.

Может, однако, оказаться (именно этому случаю посвящена настоящая работа), что на трассе два собственных значения β_n и β_j сближаются настолько, что член с $m=j$ в сумме (5) не мал. В этом случае

возникает следующая задача. Далеко слева от точки сближения ξ_0 (более точно эта точка будет определена позднее), под δ_0 представляется выражением (6), в котором коэффициенты b_n^+ и b_j^- имеют значения b_n^- и b_j^+ . Далеко справа справедливо то же выражение, но с другими значениями коэффициентов b_n^+ и b_j^+ . Требуется найти связь между коэффициентами b_n^+ , b_j^+ и b_n^- , b_j^- .

3. Для решения этой задачи сначала поступим так. Оператор K в точке ξ_0 запишем в виде

$$K(\xi_0) = \tilde{K} + \delta_0 V, \quad V = \Gamma(P_n - P_j), \quad \delta_0 = \frac{\beta_n(\xi_0) - \beta_j(\xi_0)}{2}, \quad (7)$$

где P_n , P_j — операторы проектирования, действие которых на произвольную функцию Ψ определяется равенством $P_m \Psi = \Gamma \Psi_m (\Psi_m^+ \Gamma \Psi)$.

Равенство (7) служит определением оператора \tilde{K} , имеющего двукратно вырожденное собственное значение $\bar{\beta}_0 = (\beta_n(\xi_0) + \beta_j(\xi_0))/2$, которому соответствуют две собственные функции $\Psi_n(z, \xi_0)$, $\Psi_j(z, \xi_0)$.

Остальные собственные значения и собственные функции оператора \tilde{K} совпадают с соответствующими величинами для оператора $K(\xi_0)$. Вблизи точки ξ_0 оператор $K(\xi)$ разложим в ряд по степеням $\xi - \xi_0$:

$$K(\xi) = \tilde{K} + \delta_0 V + \left. \frac{\partial K}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\xi_0} (\xi - \xi_0)^2 + \dots \quad (8)$$

Будем искать решение уравнения (1) в окрестности точки ξ_0 на интервале $|\xi - \xi_0|$ масштаба $\sqrt{\varepsilon}$, поэтому положим $\xi - \xi_0 = \sqrt{\varepsilon} \tau$. Вместо (1) получим уравнение

$$K\Psi = -i\sqrt{\varepsilon} (\partial/\partial\tau) \Gamma \Psi. \quad (9)$$

Решение будем искать в виде

$$\Psi = \exp\left(\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{\beta}_0 \tau\right) \sum_{l>0} (\sqrt{\varepsilon})^l \Psi^{(l)}(z, \tau). \quad (10)$$

Подставим это разложение в (9) и приравняем члены при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$, полагая δ_0 порядка $\sqrt{\varepsilon}$, учитывая представления $K(\xi)$ в виде (8) и связь переменных ξ и τ :

$$\tilde{K}\Psi^{(0)} - \bar{\beta}_0 \Gamma \Psi^{(0)} = 0; \quad (11)$$

$$\tilde{K}\Psi^{(1)} - \bar{\beta}_0 \Gamma \Psi^{(1)} = -i\Gamma \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{\delta_0}{\sqrt{\varepsilon}} V \Psi^{(0)} - \left. \frac{\partial K}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} \tau \Psi^{(0)}, \dots \quad (12)$$

Решением уравнения (11) является линейная комбинация Ψ_n и Ψ_j с коэффициентами, зависящими от τ . Запишем это решение в виде $\Psi^{(0)} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$, где

$$\varphi_1 = (\sqrt{2})^{-1} (\Psi_n(z, \xi_0) - i\Psi_j(z, \xi_0)), \quad (13)$$

$$\varphi_2 = (\sqrt{2})^{-1} (\Psi_n(z, \xi_0) + i\Psi_j(z, \xi_0)).$$

Условие разрешимости (12) дает для c_1 и c_2 уравнения, решение которых выражаются через функции параболического цилиндра:

$$c_1 = AD_v(t) + BD_v(-t), \quad c_2 = -i\sqrt{v}(AD_{v-1}(t) - BD_{v-1}(-t)); \quad (14)$$

где A и B — константы, $t = (2Q)^{1/2} \tau \exp(-i\pi/4)$,

$$\nu = i\delta_0^2/2Q\varepsilon. \quad (15)$$

Предполагается, что точка ξ_0 лежит на экваторе и величина Q связана с недиагональными матричными элементами оператора $\partial K/\partial \xi$ в точке $\xi = \xi_0$:

$$iQ = Q_{nj} = -Q_{jn} = \left(\psi_n^+(z, \xi_0) \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \psi_j(z, \xi_0) \right). \quad (16)$$

Как показано в Приложении 1, диагональные элементы $Q_{nn} = Q_{jj} = 0$. Для того чтобы найти матрицу перехода, описывающую перевозбуждение мод, следует разложить $\Psi^{(0)}$ по собственным функциям оператора $K(\xi)$ при $(-\tau) \gg 1$, сделать то же самое при $\tau \gg 1$ и связать коэффициенты этих разложений.

Собственные функции должны удовлетворять уравнению $K(\xi)\psi = -\beta\Gamma\psi$. Представим оператор K в виде (8) и положим $\beta = \beta_0 + \gamma\varepsilon \beta^{(1)} + \varepsilon\beta^{(2)} + \dots$, $\psi = \psi^{(0)} + \gamma\varepsilon \psi^{(1)} + \dots$. Пользуясь обычной схемой, найдем

$$\beta_n^{(1)} = F(\tau), \quad \beta_j^{(1)} = -F(\tau), \quad F(\tau) = \sqrt{Q^2\tau^2 + \delta_0^2/\varepsilon}. \quad (17)$$

Будем считать, что $\operatorname{Re} Q > 0$ и $\arg \delta_0$ заключен в интервале $(\arg Q - \pi/2, \arg Q + \pi/2)$. Последнее условие всегда можно выполнить путем соответствующей нумерации мод. Тогда $F(0) = \delta_0/\sqrt{\varepsilon}$, $F(\tau) \rightarrow Q|\tau|$ при $|\tau| \rightarrow \infty$. Пользуясь асимптотическими представлениями функций $D_V(t)$, при $|\tau| \gg 1$ можно записать:

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)} = \exp(i \int_{x_0}^x \beta_n^{(1)} dx) &\left[b_n \psi_n + O\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right) \right] + \exp(i \int_{x_0}^x \beta_j^{(1)} dx) \times \\ &\times \left[b_j \psi_j + O\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где вдали от точек вырождения $\psi_n = \phi_1$, $\psi_j = -i\phi_2$ при $|\tau| \gg 1$, $\tau > 0$ и $\psi_n = \phi_2$, $\psi_j = i\phi_1$ при $|\tau| \gg 1$, $\tau < 0$. Вычисления приводят к следующей матрице перехода:

$$\begin{pmatrix} b_n^+ \\ b_j^+ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} b_n^- \\ b_j^- \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{\Gamma(1+\nu)} e^{-\nu+v\ln\nu} & ie^{i\pi\nu} \\ ie^{i\pi\nu} & -\frac{i\sqrt{2\pi\nu}}{\Gamma(1-\nu)} e^{\nu-v\ln\nu+i\pi\nu} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Матрица перехода зависит от единственного параметра ν , который определяется формулой (15) и зависит, в свою очередь, от двух параметров δ_0 и Q . Оба эти параметра могут быть определены, если известна зависимость от x разности собственных значений $\beta_n - \beta_j$. Согласно формуле (17) $(\beta_n - \beta_j)/2 = \sqrt{Q^2(x-x_0)^2 + \delta_0^2}$. (Мы положили $\varepsilon = 1$.) По значению этой величины при $x = x_0$ определяется δ_0 , а по наклону при больших x — величина Q . Напомним, что, согласно условию, $\operatorname{Re} Q > 0$. Отметим, что матрица перехода (19) при чисто мнимом ν совпадает с известной матрицей, описывающей переход Ландау—Зинера между адиабатическими термами при их квазипересечении [15].

4. Переходим теперь к общему случаю, когда нормированные собственные функции оператора $K(\xi_0)$ имеют особенности при $\delta_0 \rightarrow 0$. Тогда, как показано в Приложении 1, можно ввести функции χ_1 и χ_2 , являющиеся линейными комбинациями собственных функций и не имеющие особенностей при $\delta_0 \rightarrow 0$. Вместо соотношений ортогонально-

стей и нормирювки для этих функций имеет место соотношение (П.1.8), а действие на них оператора $\tilde{K}(\xi_0)$ определяется формулами (П.1.7). Определим оператор $\tilde{\tilde{K}}$ соотношением

$$K(\xi_0) = \tilde{\tilde{K}} + \delta_0^2 P, \quad (20)$$

где P — оператор, действующий на произвольную функцию Ψ из области определения оператора $K(\xi_0)$ следующим образом: $P\Psi = \Gamma\chi_2(\chi_2^+\Gamma\Psi)$. Согласно (20) и (П.1.7) справедливы равенства

$$\tilde{\tilde{K}}\chi_1 = \bar{\beta}_0 \Gamma\chi_1, \quad \tilde{\tilde{K}}\chi_2 = \bar{\beta}_0 \Gamma\chi_3 + \Gamma\chi_1. \quad (21)$$

Оператор K в произвольной точке ξ представим в виде

$$K(\xi) = \tilde{\tilde{K}} + \delta_0^2 P + \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi_0} (\xi - \xi_0)^2 + \dots \quad (22)$$

Как и в п.3, положим $\xi - \xi_0 = \sqrt{\varepsilon} \tau$ и будем искать решение уравнения (9) в виде (10).

Подставим разложение (22) в (9), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ (при этом считаем δ_0^2 порядка ε). В итоге с точностью до членов порядка $(\sqrt{\varepsilon})^2$ найдем

$$\Psi^{(0)} + \sqrt{\varepsilon} \Psi^{(1)} = c_1 \Phi + c_2 \sqrt{\varepsilon} \chi_2; \quad (23)$$

$$\Phi = \chi_1 + V^{-} \tau \sum_{m \neq n, j} \frac{M_{m1} \psi_m}{\bar{\beta}_0 - \beta_m}, \quad M_{m1} = \left(\psi_m^+ \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \chi_1 \right). \quad (24)$$

Здесь c_1 и c_2 зависят от τ . Введем обозначения (см. Приложение 2)

$$M = \left(\chi_1^+ \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \chi_2 \right) = - \left(\chi_3^+ \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \chi_1 \right), \quad M_1^{(2)} = \left(\chi_1^+ \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi_0} \chi_1 \right); \quad (25)$$

$$B = \sqrt{M^2 + R}, \quad \operatorname{Re} B > 0, \quad R = \frac{1}{2} M_1^{(2)} + \sum_{m \neq n, j} \frac{M_{1m} M_{m1}}{\bar{\beta} - \beta_m}; \quad (26)$$

$$\mu = \nu + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{B} - 1 \right), \quad \nu = \frac{i \delta_0^2}{2 \varepsilon B}, \quad t = e^{-i\pi/\nu} (2B)^{1/2} \tau. \quad (27)$$

Уравнение первого приближения и условие отсутствия секулярностей в уравнении второго приближения дают систему уравнений для c_1 и c_2 :

$$-i \frac{dc_1}{dt} = \frac{it}{2} [1 + 2(\mu - \nu)] c_1 + \frac{V^{-}\nu\varepsilon}{\delta_0} c_2, \quad (28)$$

$$-i \frac{dc_2}{dt} = V^{-} \frac{\delta_0}{V\varepsilon} \left[1 - \frac{t^2}{4\nu} (1 - (1 + 2(\mu - \nu))^2) \right] c_1 - \frac{it}{2} (1 + 2(\mu - \nu)) c_2.$$

Из уравнений (28) следует, что c_1 представляет собой линейную комбинацию функций параболического цилиндра с индексом μ . Коэффициент c_2 определяется по c_1 первым из уравнений (28).

Для определения матрицы перехода построим собственные значения и собственные функции методом теории возмущений аналогично тому, как это было сделано в п. 5. Найдем

$$\beta_n^{(1)} = \tilde{F}(\tau), \quad \beta_j^{(1)} = -\tilde{F}(\tau), \quad \tilde{F}(\tau) = \sqrt{B^2 \tau^2 + \delta_0^2 / \varepsilon}, \quad (29)$$

$\operatorname{Re} \tilde{F} > 0$ при $|\tau| \gg 1$;

$$\psi_n = \tilde{g}_n^{-1} (\Phi + (\tilde{F}(\tau) - M\tau) \chi_2 \sqrt{\varepsilon}) (\sqrt{2\delta_0})^{-1}, \quad (30)$$

$$\psi_j = \tilde{g}_j^{-1} (\Phi - (\tilde{F}(\tau) + M\tau) \chi_2 \sqrt{\varepsilon}) (-i) (\sqrt{2\delta_0})^{-1}.$$

Коэффициенты \tilde{g}_n и \tilde{g}_j находятся из условия (4):

$$\begin{aligned}\tilde{g}_n(\tau) &= \left(\frac{\tilde{F}(\tau)}{\tilde{F}(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{F}(0)}{\tilde{F}(\tau) + B\tau} \right)^{\Delta+1/2}, \\ \tilde{g}_j(\tau) &= \left(\frac{\tilde{F}(\tau)}{\tilde{F}(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{F}(0)}{\tilde{F}(\tau) - B\tau} \right)^{\Delta+1/2}, \quad \Delta = \mu - v.\end{aligned}$$

Вдали от точек вырождения функцию $\Psi^{(0)} + \sqrt{\varepsilon} \Psi^{(1)}$ можно записать в виде (18), где ψ_n и ψ_j представляют собой главные члены асимптотических разложений функций (30). Коэффициенты b до и после точек вырождения связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} b_n^+ \\ b_j^+ \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} b_n^- \\ b_j^- \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2\pi v}}{\Gamma(1+\mu)} \exp(-v + \mu \ln v) & i \exp(i\pi\mu) \\ i \exp(i\pi\mu) & \frac{-i\sqrt{2\pi}\mu}{\Gamma(1-\mu)\sqrt{v}} \exp(v - \mu \ln v + i\pi\mu) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Матрица перехода (31) зависит от двух параметров μ и v . Параметр v , который дается формулой (15), может быть определен, если известна зависимость от x разности собственных значений $(\beta_n - \beta_j)/2 = -\sqrt{B^2(x-x_0)^2 + \delta_0^2}$ совершенно аналогично тому, как это было пояснено в связи с формулой (17). Для определения величины μ требуется знание собственных функций в сечении $\xi = \xi_0$.

При $\mu = v$, т. е. при $M = B$, матрица (31) совпадает с матрицей (19). В предельном случае $M \ll B$, $\mu = v - 1/2$ и матрица (31) совпадает с полученной в работе [14]. При $|v| \gg 1$ и δ_0/B почти мнимом точке вырождения лежат далеко друг от друга вблизи вещественной оси. Тогда матрицы перехода (19) и (31) могут быть выражены через матрицы, описывающие переход через изолированные точки вырождения и совпадающие с полученными в работах [4-6].

Автор благодарит В. С. Буслаева, В. С. Булдырева, В. В. Новикова и Л. И. Лутченко за полезные замечания и внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Оператор K и матрица Γ имеют вид

$$K = iP(\partial/\partial z) + Q; \quad (\text{П.1.1})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} k_0 \varepsilon & -q \\ q & k_0 \mu \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.1.2.})$$

где ε и μ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости. Здесь считаем μ единичной матрицей I , p , q , γ — матрицы 3×3 :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = k_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1.3})$$

Напомним, что все поля предполагаются пропорциональными $\exp(ik_y y)$.

Оператор K медленно зависит от x через тензор ε . Собственная функция Ψ (столбец с компонентами $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$) удовлетворяет уравнению $K\Psi = \beta \Gamma \Psi$ и граничным условиям, которые мы запишем в виде $pE = Z_h H|_{z=h}$, $pE = -Z_0 H|_{z=0}$, где Z_h и Z_0 — импедансы верхних и нижних плоскостей, ограничивающих волновод. Матрицу импеданса нужно понимать как матрицу 3x3, у которой третья строка и третий столбец состоят из нулей. Сопряженная функция Ψ^+ удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$K^+ \Psi^+ = \beta^* \Gamma \Psi^+, \quad p^+ E^+ = Z_h^+ H^+|_{z=h}, \quad p^+ E^+ = -Z_0^+ H^+|_{z=0}.$$

Крест у матриц и операторов означает эрмитовское сопряжение. Нетрудно показать, что [13]

$$(\Psi^+ \Gamma \Psi) = -i \sum_{j=x, y} H_j^* \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} H \right)_j \Big|_{z=0}, \quad (\text{П.1.4})$$

где $Z = \bar{Z}_h + Z_0$, \bar{Z}_h — импеданс Z_h , продолженный до плоскости $z=0$, конечно, зависящий от β . Собственная функция при $z=0$ удовлетворяет уравнению $ZH = 0$, и дисперсное уравнение, из которого находятся собственные значения, имеет вид

$$D = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 0.$$

Определим ненормированную собственную функцию ψ добавочными граничными условиями

$$H_x = 1, \quad H_y = -Z_{21}/Z_{22}, \quad H_x^+ = 1, \quad H_y^+ = -Z_{12}^*/Z_{22}^*. \quad (\text{П.1.5})$$

Подставляя эти условия в уравнение (П.1.4) и пользуясь дисперсионным соотношением, получим для нормированного интеграла

$$(\Psi^+ \Gamma \Psi) = -i(dD/d\beta)/Z_{22}.$$

Вблизи двукратной точки вырождения, т. е. при близких собственных значениях β_1 и β_2 , можно записать $dD/d\beta|_{\beta=\beta_1} = 2\delta_0 f'(\beta_1)$, где $\delta_0 = (\beta_1 - \beta_2)/2$, а $f(\beta)$ — величина порядка единицы при $\delta_0 \rightarrow 0$. Таким образом, для функций ψ_1 и ψ_2 , соответствующих близким собственным значениям β_1 и β_2 , имеем

$$(\Psi_1^+ \Gamma \Psi_1) = -i \frac{f(\beta_1)}{Z_{22}(\beta_1)} \delta_0, \quad (\Psi_2^+ \Gamma \Psi_2) = i \frac{f(\beta_2)}{Z_{22}(\beta_2)} \delta_0. \quad (\text{П.1.6})$$

Таким образом, видно, что функции ψ_1 и ψ_2 почти самоортогональны вблизи точки вырождения, соответствующие нормированные функции имеют особенность при $\delta_0 \rightarrow 0$. Поэтому введем линейные комбинации χ_1 и χ_2 согласно соотношению

$$\chi_1 = (v_2 \psi_2 + v_1 \psi_1)/2, \quad \chi_2 = (-v_2 \psi_2 + v_1 \psi_1)/2\delta_0,$$

$$v_j = (-Z_{22}(\beta_j)/if(\beta_j))^{1/2}.$$

Функции χ_1 и χ_2 остаются конечными при $\delta_0 \rightarrow 0$. Они удовлетворяют уравнениям

$$K\chi_1 = \bar{\beta}_0 \Gamma \chi_1 + \delta_0^2 \Gamma \chi_2, \quad K\chi_2 = \bar{\beta} \Gamma \chi_2 + \Gamma \chi_1, \quad \bar{\beta}_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}. \quad (\text{П.1.7.})$$

Аналогично вводятся функции χ_1^+ и χ_2^+ :

$$\chi_1^+ = (v_2^* \psi_2^+ + v_1^* \psi_1^+)/2, \quad \chi_2^+ = (-v_2^* \psi_2^+ + v_1^* \psi_1^+)/2\delta_0^*.$$

Кроме того, имеют место соотношения, заменяющие соотношение ортогональности и нормировки:

$$(\chi_1^+ \Gamma \chi_1) = (\chi_2^+ \Gamma \chi_2) = 0, \quad (\chi_1^+ \Gamma \chi_2) = (\chi_2^+ \Gamma \chi_1) = 1. \quad (\text{П.1.8})$$

Вышеизложенное является непосредственным обобщением результатов работ [3-7]. Впервые возможность введения функций χ_1 и χ_2 , не имеющих особенностей в точке вырождения и удовлетворяющих соотношениям, аналогичным (П.1.8), была отмечена Ландау [16].

Особого рассмотрения требует случай, когда Z_{22} само порядка δ_0 при интересующем нас значении $x=x_0$. Это имеет место в слабоанизотропном волноводе вблизи точки вырождения ТМ- и ТЕ-волн. Предположим, что без учета анизотропии, за которую отвечают Z_{12} и Z_{21} , ТМ- и ТЕ-волны вырождаются. Тогда вблизи точки x_0 можно считать, что $Z_{11} = c_1(\beta - \beta_0)$, $Z_{12} = c_2(\beta - \beta_0)$. При этом из дисперсионного соотношения следует $\beta_{1,2} = \beta_0 \pm \sqrt{Z_{12}Z_{21}/c_1c_2}$, здесь Z_{12} можно взять при значении $\beta = \beta_0$, поэтому

$$\delta_0 = \sqrt{Z_{12}Z_{21}/c_1c_2}, \quad \beta_1 - \beta_0 = -(\beta_2 - \beta_0) = \delta_0.$$

Таким образом, $Z_{22}(\beta_1)$ и $Z_{22}(\beta_2)$ пропорциональны δ_0 и правая часть соотношения (П.1.6) остается конечной при $\delta_0 \rightarrow 0$. В этом случае функции ψ_1 и ψ_2 можно нормировать, и получившиеся нормированные функции будут конечными при $\delta_0 \rightarrow 0$. При этом следует использовать в качестве базиса вблизи точки вырождения именно эти функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА И ЕГО ПРИЗВОДНЫХ НА ЭКВАТОРЕ

Предположим, что неоднородность ионосферы обусловлена лишь зависимостью магнитного поля от координаты x и что вектор магнитного поля лежит в плоскости x, z . Тогда диэлектрическая проницаемость обладает следующими свойствами симметрии: 1) $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx}$, 2) $\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy}$, 3) $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$, 4) $\epsilon_{xy}(H_x, H_z) = -\epsilon_{xy}(H_x, -H_z)$, 5) $\epsilon_{xz}(H_x, H_z) = -\epsilon_{xz}(H_x, -H_z)$, 6) $\epsilon_{yz}(H_x, H_z) = \epsilon_{yz}(H_x, -H_z)$. На экваторе $H_z = 0$, и тогда из свойств (4), (5) следует, что $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = 0$. Кроме того, согласно (2) $\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy}$. Учитывая это, нетрудно показать, что если Φ удовлетворяет уравнению $K\Phi = \beta\Gamma\Phi$, то уравнение $K^+\Psi^+ = \beta^*\Gamma\Psi^+$ на экваторе удовлетворяет функции $\Psi^+ = U\Psi^*$, где матрица U такова:

$$U = \begin{pmatrix} -u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что фаза Ψ^+ , тем самым, однозначно связана с фазой функции Φ . Кроме того, на экваторе $Z_{12} = Z_{21}$, используя это обстоятельство, можно показать, что из граничных условий для Φ $pE = -Z_0H|_{z=0}$, $pE = Z_hH|_{z=h}$ следуют сопряженные граничные условия $p^+E^+ = -Z_0^+H^+|_{z=0}$, $p^+E^+ = Z_h^+H^+|_{z=h}$.

Вид матрицы $d\varepsilon/dx$ на экваторе (при $x=0$) можно получить, если учесть, что H_z — нечетная функция x , а H_x — четная. Тогда из соотношений (4) — (6) следует, что ϵ_{xy} и ϵ_{xz} — нечетная функция x , а ϵ_{yz} — четная. Поэтому тензор $d\varepsilon/dx$ при $x=0$ имеет лишь компоненты $\epsilon'_{xy} = -\epsilon'_{yx}$, $\epsilon'_{xz} = \epsilon'_{zx}$. Теперь нетрудно показать, что матричные элементы $\partial K/\partial x$ обладают следующими свойствами при $x=0$:

$$\left(\Psi_1^+ \frac{\partial K}{\partial x} \Psi_1 \right) = \left(\Psi_2^+ \frac{\partial K}{\partial x} \Psi_2 \right) = 0; \quad (\text{П.2.1})$$

* При доказательстве этого факта полезно использовать соотношения $u\bar{q}u = -q$, $u\gamma u = -\gamma$, $u\bar{p}u = p$, а также $u\bar{e}u = e$. (Волнистая черта означает транспонирование. Последнее равенство выполняется в силу свойств тензора ϵ на экваторе.)

$$\left(\psi_1^+ \frac{\partial K}{\partial x} \psi_2 \right) = - \left(\psi_2^+ \frac{\partial K}{\partial x} \psi_1 \right) = k_0 \int_0^h dz \left[\frac{d\varepsilon_{xy}}{dx} (-E_{1x}E_{2y} + E_{1y}E_{2x}) + \right. \\ \left. + \frac{d\varepsilon_{xz}}{dx} (-E_{1x}E_{2z} + E_{1z}E_{2x}) \right]. \quad (\text{П.2.2})$$

В основном тексте потребуются матричные элементы производных оператора K на функциях χ_1 и χ_2 , введенных в Приложении 1. Из определения χ_1 и χ_2 и соотношений (П.2.1), (П.2.2) имеем

$$\left(\chi_1^+ \frac{\partial K}{\partial x} \chi_1 \right) = \left(\chi_2^+ \frac{\partial K}{\partial x} \chi_2 \right) = 0; \quad (\text{П.2.3})$$

$$\left(\chi_1^+ \frac{\partial K}{\partial x} \chi_2 \right) = - \left(\chi_2^+ \frac{\partial K}{\partial x} \chi_1 \right). \quad (\text{П.2.4})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Г. И., Новиков В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: Гос. ун-т, 1968. Вып. 7. С. 34.
2. Ременец Г. Ф. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: Гос. ун-т, 1973. Вып. 12. С. 188.
3. Budden K. G. // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. V. 77. № 3. P.567.
4. Молотков И. Л., Старков А. С. // Зап. науч. семинара ЛОМИ. 1978. Т. 78. С. 138; 1979, Т. 89. С. 286.
5. Бичуцкая Т. И., Новиков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 7. С. 860.
6. Новиков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 5. С. 607.
7. Авдеев А. Д. Распространение радиоволн под земной поверхностью и в ионосфере.—Изд. ЛГУ. 1981. С. 74.
8. Герасимов С. И. // Вестник ЛГУ. Сер. Физика, химия. 1988. Вып. 3. С. 31.
9. Орлов А. Б., Иванов В. И. // Проблемы дифракции и распространения волн. —Л.: Гос. ун-т, 1986. Вып. 20. С. 23.
10. Герасимов С. И., Новиков В. В., Орлов А. Б. // Тезисы докл. XIV Всесоюзной конф. по распространению радиоволн. — Л.: 1984. С. 287.
11. Буслаев В. С., Дмитриева Л. А. // ТМФ. 1987. Т. 73. № 3. С. 430.
12. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир. 1978. Т. 2. С. 476.
13. Лутченко Л. Н., Булах А. Б. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: Гос. ун-т, 1986. С. 89.
14. Молотков И. А., Старков А. С. // Проблемы мат. физики. — Л.: Гос. ун-т. 1982. Вып. 10. С. 164.
15. Бобашев С. В., Харченко В. А. Л.: Препринт ФТИ АН СССР, 1974.
16. Ландау Л. А., Лишин Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука. 1974. С. 230.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 июля 1989 г.

RE-EXCITATION OF MODES IN AN ANISOTROPIC EARTH — IONOSPHERE WAVEGUIDE ALONG TRANSEQUATORIAL PATHS, PROVIDED TWO CLOSE POINTS OF DEGENERACY

M. V. Perel'

A scheme of successive approximations has been built for descriptions of mode transformations in a plane anisotropic waveguide with parameters slowly varying along the X direction. An explicit form of the transformations matrix has been found in the case of two local points of double degeneracy which lie in complex plane and are symmetric relative to a certain point on the path.

УДК 621.391

**ДОСТИЖЕНИЕ ГРАНИЦ
НЕМАРКОВСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ
ПРОЦЕССАМИ**

B. A. Казаков, С. А. Африканов

Для решения задачи о достижении границ немарковскими дифференцируемыми процессами используется кинетическое уравнение для двумерной плотности вероятности самого процесса и его производной. Формулируются начальные и граничные условия. Излагается процедура определения кинетических коэффициентов. Приводятся примеры численного решения кинетического уравнения для гауссовых немарковских процессов.

Цель работы — показать преимущества использования в задачах о достижении границ кинетических уравнений для плотности вероятности немарковских процессов по сравнению с применением классического уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК).

Применение уравнения ФПК для решения задач о достижении границ наталкивается на трудности, по крайней мере, по двум причинам: 1) с ростом мерности марковской модели резко возрастает сложность численного решения [1, 2], 2) существуют процессы, для которых затруднительно подобрать марковские модели (например, процессы с резко ограниченным спектром). Использование для решения задач о достижении границ кинетических уравнений, предложенных в [3], позволяет преодолеть указанные трудности. При этом мерность кинетического уравнения [3] для любых непрерывных дифференцируемых процессов равна двум, поскольку достаточно рассмотреть уравнение относительно плотности вероятности двумерного процесса $\dot{x}(t)$, состоящего из основного компонента $x(t)$ и его производной $\dot{x}(t)$.

Зафиксируем в процессе $\dot{x}(t)$ произвольное множество точек $X, T = \{x_0, \dot{x}_0, t; x_1, \dot{x}_1, t_1; \dots; x_r, \dot{x}_r, t_r\}$, которое определяет начальные условия и отражает наличие последействия в процессе. Тогда согласно [3] условная плотность вероятности $w(x, \dot{x}, t | X, T) = w(x, \dot{x}, t | X, T)$ подчиняется следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial^2 w(x, \dot{x}, t | X, T)}{\partial t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ n+m > 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n! m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial \dot{x}^m} \times \quad (1)$$

$$\times B_{nm}(x, \dot{x}, t, X, T) w(x, \dot{x}, t | X, T),$$

где

$$B_{nm}(x, \dot{x}, t, X, T) = (\partial^2 / \partial t^2) [\tilde{\alpha}_{nm}(t | x, \dot{x}, t, X, T)]_{t=t}^{\wedge} \quad (2)$$

— кинетические коэффициенты, $\tilde{\alpha}_{nm}(t | x, \dot{x}, t, X, T)$ — условная моментная функция $(n+m)$ -го порядка для приращения случайного процесса $x(t)$ за время $t - t$:

$$\tilde{\alpha}_{nm}(t | x, \dot{x}, t, X, T) = \langle [x(t) - x(t)]^n [\dot{x}(t) - \dot{x}(t)]^m | x, \dot{x}, t, X, T \rangle, \quad (3)$$

здесь угловые скобки означают операцию статистического усреднения.

Ниже рассматриваются гауссовы немарковские процессы с известным средним $\langle x(t) \rangle$ и корреляционной функцией $R(t_1, t_2)$. Для вычисления кинетических коэффициентов поступим следующим образом. В процессе $\mathbf{x}(t) = \{x(t), \dot{x}(t)\}$ выберем моменты времени $\hat{t} > t > T$ и составим блочный вектор $[X_1 | X_2]^T = [x(\hat{t}) \dot{x}(\hat{t}) | x(t) \dot{x}(t) X(T)]^T$, который охарактеризуем вектором средних и блочной корреляционной матрицей

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Используя известные правила [4], все элементы матрицы R можно выразить через функцию $R(t_1, t_2)$ и ее производные по временам t_1, t_2 , придавая последним целесообразные значения. Из-за громоздкости общий вид матрицы R не выписываем. На основе (4) запишем вектор условного среднего $\langle X_1 | X_2 \rangle$ и условную корреляционную функцию $R_{X_1 | X_2}$:

$$\langle X_1 | X_2 \rangle = \begin{bmatrix} \langle x(\hat{t}) | X_2 \rangle \\ \langle \dot{x}(\hat{t}) | X_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{10}(\hat{t} | X_2) \\ \tilde{x}_{01}(\hat{t} | X_2) \end{bmatrix} = \langle X_1 \rangle + R_{12} R_{22}^{-1} (X_2 - \langle X_2 \rangle); \quad (5)$$

$$R_{X_1 | X_2} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{20}(\hat{t} | X_2) & \tilde{x}_{11}(\hat{t} | X_2) \\ \tilde{x}_{11}(\hat{t} | X_2) & \tilde{x}_{02}(\hat{t} | X_2) \end{bmatrix} = R_{11} - R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}. \quad (6)$$

Зная входящие в (5), (6) функции $\tilde{x}_{nm}(\hat{t} | X_2) = \tilde{x}_{nm}$, по соотношениям

$$\tilde{x}_{10} = \tilde{x}_{10} - x, \quad \tilde{x}_{01} = \tilde{x}_{01} - \dot{x}, \quad \tilde{x}_{nm} = \tilde{x}_{nm} \quad (n, m > 1) \quad (7)$$

легко определить кумулянтные функции приращения $\tilde{x}_{nm} = \tilde{x}_{nm}(\hat{t} | X_2)$. Затем следует воспользоваться соотношениями связи между моментными и кумулянтными функциями [5], применив их к α_{nm} и x_{nm} . После этого необходимо использовать формулу (2).

Для решения задачи о достижении границ помимо начальных следует задать и граничные условия. Пусть область существования реализаций процесса $x(t)$ ограничена кривыми $g_1(t)$ и $g_2(t)$, причем $g_1(t) > g_2(t)$ для любых t . Согласно [1, 2] физический смысл граничных условий в подобных задачах заключается в том, чтобы удовлетворить принципу: траектории процесса могут выйти за границу, но войти обратно через нее не могут. Применительно к рассматриваемому случаю это условие записывается в виде

$$w[x(t) = g_1(t), \dot{x}(t) < \dot{g}_1(t) | X, T] = w[x(t) = g_2(t), \dot{x}(t) > \dot{g}_2(t) | X, T] = 0. \quad (8)$$

Отметим, что в уравнении (1) путем статистического усреднения объем фиксированного множества X, T может быть уменьшен [3]. В частном случае X, T может вообще отсутствовать, тогда начальное условие задается в виде некоторого распределения. Возможны и промежуточные варианты.

Рассмотрим гауссовые дифференцируемые немарковские процессы, у которых известны начальное фиксированное значение координаты $X, T = x_0, t_0$ и начальное распределение для производной \dot{x}_0 с дисперсией $-R''(0)$. Как следует из [6], для гауссовых процессов высшие кинетические коэффициенты B_{nm} при $n+m \leq 3$ вырождаются, если $[\tilde{x}_i]_{t=0} = 0$ ($i = 1, 2$) для составляющих векторного процесса. В рассматриваемых ниже двух примерах это условие выполняется.

1. Процесс с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma_x^2 [1 + \alpha |\tau| + (1/3)(\alpha \tau)^2] e^{-\alpha|\tau|}. \quad (9)$$

Такой случайный процесс формируется на выходе трех интегрирующих RC -цепей, имеющих параметр α и находящихся под воздействием белого шума. Используя (4) — (7), (9), вычислим кинетические коэффициенты $B_{10}, B_{01}, B_{20}, B_{02}, B_{11}$, которые оказываются зависящими от времени. Последнее обстоятельство, однако, практически не усложняет процедуру численного решения. Аналитические выражения для кинетических коэффициентов не приводим. Кинетическое уравнение (1) для данного случая было решено на ЭВМ при следующих начальных и граничных условиях: $x_0 = -2, t_0 = 0, g_1(t) = 1, g_2(t) = -\infty (\alpha = 1)$.

Алгоритм численного решения реализует неявную трехслойную во времени и девятиточечную по переменным x, \dot{x} сеточную схему. Решение на очередном (третьем) слое по времени находится из системы $K \times L$ алгебраических уравнений (K — число разбиений по оси x , L — по оси \dot{x}) по известным решениям на первом и втором слоях. Поглощающие граничные условия задаются занулением плотности $w(x, \dot{x}, t | x_0, t_0)$ на полуоси $\dot{x} = x_{\text{гр}}, \dot{x} < 0$. Численное решение начинается с некоторого момента времени $t_{\text{нач}} > t_0$, такого, что искомая плотность близка к нулю вблизи границ и одновременно не слишком сильно отличается в соседних узлах сетки. Значения плотности на исходных слоях рассчитываются по формуле для гауссова условного закона распределения при известном начальном условии x_0 . Кривая 1 на рис. 1 (см. на вклейке) рассчитана при следующих параметрах численного метода: $\Delta x = 0,08$; $\Delta \dot{x} = 0,08$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, $t_{\text{нач}} = t_0 + 1$; $K = L = 100$.

В результате решения получена ненормированная плотность вероятности $w(x, \dot{x}, t | x_0, t_0) = \int w(x, \dot{x}, t | x_0, t_0) dx$, с помощью которой определена вероятность достижения границы $P(t) = 1 - \int_{-\infty}^{x_{\text{гр}}} w(x, \dot{x}, t | x_0, t_0) dx$.

График этой функции приведен на рис. 1, см. на вклейке (кривая 1).

В марковском описании процесс с корреляционной функцией (9) является компонентом трехмерного марковского процесса, и, следовательно, для решения аналогичной задачи в классическом варианте пришлось бы решать трехмерное уравнение ФПК.

2. Гауссов процесс с резко ограниченным спектром. Выберем для простоты в качестве исходного марковский гауссов процесс с параметром a , а затем ограничим его спектр на частоте $\omega_{\text{гр}}$. Подобная процедура изменяет статистические свойства процесса и он становится не-марковским. Выражение для корреляционной функции из простейшего экспоненциального превращается в следующее:

$$R(\tau) = \sigma_x^2 \left(2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\text{гр}}}{\alpha} \right)^{-1} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} \frac{\cos \omega \tau}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega. \quad (10)$$

На рис. 2 представлены графики функции (10) в зависимости от изменения параметра $\omega_{\text{гр}}$.

При произвольном $\omega_{\text{гр}}$ затруднительно подобрать марковскую аппроксимацию, так что применение классического уравнения ФПК невозможно. Предлагаемым методом эта задача решается. По заданному спектру следует вычислить корреляционную функцию, а затем воспользоваться изложенной выше методикой определения кинетических коэффициентов. Аналитически взять интеграл в (10) не удается, поэтому все кинетические коэффициенты приходится определять численным ин-

тегрированием выражения (10) для корреляционной функции $R(\tau)$ и аналогичных выражений для ее производных. Результаты расчетов вероятности достижения границы $P(t)$ для нескольких значений граничной частоты ($\omega_{\text{гр}}=1; 2; 3; \infty$) при тех же начальных и граничных условиях, что и в примере 1, приведены на рис. 1 (кривые 2—5 соответственно). Ход зависимостей на рис. 1 имеет ясный физический смысл: вероятность достижения границы $P(t)$ увеличивается с течением времени, причем чем более сглаженным является процесс, тем она меньше при заданном времени t .

Для проверки было проведено статистическое моделирование согласно [6]. Моделирование немарковского случайного процесса осуществлялось по формуле

$$x_k = \sum_{i=1}^N a_i x_{k-i} + b \xi_k,$$

где k — номер шага по времени, ξ_k — независимые гауссовые случайные числа с единичной дисперсией, коэффициенты a_i, b определяются на основе заданной корреляционной функции. При запуске каждой реализации фиксируются N отсчетов: $x_{-N+1}, x_{-N+2}, \dots, x_{-1}, x_0$. Величина x_0 определяется исходными данными задачи, а значения $x_{-N+1}, x_{-N+2}, \dots, x_{-1}$ «разыгрываются» при каждом запуске на основе известного условного распределения $w(x_{-N+1}, x_{-N+2}, \dots, x_{-1} | x_0)$. В рассмотренном примере процесса с ограниченным спектром параметры моделирования имели следующие значения: $\Delta t=0,1$, $N=6$, $b=1,794 \cdot 10^{-8}$, $a_1 \div a_6 = = (5,986; -14,94; 19,91; -14,93; 5,981; -0,9987)$. Все основные вычисления производились в разрядной сетке размером 16 байт.

Результаты моделирования отражены на рис. 1 кружками. Как видно, результаты численного решения и моделирования хорошо согласуются.

Таким образом, применение кинетических уравнений [3] для немарковских процессов в задачах о достижении границ позволяет снизить размерность уравнения, а также решить новые задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрезков Г. В., Разевиг В. Д. Методы анализа срыва слежения. — М.: Сов. радио, 1972. — 240 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
3. Казаков В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 11. С. 1309.
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1982. — 624 с.
5. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978. — 376 с.
6. Полляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ. — М.: Сов. радио, 1971. — 400 с.

Рязанский радиотехнический
институт

Поступила в редакцию
31 января 1989 г.

REACHING THE BOUNDS BY NONMARKOVIAN DIFFERENTIAL PROCESSES

V. A. Kazakov, S. A. Afrikanov

The kinetic equation for twodimensional probability density of process and its derivation is used for solving the problem of reaching the bounds of nonmarkovian differential processes. The initial and boundary conditions are formulated. The procedure of kinetic coefficient definition is given. The examples of numerical solution of kinetic equations for Gaussian nonmarkovian processes are given.

УДК 533.9:621.384

ИНВАРИАНТ ДИСПЕРСИИ И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

С. П. Ефимов, Л. А. Юдин

Для макроскопических уравнений Максвелла, описывающих волны в среде типа волновода — неоднородной в поперечном направлении и однородной в продольном, — вводится задача на собственные числа λ . Параметр λ есть релятивистский инвариант, который равен нулю на дисперсионной кривой. Найдено выражение для тензора энергии-импульса через производные $d\lambda/dk_i$, где k_i — волновой вектор. Показано, что инвариант дисперсии λ есть нормированное действие для электромагнитного поля в среде. Рассмотрен пример волновода, заполненного изотропной средой с пространственной и временной дисперсией. Продемонстрирована техника оперирования с параметром λ . Обсуждаются преимущества изложенного подхода при расчете тензора энергии-импульса в более сложных задачах.

1. Введение. Формулы для энергии электромагнитных волн и потока энергии в диспергирующих средах усложнялись по мере расширения круга задач и их естественного усложнения. Так, например, выражение для плотности энергии в циклотронной волне [1] уже потеряло изящество формулы $W = \frac{|\mathbf{E}|^2}{16\pi} \frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial\omega}$, выведенной для изотропной среды в классической работе [2]. Напомним, что задача расчета плотности энергии весьма актуальна при изучении взаимодействия волн в различного типа структурах.

Релятивистски-инвариантный подход при выводе баланса энергии-импульса в квазиоднородной среде путем нетривиальных преобразований неожиданно привел к компактной формуле для тензора T_{ik} [3]. Тензор энергии-импульса при этом выражается через обобщенный тензор проницаемости ϵ_{iklm} и потенциалы A_i , после чего его можно связать с групповой скоростью v_i .

В настоящей работе вводится новая электродинамическая характеристика — собственное значение макроскопических уравнений Максвелла λ . Значение λ рассматривается для задач, в которых рассчитываются собственные колебания электромагнитного поля (моды). Для резонатора значение λ есть функция частоты ω . Для волновода параметр λ зависит также от продольного волнового числа h , в трехмерной среде λ есть функция волнового вектора \mathbf{k} . В общем случае среда предполагается однородной в некоторых направлениях, вдоль которых распространяются волны. По остальным направлениям поле локализовано. По «направлениям однородности» предполагается пространственная дисперсия.

В данной теории использованы идеи работы [4], в которой введено понятие собственного значения уравнений Максвелла (не релятивистски-инвариантное). Для вывода тензора энергии-импульса T_{ik} сформулирован вариационный принцип применительно к узким волновым пакетам. Такой подход позволяет (в соответствии с общими правилами) по функции Лагранжа непосредственно получить T_{ik} . Плотность действия есть функция медленно меняющихся ω , k_i и пропорциональна значению λ , которое на дисперсионной кривой обращается в нуль.

Назовем λ инвариантом дисперсии, поскольку λ есть релятивистский инвариант и дает инвариантную запись дисперсионного уравнения

$$\lambda(\omega, k_i) = 0. \quad (1)$$

Ниже показано, что плотность тензора энергии-импульса T_{ik} связана простым образом с производными $\partial\lambda/\partial k_i$, что дополняет результаты работы [3].

Это означает, что формула для T_{ik} приобретает универсальный характер. При этом явным образом проявляется заложенная в ней симметрия, в частности, связь с групповой скоростью [3]. Трудности конкретного расчета переносятся на задачу вычисления λ .

Поскольку понятие λ справедливо для произвольной линейной системы без поглощения, то можно проиллюстрировать метод на примере осциллятора, для которого

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f. \quad (2)$$

Сила в уравнении (2) нормирована так, чтобы в действие входило слагаемое $\int f x dt$. Вместо задачи о собственном колебании (когда $f=0$) рассмотрим задачу на собственные значения, заменяя f на λy :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \lambda y. \quad (3)$$

Отсюда для гармонического колебания имеем $\lambda(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2$. Дисперсионное уравнение $\lambda=0$ дает правильное значение частоты $\omega=\omega_0$, при котором фиктивное колебание y переходит в моду x .

Рассмотрим теперь баланс энергии для узких пакетов в уравнении (3). Функция $\lambda(\omega)$ перейдет в оператор $\hat{\lambda}$, действующий на узкий пакет $y(t) = \text{Re}(ye^{-i\omega t})$. Как обычно, умножим (3) на \dot{y} , что даст слева производную от энергии. Для произведения справа применяем известный прием, используемый для сред с дисперсией [5],

$$\dot{y}\hat{\lambda}y = \frac{\partial}{\partial t}(y\hat{\lambda}y) - y\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\lambda}y) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y\hat{\lambda}y) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\lambda\omega)}{\partial\omega}\frac{|y|^2}{4}\right]. \quad (4)$$

После дифференцирования по ω в (4) можно перейти к значению $\lambda=0$, что дает для энергии осциллятора

$$W = -\frac{\partial(\lambda\omega)}{\partial\omega}\left.\frac{|y|^2}{4}\right|_{\lambda=0} = \frac{\omega_0|x|^2}{2}.$$

Из этого примера видно, что значение $\lambda(\omega)$ есть аналог проницаемости $\varepsilon(\omega)$. Описанная процедура будет применена ниже к макроскопическим уравнениям Максвелла.

2. Собственное значение уравнений Максвелла. Тензор индукций поля H_{ik} и тензор поля F_{lm} в уравнениях Максвелла связаны оператором обобщенной проницаемости среды $\hat{\varepsilon}_{iklm}^*$, который антисимметричен по первой и второй парам индексов. При введении потенциалов эта связь следующая:

$$H_{ik} = \hat{\varepsilon}_{iklm}^* F_{lm} = 2\hat{\varepsilon}_{iklm}^* \frac{\partial A_m}{\partial x_l} = 2\hat{\varepsilon}_{iklm}^* A_{m,l}. \quad (5)$$

Ниже предполагается, что среда непоглощающая, что накладывает условия эрмитовости на оператор $\hat{\varepsilon}_{iklm}^*$. Если среда по некоторым координатам однородна, то для гармоник с фазовым множителем $e^{i\Phi}$, где $\Phi = (k_i x_i - \omega t)$, оператор $\hat{\varepsilon}$ переходит в функцию переменных ω, k и неоднородных координат y_i , по которым и предполагается локализация поля.

* Оператор в пространстве функций.

Макроскопические уравнения Максвелла с использованием потенциалов A_i приобретают вид

$$2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\overset{\wedge}{\epsilon}_{iklm} A_{m,l}) = \frac{4\pi}{c} I_i. \quad (6)$$

Если токи отсутствуют ($I_i = 0$), то решение уравнений (6) для гармонических волн (по осям x_i и времени t) возможно лишь при определенном соотношении между ω и k_i . Дисперсионное соотношение возникает в каждой частной задаче из условия разрешимости уравнений и не всегда в явной форме.

Для данных ω, k_i , не связанных дисперсионным соотношением, вместо уравнений (6) рассмотрим задачу на собственные значения

$$2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\overset{\wedge}{\epsilon}_{iklm} A_{m,l}) = \lambda A_i. \quad (7)$$

При условии эрмитовости оператора $\overset{\wedge}{\epsilon}$ такая задача корректна. Для обозначения вспомогательной моды используем те же символы A_i .

Значение λ есть функция ω, k_i , поскольку решение для фиктивных полей A_i можно искать в виде волн по направлениям x_i . Представляют интерес те значения ω, k_i , которые определяются дисперсионным соотношением. Если значение λ обращается в нуль, то в силу единственности правильно сформулированной физической задачи фиктивные поля A_i переходят в истинные потенциалы.

Для того чтобы связать λ с энергетическими характеристиками поля, используем хорошо известное соотношение, вытекающее из (7)*,

$$\lambda = \frac{(F, \epsilon F)}{2(A_i, A_i)} = \frac{(A_{i,k}, \epsilon_{iklm} A_{l,m})}{(A_i, A_i)}, \quad (8)$$

где скобками обозначено скалярное произведение

$$(A_i, A_i) = \frac{1}{16\pi} \int A_i^*(y) A_i(y) dy. \quad (9)$$

Поскольку оператор $\overset{\wedge}{\epsilon}$ самосопряженный (среда непоглощающая), то значение λ чисто действительное.

Уравнения (7) релятивистски инвариантны. Следовательно, параметр λ есть релятивистский инвариант уравнений Максвелла.

Действие S для поля в среде без источников есть

$$S = \frac{1}{16\pi} \int F_{ik} H_{ik} d\tau, \quad (10)$$

где $d\tau = dx dt$. Подставим в (10) фиктивное гармоническое поле A_i , вычисляя действие на единицу объема однородных координат (пространственных и времени). Значение действия для такого поля равно

$$S = (F, \epsilon F/2) = \lambda (A_i, A_i) \quad (11)$$

и совпадает с λ при единичной норме. При переходе на дисперсионную кривую (плоскость) величина λ , а вместе с ним и действие обращается в нуль.

Перепишем соотношение (8) в трехмерных обозначениях:

$$\lambda = \frac{\text{Re}[(E^*, D) - (B^*, H)]}{(|A^z| - |\varphi|^2)}. \quad (12)$$

Отметим, что при $\epsilon=1$ уравнения (7) есть уравнения Прокá для

* Поскольку оператор $\overset{\wedge}{\epsilon}_{iklm}$ эрмитов.

«фотона» с массой покоя, квадрат которой пропорционален λ [6]. В уравнениях (7) в общем случае значение λ может быть отрицательным.

3. Баланс энергии и ее потока в терминах λ . При выводе баланса используют известную процедуру умножения уравнений на поля, когда возникает комбинация, приводящая к соотношению

$$\partial W / \partial t + \operatorname{div} S = -jE. \quad (13)$$

Применим ее к уравнениям (7), заменяя ток $(4\pi/c)j$ на значение λA . Как и в разд. 1, рассматривается узкий пакет, когда набор гармоник $\lambda(\omega, k) A_\omega$ есть результат применения оператора $\hat{\lambda}$ к $A(t)$.

Проинтегрируем соотношение (13) по неоднородным координатам y . В правой части возникает выражение

$$-\frac{c}{4\pi} \int (E(t) \hat{\lambda} A(t)) dy. \quad (14)$$

Для узкого пакета $A(t) = \operatorname{Re}\{A \exp[i(kx - \omega t)]\}$, где A — медленно меняющаяся амплитуда, оператор $\hat{\lambda}$ переходит в дифференциальный:

$$\hat{\lambda} A(t) = \operatorname{Re}\left(\lambda(\omega_0)A - i \frac{\partial \lambda}{\partial k} \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t}\right) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (15)$$

Поле E нужно выразить через потенциалы,

$$E = -\operatorname{Re}\left[\left(\nabla_{\perp} \varphi + ik\varphi - \frac{i\omega}{c} A\right)\right] \exp[i(kx - \omega t)], \quad (16)$$

где ∇_{\perp} — градиент по «неоднородным» координатам y . Кроме того, условие Лоренца, которому с необходимостью удовлетворяют A и φ , приобретает для квазигармоник вид

$$\operatorname{div} A_{\perp} + ikA - \frac{i\omega}{c} \varphi = 0. \quad (17)$$

Подставляя (15) — (17) в (13) и интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{16\pi} \left[-\left(\omega \frac{\partial \lambda}{\partial \omega}\right) \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial \lambda}{\partial k} \nabla \right] \int (|A|^2 - |\varphi|^2) dy, \quad (18)$$

откуда энергия (при отбрасывании нормировочного множителя (9)) равна $(-\omega \partial \lambda / \partial \omega)$, а поток ее есть $(\omega \partial \lambda / \partial k)$. Напомним, что вся процедура проводилась для фиктивного поля, а затем совершился переход к истинному, когда $\lambda = 0$.

4. Тензор энергии импульса. Для простоты изложения рассмотрим среду, квазиоднородную по всем направлениям. В работе [3] приведен вывод тензора энергии-импульса T_{ik} из уравнений (6) для узких волновых пакетов, когда оператор ε можно заменить дифференциальным. Рассмотрим более компактный вывод, отражающий связь T_{ik} с действием S .

Действие для поля в среде при заданном квазигармоническом токе I_i есть

$$S = \int \left[\frac{\varepsilon_{iklm} k_i A_k^* k_l A_m}{8\pi} - \frac{\operatorname{Re}}{2c} (A_i^* I_i e^{-i\Phi}) \right] d\tau, \quad (19)$$

где ε — функция медленных переменных $k_i = \partial\Phi/\partial x_i$, Φ — фаза потенциалов A_i , I_i — быстроосциллирующий ток.

Вариация действия по потенциалам даёт правильные уравнения движения (6). Вариация по фазе Φ с учетом соотношения $k_i = \partial\Phi/\partial x_i$ приводит к уравнению

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial k_i}\right) \frac{\epsilon_{pqlm} k_p A_q^* k_l A_m}{8\pi} = \frac{\text{Im}(A_i^* I_i)}{2c}. \quad (20)$$

После умножения (20) на k_k приходим к условию баланса энергии-импульса, поскольку в правой части возникает 4-сила [7]

$$f_k = \frac{\text{Re}(F_{kl}^* I_l)}{2c} = \frac{k_k \text{Im}(A_i^* I_i)}{2c}.$$

(Напомним, что слагаемое $I_i k_i$ равно нулю в силу уравнения непрерывности.)

В результате тензор энергии-импульса есть

$$T_{ik} = \frac{-k_i}{8\pi} \frac{\partial}{\partial k_k} (\epsilon_{pqlm} k_p A_q^* k_l A_m) \quad (21)$$

и в силу формулы (8) просто выражается через λ :

$$T_{ik} = -k_i \frac{\partial \lambda}{\partial k_k} (A_l, A_l), \quad (22)$$

где ω , k_i удовлетворяют дисперсионному уравнению. Несложный анализ показывает, что формула остается в силе и для неоднородной по координатам среды.

Отметим, что формулу (21) легко получить из общего выражения для тензора энергии-импульса через плотность функции Лагранжа [7]. Необходимо только учесть, что координатами являются переменные k_i , а сама плотность обращается в нуль. Таким образом, компактность формулы (21) сохраняется и для неоднородной среды и связана со структурой действия для квазигармонического поля.

Из формул (22) и (18) вытекает соотношение, найденное в [3]:

$$T_{ik} = k_i u_k \frac{W}{\omega \gamma}, \quad (23)$$

где $u_k = \partial \omega \gamma / \partial k_k$ — четырехмерная групповая скорость, γ — релятивистский фактор, W — плотность энергии. Непосредственно из нее следует также нетривиальное (но известное) утверждение, что величины $(W/\omega, S/\omega c)$ образуют 4-вектор.

5. Примеры

а) Неподвижная однородная среда. Модифицированные уравнения Максвелла (6) для однородной среды с проницаемостью $\epsilon(\omega)$ имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{B} + \frac{i\omega \epsilon}{c} \mathbf{E} = \lambda \mathbf{A}, \quad \epsilon \text{div } \mathbf{E} = \lambda \varphi. \quad (24)$$

Поля \mathbf{E} и \mathbf{B} в (24) должны быть выражены через потенциалы, которые связаны условием Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{i\omega}{c} \varphi.$$

Для поперечных волн (когда $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$) параметр λ есть

$$\lambda = \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right).$$

Из формулы (22) получаем тензор энергии-импульса. В частности, энергия есть

$$W = -\omega \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \Big|_{\lambda=0} \frac{|\mathbf{A}|^2}{16\pi} = \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial \omega} \frac{|\mathbf{A}|^2}{16\pi},$$

что совпадает с известной формулой

$$W = \frac{1}{16\pi} \left(|\mathbf{B}|^2 + \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega\epsilon) |\mathbf{E}|^2 \right). \quad (25)$$

Отметим, что если среда имеет также магнитную проницаемость, то параметр λ равен

$$\lambda = \left(\frac{k^2}{\mu} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) = 0.$$

Только при такой записи дисперсионного уравнения формула $W \sim (-\omega d\lambda/d\omega)$ даст правильное значение энергии (традиционная форма: $k^2 - (\omega/c)^2 \epsilon \mu = 0$).

б) Волновод с изотропной средой. Потенциал ϕ можно положить равным нулю, тогда $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Вспомогательное поле удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta_{\perp} \mathbf{A} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k^2 + \lambda \right) \mathbf{A} = 0, \quad (26)$$

где k — продольное волновое число, с граничными условиями на металлических стенках

$$A_z|_r = A_r|_r = 0.$$

Такая задача разрешима лишь при некоторых волновых числах k , зависящих от профиля волновода. Для данной простой задачи числа k те же, что и в задаче об истинных модах.

Эти числа определяют значения λ :

$$\lambda = (k^2 + k^2 - \omega^2 \epsilon / c^2).$$

Приравнивая λ к нулю, получим дисперсионное уравнение.

Подсчитаем энергию через значение λ по формуле (22):

$$W = -\omega \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \int \frac{|\mathbf{A}|^2 d\sigma}{16\pi} = \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial(\omega^2 \epsilon)}{\partial \omega} \Big|_{\lambda=0} \int \frac{|\mathbf{A}|^2}{16\pi} d\sigma.$$

Преобразуем ее. Используем соотношение

$$\int |\mathbf{B}|^2 d\sigma = \int |\operatorname{rot} \mathbf{A}|^2 d\sigma = \int |\mathbf{A}|^2 d\sigma \left(\lambda + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right)$$

и связь $\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}$. В результате формула переходит в известную (25).

В заключение отметим, что процедура решения уравнений Максвелла не усложняется с введением параметра λ . При аналитических расчетах, требующих знания энергетических характеристик, введение λ часто упрощает задачу. Это связано с тем, что анализ дисперсионного уравнения в некоторых отношениях проще, чем анализ самих полей. Приведенные примеры имеют методическую цель. В более сложных ситуациях, например, когда изучается резонансное взаимодействие циклотронной волны с другими волнами, введение параметра λ может быть весьма эффективным.

Авторы глубоко признательны Б. М. Болотовскому, М. Л. Левину, С. М Рытову, а также участникам руководимых ими семинаров, за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капчинский М. И., Юдин Л. А. // ЖТФ. 1981. Т. 51. С. 1984.
2. Рытов С. М., Юдкевич Ф. С. // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 887.
3. Рытов С. М., Полевой В. Г. // УФН. 1978. Т. 125. Вып. 3. С. 549.
4. Ефимов С. П., Юдин Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 12. С. 1514.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. С. 381.
6. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теории квантовых полей. — М.: Наука, 1982. С. 29.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967. С. 108.

Московский радиотехнический
институт
АН СССР

Поступила в редакцию
20 июля 1989 г.,
после доработки
6 марта 1990 г.

DISPERSION INVARIANT AND ENERGY-MOMENTUM TENSOR IN MACROSCOPIC ELECTRODYNAMICS

S. P. Efimov, L. A. Yudin

Eigenvalue problem is introduced for macroscopic Maxwell's equations describing waves in medium similar to waveguide. The parameter λ is derived for energy-momentum tensor by means of derivative: $\partial\lambda/\partial k_i$, where k_i is the wave vector. Dispersion invariant is shown to be a normalized action for the electromagnetic field in a medium. An example is considered for the wave guide with isotropic medium having space and time dispersion. Operation with λ -parameter technique is demonstrated. Advantages are discussed for the given approach on calculation of energy-momentum tensor in more complex problems.

УДК 533.538

**ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

A. N. Котюсов

Рассмотрена задача о воздействии переменным электрическим полем на газ со взвешенными в нем положительно и отрицательно заряженными частицами. Установлено, что в такой системе развивается неустойчивость, приводящая к росту возмущений концентрации частиц, их сближению и возможному дальнейшему слипанию. Эффект определяется коллективным полем, создаваемым ансамблем частиц. Получено выражение для инкремента данной неустойчивости. Рассмотренный эффект может быть использован для электрической очистки сильно запыленных газов.

Из литературы, посвященной анализу течений системы «газ — твердые частицы» [1, 2], известно, что наличие на частицах электростатического заряда чрезвычайно сильно влияет на закономерности течения взвесей. Часто оказывается, что силы, связанные с появлением электростатических зарядов, сравнимы по величине или даже значительно превосходят силы, обусловленные действием других физических факторов.

Как правило, в многофазной системе почти всегда присутствуют электростатические заряды, и в таких важных технических приложениях, как электростатическое осаждение, ксерография и т. п., они играют главенствующую роль. Особенно большое значение имеет наличие электрических зарядов на частицах при рассмотрении электростатического осаждения, которое является одним из наиболее часто используемых методов очистки газов. В частности, этот метод применяется на тепловых электростанциях, сжигающих угольную пыль. Заряды, приобретаемые частицами аэрозоля (например, пыли) при пневмотранспорте, контакте с поверхностями и т. п., достаточно малы ($q \sim 10^{-11}$ К). По этому для очистки газов методом электростатического осаждения требуется создание в электростатических фильтрах больших электрических полей либо увеличение пути, на котором частица подвергается действию электрического поля, либо дополнительной зарядки частиц аэрозоля с помощью коронного разряда [2].

Из экспериментов известно, что в заряженном аэрозоле часто присутствуют заряды обоих знаков. В этом случае аэрозоль может рассматриваться как некоторая плазмоподобная среда, в которой роль ионов и электронов играют положительно и отрицательно заряженные частицы.

При наличии упорядоченного движения зарядов одного знака в плазме относительно зарядов другого знака (например, при движении электронного пучка через «фон» компенсирующих его объемный заряд ионов) в системе возникает так называемая пучковая неустойчивость [3]. Очевидно, что подобного рода эффект может иметь место и при относительном движении макроскопических заряженных частиц разных знаков. Впервые подобная задача была решена в работе [4] при исследовании движения заряженных капель жидкости через проводящую среду. Было показано, что возникающая при этом неустойчивость при-

входит к быстрому росту электрического поля в системе. Кроме того, в случае, когда неустойчивость носит мелкомасштабный характер, ее следствием может быть увеличение возмущений плотности частиц, что приводит к появлению областей с повышенной концентрацией. В этих областях происходит возрастание вероятности столкновений частиц, а следовательно, и их слипания (коагуляции). Такой эффект может наблюдаться в густых искусственных туманах. В итоге возможен рост размеров частиц и их дальнейшее выпадение из смеси под действием силы тяжести.

Очевидно, что относительное упорядоченное движение разноименно заряженных частиц может быть организовано с помощью воздействия на систему электрическим полем. При этом особый интерес представляет исследование применения переменного поля, поскольку в этом случае не требуется создания больших путей движения частиц, необходимых для возникновения неустойчивости. Возможность воздействия переменным электрическим полем на аэрозоль уже обсуждалась в [5], где рассматривался вопрос о вызывании осадков из облаков, что также может быть связано с наличием на облачных каплях электрических зарядов.

В настоящей работе исследуется влияние переменного электрического поля на систему нестакивающихся положительно и отрицательно заряженных частиц, взвешенных в газе.

Движение заряженных частиц в газе описывается следующими уравнениями [1, 6]:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} n_1 \mathbf{v}_1 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + \operatorname{div} n_2 \mathbf{v}_2 = 0; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e_1 n_1 - 4\pi e_2 n_2; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = (4/3)\pi R_1^3 (\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} n_1 \mathbf{v}) + (4/3)\pi R_2^3 (\frac{\partial n_2}{\partial t} + \operatorname{div} n_2 \mathbf{v}); \quad (4)$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) + e_1 \mathbf{E}/m_1; \quad (5)$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}) - e_2 \mathbf{E}/m_2. \quad (6)$$

Здесь $n_1, n_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, e_1, e_2, m_1, m_2, R_1, R_2$ — соответственно концентрации, скорости, заряды, массы и радиусы положительно и отрицательно заряженных частиц, \mathbf{v} — скорость газа, \mathbf{E} — электрическое поле. При стоксовском режиме обтекания $v_1 = 9v\rho/2\rho_t R_1^2$, $v_2 = 9v\rho/2\rho_t R_2^2$, где v — кинематическая вязкость газа, ρ/ρ_t — отношение плотностей газа и вещества частиц. Уравнения (5), (6) справедливы при условии «ползущего» обтекания, когда число Рейнольдса $Re = Ru/v \ll 1$. Данная система уравнений получена в предположении $R_{1,2} \ll n_{1,2}^{-1/3} \ll \lambda$, где λ — характерный масштаб гидродинамических возмущений.

Исследуем действие переменного электрического поля, на данную систему. Полагая невозмущенные колебания заряженных частиц в поле синхронными, а газ покоящимся, для поля $E_0(t)$ частоты ω получим следующие значения невозмущенных скоростей частиц и концентраций:

$$v_{10} = i \frac{e_1/m_1}{\omega + iv_1} E_0, \quad v_{20} = -i \frac{e_2/m_2}{\omega + iv_2} E_0, \quad n_1 = n_{10}, \quad n_2 = n_{20}. \quad (7)$$

Для исследования параметрической неустойчивости линеаризуем уравнения (1)–(6) на фоне невозмущенных значений $E_0, n_{10}, n_{20}, v_{10}, v_{20}$. Считая систему квазинейтральной и возмущения $v'_1, v'_2, E', n'_1, n'_2$ зависящими от координат по закону $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, из (1)–(6) получим

$$ikv'_1 = -(\frac{\partial}{\partial t} + ikv_{10}) n'_1/n_{10}; \quad (8)$$

$$ikv'_2 = -(\partial/\partial t + ikv_{20})n'_2/n_{20}; \quad (9)$$

$$ikE' = 4\pi e_1 n'_1 - 4\pi e_2 n'_2; \quad (10)$$

$$ikv' = \sum_{i=1,2} \frac{4}{3} \pi R_i^3 (\partial/\partial t + ikv_0) n'_i; \quad (11)$$

$$(\partial/\partial t + ikv_{10})v'_1 = -v_1(v'_1 - v') + e_1 E'/m_1; \quad (12)$$

$$(\partial/\partial t + ikv_{20})v'_2 = -v_2(v'_2 - v') - e_2 E'/m_2. \quad (13)$$

Исключая из (8)–(13) v'_1 , v'_2 , E' , для возмущений концентраций частиц будем иметь следующие выражения:

$$[(\partial/\partial t + ikv_{10} + v_1)(\partial/\partial t + ikv_{10}) + \omega_{p_1}^2]n'_1 = \omega_{p_1}^2 e_2 n'_2/e_1; \quad (14)$$

$$[(\partial/\partial t + ikv_{20} + v_2)(\partial/\partial t + ikv_{20}) + \omega_{p_2}^2]n'_2 = \omega_{p_2}^2 e_1 n'_1/e_2. \quad (15)$$

Здесь $\omega_{p_1}^2 = 4\pi e_1^2 n_{10}/m_1$, $\omega_{p_2}^2 = 4\pi e_2^2 n_{20}/m_2$.

Будем искать решения (14), (15) в предположении $\partial/\partial t + ikv_{20} \ll v_2$, $\partial/\partial t + ikv_{10} \ll v_1$. Тогда уравнения (14), (15) запишутся в виде

$$[(\partial/\partial t + ikv_{10}) + \sigma_1]n'_1 = e_2 \sigma_1 n'_2/e_1; \quad (16)$$

$$[(\partial/\partial t + ikv_{20}) + \sigma_2]n'_2 = e_1 \sigma_2 n'_1/e_2, \quad (17)$$

где $\sigma_1 = \omega_{p_1}^2/v_1$, $\sigma_2 = \omega_{p_2}^2/v_2$.

Далее перейдем к новым переменным $n'_1 = y_1 \exp(-i \int k v_{10} dt - \sigma_1 t)$, $n'_2 = y_2 \exp(-i \int k v_{20} dt - \sigma_2 t)$, после чего уравнения (16), (17) будут выглядеть следующим образом:

$$dy_1/dt = e_2 \sigma_1 y_2 e^{-\alpha}/e_1; \quad (18)$$

$$dy_2/dt = e_1 \sigma_2 y_1 e^{\alpha}/e_2, \quad (19)$$

где $\alpha = i \int (k v_{20} - k v_{10}) dt + (\sigma_2 - \sigma_1)t$. Уравнения (18), (19) могут быть записаны в виде одного уравнения второго порядка относительно функции y_1 , которое при переходе к переменной $y_1 = z \exp(-\alpha/2)$ принимает вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dt} + \sigma_1 \sigma_2 \right) z = 0, \quad (20)$$

где $\beta = d\alpha/dt$.

С учетом (7) и в предположении, что $E_0(t)$ изменяется по синусоидальному закону, уравнение для функции z принимает вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \left[\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \frac{i\Omega_\omega}{2} \cos \omega t - \frac{\Omega^2}{8} (1 - \cos 2\omega t) + i \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \Omega \sin \omega t \right] z = 0. \quad (21)$$

Здесь $\Omega = -ikE_0 \left[\omega^2 \left(\frac{e_2/m_2}{\omega^2 + v_2^2} + \frac{e_1/m_1}{\omega^2 + v_1^2} \right)^2 + \left(v_1 \frac{e_1/m_1}{\omega^2 + v_1^2} + v_2 \frac{e_2/m_2}{\omega^2 + v_2^2} \right)^2 \right]^{1/2}$.

Для дальнейших вычислений удобно перейти к импедансу $f = z'/z$, после чего получим

$$f'' + f' - \left[\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \frac{i\Omega_\omega}{2} \cos \omega t - \frac{\Omega^2}{8} (1 - \cos 2\omega t) + i \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \Omega \sin \omega t \right] = 0. \quad (22)$$

Решение (22) удобно искать в виде $f = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{i\Omega}{2} \sin \omega t + \Phi(t)$. Тогда для функции Φ будем иметь

$$\Phi' + (\sigma_1 + \sigma_2 + \Phi)\Phi + i\Omega\Phi \sin \omega t + i\Omega\sigma_1 \sin \omega t = 0. \quad (23)$$

Дальнейшие вычисления производим в предположении $\Phi \ll \sigma_1 + \sigma_2$. При этом оказывается возможным исследование уравнения (23) методом возмущений. Решение (23) ищется в виде $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, и для функций Φ_0 , Φ_1 получаем

$$\Phi'_0 + (\sigma_1 + \sigma_2)\Phi_0 = -i\Omega\sigma_1 \sin \omega t; \quad (24)$$

$$\Phi'_1 + (\sigma_1 + \sigma_2)\Phi_1 = -\Phi_0^2 - i\Omega\Phi_0 \sin \omega t. \quad (25)$$

Решая систему уравнений (24), (25), для инкремента параметрической неустойчивости получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \text{Im}\omega_0 = & \frac{\sigma_1 \sigma_2 (kE_0)^2}{2(\sigma_1 + \sigma_2)[\omega^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2]} \left[\omega^2 \left(\frac{e_1/m_1}{\omega^2 + \nu_1^2} + \frac{e_2/m_2}{\omega^2 + \nu_2^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\nu_1 \frac{e_1/m_1}{\omega^2 + \nu_1^2} + \nu_2 \frac{e_2/m_2}{\omega^2 + \nu_2^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Если концентрации, радиусы и величины зарядов одинаковы у обеих групп частиц, выражение для инкремента неустойчивости принимает следующий вид:

$$\text{Im}\omega_0 = \frac{\sigma (kE_0)^2 (e/m)^2 (\omega^2 - \nu^2)}{(\omega^2 + 4\sigma^2)(\omega^2 + \nu^2)^2}. \quad (27)$$

Быстрое уменьшение инкремента на высоких частотах объясняется тем, что частицы не успевают отслеживать за переменным полем и испытывают лишь мелкие осцилляции с малой амплитудой, т. е. практически покоятся.

Приведем количественную оценку инкремента неустойчивости. При воздействии переменного поля на заряженную пыль для $e = 10^{-8}$ СГС, $n = 10^8$ см⁻³, $R = 10^{-4}$ см, $E \approx 30$ В/см, $k \sim n^{1/3}$ получим $\text{Im}\omega_0 \sim 1$ с⁻¹. Очевидно, что характерное время возрастания концентрации частиц пыли порядка одной секунды. В результате этого процесса в областях с повышенной концентрацией увеличивается вероятность столкновения частиц, а следовательно, и их слипания. Таким образом, использование источников переменного электрического поля может успешно применяться для фильтрации сильно запыленных газов.

Автор выражает благодарность Б. Е. Немцову за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

- Соу С. Гидродинамика многофазных систем. — М.: Мир, 1971.
- Бургейд Р. Течение газа со взвешенными частицами. — М.: Мир, 1975.
- Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. // УФН, 1961. Т. 73. Вып. 4. С. 701.
- Трахтенгерц В. Ю. // ДАН СССР. 1989. Т. 308. № 3. С. 584.
- Протасевич Е. Т. // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 5. С. 265.
- Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.

УДК 538.56:519.25

**ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА
В СЛОИСТОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ
(АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ПОЛЯ)**

Г. В. Попов, И. О. Яроцук

Рассматривается задача об излучении точечного источника, помещенного вблизи границы раздела однородной и случайно-неоднородной сред. Учитываются различные условия на границе. На основе метода погружения численно рассчитываются средние плотности потока энергии спектральных компонент волнового поля. Устанавливается связь последних с интенсивностью поля. Исследуется роль граничного условия и затухания в задаче.

Последнее время определенный интерес у ряда авторов вызывает задача об излучении точечного источника, помещенного в слоистой случайно-неоднородной среде вблизи границы раздела однородной и неоднородной сред [1, 2]. Такая задача вызывает повышенное внимание в связи с вопросами локализации поля и канализации энергии поля, т. е. стохастическая, но в среднем однородная среда может обладать волноводными (канализирующими) свойствами.

Использование метода погружения с последующим численным моделированием фурье-компонент поля (которые имеют также самостоятельный физический смысл) позволяет детально исследовать указанную проблему, не обращаясь к приближенным методам [1, 2], пределы допустимости которых сложно определить.

Итак, будем рассматривать слой стохастической среды, занимающей по оси x часть пространства $L_0 < x < L$ (далее считаем, что $L_0 \rightarrow -\infty$) и в точке $x=L=0$, $\rho=0$, где $\{\rho\}$ — плоскость, перпендикулярная оси x , помещен точечный источник. Тогда волновое поле внутри среды G описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, \rho) + \Delta_\rho G + k^2 [1 + \varepsilon(x) + i\gamma] G = \delta(x-L)\delta(\rho), \quad (1)$$

здесь k — волновое число, ε — флуктуации диэлектрической проницаемости, γ — затухание в среде. Далее будем считать, что $\varepsilon(x)$ — гауссов дельта-коррелированный случайный процесс $\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$, $\langle \varepsilon(x) \varepsilon(x') \rangle = -2\sigma^2 \delta(x-x')$.

В дальнейшем будем рассматривать различные условия на границе $x=L$: 1) условие свободного прохождения (непрерывность поля и его производной при $x=L$, вне слоя $\varepsilon=\gamma=0$) и 2) отражающая граница, на которой $\partial G / \partial x = 0$.

Фурье-гармоники волнового поля $G(x, q)$, где

$$G(x, \rho) = (2\pi)^{-2} \int d^2 q e^{iq\rho} G(x, q),$$

удовлетворяют одномерному уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, q) + [p^2 + k^2 (\varepsilon(x) + i\gamma)] G(x, q) = 0 \quad (2)$$

с краевыми условиями в случае свободного прохождения

$$\frac{i}{p} G'(L, q) + G(L, q) = -\frac{i}{p}, \quad \frac{i}{p} G'(L_0, q) - G(L_0, q) = 0. \quad (3)$$

В случае отражающей границы волновое поле $G_{\text{отр}}(x, q)$ выражается следующей формулой [3]:

$$G_{\text{отр}}(x, q) = \frac{G(x, q)}{1 - ipG(L, q)},$$

где $p^2 = k^2 - q^2$.

Отметим, что уравнение (2) с краевыми условиями (3) описывает волновое поле в слое неоднородной среды $L_0 < x < L$, если на него справа падает плоская наклонная волна $G_0 = g \exp[ip(L-x) + iq\varphi]$, где $g = (2ip)^{-1}$ — амплитуда падающей волны. В этом случае p и q — проекции волнового вектора $\mathbf{k} = (p, q)$ соответственно на ось x и плоскость $\{\mathbf{p}\}$. (Далее, учитывая зависимость полей только от $|q|$, будем опускать знак вектора.) Такая задача рассматривалась авторами в работе [4], где исследовалось поведение моментов интенсивности волнового поля. В настоящей работе, имея в виду постановку задачи (1), будем исследовать также энергетическую характеристику поля — плотность потока энергии.

Следуя идеям метода погружения, введем зависимость полей от параметра L — положения правой границы слоя, а также безразмерные переменные $x = xD$, $h = LD$ ($D = k^2 \sigma^2 / 2$ — коэффициент диффузии). Тогда для нормированных фурье-гармоник поля $\tilde{G} = G/(2ip)$, $\tilde{H} = H/(2ip)$ (здесь $H(x, q) \equiv G(x, q, x)$) имеем уравнения погружения, эквивалентные задаче (2), (3) [3] (ради удобства все тильды опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial h} G(x, q, h) = ipG(x, q, h) + \frac{\alpha}{p} (i\varepsilon(h) - \beta/2) G(x, q, h) H(h, q), \quad (4a)$$

$$G(x, q, x) = H(x, q);$$

$$\frac{\partial}{\partial h} H(h, q) = 2ip(H(h, q) - 1) + \frac{\alpha}{p} (i\varepsilon(h) - \beta/2) H^2(h, q), \quad (4b)$$

$$H(h_0, q) = 1;$$

$$G_{\text{отр}}(x, q, h) = \frac{2G(x, q, h)}{2 - H(h, q)}. \quad (4b)$$

Здесь $\varepsilon(h)$ — гауссов белый шум, $\langle \varepsilon(h) \rangle = 0$, $\langle \varepsilon(h) \varepsilon(h') \rangle = \delta(h-h')$, $\alpha = k/D$ — безразмерное волновое число, $\beta = ky/D$ — стохастический параметр, физический смысл которого обсуждался, например, в [3].

Как известно, плотность потока энергии волнового поля определяется формулой

$$S(x, q, h) = (2ip)^{-1} \left(G \frac{d}{dx} G^* - G^* \frac{d}{dx} G \right), \quad (5)$$

где множитель $(2ip)^{-1}$ соответствует нормировке на плотность потока энергии в свободном пространстве.

В случае отражающей границы плотность потока энергии имеет согласно (4b) следующий вид:

$$S_{\text{отр}}(x, q, h) = \frac{4}{|2 - H(h, q)|^2} S(x, q, h). \quad (6)$$

Учитывая исходное уравнение (2) с условием (3), можем также написать выражение

$$S(x, q, h) = 1 - |R_h|^2 - \beta \frac{p}{\alpha} \int_x^h d\xi J(x, q, \xi), \quad (7)$$

где $R_h = H(h, q) - 1$ — коэффициент отражения от слоя в задаче о падении плоской волны, $J = GG^*$ — интенсивность плоской волны.

Рассмотрим среднюю величину плотности потока энергии на границе $x=h$. Для пропускающей границы, согласно (7), имеем

$$\langle S(x, q, h) \rangle = 1 - \langle |R_h|^2 \rangle, \quad (8)$$

откуда следует, что при $\beta \rightarrow 0$ $\langle S \rangle \rightarrow 0$. Для отражающей границы

$$\langle S_{\text{отр}}(x, q, h) \rangle = 4 \langle (1 - |R_h|^2) |1 - R_h|^{-2} \rangle. \quad (9)$$

Усредненное выражение (9) по фазе коэффициента отражения R_h , получаем, что ($q < \alpha$).

$$\langle S_{\text{отр}}(x, q, h) \rangle = 4. \quad (10)$$

Формулы (8), (9) моделировались на ЭВМ стандартным способом с использованием свойства эргодичности [5], значения числовых параметров, следуя [3, 4], выбирались следующие: $\alpha = 25$, $\beta = 0,08$, шаг дискретизации $\Delta h = 0,01$, длина реализации усреднения — 300. Такой выбор α соответствовал малым флуктуациям неоднородностей ($k\sigma^2 \ll 1$), а выбор параметра β — большой стохастичности задачи (условие малости диссипации $k\gamma \ll D$). Величина q , являющаяся проекцией волнового вектора k на плоскость $\{\rho\}$ в задаче о падении волны, варьировалась от нуля до α , что соответствовало изменению угла φ между осью x и направлением падения волны от 0 до 90° .

Результаты численного моделирования $\langle S \rangle$ (нижняя кривая) и $\langle S_{\text{отр}} \rangle$ (верхняя кривая) представлены на рис. 1 (см. на вклейке). Откуда видно, что расчет удовлетворительно согласуется с выражениями (8) и (10) при $q/\alpha \leq 0,6$, что соответствует $\varphi \leq 50^\circ$. Увеличение параметра α приводит к расширению области применимости метода усреднения по быстрым осцилляциям и, соответственно, к справедливости формул (8) и (10).

Рассмотрим теперь средние плотности потоков энергии внутри неоднородного полупространства. Получим полезные для теоретического и численного анализа формулы.

Дифференцируя по x (4а), легко найти выражение для производной поля

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, q, h) = \frac{i p H(x, q) - 2 i p}{H(x, q)} G(x, q, h),$$

подставляя которое в формулы (5) и (6), получим удобные для численных расчетов формулы:

$$S(x, q, h) = \frac{1 - |R_x|^2}{|1 + R_x|^2} J(x, q, h); \quad (11)$$

$$S_{\text{отр}}(x, q, h) = \frac{4}{|1 - R_h|^2} \frac{1 - |R_x|^2}{|1 + R_x|^2} J(x, q, h). \quad (12)$$

Используя выражение для интенсивности поля J (его можно получить из уравнений (4))

$$J(x, q, h) = |1 + R_x|^2 \frac{1 - |R_h|^2}{1 - |R_x|^2} \exp\left(-\tilde{\beta} \int_x^h d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - |R_\xi|^2}\right), \quad (13)$$

где $\tilde{\beta} = (p/\alpha)\beta$,

формулы (11) и (12) можно переписать в следующем виде:

$$S(x, q, h) = (1 - |R_h|^2) \exp\left(-\tilde{\beta} \int_x^h d\xi \frac{|1+R_\xi|^2}{1-|R_\xi|^2}\right); \quad (14)$$

$$S_{\text{отр}}(x, q, h) = 4 \frac{1-|R_h|^2}{|1-R_h|^2} \exp\left(-\tilde{\beta} \int_x^h d\xi \frac{|1+R_\xi|^2}{1-|R_\xi|^2}\right). \quad (15)$$

Отсюда видно, что все три функции (13) — (15) имеют одинаковую структуру, и можно ожидать, что при любом $\tilde{\beta} > 0$ в асимптотике они будут иметь одинаковое экспоненциальное спадание вглубь слоя.

В случае же $\tilde{\beta} \rightarrow 0$ из формул (14), (15) следует, что для любого x

$$\lim_{\tilde{\beta} \rightarrow 0} \langle S(x, q, h) \rangle = 1 - \lim_{\tilde{\beta} \rightarrow 0} \langle |R_h|^2 \rangle = 0; \quad (16)$$

$$\lim_{\tilde{\beta} \rightarrow 0} \langle S_{\text{отр}}(x, q, h) \rangle = 4. \quad (17)$$

Выражения (16), (17) совпадают со случаем отсутствия флюктуаций среды [3].

С учетом конечного затухания $\tilde{\beta}$ получить явные выражения как для $\langle J \rangle$, так и для $\langle S \rangle$, $\langle S_{\text{отр}} \rangle$ не удается (моменты интенсивности волны J были исследованы в работе [3], где были получены уравнения Фоккера — Планка, которые интегрировались численно).

Используя уравнения (4), (14), (15) и применяя метод усреднения по быстрым осцилляциям (что справедливо, если $p \gg 1$), можно получить явные выражения для средних логарифмов полей:

$$\langle \ln J \rangle = (1 + \tilde{\beta})(x - h) + \langle \ln |1 + R_x|^2 \rangle,$$

$$\langle \ln S \rangle = (1 + \tilde{\beta})(x - h) + \langle \ln (1 - |R_x|^2) \rangle,$$

$$\langle \ln S_{\text{отр}} \rangle = (1 + \tilde{\beta})(x - h) + \ln 4,$$

откуда, учитывая, что в случае полупространства $|R_x|^2$ имеет стационарное распределение (не зависит от x), можно определить длину локализации полей l , например,

$$l^{-1} = \lim_{\tilde{\beta} \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \ln S \right\rangle = 1,$$

или, в размерных координатах, $l = D^{-1}$.

Уравнения (11) и (12) численно моделировались. На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов плотности потока энергии для случая пропускающей (рис. 2) и отражающей (рис. 3) границ для различных значений $(q/\alpha) = 0; 0.5; 0.87; 0.98$, что соответствовало углам падения волны $\varphi = 0; 30; 60; 80^\circ$ (кривые 1—4 соответственно). На рис. 2 кривая 2 не приведена, так как она располагается достаточно близко к кривой 1.

Расчеты показывают, что при $(h-x) \geq 1$ функции $\langle S \rangle$ и $\langle S_{\text{отр}} \rangle$ экспоненциально спадают в глубь слоя с декрементами, равными декременту средней интенсивности поля $\langle J \rangle$. При этом увеличение параметра q приводит к увеличению декремента затухания в соответствии с работой [4].

Однако вблизи границы раздела характер поведения потоков энергии и интенсивности различен. Так, как видно из рис. 2, 3, $\langle S \rangle$ и $\langle S_{\text{отр}} \rangle$ — достаточно гладкие функции, но $\langle J \rangle$ и $\langle J_{\text{отр}} \rangle$ около границы осциллируют с периодом, зависящим от волнового числа α и параметра q . Эти осцил-

ляции обусловлены интерференцией волн, отраженных полупространством случайной среды и границей раздела. Амплитуда осцилляций зависит также от типа отражающей границы и величины параметра β . При наличии отражающей границы уменьшение β приводит к существенному увеличению функции $\langle J_{\text{отр}} \rangle$.

Действительно, в случае отражающей границы средняя интенсивность гармоники на границе определяется формулой

$$\langle J_{\text{отр}} \rangle = 4 \left\langle \frac{|1+R_h|^2}{|1-R_h|^2} \right\rangle,$$

усредняя которую последовательно по фазе R_h , затем по ансамблю реализаций $|R_h|^2$, используя стационарное распределение для $|R_h|^2 = \frac{u-1}{u+1}$ [3] в виде

$$P_\infty(u) = \beta \frac{p}{\alpha} \exp \left[-\beta \frac{p}{\alpha} (u-1) \right],$$

находим следующее выражение:

$$\langle J_{\text{отр}}(h, q, h) \rangle = 4(1 + 2\alpha/(\beta p)). \quad (18)$$

Из (18) следует, что значение средней интенсивности поля на границе раздела неограничено увеличивается при $\beta \rightarrow 0$. Напомним, что в случае свободно пропускающей границы $\langle J \rangle = 1 + \langle |R_h|^2 \rangle$ и $\langle J \rangle \rightarrow 2$ при $\beta \rightarrow 0$.

Таким образом, отражающая граница при уменьшении $\beta \rightarrow 0$ вызывает неограниченный рост средней интенсивности поля $\langle J_{\text{отр}} \rangle$, но приводит, согласно (17), к постоянному среднему потоку энергии, равному четырем, как и в случае отсутствия флуктуаций.

Авторы выражают благодарность В. И. Кляцкину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Озрин В. Д. и др. Материалы IX Всесоюзной школы по дифракции и распространению волн. — Казань, 1988, с. 122.
- Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика 1988. Т. 31. № 10. С. 1210.
- Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
- Попов Г. В., Ярошук И. О. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 10. С. 1266
- Ярошук И. О. // ЖВММФ. 1984. Т. 24. № 11. С. 1748.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
26 сентября 1989 г.

THE POINT SOURCE RADIATION IN RANDOMLY INHOMOGENEUS STOCHASTICAL MEDIUM (THE FIELD SPECTRAL COMPONENT ANALYSIS)

G. V. Popov, I. O. Yaroshchuk

The problem of point source radiation placed near the boundary of plane-layering stochastic and uniform media is considered. The boundary conditions are taken into account. On the basis of imbedding invariant method the flux energy of the field spectral components is numerically calculated. The relation between the field intensity and the latter is established. The role of the boundary conditions and dissipation in the task is considered.

УДК 621.391.244:519

**РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ
В СПЕКТРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ
ОБРАЩЕНИЕМ МАТРИЦЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

A. A. Пыхалов, B. T. Сарычев

Предложен метод оценивания спектральной плотности мощности (СПМ) стационарных процессов на основе метода максимальной энтропии (ММЭ). Выражение для СПМ предлагается в виде обратной величины усредненной периодограммы столбцов обратной матрицы исходных данных. Приведены результаты численных испытаний метода и сравнительного анализа его с одним из известных методов спектрального оценивания.

1. Среди современных методов спектрального анализа стационарных процессов наиболее надежные оценки СПМ дают методы, основанные на ММЭ [1, 2]. Выражение для СПМ ММЭ можно получить, применяя вариационный принцип к энтропии в виде, предложенном Шенноном, $H = \int_0^{2\pi} \log P(\omega) d\omega$ [3]. При этом информация об исходном процессе x может быть представлена в общем виде:

$$A_{ij} = \langle (x a_j^*) (x^* a_i) \rangle, \quad (1)$$

где $\{a_j\}$ — система базисных векторов в N -мерном пространстве. x — N -мерная реализация исследуемого процесса, а $*$ — знак комплексного сопряжения.

Во временном базисе матрица A совпадает с корреляционной и СПМ рассчитывается по формуле Берга [2]:

$$P(\omega) = \left[\sum_{n=-N+1}^{N-1} \lambda_n \exp(-i\omega n) \right]^{-1}. \quad (2)$$

Определение неизвестных множителей Лагранжа $\{\lambda_n\}$ из условий (1) в этом случае является довольно сложной задачей. Для этого необходимо решать систему нелинейных уравнений (формула (34) работы [2]), в которых λ_n входят под знак интеграла.

Для облегчения нахождения множителей Лагранжа удобнее вместо временного базиса использовать базис собственных векторов корреляционной матрицы, в котором матрица A имеет диагональный вид:

$$A_{jj} = E_j = \langle |x a_j^*|^2 \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P(\omega) D_j(\omega) d\omega, \quad (3)$$

где $D_j(\omega) = \left| \sum_{n=1}^N a_{jn} \exp(-i\omega n) \right|^2$ — периодограмма орта a_j . Исходя из вариационного принципа образуем функционал

$$\Phi = H + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left\{ (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P(\omega) D_j(\omega) d\omega - E_j \right\},$$

где $\{\lambda_j\}$ — неопределенные множители Лагранжа, отличные от тех, что использовались в выражении (2). Вариации этого функционала по

$F(\omega)$ дают следующее выражение для СПМ:

$$P(\omega) = \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j D_j(\omega) \right]^{-1}. \quad (4)$$

Умножая каждое из условий (3) на соответствующий множитель Лагранжа и проводя суммирование, можно получить

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j E_j = 1. \quad (5)$$

Кроме этого все $\lambda_j \geq 0$, поскольку $P(\omega) \geq 0$ и $D_j(\omega) \geq 0$. Отсюда следует, что $\lambda_j \sim (NE_j)^{-1}$, т. е. диагонализация матрицы A позволяет сразу получить оценки множителей Лагранжа.

При больших отношениях сигнал/шум наибольшим весовым множителем в знаменателе (4) обладает спектр шумового орта a_s , для которого минимально собственное значение E_s . Пренебрегая остальными членами, можно получить оценку по методу собственных векторов [4]: $P(\omega) = E_s / D_s(\omega)$. Такой же вид имеет СПМ метода Берга [5], с той разницей, что вместо a_s используется авторегрессионный вектор, а в качестве минимального собственного значения E_s — дисперсия шума σ^2 .

Пренебрежение членами с малыми множителями Лагранжа означает, что из N условий (3) используется лишь одно. В этом и заключается причина недостатков указанных методов. При малых отношениях сигнал/шум и сложном спектральном составе исходного процесса погрешности этих методов возрастают.

В методе MUSIC [4] используется q (q — число «шумовых» орт) членов суммы знаменателя (4), при этом все λ_k , $k=N-q, \dots, N$, полагаются равными друг другу. Однако сколь-либо приемлемого и работоспособного критерия разделения пространства на «шумовое» и «информационное» подпространства пока не существует. Также нет достаточных оснований для производимого в этом методе «отбеливания» шума. Хотя метод MUSIC несколько ослабляет недостатки методов Берга и собственных векторов, но не устраняет их полностью.

2. Возможно обойтись без вычисления множителей Лагранжа, если бы удалось найти такой базис, в котором матрица A , оставаясь диагональной, имела бы равные между собой элементы A_{jj} . Тогда, согласно выражению (5), все λ_j были бы также равны друг другу. Покажем, что при некоторых условиях такой базис существует.

Пусть квадратная матрица X образована из отдельных линейно независимых выборок исходных данных $\{x_i\}$. В случае, когда X невырождена (что всегда обеспечивается наличием шумов), столбцы b_j обратной матрицы X^{-1} являются линейно независимыми векторами. Геометрия этих векторов такова, что оси образуют конус вокруг меньшей полуоси эллипсоида рассеяния N -мерного распределения вероятности.

В совокупности со свойством $\{b_j\}$: $\sum_{i=1}^N x_i b_j^* = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символы Кронекера, такое расположение выбранного базиса дает возможность достаточно просто определить спектральные характеристики исходного процесса.

Действительно, если усреднение в условиях (1) проводить по набору выборок, из которых состоит матрица X , то матрица A станет единичной: $\langle (xb_i^*)(x^* b_j) \rangle = \delta_{ij}$, т. е. в выбранном объеме исходной информации (N векторов x) все b_j равноправны и проекции выборок из этого объема на различные b_j не коррелируют между собой. Тогда все λ_j можно положить равными друг другу и каждый $\lambda_j = N^{-1}$. Выражение для СПМ в этом случае примет следующий вид:

$$P(\omega) = N \left[\sum_{j=1}^N B_j(\omega) \right]^{-1}, \quad (6)$$

где $B_j(\omega)$ — периодограмма столбца b_j .

Знаменатель этого выражения можно записать как

$$\sum_{j=1}^N B_j(\omega) = \sum_{n,m=1}^N \left(\sum_{j=1}^N b_{nj} b_{mj}^* \right) \exp[-i\omega(n-m)].$$

Производя замену $k=n-m$ и вводя новые коэффициенты

$$\psi_k = \sum_{j=1}^N \sum_{n=k+1}^N b_{nj} b_{n-kj}^*, \quad k \geq 0, \quad (7)$$

$$\psi_k = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{N-k} b_{nj} b_{n-kj}^*, \quad k < 0,$$

получим $\sum_{j=1}^N B_j(\omega) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \psi_k \exp(-i\omega k)$. Тогда выражение (6) примет вид, аналогичный (2). При этом коэффициенты $\{\psi_k\}$ обладают такой же симметрией ($\psi_k = \psi_{-k}$), что и множители Лагранжа в (2), и могут рассматриваться как их оценки. При анализе одномерных рядов СПМ можно рассчитывать как в виде (6) (без вычисления множителей Лагранжа), так и по формуле Берга, проведя предварительную оценку $\{\lambda_k\}$. Второй путь является более эффективным, так как на это требуется приблизительно в $MN/(M+N)$ (M — число точек СПМ) операций меньше.

Ниже приводятся результаты численных испытаний предложенного метода (далее для определенности — метод обращения) и сравнительный анализ его с методом Берга.

3. Для исследования несмещенности оценок частот спектральных составляющих были проведены расчеты зависимости величины $(\bar{\omega}_{0n} - \omega_0)/\Delta \cdot 100 = \delta_n$ ($\bar{\omega}_{0n}$ — оценка частоты, ω_0 — истинное значение частоты, $\Delta = 2\pi/N$) от числа испытаний n . Рассчитанные зависимости приведены на рис. 1 (см. на вклейке), где кривая 1 соответствует методу Берга 4-го порядка, кривая 2 — методу обращения при уровне шума — 17 дБ. Здесь же отложены доверительные интервалы для $\bar{\omega}_{0n}$ по уровню вероятности 0,95. Представленные на рис. 1 результаты расчетов подтверждают наличие смещения оценок частоты в методе Берга [6] и показывают, что метод обращения дает несмещенные оценки частот.

4. Одним из критериев оценки качества различных спектральных методов может быть точность восстановления ковариационной функции (КФ) по вычисленной СПМ, которую можно оценить как $\eta = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} (R_n - \hat{R}_n)^2$, где R_n — отсчеты истинной КФ, а \hat{R}_n — восстановленная КФ. Расчет СПМ проводился для модели процесса с известной КФ, состоящего из одного сигнала и белого шума с уровнем $\sigma^2 = -17$ дБ. Параметр η рассчитывался с учетом коэффициента подобия, вычисленным методом наименьших квадратов: $K = \sum_{n=0}^{N-1} R_n \hat{R}_n / \sum_{n=0}^{N-1} \hat{R}_n^2$, и при $N=7$ составил: а) для метода Берга $\eta = 0,60 \cdot 10^{-2}$, б) для метода обращения $\eta = 0,07 \cdot 10^{-2}$.

5. Для спектрального анализа сложных сигналов важной особенностью метода является способность его разрешать сигналы на близких частотах. При наличии шума и ограниченности выборок исходных данных разрешение двух близких линий носит вероятностный характер и может быть оценено по частоте появления двух максимумов в интересующем интервале частот n_2 и средней величине провала между ними: $r = M^{-1} \sum_{m=1}^M P_{m, \min} / P_{m, \max}$, где $P_{m, \min}$ — значение СПМ в минимуме между линиями, $P_{m, \max}$ — значение меньшего из двух макси-

мума. На рис. 2 приведены рассчитанные зависимости указанных величин от разноса частот $\Delta\omega$ двух сигналов с одинаковыми амплитудами при уровне шума — 20 дБ и числе испытаний $M = 100$. Кривая 1 — график зависимости n_2 от $\Delta\omega$, кривая 2 — зависимости r от $\Delta\omega$. Разнос частот сигналов указан в долях дискрета ДГФ. Точками на графиках приведены расчетные значения n_2 и r , для величины r отложены доверительные интервалы по уровню вероятности 0,95. Зависимости $n_2(\Delta\omega)$ аппроксимированы функцией $f(x) = 1 - \exp(-p(x))$, зависимости $r(\Delta\omega)$ — функцией $g(x) = p(x^{-1})$, где $p(x)$ — степенной полином третьего порядка. Рис. 2а построен по результатам расчетов методом Берга четвертого порядка, рис. 2б соответствует методу обращения. Как видно из рисунков, метод обращения гораздо чаще разрешает близкие сигналы и при одинаковых разносах $\Delta\omega$ дает более глубокий провал между максимумами, чем метод Берга.

6. Ниже приводятся результаты анализа работы метода обращения в условиях, когда метод Берга дает расщепление спектральной линии. Расчеты были проведены по данным из работы [7], где приводится пример вещественной косинусоиды с частотой $v_0 = 25$ Гц, оцифрованной через каждую $1/8$ периода, и вектор шума с $\sigma^2 = 10^{-4}$. При использовании 11 отсчетов оцифрованной косинусоиды с начальной фазой $\phi_0 = 45$ и 135° метод Берга шестого порядка дает расщепление линии. При $\phi_0 = 45^\circ$ максимумы оказываются на частотах $v_1 = 26,8$ Гц и $v_2 = 34,7$ Гц (рис. 3а) и вид СПМ не отличим от случая, когда в оцениваемом процессе присутствуют два сигнала на тех же частотах. При $\phi_0 = 90^\circ$ расщепление линии в СПМ метода Берга отсутствует (рис. 3б).

Исходные 11-мерные выборки для каждой из начальных фаз были сегментированы сдвигом на один отсчет на шестимерные выборки. Из полученных выборок были составлены матрицы X , к которым был применен метод обращения. Ни в одном из трех вариантов расщепления линии не произошло, при этом в самих СПМ не было качественных различий. На рис. 3в приведен пример СПМ, рассчитанной методом обращения при $\phi_0 = 45^\circ$, с максимумом на частоте $v = 25,2$ Гц.

7. В отличие от большинства существующих методов «сверхразрешения» метод обращения не требует от исходных данных обязательной одномерности. Это делает возможным его применение для оценки двумерных спектров, в частности для пеленгации источников в полупространстве при использовании кольцевых антенных решеток. Для этого необходимо показатель экспоненты при расчете периодограмм $B_j(\omega)$ в выражении (6) представить в виде $\mathbf{k}r_n$, где \mathbf{k} — волновой вектор, а r_n — радиус-вектор n -го элемента решетки. На рис. 4 приведен вид СПМ, рассчитанной методом обращения, в области главного максимума. Углы прихода излучения в модели сигнала составляли $\alpha_0 = 0,7$ рад, $\phi_0 = 0,5$ рад при уровне шума — 23 дБ. Расчет проводился при условии, что кольцевая антennaя решетка состоит из 25 равномерно расположенных по окружности элементов и ее радиус в 15 раз больше длины волны излучения. Анализ сечений СПМ по углам α и ϕ показал, что величина боковых лепестков СПМ не превышает значения — 23 дБ от уровня главного максимума.

8. Приведенные результаты, конечно, не могут претендовать на полноту и завершенность исследований предложенного метода. Тем не менее сравнительный анализ его с методом Берга, часто выбираемого как образец современных методов спектрального оценивания, показывает ряд преимуществ:

- отсутствие необходимости выбора порядка модели;
- несмещенность оценок частот спектральных составляющих;
- меньшая выборочная дисперсия оценок частот;
- более точное соответствие рассчитанной СПМ исходной автокорреляционной функции;

- более надежное разрешение двух близких по частоте линий;
- отсутствие расщепления линий в СПМ;
- возможность оценивания двумерных спектров.

Повышение качества оценок, которые дает метод обращения в сравнении с методом Берга, связано в первую очередь с более полным его соответствием ММЭ. Использование исходной информации в виде матрицы, образованной непосредственно из отсчетов данных вместо корреляционной функции, существенно отличает предложенный метод от большинства существующих [8, 9]. При спектральном оценивании одномерных рядов трудоемкое вычисление множителей Лагранжа в выражении (2) сводится к их оцениванию простыми преобразованиями (7). В оценивании двумерных спектров использование выражения (6) позволяет обойтись без вычисления множителей Лагранжа. Таким образом, предложенная процедура спектрального оценивания может быть достаточно эффективно реализована на ЭВМ для практического применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Робинсон Э. А. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 6.
2. Джейнс Э. Т. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 333.
3. Савченко В. В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. Т. 31. № 11. С. 3.
4. Джонсон Д. Х. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 126.
5. Хайкин С., Карри Б. У., Кеслер С. Б. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 51.
6. Бароне П. // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 3. С. 86.
7. Берг Д. П., Люмбергер Д. Г., Венгер Д. Л. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 63.
8. Мюнье Ж., Делиль Ж. Ю. // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 11. С. 21.
9. Гершман А. Б., Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 8. С. 941.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
17 июля 1989 г.

REALIZATION OF THE METHOD OF MAXIMUM ENTROPY IN SPECTRAL ESTIMATION BY INVERSING AN INITIAL DATA MATRIX

A. A. Pyhalov, V. T. Sarychev

In the article a method of spectral power density (SPD) estimation of stationary processes based on the method of maximum entropy is suggested. As initial information a square matrix is used lines of which are linearly independent samplings of data counts. The expression of SPD is suggested by a reciprocal of a mean periodogram of columns of the inverse initial data matrix. Results of numerical tests and comparative analysis with one of the known methods of spectral estimation are presented.

УДК 537.87; 537.8.029.6

**ПРИМЕНЕНИЕ БАЗИСА РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ К ОПИСАНИЮ ДИФРАКЦИИ
ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ОБРЫВЕ ТОНКОГО
ПЛАНАРНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА**

A. B. Кукушкин

В качестве аппарата описания явлений рассеяния на «тонкой полу-плоскости» предлагается использовать базис разрывных решений волнового уравнения (обобщенное решение Зоммерфельда), позволяющих построить самосогласованный спектр волн полуограниченной пластины. Апробация проводится на примере задачи рассеяния поверхностной волны на обрыве оптически тонкого волновода.

В сообщении [1], где рассматривались некоторые подходы к описанию явлений рассеяния волн на импедансной полуплоскости, в частности, была высказана мысль, что полученные в нем решения, которые в математическом отношении являются, в сущности, аналитическим продолжением решения Зоммерфельда, можно расценивать и как некие априорно выбранные решения волнового уравнения, записанного в полярной системе координат. Тогда само решение Зоммерфельда (с вещественным параметром ϕ_0) оказывается всего лишь частным случаем этого более общего — с комплексным параметром $\vartheta_{1,2}$ — принципиально отличающегося от канонического экспоненциального наличием разрывов поля на полярном луче (для двумерных задач — на полуплоскости). Следовательно, полуплоскость, на которой заданы определенные граничные условия, представляет собой идеальную модель для применения этого неканонического решения (будем называть его в дальнейшем разрывным) волнового уравнения в качестве базисного. И первым подтверждением тому служит решение Зоммерфельда, где вообще достаточно всего лишь одного разрывного решения с вещественным параметром ϕ_0 . Если же заменить его на комплексный $\vartheta_{1,2}$, то физический смысл разрывных решений, как показано в [1], приобретает совсем иное значение. А именно эти решения, удовлетворяя импедансным граничным условиям на полуплоскости применительно к своим экспоненциальным составляющим (задача на собственные значения), имеют здесь отношение к направляемым полуплоскостью собственным (и несобственным) волнам. При этом разрывы поля, представляющие собой краевые волны [2] с амплитудными коэффициентами, совпадающими с амплитудами соответствующих им собственных волн полуплоскости, остаются свободными от выполнения граничных условий на ней. Но если полное поле представлять неким набором разрывных решений (отказавшись, таким образом, от использования граничных условий импедансного типа), то приравнивая к нулю (на гранях полуплоскости) сумму всех краевых волн из этого набора, можно получить уравнение, связывающее амплитудные коэффициенты собственных волн полуплоскости, и, решив его, решить задачу рассеяния. Таким образом, используя базис разрывных решений волнового уравнения, можно подойти к постановке краевой задачи, по крайней мере более корректной, чем краевая задача импедансного типа.

Чтобы сформулировать идею постановки такой задачи, сделаем еще одно вводное замечание в отношении определения области практи-

ческой применимости задач с бесконечно тонким «телами». Известно, что математически точное решение Зоммерфельда практически применимо к описанию явлений дифракции на хорошо проводящих листах металла с конечной толщиной $2b$, потому что влиянием дифракционных эффектов на торце, которое не учитывается в решении Зоммерфельда, можно пренебречь, если $\lambda \gg 2b$, где λ — длина волны в свободном пространстве. Практически это означает только одно: чтобы применить математически точный результат к описанию протекающих в реальности физических явлений, на практике приходится совершить математически некорректный шаг отождествления прямолинейных координатных границ декартовой и полярной систем координат. Именно: приходится считать, что полярный луч $\phi=0$ тождествен декартовой полупрямой $y=b$ ($x \geq 0$), а полярный луч $\phi=2\pi$ — полупрямой $y=-b$ ($x \geq 0$). Совершенно естественно, что при этом опускаются граничные условия на торце $x=0$, $y \in [-b, b]$, вследствие чего и возникают практические ограничения на область применимости решения Зоммерфельда. В опущенной области пространства, занимаемой металлом, с декартовыми координатными границами $x \in [0, \infty]$ при $y=\pm b$ и $y \in [-b, b]$ при $x=0$ поле полагается равным нулю.

Такое положение вещей практически почти не изменится, если вместо хорошо проводящего металла рассматривать «плохой» проводник или диэлектрик. Разница будет состоять только в том, что здесь поле просачивается внутрь. Следовательно, его уже нельзя положить равным нулю. Нужно только задать поле внутри тела с помощью обычного аппарата мембранных функций, базирующегося на каноническом (без разрывов) решении волнового уравнения в декартовой системе координат, а поле вовне — посредством соответствующего набора разрывных решений волнового уравнения в полярной системе. Тем самым можно освободиться от некорректных в данных обстоятельствах импедансных граничных условий и поставить обычные граничные условия для поля на верхней и нижней гранях тела, сознательно опустив граничные условия на торце и, таким образом, заранее ограничив область применимости решения оптически тонкими пластинами; например, для диэлектриков это эквивалентно условию

$$\sqrt{\epsilon \mu} (b/\lambda) \ll 1, \quad (1)$$

где ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости полуограниченной пластины. Тогда условие равенства нулю на гранях пластины суммы всех краевых волн кроме всего прочего будет означать отсутствие на этих гранях каких-либо других полей, за исключением суммы (и интеграла) экспоненциальных, что и так хорошо известно. Следовательно, можно рассчитывать на то, что подобная постановка краевой задачи будет полной для оптически тонких пластин.

Такова в самых общих чертах теоретическая программа настоящей работы.

1. САМОСОГЛАСОВАННЫЙ СПЕКТР МОД ПОЛОУОГРАНИЧЕННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Все дальнейшие выкладки будем проводить применительно к планарному диэлектрическому полубесконечному волноводу (ПБВ), изображенном на рис. 1 (см. на вклейке), где $2b$ — его толщина, ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости его материала, ϵ_0 и μ_0 — соответствующие абсолютные проницаемости вакуума. Следуя изложенной выше программе, единственным требованием, предъявляемым к полу, будем считать совместное выполнение стандартных граничных условий для экспоненциальных составляющих его тангенциальных компонент на верхней и нижней гранях пластины:

$$U|_{\varphi=0, 2\pi} = V|_{y=\pm b(x>0)} ; \quad (2)$$

$$\tau k_0 z^{-1} (\partial U / \partial \varphi) |_{\varphi=0, z \neq 0} = (\partial V / \partial y) |_{y=\pm b(\varepsilon > 0)}, \quad (3)$$

где U и V — соответственно компоненты поля $E_z(H_z)$ вне и внутри ПБВ, если рассматриваются ТЕ (ТМ)-волны, $\tau = \mu(\varepsilon)$ для этих же ТЕ (ТМ)-волн, $z=k_0 r$.

Поле вне пластины, соответствующее ее дискретному спектру, будем описывать в полярной системе координат с помощью набора функций, представляющих собой линейную комбинацию разрывных решений волнового уравнения U_1 и U_2 из [1]:

$$U_n = (1/2) C_n \cos(kg_n) (F_1 U_1 + F_2 U_2), \quad (4)$$

где

$$U_1 = S_n^{(u)} + S_n^{(l)}, \quad U_2 = L_n^{(l)} + L_n^{(u)},$$

$$F_{1,2} = 1 \mp g_n \operatorname{tg}(kg_n) / i\tau \sin \vartheta_n; \quad (5)$$

$$S_n^{(u)}, L_n^{(l)} = \frac{1}{2} \exp[-iz \cos(\varphi + \vartheta_n)] \operatorname{erfc}\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2z} \sin \frac{\varphi + \vartheta_n}{2}\right); \quad (6)$$

$$S_n^{(l)}, L_n^{(u)} = \frac{1}{2} \exp[-iz \cos(\varphi - \vartheta_n)] \operatorname{erfc}\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2z} \sin \frac{\varphi - \vartheta_n}{2}\right), \quad (7)$$

$$\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{2z} W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma \sqrt{2z} W}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad g_n = \sqrt{\varepsilon \mu - \cos^2 \vartheta_n}, \quad k = k_0 b, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

При этом индекс n в (4) может пробегать все четные натуральные числа, включая нуль, так как (4) дает представление только для четных волн пластины (обобщение на случай нечетных волн с $n=1, 3, 5, \dots$ довольно тривиально и без ограничения общности здесь не рассматривается). Что же касается поднятых латинских индексов «*u*» и «*l*», то смысл их введения для функций S и L тот же, что и в [1]. А именно, в верхнем (upper) полупространстве функция $S^{(u)}$ аддитивно содержит экспоненту $\exp[-iz \cos(\varphi + \vartheta_n)]$, входящую в эту функцию в виде сомножителя, но только при $\eta_n \in [0, gd\xi_n]$, где $\eta_n = \operatorname{Re} \vartheta_n$, и $\xi_n = \operatorname{Im} \vartheta_n^*$. Если же $\eta_n \in [gd\xi_n, \pi/2]^{**}$, то в верхнем полупространстве локализована экспонента, по виду сопряженная первой, $\exp[-iz \cos(\varphi - \vartheta_n)]$, которая входит в функцию $L^{(u)}$ как сомножитель. Следовательно, при переходе значения η_n через критическое, $\eta_n = gd\xi_n$, происходит скачкообразное превращение функции U_n из медленной собственной в быструю несобственную. Это скачкообразное превращение функции U_n регулируется здесь поведением коэффициентов $F_{1,2}$, которые при подстановке в них собственных значений ϑ_n в зависимости от знака неравенства, $\eta_n \geqslant gd\xi_n$, представляют собой пару натуральных чисел: 0,2 или 2,0. Последнее легко установить, так как, во-первых, из условия $F_1=2$ следует $F_2=0$ и, наоборот, из $F_2=2$ следует $F_1=0$, а, во-вторых, при $\eta_n \in [0, \pi/2]$ соотношение $F_1=2$ ($F_2=0$) есть дисперсионное уравнение для поверхностных (медленных) волн ($\eta_n \in [0, gd\xi_n]$), а $F_2=2$ ($F_1=0$) суть также дисперсионное уравнение, но для вытекающих волн ($\eta_n \in [gd\xi_n, \pi/2]$). Поэтому-то несмотря на то, что представление (4) записано в виде линейной комбинации поверхностных (S) и вытекающих (L) волн, на самом деле, если $\eta \neq gd\xi$, при подстановке в выражение (4) собственных значений ϑ_n оно содержит либо только поверхностные, либо только вытекающие волны. Промежуточный случай, $\eta = gd\xi$, как будет показано ниже, имеет отношение также к задаче на собствен-

* $gd(\xi) = \operatorname{arccos}(\operatorname{ch}^{-1} \xi)$ — функция гудермиан.

** Здесь рассматривается интервал $\eta_n \in [0, \pi/2]$ как характерный для волн, бегущих в сторону возрастания координаты x .

ные значения, но уже применительно к непрерывному спектру волн. Что же касается вывода дисперсионных уравнений $F_1=2$ ($F_2=0$) и $F_2=2$ ($F_1=0$), то для этого достаточно задать поле внутри пластины как

$$V_n = C_n \cos(k_0 g_n y) \exp(-ik_0 \beta_n x), \quad (8)$$

где $\beta_n = \cos \theta_n$, и потребовать совместного удовлетворения граничных условий (2) и (3). При этом соотношение (2) удовлетворится строго именно при условии $F_1=2$ ($F_2=0$) либо при $F_2=2$ ($F_1=0$), вследствие чего выполнится и условие (3), но только для экспоненциальных (модальных) составляющих поля. Однако нормальная производная поля извне $z^{-1}(\partial U_n / \partial \varphi)$, в отличие от U_n , имеет ненулевую краевую (немодальную) составляющую [1], остающуюся пока свободной от выполнения условия (3). Таким образом, разрывные решения волнового уравнения типа U_n содержат в себе как модальные (экспоненциальные), так, в равной мере, и немодальные (краевые) составляющие поля. Поэтому представляется целесообразным ввести для них термин квазимодальных функций ПБВ. Ведь эти функции имеют отношение к описанию волновых процессов, связанных не с бесконечной, а с полуограниченной волноведущей пластиной. И вследствие этого, как показано в [1], их модальные элементы (будем называть их модами ПБВ), сравнительно с модами бесконечного волновода, обладают еще одной, но весьма существенной характеристикой (полярный угол локализации волны), которая, вообще говоря, затрагивает принципиальные вопросы существования некоторых мод бесконечного волновода [1]. Наличие этой характеристики у мод ПБВ есть следствие использования в теории понятия световых лучей [1]. Таким образом, появление у мод еще одной физически однозначно регулируемой с помощью понятия световых лучей и отношений причинности [1] характеристики имеет концептуальное значение, так как она распространяется здесь на все без исключения моды, а не только на вытекающие, которые в свете концепции мод ПБВ являются всего лишь их частным случаем.

Хорошо известно [3, 4], что для постановки полной краевой задачи использование одних квазимодальных U_n и модальных V_n функций дискретного спектра недостаточно, нужно еще ввести непрерывный спектр волн пластины. Известно [3, 4], что главное отличие волн непрерывного спектра от волн дискретного состоит в представлении поля в виде суммы двух сопряженных экспонент:

$$(1/2) \cos(kg) F_{1,2} \exp[-iz \cos(\varphi \pm \theta)], \quad (9)$$

где $g = \sqrt{\varepsilon_m - \cos^2 \theta}$, θ — комплексный угол (здесь, как и в дальнейшем, исходя из свойств симметрии квазимодальных функций ПБВ [1], будем рассматривать только верхнее полупространство). Поэтому, если теперь в (4) опустить модальный индекс « n » или, иными словами, не подставлять больше в $F_{1,2}$ собственных значений волн дискретного спектра, что означает $F_{1,2} \neq 2(0)$, то сама структура (4) будет являть собой при этом конструкцию, пригодную для построения на ее основе квазимодальных функций для волн непрерывного спектра. Однако, как было показано выше, из-за гасящих свойств интегралов вероятностей нужные модальные элементы $\exp[-iz \cos(\varphi \pm \theta)]$, содержащиеся, соответственно, в функциях $S^{(u)}$ и $L^{(u)}$, в аддитивное состояние переводятся порознь — при $\eta \geq gd\xi$ соответственно. Следовательно, единственная возможность совместной локализации в верхнем полупространстве двух сопряженных экспонент заключена в условии $\eta = gd\xi$. Применительно к выбору контура интегрирования для непрерывного спектра мод ПБВ это условие не оставляет никаких других вариантов кроме одного: этот контур должен быть сразу же приведен к перевальному, и далее уже не допускается никаких его деформаций. Последнее, в свою очередь, означает однозначное решение задачи на собственные значения (для модальных составляющих) применительно к непрерывному спектру

волн ПБВ, представление для которого, соответственно, вне и внутри пластины можно записать, таким образом, в виде несобственных интегралов:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2+i\infty} C(\theta) \cos(kg) [F_1(S^{(u)} + iS^{(l)}) + F_2(L^{(l)} + L^{(u)})] d\theta; \quad (10)$$

$$V_c = \int_0^{\pi/2+i\infty} C(\theta) \cos(k_0 gy) \exp(-ik_0 x \cos \theta) d\theta; \quad (11)$$

$$\cos \theta = 1 - it^2, \quad t \in [0, \infty]. \quad (12)$$

Здесь при записи выражений (10) и (11) учтено, что под неизвестной спектральной функцией $C(\theta)$, в силу уравнения (12), вытекающего из условия $\eta = gd\xi$, следует подразумевать четную спектральную функцию $C(t^2)$, и поэтому, а также вследствие использования в (10) двух сопряженных пар решений волнового уравнения нет необходимости рассматривать интервал $\xi \in [-\infty, 0]$.

Строго говоря, принятное условие $\eta = gd\xi$ ведет к тому, что в (10) берется линейная комбинация вырожденных квазимодальных функций, поскольку в этом случае $S^{(u)} \equiv L^{(l)}$, $S^{(l)} \equiv L^{(u)}$. Чтобы избежать этого, одновременно сохранив тот смысл, который вкладывается здесь в использование в функциях S и L латинских индексов «*u*» и «*l*», условие $\eta = gd\xi$ следует понимать как предельное, трактуя его для S и L как $\eta - gd\xi = \mp 0$ соответственно. Тогда по-прежнему применительно к верхней грани пластины ($\varphi = 0$) будут иметь место следующие соотношения:

$$S^{(u)}(\varphi=0) = \exp(-iz \cos \theta) - S^{(l)}(\varphi=0); \quad (13)$$

$$L^{(u)}(\varphi=0) = \exp(-iz \cos \theta) - L^{(l)}(\varphi=0), \quad (14)$$

при этом

$$S^{(l)}(0) = \exp(-iz \cos \theta) \frac{it}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z\gamma^2} d\gamma}{\gamma^2 - t^2} \quad (t = |t| e^{-i\delta}); \quad (15)$$

$$L^{(l)}(0) = \exp(-iz \cos \theta) \frac{(-i)t}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z\gamma^2} d\gamma}{\gamma^2 - t^2} \quad (t = |t| e^{+i\delta}); \quad (16)$$

где δ — малое, стремящееся к нулю, но не равное ему положительное число.

Складывая, а затем вычитая функции (15) и (16), и выполняя в этих двух линейных комбинациях предельный переход $\delta \rightarrow +0$, нетрудно прийти к результату

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} [L^{(l)}(0) + S^{(l)}(0)] = 0; \quad (17)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} [L^{(l)}(0) - S^{(l)}(0)] = e^{-iz} e^{-zt^2} \left[\frac{it}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z\gamma^2} d\gamma}{\gamma^2 - t^2} - \frac{(-i)t}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z\gamma^2} d\gamma}{\gamma^2 - t^2} \right], \quad (18)$$

где интегралы в (18) следует уже понимать в смысле главного значения по Коши. А поскольку эти последние, по определению [5], с. 141, представляют собой интегралы вероятностей от мнимого аргумента, то (18) можно представить в виде

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} [L^{(l)}(0) - S^{(l)}(0)] = \frac{1}{2} e^{-iz} e^{-zt^2} [\operatorname{erfc}(it\sqrt{z}) - \operatorname{erfc}(-it\sqrt{z})]. \quad (19)$$

Для дальнейшего очень важно, что, хотя функции

$$(1/2)e^{-iz} e^{-zt^2} \operatorname{erfc}(\pm it\sqrt{z}),$$

каждая в отдельности, и содержат модальные члены, поскольку, согласно [6], $\text{erfc}(\pm it\sqrt{z}) = 1 \pm i \text{Im}[\text{erfc}(it\sqrt{z})]$, сама линейная комбинация (19) в силу последнего равенства от них свободна.

Проверим теперь выполнение граничных условий (2) и (3) для функций U_c и V_c .

Подставив выражения (10) и (11) в (2) и учитя (5), (13), (14), нетрудно убедиться в том, что (2) удовлетворяется строго. Выпишем теперь входящие в (3) частные производные от функций U_c и V_c :

$$\begin{aligned} z^{-1} \frac{\partial U_c}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \int C(\vartheta) \cos(gk) \left\{ F_1[i \sin(\varphi + \vartheta) S^{(u)} + \right. \\ &\quad \left. + i \sin(\varphi - \vartheta) S^{(\ell)}] + F_2[i \sin(\varphi - \vartheta) L^{(u)} + i \sin(\varphi + \vartheta) L^{(\ell)}] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp[-i(z - \pi/4)] \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right\} d\vartheta ; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\partial V_c / \partial y = -k_0 \int C(\vartheta) g \sin(k_0 gy) \exp(-iz \cos \vartheta) d\vartheta . \quad (21)$$

Затем, подставив в (20) $\varphi = 0$ и учитя (13) и (14), выпишем представляющую наибольший интерес функцию

$$\begin{aligned} z^{-1} \frac{\partial U_c}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2} \int C(\vartheta) \cos(gk) \left[i \sin \vartheta (F_1 - F_2) \times \right. \\ &\quad \times \exp(-iz \cos \vartheta) + 2i \sin \vartheta (F_2 L^{(\ell)}(0) - F_1 S^{(\ell)}(0)) - \\ &\quad \left. - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp[-i(z - \pi/4)] \cos \frac{\vartheta}{2} \right] d\vartheta . \end{aligned}$$

Отделяя в ней модальные члены от немодальных и учитывая, что

$$(1/2) \cos(gk) i \sin \vartheta (F_1 - F_2) = -g \tau^{-1} \sin(gk) ,$$

получим

$$\begin{aligned} z^{-1} \frac{\partial U_c}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= - \int C(\vartheta) \tau^{-1} g \sin(gk) \exp(-iz \cos \vartheta) d\vartheta + \\ &\quad + \tau^{-1} \int C(\vartheta) g \sin(gk) [L^{(\ell)}(0) + S^{(\ell)}(0)] d\vartheta + \\ &\quad + \int C(\vartheta) \cos(gk) \left\{ i \sin \vartheta [L^{(\ell)}(0) - S^{(\ell)}(0)] - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp[-i(z - \pi/4)] \cos \frac{\vartheta}{2} \right\} d\vartheta . \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив теперь в выражение (21) $y = b$, убеждаемся в том, что в отношении модального члена (первый интеграл в (22)) условие (3) выполняется. Далее, второй интеграл в (22) при $\delta \rightarrow +0$ в силу равенства (17) зануляется и, таким образом, в (22) остается лишь третий интеграл, представляющий собой немодальный остаток $\Psi_c(\varphi=0)$ непрерывного спектра мод ПБВ, который с учетом (19), уравнения (12) и вытекающих из него равенств $\sin \vartheta d\vartheta = 2it dt$, $e^{i\pi/4}\sqrt{2} \cos(\vartheta/2) d\vartheta =$

$=2idt$ приводится к виду

$$\Psi_c(\varphi=0)=e^{-iz} \int_0^\infty A(t^2) f_c(z, t) dt , \quad (23)$$

где

$$A(t^2) = C(t^2) \cos(gt) ,$$

$$f_c(z, t) = 2 \left\{ \frac{1}{2} te^{-zt^2} [\operatorname{erfc}(-it\sqrt{z}) - \operatorname{erfc}(it\sqrt{z})] - i(\pi z)^{-1/2} \right\} .$$

Построенные выше непрерывный и дискретный спектры мод ПБВ остаются пока изолированными друг от друга. Для преодоления этого недостатка достаточно разобраться в вопросе, что происходит с модами дискретного спектра на их критических частотах, когда $\cos \vartheta_n = 1 - i\sigma_n$, где σ_n — критическое значение нормированной на k_0 мнимой части продольного волнового числа n -й моды ПБВ (неважно какой — поверхностной или вытекающей). В этой связи нужно обратить внимание на структурную однородность выражений (4) и (10), с одной стороны, и (8), (11) — с другой. В частности, структурные особенности квазимодальных функций (4) таковы, что если на какой-то частоте (критической) число $\cos \vartheta_n = 1 - i\sigma_n$ ($\eta_n = gd\xi_n$) является собственным значением какой-либо моды дискретного спектра, то достаточно бесконечно малого частотного приращения, чтобы условие $F_{1,2}=2$ ($F_{2,1}=0$) нарушилось и тогда то же самое значение $\cos \vartheta_n$ уже не будет собственным применительно к моде дискретного спектра. Но поскольку при этом $F_{1,2}\neq 2(0)$, а $\eta_n = gd\xi_n$, то это же число $\cos \vartheta_n$ будет собственным для непрерывного. Таким образом, на критических частотах происходит структурная трансформация мод дискретного спектра в соответствующие им ($t^2 = \sigma_n$) бездисперсные моды непрерывного, хотя ввиду отсутствия у них дисперсии будет правильней говорить не о трансформации, а о соответствующем слиянии, поскольку любая мода из континуума существует на любой частоте и структурно от нее не зависит.

Для того чтобы это слияние было не только структурным, но и абсолютным, совершенно необходимо ввести в теорию следующее условие:

$$A(t^2)|_{t^2=\sigma_n} = A_n, \quad [C(t^2=\sigma_n) = C_n], \quad (24)$$

где

$$A_n = C_n \cos(kg_{n \text{ кр}}), \quad g_{n \text{ кр}} = \sqrt{\varepsilon\mu - (1 - i\sigma_n)^2},$$

которое будем называть в дальнейшем условием спектральной самосогласованности рассеянного поля. Введением этого условия, как это видно из него самого, достигается связанность двух ранее изолированных частей спектра, что создает предпосылку для построения замкнутого варианта теории рассеяния в открытых волноводах.

В следующем разделе все рассмотренные здесь и в [1] вопросы теории переводятся в плоскость численной апробации.

2. РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ОБРЫВЕ ТОНКОГО ПЛАНАРНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Эта задача по ряду причин давно привлекает к себе внимание исследователей [4, 7–12]. Все эти работы, как и большинство других, не отмеченных здесь, но тематически примыкающих к ним, делятся на две группы. К первой [4, 7–10] относятся работы, в том или ином виде использующие математический базис современного варианта теории открытых волноводов, а ко второй [11, 12] — работы, основанные на применении современных численных методов, концептуально независимых

от алгоритмов, свойственных работам первой группы. Важно именно подчеркнуть, что алгоритмы работ [11, 12] не зависят от концепций в отношении способа локализации поверхностной волны во внешней среде волновода в окрестности его обрыва. И если в работе [11], например, и используется условие ортогональности для мембранных функций поверхностных волн как вспомогательная процедура, то делается это там при «достаточном» продольном удалении от торца волновода, когда способ локализации отраженной волны уже практически не актуален. Если же, как в алгоритмах работ первой группы, это условие записывается в поперечнике торца, то совершенно очевидно, что в отношении отраженной волны различие в концепциях мод бесконечного и полубесконечного волноводов весьма существенно как в теоретическом, так и в практическом смысле. Но это различие ничуть не касается падающей волны, так как ее поле в поперечнике торца присутствует независимо от того, какая из названных концепций положена в основу алгоритма. Именно поэтому приближения «тонких» пластин, полученные, например, в [4, 7], где разные интегральные формулировки задачи в вычислениях сводились затем к вариационным принципам с функционалами, оценка которых для этих приближений проводилась с использованием в качестве «пробной функции» поля падающей волны, также не зависят от избранных концепций и поэтому, как и численные результаты в [11], полученные там для сравнительно «тонких» пластин ($0,05 \leq b/\lambda \leq 0,4$), представляют интерес для дальнейших сравнительных оценок. Разумеется, что ориентироваться как на своего рода «эталон» следует все же на численные результаты [11], поскольку они априори точнее указанных приближений [4, 7]. Что же касается других работ, то они не подходят здесь для сравнительных оценок из-за того, что в них рассмотрены слишком «толстые» пластины.

При постановке задачи ограничимся рассмотрением одномерового режима, полагая, что оптическая толщина ПБВ, изображенного на рис. 1, исключает возбуждение на его срезе при дифракции падающей на него из бесконечности ($x \rightarrow \infty$, ε и μ — вещественны) основной поверхностной волны с амплитудой $C_0^{(l)}$ не только поверхностных волн высших типов, но также и вытекающих. Это означает, что рассматриваемый ниже частотный диапазон (1) является для последних закритическим.

Ввиду этого, а также в силу всего вышеизложенного, будем искать поля внутри и вне ПБВ, соответственно, в виде

$$V = \cos(k_0 g_0 y) [C_0^{(l)} \exp(i k_0 \beta_0 x) + C_0^{(s)} \exp(-i k_0 \beta_0 x)] + V_c; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} U = & \cos(k_0 g_0) \{ C_0^{(l)} [L_0^{(l)}(\theta_0^{(l)}) + L_0^{(u)}(\theta_0^{(l)})] + \\ & + C_0^{(s)} [S_0^{(u)}(\theta_0^{(s)}) + S_0^{(l)}(\theta_0^{(s)})] \} + U_c, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\theta_0^{(l)} = \pi + i\xi_0$, $\theta_0^{(s)} = i\xi_0$, $\beta_0 = ch \xi_0$ — коэффициент замедления основного ($n=0$) типа волны, $C_0^{(s)}/C_0^{(l)} = \Gamma$ — ее коэффициент отражения. Подстановка выражений (25), (26) в (2) и (3) приводит в итоге к следующему интегральному уравнению:

$$A_0^{(l)} f_0^{(l)}(\theta_0^{(l)}, z) + A_0^{(s)} f_0^{(s)}(\theta_0^{(s)}, z) + \int_0^{\infty} A(t^2) f_c(t, z) dt = 0. \quad (27)$$

Оно выражает собой условие обращения в нуль на контуре пластины (за вычетом ее торца) суммы всех немодальных составляющих нормальной производной от общего поля извне. Совершенно очевидно, что это уравнение эквивалентно здесь требованию удовлетворения стан-

дартных граничных условий (2) и (3) для полного поля. Кроме немодального остатка от континуальной части спектра этого поля в (27) входят также и немодальные члены его дискретной части. Выражения для них можно получить соответствующим дифференцированием первых двух слагаемых в (26) с последующим делением полученного результата (подставив в него $\Phi=0$) на общий член e^{-iz} , в результате приходим к следующим формулам:

$$f_0^{(l)} = e^{i\pi/4} b_0^{(l)} [e^{i\pi/4} a_0^{(l)} \exp[i(a_0^{(l)})^2 z] \operatorname{erfc}(e^{i\pi/4} a_0^{(l)} \sqrt{z}) - (\pi z)^{-1/2}] ; \quad (28)$$

$$f_0^{(s)} = e^{-i\pi/4} b_0^{(s)} [-e^{i\pi/4} a_0^{(s)} \exp[i(a_0^{(s)})^2 z] \operatorname{erfc}(-e^{-i\pi/4} a_0^{(s)} \sqrt{z}) - (\pi z)^{-1/2}] , \quad (29)$$

где обозначено

$$a_0^{(l, s)} = \sqrt{2} \sin \frac{\theta_0^{(l, s)}}{2} , \quad b_0^{(l, s)} = \sqrt{2} \cos \frac{\theta_0^{(l, s)}}{2} .$$

Для первой проверки жизнеспособности предлагаемой теории (а именно под таким углом зрения следует рассматривать нижеследующие результаты) будет, по-видимому, достаточным разрешить (27) в асимптотическом ($z \rightarrow \infty$) приближении, которое, если учесть (П.1.13) (см. Приложение 1) и выражения для асимптотических рядов других входящих в (27) членов [6], будет иметь следующий вид:

$$\frac{ie^{i\pi/4}}{2z\sqrt{\pi z}} \left[b_0^{(l)}(a_0^{(l)})^{-2} A_0^{(l)} - b_0^{(s)}(a_0^{(s)})^{-2} A_0^{(s)} + 4e^{-i\pi/4} \int_0^\infty (2t)^{-1} \frac{dA(t^2)}{dt} dt \right] = 0 . \quad (30)$$

Следовательно, ближайшей задачей является аппроксимация функции $A(t^2)$, удовлетворяющей условию (24) и пригодной для асимптотического приближения (30). Эта задача решается в Приложении 2, где получено соответствующее приближение (П.2.6.) для этой функции. Подставив его в уравнение (30), нетрудно получить, наконец, и асимптотическую формулу для коэффициента рассеяния поверхностью волны:

$$\Gamma \simeq -(b_0^{(s)})^{-1} (a_0^{(s)})^2 \frac{[(1+i)b_0^{(s)}(a_0^{(s)})^{-2} + \sqrt{2\pi} D_m]}{[(1+i) - \sqrt{2\pi}(a_0^{(s)})^2(b_0^{(s)})^{-1} K_m]} , \quad (31)$$

где D_m и K_m — числовые коэффициенты, зависящие от числа m учтенных в бесконечных произведениях (П.2.6) сомножителей. Можно показать (после ряда довольно громоздких вычислений), что эти коэффициенты выражаются следующим образом:

$$D_0 = 1 , \quad K_0 = 2 , \quad D_1 = 1 - \frac{3}{2} \bar{\sigma}_2^{-1} , \quad K_1 = 2 + \bar{\sigma}_2^{-1} ,$$

$$D_2 = 1 - \frac{3}{2} (\bar{\sigma}_2^{-1} + \bar{\sigma}_4^{-1}) + \frac{5}{4} (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4)^{-1} , \quad K_2 = 2 + (\bar{\sigma}_2^{-1} + \bar{\sigma}_4^{-1}) - \frac{3}{2} (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4)^{-1} ,$$

$$D_3 = 1 - \frac{3}{2} (\bar{\sigma}_2^{-1} + \bar{\sigma}_4^{-1} + \bar{\sigma}_6^{-1}) + \frac{5}{4} [(\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4)^{-1} + (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_6)^{-1} + (\bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_6)^{-1}] -$$

$$- \frac{7}{8} (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_6)^{-1} , \quad K_3 = 2 + (\bar{\sigma}_2^{-1} + \bar{\sigma}_4^{-1} + \bar{\sigma}_6^{-1}) -$$

$$- \frac{3}{2} [(\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4)^{-1} + (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_6)^{-1} + (\bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_6)^{-1}] + \frac{5}{4} (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_6)^{-1}$$

и т. д. По поводу расчета входящих сюда критических значений норми-

рованных коэффициентов затухания σ_{2n} четных вытекающих волн — значений, относящихся к их нижним критическим частотам, см. Приложение 3.

На рис. 2а для случая дифракции TE_0 -волны построены графики частотных зависимостей $|\Gamma|$, рассчитанные по формуле (31) (пунктир) с учетом нижних (по частоте) критических точек первых четырех ($m=4$) четных вытекающих волн TE_{2n} -типа для трех значений ε (указаны на рисунке) и $\mu=1$, в сравнении с аналогичными графиками, построенными по формуле [7], $|\Gamma| \approx \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 \xi_0$ (нанесены точками), и

графиками, взятыми из [11] (сплошные кривые). Как видно из этого рисунка, графики в целом свидетельствуют о внешней оправданности предложенного здесь математического базиса. Характер расхождения соответствующих кривых свидетельствует о правильности исходного ограничения (1).

Далее, ввиду инвариантности формы уравнения (27) относительно типа поляризации поля падающей волны, на рис. 2б построен график зависимости $|\Gamma|$ от b/λ , рассчитанный также по формуле (31) (пунктир) при $m=4$, $\varepsilon=2,5$ и $\mu=1$ для задачи дифракции TM_0 -волны. Здесь же для сравнения приведен аналогичный график (сплошная кривая), построенный на основе приближения тонких пластин из [4].

Сравнивая графики для приближений тонких пластин, построенные по формулам из [4, 7], с соответствующими графиками, рассчитанными по формуле (31), можно обнаружить следующее. Если приближение из [7] при $b/\lambda \rightarrow 0$ практически сливается с асимптотическим приближением (31), то в отношении аналогичного приближения из [4] этого сказать нельзя. Далее, если первое свидетельствует в пользу приближения (31) и если к тому же учесть, что оно, особенно для малых ε , как это яствует из рис. 2а, при $b/\lambda=0,05$ неплохо согласуется и с «эталонными» кривыми из [11] (и это является главным внешним критерием правильности полученной формулы (31)), то это же, с другой стороны, свидетельствует и об удачности выбора вариационной формулировки задачи в [7]. Но тогда второе (в отношении приближения из [4]) свидетельствует об обратном или, быть может, о существовании какого-то другого недостатка этого приближения, поскольку формула (31) не может быть верной для одной поляризации и неверной для другой. Но главное все-таки не в этом, а в том, что в пользу (31) свидетельствует внутренний критерий, связанный со сходимостью результатов расчета $|\Gamma|$ по формуле (31) по мере прибавления числа учитываемых критических волновых чисел вытекающих волн. Иллюстрацией этому служат вставки к рис. 2а и 2б, показывающие сам процесс сходимости результатов при $\varepsilon=2,5$, $\mu=1$ и $b/\lambda=0,05$. Сам этот факт сходимости, как и тенденцию быстрого уменьшения погрешности вычисления $|\Gamma|$ по формуле (31) относительно «эталонных» кривых, наблюдаемую на рис. 2а по мере уменьшения параметра b/λ , при большой общности исходных предпосылок невозможно приписать случайности.

В заключение автор выражает благодарность В. В. Шевченко за поддержку и критику, а также Жилиной Г. А. за помощь в численных расчетах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Проведем асимптотическую оценку ($z \rightarrow \infty$) следующего входящего в (27) интеграла:

$$I = \int_0^\infty A(t^2) F(t, z) dt, \quad (\text{П.1.1})$$

где

$$F(t, z) = [\operatorname{erfc}(-it\sqrt{z}) - \operatorname{erfc}(it\sqrt{z})]te^{-zt^2}, \quad (\text{П.1.2})$$

в предположении, что $A(t^2)$ — аналитическая на всей комплексной плоскости t функция со своим рядом Маклорена,

$$A(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n}, \quad (\text{П.1.3})$$

сходящимся при $|t| < R$.

Разобьем весь интервал интегрирования на два и представим (П.1.1) в виде $I = I_1 + I_2$, где для $\rho < R$

$$I_1 = \int_0^\rho A(t^2) F(t, z) dt; \quad (\text{П.1.4})$$

$$I_2 = \int_\rho^\infty A(t^2) F(t, z) dt. \quad (\text{П.1.5})$$

Займемся сначала первым интегралом. Подставив в него (П.1.3), прибегнем к следующей подстановке:

$$U = \operatorname{erfc}(-it\sqrt{z}) - \operatorname{erfc}(it\sqrt{z}), \quad dV = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n+1} e^{-zt^2} dt.$$

После соответствующих операций дифференцирования и интегрирования будем иметь

$$dU = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{zt^2} dt, \quad V = -\frac{e^{-zt^2}}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \sum_{k=0}^n \frac{n! t^{-2k}}{(n-k)! z^k}.$$

Интегрируя (П.1.4) по частям, получим

$$\begin{aligned} I_1 = & -U \frac{e^{-zt^2}}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \sum_{k=0}^n \frac{n! t^{-2k}}{(n-k)! z^k} \Big|_0^\rho + \\ & + \frac{2i}{\sqrt{\pi z}} \int_0^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \sum_{k=0}^n \frac{n! t^{-2k}}{(n-k)! z^k} dt. \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

В связи с тем, что в асимптотическое приближение (30) уравнения (27) входят лишь степенные члены вида $z^{-3/2}$, то в дальнейшем в выписанных в (П.1.6) суммах будем удерживать лишь степени не ниже указанной. По этой же причине в асимптотических рядах ($z \rightarrow \infty, t \neq 0$) для функции U [6] ограничимся только первыми двумя членами:

$$U \sim \frac{2i}{\sqrt{\pi z}} \left(1 + \frac{1}{2zt^2} \right) e^{zt^2}. \quad (\text{П.1.7})$$

Суммируя теперь ряды при соответствующих одинаковых степенях z в (П.1.6) с использованием (П.1.3) и (П.1.7) и принимая во внимание, что $U|_0 = 0$, формулу (П.1.6) для $z \rightarrow \infty$ с учетом сделанных оговорок приводим к виду

$$I_1 \sim \frac{2i}{\sqrt{\pi z}} \left[\int_0^\rho A(t^2) dt + z^{-1} \int_0^\rho (2t)^{-1} \frac{dA(t^2)}{dt} dt - z^{-1} \frac{A(\rho^2)}{2\rho} \right]. \quad (\text{П.1.8})$$

Перейдем к оценке интеграла I_2 . В этом случае интегралы вероятностей из (П.1.2) можно заменить (при $z \rightarrow \infty$) их асимптотическими рядами. Подставив поэтому формулу (П.1.7) в (П.1.5), для $z \rightarrow \infty$ будем иметь

$$I_2 \sim \frac{2i}{\sqrt{\pi z}} \left[\int_{\rho}^{\infty} A(t^2) dt + z^{-1} \int_{\rho}^{\infty} (2t)^{-1} A(t^2) dt \right].$$

Вычисляя затем второй интеграл отсюда по частям и вводя ограничение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t^2) = 0, \quad (\text{П.1.9})$$

получим

$$I_2 \sim \frac{2i}{\sqrt{\pi z}} \left[\int_{\rho}^{\infty} A(t^2) dt + z^{-1} \int_{\rho}^{\infty} (2t)^{-1} \frac{dA(t^2)}{dt} dt + z^{-1} \frac{A(\rho^2)}{2\rho} \right]. \quad (\text{П.1.10})$$

Сложив полученные два результата (П.1.8) и (П.1.10), приходим к требуемой оценке интеграла (П.1.1):

$$I \sim \frac{2i}{\sqrt{\pi z}} \left[\int_0^{\infty} A(t^2) dt + z^{-1} \int_0^{\infty} (2t)^{-1} \frac{dA(t^2)}{dt} dt \right]. \quad (\text{П.1.11})$$

Таким образом, задача теперь сводится к тому, чтобы, не вступая в противоречия с исходными предположениями относительно характера функции $A(t^2)$, придать ей такой вид, чтобы оба интеграла в (П.1.11) существовали. Поэтому, избегая образования новых неизвестных параметров (например, в показателе экспоненты, вводимой ниже в выражение для $A(t^2)$ на вещественной оси), придадим всюду аналитической функции $A(t^2)$ следующий вид:

$$A(t^2) = B(t^2) e^{-t^2}, \quad (\text{П.1.12})$$

где $B(t^2)$ — такая всюду аналитическая за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки функция, что ограничение (П.1.9) по-прежнему остается в силе и притом для любого аргумента комплексного t . Если опираться в дальнейшем на форму представления (П.1.12), то в отношении существования интегралов в (П.1.11) главным вопросом является вопрос об аппроксимации функции $B(t^2)$ на вещественной оси t . Решение же этого вопроса, как показано в Приложении 2, целиком базируется на необходимости удовлетворения введенному в теорию условию спектральной самосогласованности рассеянного поля (24), записываемому именно на вещественной оси t . Это приводит, в частности (см. Приложение 2), к полиномиальному представлению функции $B(t^2)$, которое в итоге и обеспечивает существование обоих входящих в (П.1.11) интегралов.

Подстановка (П.1.11) в (23) ведет, наконец, к требуемому асимптотическому представлению для интегральной части уравнения (27):

$$e^{iz}\psi_c(\varphi=0) \sim \frac{2i}{\sqrt{\pi z} z} \int_0^{\infty} (2t)^{-1} \frac{dA(t^2)}{dt} dt. \quad (\text{П.1.13})$$

Получим теперь оценку интеграла (10) в дальней зоне при $\varphi \in (0, 2\pi)$. Для этого нужно заметить, что в формуле (10) при $\varphi=0$ и 2π между функциями $S^{(u)}$ и $L^{(l)}$ и, соответственно, $S^{(l)}$ и $L^{(u)}$ можно поставить знак

равенства. Заменяя тогда все эти функции их асимптотическими приближениями, что можно сделать лишь при $\varphi \neq 0$ или 2π , из (10) получим

$$U_c \sim e^{-iz} \left[\frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(t^2) dt}{2 \sin^2(\varphi/2) - it^2} + O(z^{-3/2}) \right]. \quad (\text{П.1.14})$$

Учитывая теперь ограничение (П.1.9) и применяя к (П.1.14) теорему о вычетах, для $\varphi \in (0, 2\pi)$ окончательно находим

$$U_c \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp[-i(z - \pi/4)] A\left(t^2 = -2i \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) + O(z^{-3/2}).$$

Отсюда следует, что представление (10) в дальней зоне, если точка наблюдения не соприкасается с плоскостью волновода, соответствует расходящейся от острия полу平面 цилиндрической волне.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Получим аппроксимацию для спектральной функции $A(t^2)$, удовлетворяющую условию спектральной самосогласованности (24) и пригодную для использования в асимптотическом приближении (30) уравнения (27). Очевидно, что эта задача, если учесть формулу (П.1.12), сводится к аппроксимации функции $B(t^2)$.

О том, что касается выбора формы аппроксимирующей $B(t^2)$ функции, можно сказать следующее. Именно условие (24) практически не оставляет других мыслимых для $B(t^2)$ форм, кроме ее аппроксимации функциональным рядом

$$B(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{(s)} \varphi_{2n}(t^2) \exp(\sigma_{2n}), \quad (\text{П.2.1})$$

функциональные члены которого должны быть подобраны и отнормированы так, чтобы оно выполнялось. Для этого нужно, чтобы функции $\varphi_{2n}(t^2)$ обладали следующим свойством:

$$\varphi_{2n}(t^2) = \begin{cases} 1 & \text{при } t^2 = \sigma_{2n} (k \neq n), \\ 0 & \text{при } t^2 = \sigma_{2k} \end{cases}. \quad (\text{П.2.2})$$

Здесь σ_{2k} — критическое значение нормированного коэффициента затухания k -й (четной) моды дискретного спектра, причем неважно, какой именно — поверхностной или вытекающей. Поэтому, вообще говоря, ряд (П.2.1) следует расчленить на два:

$$B(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{(s)} \varphi_{2n}(t^2) \exp(\sigma_{2n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{2n}^{(s)} \bar{\varphi}_{2n}(t^2) \exp(-\bar{\sigma}_{2n}), \quad (\text{П.2.3})$$

рассматривая в отдельности выполнение условия (24) для поверхности (первый ряд в (П.2.3)) и вытекающих (второй ряд в (П.2.3)) волн. Отметим, что для недиссипативных сред σ_{2n} в (П.2.3) равны нулю. Очевидно, что соотношение (П.2.2), так же как и (П.2.1), распадается на два:

$$\varphi_{2n}(t^2) = \begin{cases} 1 & \text{при } t^2 = \sigma_{2n} \\ 0 & \text{при } t^2 = \sigma_{2k}, \sigma_{2j} \end{cases} \quad (k \neq n); \quad (\text{П.2.4})$$

$$\bar{\varphi}_{2n}(t^2) = \begin{cases} 1 & \text{при } t^2 = \bar{\sigma}_{2n} \\ 0 & \text{при } t^2 = \bar{\sigma}_{2j}, \bar{\sigma}_{2k} \end{cases} \quad (j \neq n), \quad (\text{П.2.5})$$

где в первом из них индекс j пробегает все натуральные числа, включая n , а во втором то же самое относится к индексу k с той только разницей, что если $k \in [0, \infty]$, то $j \in [1, \infty]$.

Таким образом, из соотношений (П.2.4) и (П.2.5) явствует, что функции φ_{2n} и φ_{2n} на вещественной оси t обладают счетным множеством корней. Ввиду того, что здесь рассматривается случай оптически тонких (1) пластин, прибегнем к такой аппроксимации функций φ_{2n} и φ_{2n} , которая учитывала бы лишь те их корни, которые в частотной области имели бы ближайшее отношение к рассматриваемому диапазону длин волн (1). К таким корням прежде всего следует отнести корень, соответствующий нулевой критической частоте рассеянной доминантной моды, и еще вдобавок счетное множество корней, соответствующих нижним критическим частотам всех вытекающих волн четного типа.

Следовательно, в соотношениях (П.2.4) и (П.2.5) разумно ограничиться корнями в точках σ_0 и σ_{2j} , где под последними подразумеваются корни, относящиеся к нижним критическим частотам вытекающих волн. Если учесть теперь неэквидистантность локализации всех этих корней на вещественной оси t , то, по-видимому, единственной разумной формой представления функций φ_{2n} и φ_{2n} будет их аппроксимация полиномами, записанными в виде произведения сомножителей вида $(t^2 - \sigma_{2j})$ и t^2 , так как $\sigma_0 = 0$. Отщепляя от каждого такого полинома соответствующий сомножитель и вводя также в правую часть (П.2.1) «свободный полиномиальный член» (не отщепляя от него ни одного сомножителя) с амплитудным коэффициентом $A_0^{(t)}$, нетрудно прийти к формуле

$$B(t^2) \simeq A_0^{(s)} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma_{2j}} \right) + A_0^{(t)} t^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma_{2j}} \right), \quad (\text{П.2.6})$$

удовлетворяющей соотношению (24), с одной стороны, и пригодной для асимптотического приближения, с другой.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление σ_{2n} , входящих в расчетную формулу (31) через коэффициенты D_m и K_m , связано с решением дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg}(kg) = -i\kappa t/g, \quad (\text{П.3.1})$$

полученного в предположении, что поле вытекающей волны плоского диэлектрического волновода во внешней среде при $y > b$ задается функцией $\exp\{ik_0[\kappa(y-b) - \beta x]\}$, где $\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2$, $g = g_1 + ig_2$, $\beta = \beta_1 - i\beta_2$ — соответственно нормированные на k_0 поперечные и продольное волновые числа.

Для вычисления σ_{2n} уравнение (П.3.1) решалось на ЭВМ относительно σ_{2n} и $b/\lambda_{\text{кр}}$, при этом β_1 полагалось тождественно равным единице. Результаты расчетов, соответствующие нижним критическим частотам первых четырех типов волн ($\kappa_{1,2} < 0$, $g_{1,2} > 0$) при $\varepsilon = 2,5$ и $\mu = 1$ для TE_{2n} - и TM_{2n} -волн, сведены в таблицы.

Таблица 1

(TE _{2n} -волны)				
n	1	2	3	4
σ_{2n}	0,9052	2,8085	4,0911	5,2022
$b/\lambda_{\text{кр}}$	0,2681	0,2992	0,3355	0,3631

Таблица 2

(TM _{2n} -волны)				
n	1	2	3	4
σ_{2n}	2,6452	10,819	18,358	25,825
$b/\lambda_{\text{кр}}$	0,0834	0,0686	0,0678	0,0676

Сравнивая их, можно заметить, что нижние критические частоты вытекающих ТМ-волн расположены значительно ближе по отношению к рассматриваемому в работе диапазону длин волн (1). С этим, по-видимому, связана несколько более высокая скорость сходимости результатов для задачи дифракции TE₀-волны по сравнению со случаем дифракции TM₀-волны (ср. вставки на рис. 2а и 2б). Аналогичное явление отмечено также и в [10], где преодоление его достигается применением специальных мер, связанных с использованием условий на острых ребрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукушкин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 10. С. 1138.
2. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962. — 243 с.
3. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969. — 192 с.
4. Angulo C. M. // IRE Trans. 1957. V. AP-5. № 1. P. 100.
5. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
6. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
7. Васильев А. Д., Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 405.
8. Rozzi T. E., Veld G. H. et. al. // IEEE Trans. MTT. 1980. V. MTT-28. № 2. P. 61.
9. Gelin P., Petenzi M., Citerne I. // IEEE Trans. MTT. 1981. V. MTT-29. № 2. P. 107.
10. Shigesawa H., Tsuji M. // IEEE Trans. MTT. 1986. V. MTT-34. № 2. P. 205.
11. Ray S., Mittra R. // Radio Sci. 1984. V. 19. № 5. P. 1289.
12. Васильев Е. Н., Полянкин А. В., Солодухов В. В. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 24. № 9. С. 1862.

Поступила в редакцию
13 июня 1988 г.,
после переработки
4 июля 1989 г.

APPLICATION OF DISCONTINUOUS SOLUTION BASIS OF THE WAVE EQUATION TO DESCRIPTION OF THE SURFACE WAVE DIFFRACTION BY THE ABRUPT A THIN PLANAR DIELECTRIC WAVEGUIDE

A. V. Kukushkin

Discontinuous solution basis of the wave equation (generalized Sommerfeld solution) is suggested to describe the wave scattering at the «thin half-plane». These solutions make it possible to form a self-consistent wave spectrum of a half-limited plate. Surface wave diffraction by an abrupt thin planar dielectric waveguide is approved.

УДК 621.535. 51

ЭВОЛЮЦИЯ МОЩНОСТИ РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИХРОИЧНОМ ОДНОМОДОВОМ ВОЛОКОННОМ СВЕТОВОДЕ

B. N. Листвин

Получено выражение для статистической матрицы дихроичного одномодового волоконного световода со стационарным распределением неоднородностей вдоль световода. При этом учтено, что в общем случае матрица коэффициентов связи в уравнении связанных мощностей асимметрична и параметры сохранения состояния поляризации h в поляризационных модах не равны друг другу. Рассмотрена обратная задача — нахождение распределения параметра h вдоль световода по доли статистически средней мощности, перекаченной назад в ортогональное соотношение поляризации. Показано, что при наличии в световоде дихроизма компонента этой мощности, обусловленная анизотропным рэлеевским рассеянием, зависит от расстояния до точки рассеяния.

Статистически средняя мощность поляризационных мод в анизотропных одномодовых волоконных световодах (АОВС) со стационарным распределением неоднородностей вдоль световода удовлетворяет уравнению связанных мощностей с постоянными коэффициентами. Поэтому описание АОВС с помощью статистически средней мощности проще, чем более полное описание с помощью комплексных амплитуд, для которых решение уравнения связанных волн в общем случае нельзя выразить в элементарных функциях и квадратурах.

Распространение статистически средней мощности в АОВС впервые было рассмотрено в работе Камилова [1]. При этом распределение нерегулярностей вдоль световода полагалось стационарным и не учитывалось рэлеевское рассеяние и поглощение поляризационных мод АОВС. В современных АОВС, способных поддерживать на больших расстояниях линейное состояние поляризации распространяющегося в них излучения, величина дихроизма $\Delta\alpha$ значительно превосходит величину параметра сохранения состояния поляризации h . Это связано с тем, что уменьшение параметра h в АОВС достигается при увеличении двулучепреломления за счет создания асимметричных деформаций в напрягающей оболочке световода, что, в свою очередь, приводит также и к появлению дихроизма. При $\Delta\alpha \ll h$ доля статистически средней мощности, перекаченной в ортогональную поляризационную моду, уже не определяется однозначно, как в [1], величиной параметра h . Поэтому учет дихроизма при решении уравнения связанных мощностей приводит к качественным изменениям в распределении статистически средней мощности по поляризационным модам световода как при рассеянии вперед, так и при рэлеевском рассеянии назад.

В нашей работе найдена статистическая матрица для АОВС со стационарным распределением неоднородностей с учетом дихроизма и анизотропии рэлеевского рассеяния. С ее помощью рассмотрена задача об определении параметра сохранения состояния поляризации h и дихроизма $\Delta\alpha$ в АОВС как по доле статистически средней мощности, рассеянной вперед в ортогональную поляризационную моду, так и по мощности излучения, рассеянного назад.

Дифференциальные уравнения для статистически средней мощности излучения, рассеянного вперед, в дихроичных диэлектрических световодах со стационарным распределением неоднородностей рассмотрены в [3]. Обобщим их для случая, когда излучение рассеивается также и

назад. Для двух поляризационных мод - уравнение связанных мощностей можно представить с учетом анизотропии рэлеевского рассеяния в виде

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}_a - \hat{\mathbf{h}} \mathbf{P}_a = \hat{\rho} \mathbf{P}_b; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}_b + \hat{\mathbf{h}} \mathbf{P}_b = -\hat{\rho} \mathbf{P}_a. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} -h_1 - 2\alpha_1 & h_2 \\ h_1 & -h_2 - 2\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $h_{1,2} = \langle |k_{1,2}|^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \{ \pm [(\alpha_2 - \alpha_1) + i(\beta_2 - \beta_1)]z \}$, $k_1 f(z)$ и $k_2 f(z)$

— коэффициенты связи поляризационных мод, $k_1 = -k_2^*$, $f(z)$ описывает стационарный случайный процесс с автокорреляционной функцией $R(u) = \langle f(z) f(z+u) \rangle$ (скобки означают усреднение по ансамблю статистически однородных световодов), β_1 и β_2 — постоянные распространения поляризационных мод, $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, α_1 и α_2 — амплитудные коэффициенты поглощения поляризационных мод, σ — коэффициент изотропного рэлеевского рассеяния в поляризационную моду, ρ — параметр анизотропии рэлеевского рассеяния, индекс a соответствует волне, распространяющейся от источника излучения, т. е. рассеянной вперед, а индекс b — волне, рассеянной назад.

Выражения для h_1 и h_2 в (3) отличаются от известного определения параметра сохранения состояния поляризации [1] $h = \langle |k|^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} du R(u) \exp [i(\beta_2 - \beta_1)u]$, где не учитывается поглощение излучения в поляризационных модах.

Как видно из (3), это отличие становится существенным при $L_k \Delta\alpha \sim 1$, где L_k — длина корреляции случайных неоднородностей в световоде. В современных АОВС, за исключением однополяризационных световодов, выполняется условие $L_k \Delta\alpha \ll 1$, и в этом случае в (3) можно положить $h_1 = h_2 = h$. Для однополяризационных АОВС, например, используемых в волоконно-оптических поляризаторах, при $L_k \Delta\alpha \geq 1$, $h_1 \neq h_2$ и матрица $\hat{\mathbf{h}}$ становится асимметричной.

Учет дихроизма в выражении для параметров h_1 и h_2 позволяет разрешить известный парадокс, который возникает при чисто феноменологическом введении потерь в уравнение связанных мощностей без учета их влияния на величину параметра h [4]. Из теории связанных волн известно, что при возрастании коэффициента поглощения в одной из мод ее связь с остальными модами уменьшается. Как видно из (3), к такому же результату мы придем и в теории связанных мощностей, если учтем поглощение поляризационных мод в выражении (3) для параметра h . Мощность излучения рассеянного вперед $\mathbf{P}_a(z)$ для параметра сохранения состояния поляризации $h_{1,2}$.

Статистически среднюю мощность излучения для прямой волны находим из (1), пренебрегая многократным рэлеевским рассеянием и, соответственно, правой частью в (1):

$$\mathbf{P}_a(z) = \hat{H}_a(z, 0) \mathbf{P}(0), \quad (4)$$

где статистическая матрица \hat{H}_a удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz} \hat{H}_a = \hat{\mathbf{h}} \hat{H}_a, \quad \hat{H}_a(0, 0) = \hat{I}, \quad (5)$$

\hat{I} — единичная матрица. Решение уравнения (5) с постоянной матрицей

цей коэффициентов связи можно представить в виде матричной экспоненты $\hat{H}_a(z, 0) = \hat{H} = \exp(\hat{h}z)$. С помощью формулы Бэкера [5] она представляется покомпонентно в виде

$$H_{11} = \left(\frac{2\Delta\alpha + \Delta h}{2\kappa} \sinh \kappa z + \cosh \kappa z \right) e^{-\theta z}, \quad (6)$$

$$H_{22} = \left(-\frac{2\Delta\alpha + \Delta h}{2\kappa} \sinh \kappa z + \cosh \kappa z \right) e^{-\theta z},$$

$$H_{12} = \frac{h_2}{\kappa} \sinh \kappa z e^{-\theta z}, \quad H_{21} = \frac{h_1}{\kappa} \sinh \kappa z e^{-\theta z},$$

$$\text{где } \kappa = \left[\left(\Delta\alpha + \frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2 - 2h_2\Delta\alpha \right]^{1/2}, \quad \theta = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{h_1 + h_2}{2} \right), \quad \Delta h = \frac{h_2 - h_1}{2}.$$

Для расчета параметров h и $\Delta\alpha$ перейдем к относительным величинам

$$\xi_1 = \frac{2H_{12}}{H_{11} + H_{22}} = \frac{h}{\kappa} \tanh \kappa z, \quad (7)$$

$$\xi_2 = \frac{H_{11} - H_{22}}{H_{12} + H_{21}} = \frac{\Delta\alpha}{\kappa} \tanh \kappa z.$$

При выводе (7) мы для простоты ограничились приближением $h_1 = h_2$, что хорошо выполняется при $L_{\kappa}\Delta\alpha$ для АОВС в диапазоне длин волн вдали от однополяризационного режима.

Положим $\Delta\alpha = 0$, тогда $\kappa = h$ и $H_{11} = H_{22}$ и, соответственно, $\xi_2 = 0$, а $\xi_1 = \xi_0 = \tanh hz$. Величина ξ_0 определяет долю статистически средней мощности, рассеянной вперед в ортогональную поляризационную моду АОВС в отсутствие дихроизма, и совпадает с аналогичным выражением, полученным в работе Каминова [1]. При $\Delta\alpha \sim h$ ξ_1 отличается от ξ_0 , и в этом случае по одному значению нельзя определить величину параметра h . Разрешим систему (7) относительно h и $\Delta\alpha$:

$$hz = \xi_1 \frac{\tanh^{-1} [\xi_1^2 + \xi_2^2]^{1/2}}{[\xi_1^2 + \xi_2^2]^{1/2}}, \quad (8)$$

$$\Delta\alpha = h \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Таким образом, измерив относительное пропускание поляризационных мод АОВС и относительную долю статистически средней мощности излучения, перекаченного вперед в ортогональную поляризационную моду, по значениям ξ_1 и ξ_2 можно рассчитать величину параметров h и $\Delta\alpha$.

Разработанный недавно [4] метод поляризационной рефлектометрии позволяет при $\Delta\alpha = 0$ и $hz \ll 1$ определить по доле мощности, рассеянной назад в ортогональную поляризационную моду, распределение параметра h вдоль световода. Рассмотрим возможность применения этого метода для дихроичного АОВС. Для этого найдем статистически среднюю мощность обратной волны в дихроичном АОВС, рассеянной с интервалом, соответствующим разрешению рефлектометра. Из неоднородного дифференциального уравнения (2) при начальном условии $P_b(z + \Delta z) = 0$, учитывая, что $P_b(0) = \hat{H}_b(0, z) P_b(z)$, и пренебрегая перекаченной мощностью и потерями излучения на интервале разрешения рефлектометра Δz , получаем

$$P_b(0) = \hat{H}_b(0, z) \rho \hat{H}_a(z, 0) P_a(0) \Delta z, \quad (9)$$

где матрица \hat{H}_b удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz} \hat{H}_b = -\hat{h} \hat{H}_b, \quad \hat{H}_b(z, z) = \hat{I}. \quad (10)$$

Рассмотрим вначале задачу в стационарном приближении, когда матрица \hat{h} не зависит от z . Тогда $\hat{H}_b(0, z) = \hat{H}_a(z, 0) = \hat{H} \equiv \exp \hat{h}z$, и с помощью (6) и (9) рассчитаем долю статистически средней мощности, рассеянной назад при возбуждении на входе в световод одной из поляризационных мод $\bar{P}_a(0) \equiv (1)$:

$$\begin{aligned} \eta_{\pm}(z) &= \frac{P_{by}(0)}{P_{bx}(0)} = \\ &= \frac{(h/x)\operatorname{th}2xz + \rho[(h/x)^2 + (\Delta\alpha/x)^2(1/\operatorname{ch}2xz)]}{1 \pm (\Delta\alpha/x)\operatorname{th}2xz + \rho[(h/x)\operatorname{th}2xz \pm (h\Delta\alpha/x^2)(1 - (1/\operatorname{ch}2xz))]} . \end{aligned} \quad (11)$$

При этом, как и в (7), мы положили $h_1 = h_2$. В дальнейшем нам потребуется выражение для η при $\Delta\alpha = 0$. Из (11) находим

$$\eta_0(z) = \frac{\operatorname{th}hz + \rho}{1 + \rho \operatorname{th}hz} . \quad (12)$$

При $hz \ll 1$ $\eta_0 \approx \rho + 2hz$ и совпадает, таким образом, с выражением для η , приведенным в [4]. Из (11) видно, что характерный масштаб для h определяется величиной $\rho\Delta\alpha$. Если $\rho\Delta\alpha > h$, то при $z \rightarrow \infty$ $\eta_{\pm}(z)$ стремится к бесконечности, а $\eta_+(z)$ — к нулю, в отличие от $\eta_0(z)$, которое при $z \rightarrow \infty$ стремится к асимптотическому значению, равному единице.

На начальном участке световода, когда $hz, \Delta\alpha z \ll 1$, выражение (11) упрощается и его компоненты приобретают простой физический смысл:

$$\eta_{\pm}(z) = 2hz + \rho(1 \mp 2\Delta\alpha z) . \quad (13)$$

Первый член обусловлен тем, что равный вклад в $\eta_{\pm}(z)$ дает мощность излучения, испытавшая сначала изотропное рэлеевское рассеяние обратно в ту же поляризационную моду и перекаченная затем в ортогональную поляризационную моду, и мощность, перекаченная сначала в ортогональную поляризационную моду и претерпевшая затем изотропное рэлеевское рассеяние. Второй член обусловлен анизотропным рэлеевским рассеянием, причем, как видно из (13), если коэффициенты поглощения поляризационных мод не равны друг другу, то эта доля мощности также будет зависеть от координаты z вдоль световода.

Дихроизм в АОВС приводит к изменению $\frac{d}{dz} \eta$, которое становится заметным при $h \sim \rho\Delta\alpha$. Так, если на входе в АОВС возбуждена поляризационная мода с меньшими потерями (η_+), то при $h = \rho\Delta\alpha$ наклон $\eta_+(z)$ на начальном участке будет нулевым и при больших значениях параметра h . Практически нулевой наклон для $\eta(z)$ наблюдался в [4], где был сделан вывод о том, что в исследуемом АОВС достигнуто предельно малое значение параметра h , обусловленное анизотропией рэлеевского рассеяния в световоде. Однако для типичных значений параметров АОВС $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ и $\Delta\alpha = 0,19 \text{ км}^{-1}$ [2], и $\rho = 0,05$ [4] выполняется условие $\rho\Delta\alpha \sim h$ и, следовательно, для однозначной интерпретации результатов измерений в [4] недостаточно определить $\eta(z)$ для одной поляризационной моды, а необходимо знать как $\eta_+(z)$, так и $\eta_-(z)$. Тогда значения параметров h и $\Delta\alpha$ находятся из соотношений

$$\eta_h = (1/2)(\eta_- + \eta_+) = p + 2hz,$$

(14)

$$\eta_{\Delta\alpha} = (1/2)(\eta_- - \eta_+) = 2p\Delta\alpha z.$$

Таким образом, измерив для обеих поляризационных мод относительную долю мощности, рассеянной назад в ортогональную поляризационную моду, по начальному участку зависимостей $\eta_+(z)$ и $\eta_-(z)$ можно определить величину параметра сохранения состояния поляризации h и дихроизма $\Delta\alpha$ в АОВС. В принципе параметры h и $\Delta\alpha$ можно определить по любому участку $\eta_{\pm}(z)$, а не только при $hz \ll 1$ и $\Delta\alpha z \ll 1$, но в этом случае необходимо решить систему трансцендентных уравнений (11).

В нашем предыдущем рассмотрении мы ограничились решениями уравнений (5) и (10) в приближении стационарного распределения неоднородностей вдоль световода, когда матрица коэффициентов связи постоянна. Как показали измерения распределения параметра h вдоль световода, это приближение не выполняется для больших длин световодов ($z \sim 1$ км) [4].

При произвольной зависимости матрицы коэффициентов связи \hat{h} от z решение матричных дифференциальных уравнений (5) и (10) нельзя выразить в элементарных функциях и квадратурах, поэтому анализ результатов измерений $\eta_{\pm}(z)$ существенно усложняется. Теперь уже нельзя положить $\hat{H}_a(z, 0) = \hat{H}_b(0, z)$, что, в частности, следует из того, что в общем случае матрицы Джонса фазовой пластиинки и дихроичного элемента не перестановочны. При $\hat{H}_a(z, 0) \neq \hat{H}_b(0, z)$ доля мощности, перекаченная в ортогональную поляризационную моду, будет зависеть не только от того, какая поляризационная мода возбуждена на входе в световод, но и от того, с какого конца возбужден световод, т. е. зависимостей $\eta_+(z)$ уже недостаточно для нахождения распределений h и $\Delta\alpha$ по z .

Рассмотрим два практически важных случая, когда можно найти аналитические решения матричных уравнений (5) и (10). Первый случай — он может реализоваться в АОВС с большим радиусом намотки на катушку, когда выполняется условие $\Delta\alpha z, hz \ll 1$. Тогда $\hat{H}_a(0, z) \simeq \hat{H}_b(z, 0) \simeq \hat{I} + \hat{h}z$, и при расчете распределения параметров h и $\Delta\alpha$ вдоль световода можно, в качестве первого приближения, использовать выражения (13). Второй случай — это АОВС с малым радиусом намотки. При уменьшении радиуса намотки световода на катушку величина параметра h возрастает из-за микроизгибов световода быстрее, чем $\Delta\alpha$. При $h \gg \Delta\alpha$ в качестве первого приближения воспользуемся решением уравнений (5) и (10) при $\Delta\alpha = 0$. Легко проверить, что в отсутствие дихроизма в АОВС матрица коэффициентов связи \hat{h} коммутирует со своим интегралом $\int_0^z \hat{h} dz$, поэтому в силу теоремы Лаппо—Данилевского [6] решение этих матричных уравнений можно выразить с помощью матричной экспоненты $\hat{H}_a(0, z) = \hat{H}_b(0, z) = \exp \int_0^z \hat{h} dz$ и, следовательно, для расчета распределения параметра h вдоль световода можно использовать выражение (12), заменив в нем h на его текущее среднее значение $\bar{h} = (1/2) \int_0^z \hat{h} dz$.

Резюмируя полученные в работе результаты, можно сделать вывод о том, что при измерении параметра сохранения состояния поляризации h необходимо контролировать однородность распределения коэффициента связи поляризационных мод по длине АОВС и учитывать их коэффициенты поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminov I. P. // IEEE J. Quant. Electr. 1981. V. 17. P. 15.
2. Calvani R., Caponi R., Coppa G. // Electron. Lett. 1986. V. 22. № 23. P. 1254.
3. Marcuse D. // Appl. Opt. 1978. V. 17. № 20. P. 3232.
4. Tahade K., Okamoto K., Noda J. // J. Opt. Soc. Am. 1986. V. 3. № 10. P. 1594.
5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1965. С. 207.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. С. 141.

Московский физико-технический
институт

Поступила в редакцию
18 августа 1989 г.

SCATTERED RADIATION POWER EVOLUTION IN SINGLE-MODE FIBERS

V. N. Listvin

Statistical matrix expression for dichroic single-mode optical fiber with stationary distribution inhomogeneity along the optical fiber is received. It is taking into account that in the general case the matrix of coupling coefficients in coupled power equations is asymmetrical and parameters polarization-holding h in polarization mode are different. The inverse problem is considered — to find a distribution of parameter h along the fiber over the portion average power coupled back in normal polarization mode. In optical fiber with dichroism the portion averaged power coupled by anisotropic Rayleigh scattering depend on the distance and this is not taking into account in [4].

Аннотации депонированных статей

УДК 621.396.96

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДИКАТОРИС РАССЕЯНИЯ УГОЛКОВЫХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ В ФОРМЕ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ ($\pi/2$, $\pi/2$, π/s , s — ЧЕТНОЕ)

C. B. Процко, A. D. Титов

В работе рассмотрены задачи: построение теоретической модели описания индикаторис рассеяния семейства уголковых отражателей (УО) в форме трехгранных углов ($\pi/2$, $\pi/2$, π/s , s - целые четные числа), разработка единого алгоритма расчета площадей рабочих апертур и диапазонов углов возвратного отражения, оптимизация конструкций отражателей по эффективной поверхности рассеяния (ЭПР) при различных габаритных условиях.

Для анализа характеристик рассеянного отражателями излучения использованы апертурный метод и представление геометрической оптики по формированию изображений в зеркально-призменных системах с многократными отражениями. Изучены последовательности и способы распространения излучения внутри отражателей. Расчеты показывают, что здесь возможно $2s+2$ способа переотражения падающей волны, в любом из которых она, испытав $s+1$ отражение от граней, переходит в волну с противоположным направлением распространения и выходит из отражателя. При этом волна всегда по $s/2$ раза отражается от граней образующих двугранный угол π/s и один раз от третьей грани. Все способы переотражения выписаны в виде диаграммы.

Пространство изображений, формирующее волну, обратную падающей, образуется в результате последовательных отражений пространства предметов от боковых граней УО в порядке прохождения их падающим пучком до выхода его из отражателя через фронтальную грань. Отображение внутренней области УО происходит $2s+2$ возможными способами, которые различными путями всегда приходят к единой области, зеркально-симметричной исходной относительно вершины отражателя. Здесь имеет место ветвление $2s+2$ пространств изображений, формирующих волну, обратную падающей. Каждое из этих пространств наблюдается через окно, представляющее секториальную площадку на гранях области, зеркально-симметричной исходной. При этом суммарное отверстие, состоящее из $2s+2$ окон, вплотную примыкающих друг к другу, ограничено контуром, зеркально-симметричным контуру входной грани УО. Общая часть площади, ограниченная проекциями этих двух контуров в направлении падения исходной волны, на плоскость, перпендикулярную оси визирования, образует апертуру отражателя. Представлена формула расчета площади апертуры отражателя и его секторов через уравнение кривой контура входного отверстия.

(Окончание см. с. 1312)

УДК 621.373.826:535.43

**РЕЗОНАНСНАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА
НА СИНУСОИДАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ
ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ
ПРИ ПАДЕНИИ, БЛИЗКОМ К НОРМАЛЬНОМУ**

A. B. Кац, И. С. Спевак

Рассмотрена дифракция плоской *p*-поляризованной электромагнитной волны на синусоидальной решетке, штрихи которой перпендикулярны плоскости падения, в предположении, что выполнены условия поверхностного резонанса. Получены выражения для амплитуд дифракционных спектров и зеркально отраженной компоненты, справедливые как в однорезонанском, так и в двухрезонанском (вырожденном) случае. Найдены условия резонанса с учетом конечной глубины рельефа и импеданса материала. Исследованы условия полного подавления зеркального отражения и максимума прошедшего потока энергии (однородной его части и первой гармоники, ответственной за формирование поверхностных периодических структур), что представляет интерес для задачи взаимодействия излучения с материалами.

Рассеяние света на синусоидальной периодической структуре — решетке, период Λ которой удовлетворяет условию поверхностного резонанса $|\mathbf{k}_t \pm \mathbf{q}| \approx k$, где \mathbf{k}_t — тангенциальная составляющая волнового вектора падающей электромагнитной волны, \mathbf{q} — волновой вектор решетки, $q = 2\pi/\Lambda$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны света, сопровождается рядом сильных резонансных эффектов (подавление зеркального отражения, увеличение локального поля, аномально высокое поглощение), известных как аномалии Вуда [1–5]. Эти эффекты обусловлены перекачкой энергии падающего излучения в резонансные дифракционные спектры первого порядка, которые скользят вдоль границы раздела и поэтому эффективно взаимодействуют со средой. Из двух условий $|\mathbf{k}_t \pm \mathbf{q}| \approx k$ в общем случае выполняется только одно, так что резонансными свойствами обладает только +1-й или -1-й дифракционный спектр. Однако в вырожденных случаях (нормальное падение $\mathbf{k}_t = 0$ или симметричное относительно плоскости падения рассеяние $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}_t$) условия резонанса выполняются одновременно для обоих спектров первого порядка.

В силу сложности задачи однорезонансный случай и вырожденный случай двойного резонанса ранее исследовались независимо [5]. При этом не удавалось проследить переход от решения задачи в однорезонанском случае к решению для случая вырожденной геометрии при изменении, например, угла падения или длины волны излучения. В частности, условия максимума резонанса, полученные для однорезонансного и двухрезонансного случаев, различны, причем однорезонансное приближение не дает правильного предельного перехода к вырожденному случаю двойного резонанса.

Цель настоящей работы — решение задачи дифракции в промежуточном случае частичного перекрытия резонансов первого порядка и исследование резонансных эффектов при отстройке от вырожденной геометрии. Конкретно в статье исследуется резонансная дифракция *p*-поляризованного света при малых углах падения излучения на синусоидальную поверхность с $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}_t$, $q \approx k$. В п. 1 с помощью модифицированной теории возмущений [3] получены выражения для рассеянных

полей, справедливые как в однорезонансном, так и в двухрезонансном случае (эти выражения могут быть также найдены и из системы уравнений [5] для амплитуд резонансных и нерезонансных полей). В п. 2 исследован поглощенный поток, который играет ключевую роль в задаче формирования периодических структур мощным когерентным излучением [6]. В заключительной части работы исследуются условия полного подавления зеркального отражения в зависимости от угла падения (п. 3) (для рассматриваемых здесь условий облучения этот эффект в известных работах [5, 7] не исследовался).

1. Система уравнений. Определение полей. Рассмотрим рассеяние плоской p -поляризованной электромагнитной волны $e_y H \exp[i(k_{xx} + k_z z - \omega t)]$ на синусоидальной поверхности материала $\epsilon = \zeta(x, t) = a \cos(qx - \phi(t))$, где H — амплитуда магнитного поля, ω — частота, $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ — волновой вектор падающей волны, θ — угол падения, $|\psi| \ll \omega, qa \ll 1$. В результате дифракции падающего излучения на решетке $\zeta(x, t)$ возникают дифракционные спектры $e_y H_m \exp[i(k_{mx} x + k_{mz} z - \omega t - m\phi)]$, $k_{mx} = k_x + mq$, $k_{mz} = (k^2 - k_{mx}^2)^{1/2}$; $\operatorname{Re} k_{mz} \leq 0$; ось z направлена в среду по нормали к средней поверхности. В случае хорошо проводящей среды ($|\xi| \ll 1$, $\xi = \xi' + i\xi'' = 1/\sqrt{\epsilon}$ — поверхностный импеданс, $\xi' > 0$, $\xi'' < 0$) амплитуды H_{mn} рассеянных волн вне среды можно определить из граничного условия Леоновича при $z = \zeta$:

$$E_t = \xi [\mathbf{H}_t \mathbf{n}], \quad (1.1)$$

где $\mathbf{n} \simeq \mathbf{e}_z - \nabla \zeta$ — нормаль к поверхности ζ , направленная в среду, \mathbf{E}_t и \mathbf{H}_t — тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & e_y \{ H \exp[i(k_{xx} + k_z z - \omega t)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m \exp[i(k_{mx} x + k_{mz} z - \omega t - m\phi)] \}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

и аналогично для \mathbf{E} . Для применимости условия Леоновича требуется, чтобы длина волны излучения в среде $\delta \sim \lambda |\xi|$ была малой по сравнению с радиусом кривизны поверхности $R \sim (q^2 a)^{-1}$, что выполняется, поскольку $|\xi| \ll 1$, $qa \ll 1$. Отметим, что в формуле для нормали \mathbf{n} не учитываются нелинейные члены $(\nabla \zeta)^2$, так как в рассматриваемом ниже приближении они не дают вклада. Учитывая разложение (1.2), из граничного условия (1.1) получаем систему уравнений для амплитуд дифракционных спектров [3]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{nm} X_m = \lambda_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} d_{nm} = & i^m J_{m-n}(-s_m) \left[\beta_m + \xi + \frac{(m-n)\chi (\sin \theta + m\kappa)}{\beta_m + \beta_0} \right], \\ s_m = & ak(\beta_m + \beta_0), \quad \chi = q/k, \quad X_m = H_m/H, \\ \beta_m = & -k_{mz}/k, \quad \operatorname{Re} \beta_m \geq 0, \\ \lambda_0 = & \beta_0 - \xi, \quad \lambda_{\pm 1} = \mu \sin \theta, \quad \mu = qa/2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$\lambda_n \sim \mu^{1/n}$ для $n \geq 2$, J_n — функция Бесселя.

При $|\beta_m| \sim 1$ система (1.3) может быть решена в рамках теории

возмущений по малому параметру $\mu = qa/2$: $X_m \sim \mu^{|m|}/(\beta_m + \xi)$. Однако если для одной из компонент $|\beta_m| \rightarrow 0$, что соответствует резонансу с поверхностью электромагнитной волны (ПЭВ), то амплитуда этой компоненты обращается в бесконечность при $|\xi| \rightarrow 0$. Последнее свидетельствует о неприменимости стандартной теории возмущений. В действительности наличие периодического гофра приводит к перенормировке импеданса $\xi \rightarrow \xi + \mu^2$, уширению резонанса и конечному значению амплитуды резонансного поля, как это следует из модифицированной теории возмущений [3]. Ее отличие от стандартной заключается в том, что заранее не предполагается малость амплитуд незеркально рассеянных волн по сравнению с амплитудой падающей. Формально это проявляется в том, что определитель бесконечномерной системы уравнений (1.3) для $\xi = 0$ в случае одиночного резонанса ($\beta_m = 0$) обращается в нуль с точностью до членов порядка μ^2 (в силу зануления диагонального элемента d_{mm} , отвечающего резонансному полю H_m). Для представляющего наибольший интерес (при малых и пологих неровностях поверхности $ka, qa \ll 1$) случая резонанса в спектрах первого порядка корректный результат получается, если в (1.3) ограничиться уравнениями и составляющими с $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Решение при этом представляется в виде отношения двух рядов по μ . Физически это соответствует учету затухания резонансных полей из-за перерассеяния на неровностях границы в однородные и неоднородные электромагнитные волны. Увеличение размерности усеченной системы по сравнению с указанной приводит к росту степеней многочленов в числителе и знаменателе, но не меняет главных членов.

При почти нормальном падении наличие малого параметра $\theta \ll 1$ (в дополнение к малым параметрам $\beta_{\pm 1}, \xi, \mu^2$) позволяет существенно упростить коэффициенты системы по сравнению с общим случаем. Считая $\theta \ll 1$ и решая усеченную систему, получаем поля в виде дробно-рациональных функций μ . Ограничивааясь главными членами, имеем

$$X_0 = \frac{\Delta_-}{\Delta_+}, \quad X_m = \frac{2i\mu\gamma_m}{\Delta_+}, \quad X_{2m} = \frac{-i2\mu^3\gamma_m}{\sqrt{3}\Delta_+}, \quad (1.5)$$

где $\Delta_{\pm} = \gamma_1\gamma_1 \pm \mu^2(\gamma_1 + \gamma_2)$, $\bar{m} = -m$, $m = \pm 1$, $\gamma_m = \beta_m + \xi - i\mu^2/\sqrt{3}$, $\beta_m = [1 - (\theta + m\kappa)^2]^{1/2}$.

Формулы (1.5) описывают как однорезонансный случай, так и случаи частичного или полного перекрытия одиночных резонансов. Напомним кратко результаты, относящиеся к однорезонансному и вырожденному двухрезонансному случаям.

Выражение для полей в однорезонансном случае получается из (1.5) в пределе $|\gamma_m| \gg |\gamma_{\bar{m}}|$, что требует $\theta \gg |\xi'' - \mu^2/\sqrt{3}|^2$ (ниже это условие будет уточнено):

$$X_0 = \frac{\gamma_m - \mu^2}{\gamma_m + \mu^2}, \quad X_m = \frac{2i\mu}{\gamma_m + \mu^2}, \quad X_{2m} = \frac{-i2\mu^2}{\sqrt{3}(\gamma_m + \mu^2)}. \quad (1.6)$$

Резонансное поведение амплитуды X_m ($m = \pm 1$) наблюдается как при изменении θ , так и при изменении λ и Λ . В целях общности условие резонанса удобно записать относительно переменной $\beta_m(\theta, \kappa)$: при заданной амплитуде решетки максимум $|X_m|$ достигается при

$$\beta_m(\theta, \kappa) = i(-\xi'' + \mu^2/\sqrt{3}), \quad \operatorname{Re} \beta_m = 0, \quad (1.7)$$

при этом

$$X_m = \frac{2i\mu}{\xi' + \mu^2}, \quad X_0 = \frac{\xi' - \mu^2}{\xi' + \mu^2}. \quad (1.8)$$

В свою очередь, как функция глубины решетки амплитуда резонансного поля достигает максимума при

$$\mu^2 = \xi', \quad (1.9)$$

причем в этом случае $X_m = i/\sqrt{\xi'}$ и достигается полное подавление зеркального отражения $X_0 = 0$ [5, 7].

При строго нормальном падении ($\theta = 0$, $\beta_m = \beta_{\bar{m}}$, $\gamma_m = \gamma_{\bar{m}}$) имеем из (1.5)

$$X_0 = \frac{\gamma_m - 2\mu^2}{\gamma_m + 2\mu^2}, \quad X_m = \frac{i2\mu}{\gamma_m + 2\mu^2}, \quad X_{2m} = \frac{-i2\mu^2}{\sqrt{3}(\gamma_m + 2\mu^2)}. \quad (1.10)$$

Условие полного подавления X_0 и достижения максимума $|X_m|$

$$\beta_m = i(-\xi'' + \mu^2/\sqrt{3}), \quad \mu^2 = \xi'/2 \quad (1.11)$$

в этом случае соответствует решетке, амплитуда которой в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем в однорезонансном случае. Ниже мы исследуем эффект полного подавления зеркального отражения в общем случае $0 < \theta \ll 1$.

Из (1.6) следует, что ширина одиночного резонанса равна

$$|\Delta\beta_m| = \xi' + \mu^2, \quad (1.12)$$

откуда пересчетом находим угловую ширину резонанса

$$\Delta\theta = (-\xi_{\text{р}} + \mu^2/\sqrt{3})(\xi' + \mu^2). \quad (1.13)$$

Очевидно, что при $\theta > \Delta\theta$ происходит расщепление двойного резонанса, т. е. снимается вырождение. Поскольку $|\xi'|, \mu^2 \ll 1$, то из-за узости резонанса (1.13) попадание обеих волн в резонанс происходит только в малой области углов падения вблизи нормали $\theta < \Delta\theta$.

2. Поглощенный поток. Резонансное рассеяние в дифракционные спектры первого порядка и связанное с ним подавление зеркального отражения эквивалентны увеличению поглощающей способности поверхности [5]. Это непосредственно следует из тождества, которому удовлетворяют решения (1.5),

$$\xi'(|X_1|^2 + |X_{\bar{1}}|^2) = 1 - |X_0|^2 - \beta'_1 |X_1|^2 - \beta'_{\bar{1}} |X_{\bar{1}}|^2 \leq 1, \quad (2.1)$$

где $\beta'_m = \operatorname{Re} \beta_m$. Равенство (2.1) выражает закон сохранения энергии: поглощенный поток $\xi'(|X_1|^2 + |X_{\bar{1}}|^2)$ (см. ниже) равен падающему за вычетом зеркально отраженного $|X_0|^2$ и дифрагировавших в вакуум потоков $\beta'_m |X_m|^2$.

Рассмотрим более детально поглощенный поток. Вычислим нормальную к поверхности компоненту потока излучения $\bar{S} = c[\mathbf{E}\mathbf{H}]/4\pi$ на границе $z = \xi$:

$$S = \langle S n \rangle_{z=\xi} = \frac{c\xi'}{8\pi} |\mathbf{H}_t|_{z=\xi}^2, \quad (2.2)$$

угловые скобки означают усреднение по периоду поля. Поток S представляет собой энергию, вытекающую извне внутрь материала и диссилирующую в нем [8]. Его фурье-разложение имеет вид

$$S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m \exp[i m(qx - \psi(t))], \quad S_{\bar{m}} = S_m^*. \quad (2.3)$$

С точностью до главных членов нулевая S_0 (однородная часть потока) и первая S_1 гармоники потока равны

$$S_0 = \xi' I_0 [1 + X_0|^2 + \sum_{m=\pm 1, \pm 2} |X_m|^2]; \quad (2.4)$$

$$S_1 = \xi' I_0 [(1+X_0)^* X_1 + X_1^* X_2 + (1+X_0) X_{\bar{1}}^* + X_{\bar{1}}^* X_{\bar{2}}^*], \quad (2.5)$$

где $I_0 = cH^2/8\pi$ — падающий поток.

Поскольку вблизи резонанса величина и поведение S_0 определяются резонансными полями X_m ($|X_m| \gg 1$, $m = \pm 1$), то в силу (2.1) максимум S_0 достигается при тех же условиях, которые отвечают полному подавлению зеркального отражения, причем в максимуме $S_0 \cong I_0$. Увеличение прошедшего потока энергии приводит не только к аномально высокому поглощению и, соответственно, тепловыделению, но может оказывать существенное влияние и на нетепловые эффекты, приводя, например, к резонансному увеличению фотоответа гофрированного полупроводника [9].

Что касается потока S_1 , то при малой глубине гофра $\mu^2 \ll \xi'$ положения экстремумов S_0 и S_1 практически совпадают. Однако в области $\mu^2 \geq \xi'$ из-за наличия слагаемых $X_1 X_2$, $X_{\bar{1}} X_{\bar{2}}$, вклад которых уже не мал, экстремумы S_1 оказываются смещенными на величину $|\Delta\beta| \sim \mu^2$. $|\xi'|$ относительно положения максимумов S_0 . Как известно [6], поток S_1 ответствен за формирование поверхностных структур; причем реально образующиеся структуры отвечают максимумам инкремента $\text{Re}(e^{i\theta} S_1 / \mu)$, θ — зависящий от механизма неустойчивости фазовый сдвиг. Таким образом, формируемые излучением на поверхности материала структуры с ростом глубины гофра перестают быть оптимальными для максимума поглощения света поверхностью.

Отметим, что при малых углах падения $\theta \leq \Delta\theta$ аномально велика вторая гармоника потока

$$S_2 = \xi' I_0 X_1 X_{\bar{1}}. \quad (2.6)$$

Наличие мощного теплового источника на второй гармонике приведет к вынужденному (нерезонансному!) росту структур с половинным периодом. Это обстоятельство существенно при решении задачи о возникновении и росте индуцируемых излучением структур. При этом и в задаче дифракции необходимо учитывать помимо резонансной решетки с $\Lambda \approx \lambda$ наличие решетки с $\Lambda' \approx \lambda/2$, поскольку поля $H_{\pm 1}$ оказываются параметрически связанными между собой вследствие перерассеяния на второй гармонике гофра (см. [10, 11]), где подобная задача решается в связи с исследованием нелинейного режима роста поверхностных лазерно-индукционных структур в случае наклонного падения).

3. Подавление зеркального отражения. В силу закона сохранения энергии резонансное рассеяние влечет за собой частичное или полное подавление зеркальной компоненты. Поскольку при малых углах падения могут иметь место как одиночные, так и двойные резонансы (в зависимости от параметров μ^2 , ξ , β_1), то подавление зеркального отражения может реализовываться на нескольких отличающихся периодом и глубиной решетках. Рассмотрим возникающие здесь случаи.

А. Обе дифракционные моды X_1 и $X_{\bar{1}}$ относятся к распространяющимся волнам: $\beta_1 > 0$, $\beta_{\bar{1}} > 0$ (рис. 1а; см. на вклейке). Условие $X_0 = 0$ не выполняется ни при каких μ^2 , β_1 , θ . Согласно результатам численного счета $|X_0|$ имеет в этой области неглубокий минимум.

Б. Волна X_1 неоднородная, $X_{\bar{1}}$ — распространяющаяся: $\beta_1 = ib$, $0 \leq b \leq 2\sqrt{\theta}$, $\beta_{\bar{1}} \geq 0$ (рис. 1б). Исследовать аналитически удается только предельные случаи, отвечающие распространению одной из волн строго вдоль границы раздела.

а) $b = 0$, $\beta_{\bar{1}} = 2\sqrt{\theta}$. Этот вариант примыкает к предыдущему: $X_0 \neq 0$ для всех μ^2 , θ .

б) $b = 2\sqrt{\theta}$, $\beta_{\bar{1}} = 0$. Уравнение $X_0 = 0$ в зависимости от параметров μ^2 , θ может иметь два типа решений:

если $\xi' + \sqrt{3}\xi'' \leq 0$ (диэлектрики), то X_0 обращается в нуль при

$$\mu^2 = \sqrt{3}(\xi'' + \sqrt{\theta}), \quad \sqrt{\theta}/\xi' = z_{1,2}, \quad (3.1)$$

где $z_{1,2} = \sqrt{3} \mp \sqrt{2(1+\sqrt{3}\xi''/\xi')}$;

решение второго типа существует при любых ξ :

$$\mu^2 = \mu_1^2 = \xi', \quad \sqrt{\theta}/\xi' = z_0, \quad (3.2)$$

где $z_0 = (B^2 + 1)/2B$, $B = 1/\sqrt{3} - \xi''/\xi' > 0$.

Можно показать, что решение (3.2) существует только на границе $b=2\sqrt{\theta}$ рассматриваемой области и отсутствует при $0 < b < 2\sqrt{\theta}$. Однако, согласно предыдущему анализу, при достаточно больших углах падения $\theta > \Delta\theta$ в рассматриваемой области должны реализовываться одиночные резонансы (с подавлением X_0). Полученный здесь вывод об отсутствии решений однорезонансного типа (3.2) уравнения $X_0=0$ в области Б объясняется тем, что наличие распространяющейся волны X_1 не позволяет строго подавить зеркальную компоненту. В действительности, как показывают результаты численного счета, в области Б амплитуда $|X_0|$ может иметь глубокие (почти до нуля) провалы, т. е. практически подавление X_0 имеет место. Что касается решения типа (3.1), то по результатам численного счета можно судить о его существовании не только на границе $b=2\sqrt{\theta}$, но и в области $b < 2\sqrt{\theta}$ (см. ниже рис. 5а, б).

В. Обе волны X_1 , $X_{\bar{1}}$ неоднородные: $\beta_1 = ib$, $\beta_{\bar{1}} = i\bar{b}$, $\bar{b} > 0$, $b > 2\sqrt{\theta}$, рис. 1в. Подавление X_0 возможно при двух значениях μ^2 (вывод см. в Приложении).

а) Одно резонансное значение μ^2 отвечает перекрывающимся резонансам и переходит в (1.11) при $\theta \rightarrow 0$:

$$\mu^2 = \mu_2^2(0), \quad (3.3)$$

где μ_2^2 — корень уравнения

$$\xi'(\xi' - 2\mu^2)(\xi'' - \mu^2/\sqrt{3})^2 + \theta^2 = 0, \quad (3.4)$$

удовлетворяющий условию

$$\mu_2^2 > \sqrt{3}(\sqrt{\theta} + \xi''). \quad (3.5)$$

При этом постоянные распространения b и \bar{b} , рассеянных волн равны

$$b = -v - \theta/v, \quad \bar{b} = -v + \theta/v, \quad (3.6)$$

где $v = \xi'' - \mu_2^2/\sqrt{3}$.

Если $\sqrt{\theta} < |\xi''|$ или $\xi' + \sqrt{3}\xi'' < 0$, то корень уравнения (3.4), (3.5) всегда существует. Если же $\xi' + \sqrt{3}\xi'' > 0$, то указанный корень существует при ($z = \sqrt{\theta}/\xi'$)

$$z < z_1, \quad z > z_2 \quad (3.7)$$

и отсутствует в промежутке

$$z_1 < z < z_2, \quad z_{1,2} = \sqrt{3} \mp \sqrt{2(1 + \sqrt{3}\xi''/\xi')}. \quad (3.8)$$

Приведем приближенные формулы для зависимости возвышения μ_2 от угла падения θ в предельных случаях. Для малых θ

$$\mu_2^2 = \frac{\xi'}{2} + \frac{\theta^2}{2\xi'(\xi'' - \xi'/2\sqrt{3})^2}, \quad \theta^2 \ll \xi' \left(\frac{\xi'}{2\sqrt{3}} - \xi'' \right)^2. \quad (3.9)$$

При $\theta \rightarrow 0$ из (3.9) следует второе условие в (1.11), а из (3.6) — первое. Для больших θ

$$\mu_2^2 = \sqrt[3]{\frac{3\theta^2}{2\xi'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi'}{3} + \frac{4\xi''}{\sqrt{3}} \right)^3}, \quad \theta^2 \gg \frac{\xi'}{12} \left| \frac{\xi'}{3} + \frac{4\xi''}{\sqrt{3}} \right|^3. \quad (3.10)$$

Зависимость возвышения $\mu_2(\theta)$ (кривая 1) и постоянных распространения b , \bar{b} (кривые 2, 3) от угла падения $z = \sqrt{\theta}/\xi'$ для двух материалов Ge, $\epsilon = -32 + i72$, и Al, $\epsilon = -101 + i30$, при $\lambda = 1,06$ мкм показана на рис. 2.

б) Второе значение μ^2 , при котором происходит подавление X_0 , отвечает однорезонансному случаю (см. (1.9)):

$$\mu^2 = \mu_1^2 = \xi'. \quad (3.11)$$

Поскольку в рассматриваемом случае β_1 и β_2 должны быть по определению чисто мнимыми, это ограничивает область углов θ и импедансов ξ , при которых осуществляется резонанс. Интересно, что для некоторых материалов (в основном металлов) существуют интервалы углов, для которых условие $X_0 = 0$ выполняется при $\mu^2 = \mu_1^2$ и более чем двух значениях β_1 (неоднозначность по периоду решетки). Очевидно, два корня соответствуют резонансам в +1- и -1-м дифракционных спектрах. Третий корень практически не отличается от одного из резонансных значений β_1 — его наличие может быть связано с используемым низшим приближением по μ .

Анализ всех возникающих здесь вариантов приведен в Приложении, результаты показаны на рис. 3, где представлена зависимость числа корней уравнения $X_0 = 0$ от z и параметров среды при $\mu^2 = \xi'$. На оси абсцисс указаны точки, соответствующие материалам, для которых приведены решения b и \bar{b} на рис. 4. Введены обозначения

$$B = 1/\sqrt{3} - \xi''/\xi', z = \sqrt{\theta}/\xi', z_0 = (B^2 + 1)/2B,$$

$$z_{3,4} = \left\{ \left(\frac{3B \mp \sqrt{B^2 - 8}}{4} \right) \left[1 + \left(\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 8}}{4} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$B^* \approx 3,05$ — корень уравнения $z_0 = z_4$. Как видно из рис. 3, подавление X_0 при $\mu^2 = \mu_1^2$ возможно только при $\sqrt{\theta} > \xi'$, что не допускает предельного перехода к нормальному падению. Зависимость постоянных распространения b и \bar{b} от угла падения показана на рис. 4 (рис. 4а — для Ge, $z_0 = 1,29$; рис. 4б — для Al, $z_0 = 3,795$, $z_3 = 3,796$, $z_4 = 2,74$).

Принимая во внимание и случай а), можно сделать заключение, что при некоторых углах падения θ подавление X_0 может достигаться на нескольких решетках (от одной до трех), характеризующихся различными парами параметров μ^2 , β_1 . Для ряда углов падения последнее иллюстрируется графиками $|X_0|$ в зависимости от μ^2 , β_1 (рис. 5а, б — Ge, $z = 1,3; 1,6$; рис. 5в, г — Al, $z = 2; 4$). Точки излома на графиках соответствуют превращению моды X_1 из распространяющейся в неоднородную при $\beta_1'' = 2\sqrt{\theta}$.

Полученное выше компактное решение задачи дифракции электромагнитной волны при почти нормальном падении на синусоидальную решетку описывает переход между изученными ранее вырожденным случаем двойного резонанса при нормальном падении и однорезонансным случаем при больших углах падения $\theta > \Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — угловая ширина резонанса. Структура резонансов в этой промежуточной области существенно обогащается. Она определяется зависимостью амплитуд дифрагирующих волн от безразмерной z -компоненты волнового вектора +1-й компоненты $\beta_1(\theta, \lambda/\Lambda) = \sqrt{1 - (\theta + \lambda/\Lambda)^2}$, детально исследованной в работе. Полученные результаты полностью определяют резонансное поведение амплитуд как функций угла падения θ , периода решетки Λ и длины волны падающего излучения λ . Резонансная дифракция на решетке (малой амплитуды!) приводит к сильному перераспределению отраженного и проходящего (поглощаемого) потоков излучения, что представляет интерес для задач взаимодействия излучения с материалами. В связи с этим исследованы зеркально отраженный и прошедший в среду потоки излучения. Найдены условия максимума поглощенного

потока и полного подавления зеркального отражения в зависимости от параметров решетки и угла падения.

Проведено также исследование интерференционного потока излучения (билинейного по спектрам нулевого и первого, а также первого и второго порядков), который отвечает за формирование периодических структур в результате развития неустойчивости типа вынужденного теплового рассеяния [6]. Показано, что положение экстремумов интерференционного потока, вообще говоря, не совпадает с положением экстремумов однородного потока (последние отвечают подавлению зеркального отражения). Рассогласование увеличивается с ростом глубины гофра и обусловлено растущим вкладом дифракционного спектра 2-го порядка. Хотя период решетки, отвечающий максимуму инкремента, мало (на величину порядка ширины резонанса) отличается от периода решетки, соответствующей максимуму поглощения, это отличие, однако, может оказывать существенное влияние на динамику поверхностных структур на нелинейной стадии их развития.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод условий подавления зеркального отражения

Запишем в явном виде условие обращения X_0 в нуль:

$$\beta_1 \beta_{\bar{1}} + (u + iv)(\beta_1 + \beta_{\bar{1}}) + (u + iv)^2 - \mu^4 = 0, \quad (\text{П.1})$$

где $u = \xi' - \mu^2$, $v = \xi'' - \mu^2/\sqrt{3} < 0$, причем β_1 и $\beta_{\bar{1}}$ связаны соотношением

$$\beta_1^2 - \beta_{\bar{1}}^2 = 4\theta. \quad (\text{П.2})$$

В случае, когда оба резонансных спектра являются неоднородными ($\beta_1 = ib$, $\beta_{\bar{1}} = i\bar{b}$), система уравнений (П.1), (П.2) распадается на две подсистемы:

$$\begin{cases} b\bar{b} + v(b + \bar{b}) - u^2 + v^2 + \mu^4 = 0 \\ b + \bar{b} + 2v = 0 \\ b^2 - \bar{b}^2 = 4\theta. \end{cases}; \quad (\text{П.3а})$$

$$\begin{cases} b\bar{b} + v(b + \bar{b}) + v^2 + \mu^4 = 0 \\ u = 0 \\ b^2 - \bar{b}^2 = 4\theta. \end{cases}. \quad (\text{П.3б})$$

Рассмотрим первую подсистему. Из второго и третьего уравнений выражаем b , \bar{b} через μ^2 , θ (см. (3.6)). Подставив потом b , \bar{b} в первое уравнение системы (П.3а), получим уравнение (3.4) для определения μ_2^2 . Требование положительности b накладывает на μ_2^2 условие (3.5).

Рассмотрим вторую подсистему. Сделаем замену переменных

$$b = 2\sqrt{\theta} \operatorname{ch} \varphi, \quad \bar{b} = 2\sqrt{\theta} \operatorname{sh} \varphi, \quad \varphi > 0. \quad (\text{П.4})$$

Тогда из первого уравнения (П.3б) получаем

$$f(x) \equiv x^4 - \frac{2B}{z} x^3 + \frac{B^2 + 1}{z^2} x^2 - 1 = 0, \quad (\text{П.5})$$

где $x = e^\varphi > 1$, $B = 1/\sqrt{3} - \xi''/\xi' > 0$, $z = \sqrt{\theta}/\xi'$.

Определим число корней $x > 1$ этого уравнения. При $B < 2\sqrt{2}$ функция $f(x)$ возрастающая при $x > 0$: $f(x) > 0$. Тогда, если $f(1) < 0$ (> 0), то уравнение (П.5) имеет один корень $x > 1$ (не имеет таких корней). При $B \geq 2\sqrt{2}$ число корней можно определить, исследуя знак функции $f(x)$ в стационарных точках x_1 и x_2 ,

$$x_{1,2} = (3B \mp \sqrt{B^2 - 8})/4z. \quad (\text{П.6})$$

Пусть $f(1) > 0$. Если при этом $f(x_2) > 0$ (< 0), то уравнение (П.5) корней не имеет (имеет два корня $x > 1$). Пусть теперь $f(1) < 0$. Тогда при $f(x_1) < 0$ (> 0) уравнение (П.5) имеет один корень $x > 1$ (один или три корня для $f(x_2) \geq 1$). Учитывая, что условие $f(1) \geq 0$ эквивалентно условию $z \leq z_0$, а условия $f(x_1) \geq 0$, $f(x_2) \geq 0$ эквивалентны условиям $z \leq z_3$, $z \leq z_4$, получаем отсюда результаты, приведенные на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wood R. // Phys. Rev. 1935. V. 48. № 11. P. 928.
2. Maistre D., Petit R. // Opt. Com. 1976. V. 17. № 2. P. 196.
3. Кац А. В., Маслов В. В. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 2. С. 496.
4. Бонч-Бруевич А. М., Коченгина М. К., Либенсон М. Н. и др. // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1982. Т. 46. № 6. С. 1186.
5. Ахманов С. А., Семиногов В. Н., Соколов В. И. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93 № 5. С. 1654.
6. Спевак И. С., Конторович В. М., Кац А. В., Гавриков В. К. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. № 1. С. 104.
7. Гандельман Г. М., Кондратенко П. С. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. № 5. С. 246.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
9. Беляков Л. В., Горячев Д. Н., Сресели О. М., Ярошецкий И. Д. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. № 5. С. 261.
10. Гандельман Г. М., Кондратенко П. С. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 4. С. 1470.
11. Большов Л. А., Московченко А. В., Персианцев М. И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 4. С. 62.

Научно-производственное
объединение «Метрология»

Поступила в редакцию
15 мая 1989 г.,
после доработки
12 октября 1989 г.

RESONANCE LIGHT DIFFRACTION BY THE SINUSOIDAL BOUNDARY OF THE HIGHLY CONDUCTING MEDIUM AT NEARLY NORMAL INCIDENCE

A. V. Kats, I. S. Spevak

Diffraction of the p -polarized plane electromagnetic wave by the sinusoidal grating which rulings perpendicular to the incidence plane is theoretically considered. In the assumption that surface resonance conditions are fulfilled. Expressions for the magnitudes of the diffraction spectra and specular reflected component which are valid both for the single resonance case and for the dual resonance (degenerate) case are obtained. Exact resonance conditions with regard for the finite relief depth and material impedance are found out. Conditions of total inhibition of the specular reflection and maximum of passed energy flux (its uniform part and its first harmonic responsible for surface periodic structure formation) are investigated, which is a matter of interest for the problem of interaction of the radiation with materials.

УДК 535.416.3

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ФОКУСИРОВКИ ИЗЛУЧЕНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМ КОНТУРОМ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

М. А. Воронцов, К. В. Шишаков, В. И. Шмальгаузен

Исследуются новые возможности управления фазой в адаптивных оптических системах фокусировки излучения с помощью организации дополнительного контура обратной связи.

Одной из основных проблем, возникающих при проектировании целого ряда адаптивных систем фокусировки излучения, является лучевая стойкость управляемых зеркал. Необходимость в охлаждении отражающей поверхности зеркала приводит к значительному усложнению конструкции зеркала, вызывает ухудшение его характеристик, требует использования дорогостоящих технологий [1, 2].

Другой путь решения этой проблемы связан с использованием нелинейно-оптических методов коррекции волнового фронта [3]. Среди них широкое распространение получили методы обращения волнового фронта [4]. Однако необходимость использования в большинстве практических задач широкоапертурных световых пучков существенно затрудняет применение этих методов.

В работе исследуются новые возможности организации управления фазой в адаптивных оптических системах, позволяющие существенно ослабить требования к лучевой стойкости управляемых зеркал. При этом для управления фазой интенсивных световых пучков можно использовать стандартную адаптивную технику. Для модуляции фазы интенсивного светового поля используется слой среды с нелинейностью керровского типа. При этом управляемое зеркало располагается в контуре обратной связи пассивного кольцевого резонатора.

1. Постановка задачи. Типичная схема адаптивной системы фокусировки излучения через оптически неоднородную среду показана на рис. 1а (см. на вклейке). Излучение лазера проходит через корректор волнового фронта (КВФ) с фазовым профилем ϕ_u , каскад усилителей G , телескопируется и направляется через оптически неоднородную среду к отражателю. На основе анализа рассеянного отражателем поля организуется управление профилем фазы ϕ_u излученной волны с целью коррекции фазовых искажений ϕ_c на трассе. К недостаткам рассмотренной схемы следует отнести необходимость дополнительной компенсации фазовых искажений ϕ_g в каскаде усилителей. Кроме этого, если управляемое зеркало корректора располагается в интенсивном исходном световом пучке, оно может испытывать сильные термодеформации. Исследуем возможности уменьшения лучевой нагрузки на управляемом зеркале и компенсации фазовых искажений ϕ_g , вносимых каскадом усилителей. Для этого изменим оптическую схему системы: ответвим малую часть энергии в контур обратной связи, образованный зеркалами M_i ($i=1, \dots, 4$) с коэффициентами отражения по интенсивности R_i ($R_3=R_4=1$) (рис. 1б). Тогда, поместив корректор волнового фронта в контур обратной связи, можно существенно ослабить действующую на него лучевую нагрузку. Для создания необходимой модуляции фазы исходной волны в оптический тракт системы вводится тонкий слой среды NL с керровской нелинейностью. В дальнейшем будет показано, что

такая схема позволяет управлять фазой основного пучка с помощью модуляции фазы относительно слабого светового поля.

Для простоты ограничимся анализом процессов распространения светового поля в приближении геометрической оптики (полагаем, что протяженность контура обратной связи много меньше характерной длины дифракционного расплывания пучка). Обозначим через $A(r, t)$ комплексную амплитуду поля непосредственно перед слоем нелинейной среды NL (рис. 1б). Для нелинейной фазовой модуляции $\varphi(r, t)$, возникающей в тонком слое среды с керровской нелинейностью, можно записать уравнение [5]

$$\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi = \kappa (AA^*) , \quad (1)$$

где κ — коэффициент, характеризующий нелинейность, τ — время релаксации.

Легко показать, что преобразование комплексной амплитуды A после прохождения волной контура обратной связи описывается в виде $A = G_0^{1/2} \exp(i\Phi_g) [(1-R_1)^{1/2} A_{in} + R_1^{1/2} A_u]$, $A_u = R_2^{1/2} A \exp[i(\varphi + \Phi_u)]$. (2)

Здесь G_0 — коэффициент усиления по интенсивности поля в каскаде усилителей, $A_{in} = |A_{in}| \exp[i\Phi_{in}]$ — комплексная амплитуда входного поля, временем запаздывания волны в контуре обратной связи будем пренебречь по сравнению с характерным временем τ .

Рассмотрим так называемое однопроходное приближение, которое имеет место при $\gamma^2 = G_0 R_1 R_2 \ll 1$ [6]. Оно соответствует случаю, когда в контур обратной связи отводится сравнительно малая часть излучения. Ограничиваюсь линейными относительно γ слагаемыми, из уравнений (1), (2) нетрудно получить следующее выражение [6]:

$$\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi = k_0 f(r) [1 + 2\gamma \cos(\varphi + \Phi_u + \Phi_g)], \quad (3)$$

где $f(r) = |A_{in}(r)|^2 / I_m$ — нормированное распределение интенсивности входного поля, $I_m = \max |A_{in}(r)|^2$, $k_0 = \kappa G_0 (1-R_1) I_m$.

Коэффициент k_0 характеризует силу проявления нелинейных эффектов, коэффициент γ^2 — относительную долю энергии светового поля, поступающую в контур обратной связи. С учетом введенных обозначений при $\gamma^2 \ll 1$ выражение для комплексной амплитуды выходного поля примет вид

$$A_{out} = (1-R_2)^{1/2} A e^{i\varphi} \simeq \\ \simeq [(1-R_1)(1-R_2)G_0]^{1/2} A_{in} \exp[i(\varphi + \Phi_g)] \{1 + \gamma \exp[i(\varphi + \Phi_u + \Phi_g)]\}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) описывают преобразование светового поля в системе с контуром оптической обратной связи. Их анализ позволяет рассмотреть основные свойства такой системы.

2. Управление фазой в системе с оптической обратной связью. Покажем, что, управляя фазой волны в контуре обратной связи, можно эффективно изменять фазу выходного излучения. Рассмотрим приближенное решение уравнения (3) для входного пучка с пространственно однородным распределением интенсивности ($f(r) = 1$). Стационарное значение нелинейной фазовой модуляции $\hat{\varphi}$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\varphi} = k_0 [1 + 2\gamma \cos(\hat{\varphi} + \Phi_u + \Phi_g)]. \quad (5)$$

Найдем его решение для случая $|k_0\gamma| \gg 1$. Положим

$$\hat{\varphi}(r) + \Phi_g(r) + \Phi_u(r) = \varphi_0 + \varepsilon(r), \quad (6)$$

где ϕ_0 — постоянный фазовый сдвиг, $|\varepsilon(r)| \ll 1$. Подставляя выражение (6) в (5) и линеаризуя полученное уравнение относительно $\varepsilon(r)$, не трудно получить

$$\phi_0 = k_0(1+2\gamma \cos \phi_0), \quad \varepsilon(r) \simeq \frac{\Phi_u(r) + \Phi_g(r)}{1+2k_0\gamma \sin \phi_0}.$$

Из графического анализа уравнения для ϕ_0 можно показать [6], что полученное соотношение имеет множество устойчивых решений, расположенных в пределах от $k_0(1-2\gamma)$ до $k_0(1+2\gamma)$ с интервалом порядка 2π . В силу малости параметра γ глубина относительной модуляции фазы $(\hat{\Phi}_{\max} - \hat{\Phi}_{\min}) / \hat{\Phi}_{\min}$ будет незначительно влиять на модуляцию интенсивности выходного излучения. Из всех возможных состояний в системе реализуется некоторое $\hat{\Phi}(r)$, зависящее от начального условия $\hat{\Phi}(r, t_0)$. В реальных системах различного рода шумы и фазовые возмущения $\Phi_g + \Phi_u$ с большой глубиной модуляции могут приводить к смене устойчивых состояний. Для стационарных режимов при $k_0\gamma \gg 1$, $\gamma \ll 1$ это не приводит к существенным изменениям характеристик выходного излучения. В случае же малых флуктуаций фазового профиля $\Phi_g + \Phi_u$ зависимость $\hat{\Phi}$ от $\Phi_g + \Phi_u$ будет монотонной и перескоков фазы $\hat{\Phi}$ с одного уровня на другой не наблюдается [6].

Используя (4), легко получить приближенное выражение для фазы выходного излучения $\Phi_{\text{out}} \simeq \Phi_{\text{in}} - \Phi_u + \text{const}$. Заметим, что фаза выходного излучения не зависит от функции Φ_g , т. е. в системе с оптической обратной связью происходит самокомпенсация фазовых искажений, возникающих в каскаде усилителей. При этом профиль фазы Φ_u , формируемый в относительно слабом световом пучке, «переносится» на фазу выходного излучения.

Рассмотрим, как оказывается введение контура оптической обратной связи на интенсивности выходного излучения и лучевой нагрузке на управляемом зеркале. С учетом выражений (2), (4), (6) легко получить соотношение между интенсивностями световых полей:

$$\frac{|A_{\text{out}}|^2}{|A_{\text{in}}|^2} = \frac{1-R_2}{R_2} \frac{|A_u|^2}{|A_{\text{in}}|^2} \simeq (1-R_1)(1-R_2)G_0(1+2\gamma \cos \phi_0). \quad (7)$$

Изменяя постоянный сдвиг ϕ_0 , можно эффективно управлять интенсивностью выходного излучения (такая ситуация характерна для кольцевых резонаторов и интерферометров Фабри—Перо [5]). Максимальное значение выходной интенсивности достигается при фазовом сдвиге $\phi_0 = \pm m\pi$, $m=0, 1, 2, \dots$. В этом случае относительное изменение мощности излучения, падающего на управляемое зеркало, определяется выражением

$$P_0 = |A_u|^2 / |A_{\text{in}}|^2 \simeq G_0 R_2 (1-R_1) (1+2\gamma). \quad (8)$$

Положим для определенности $R_1=0.5$, тогда при $\gamma^2 \ll 1$ получим $P_0 \simeq G_0 R_1 R_2' = \gamma^2$, т. е. параметр γ характеризует относительное уменьшение мощности излучения, проходящего через корректор волнового фронта.

Отметим возможные области применения рассмотренного способа управления фазой интенсивных световых пучков: 1) адаптивная коррекция фазовых искажений Φ_c на трассе распространения пучка, 2) адаптивная коррекция фазовых искажений Φ_{in} входного пучка, 3) самокомпенсация фазовых искажений Φ_g в каскаде усилителей. Как видно из (3), (4), математические модели этих задач похожи между собой. Поэтому в дальнейшем ограничимся анализом только первой задачи. Возможно ли на базе рассмотренной нелинейной системы с оп-

тической обратной связью организовать контур управления с использованием известных методов адаптивной оптики? Ответ на этот вопрос требует отдельного изучения. Его исследование с помощью численного моделирования рассмотрено ниже.

3. Моделирование адаптивной системы с оптической обратной связью. Проанализируем возможности адаптивного управления фазой выходного поля с помощью корректора, помещенного в контуре оптической обратной связи. Пусть требуется сфокусировать излучение на точечный удаленный отражатель в оптически неоднородной среде. В силу принципа оптической обратимости оптимальная фокусировка излучения достигается при выполнении следующего соотношения между профилями фазы излученной волны ϕ_{out} и рассеянного объектом поля ϕ_c (метод фазового сопряжения) [7]:

$$\phi_{out}(\mathbf{r}) = -\phi_c(\mathbf{r}). \quad (9)$$

В традиционных системах адаптивной оптики для выполнения соотношения (9) необходимо в пределах приемно-передающей апертуры измерить фазу ϕ_c и организовать соответствующее управление фазой ϕ_{out} излученной волны. В системе с оптической обратной связью воздействие на фазу поля A_{out} может быть оказано лишь опосредованно с помощью управления волновым фронтом ϕ_c волны в контуре обратной связи. Предположим, что, как и в традиционных системах адаптивной оптики, функция $\phi_c(\mathbf{r})$ известна. Как организовать управление зеркалом в этом случае? Из приведенного выше качественного анализа системы следует, что для создания модуляции фазы ϕ_{out} в соответствии с методом фазового сопряжения (9) необходимо обеспечить выполнение равенства

$$\phi_u(\mathbf{r}) = \phi_c(\mathbf{r}) + \text{const}. \quad (10)$$

Действительно, в этом случае из соотношения (6) непосредственно следует (10). Как уже отмечалось выше, соотношение (6) является приближенным. Тем не менее на его основе можно предложить алгоритм коррекции (10) в качестве базового, а дальнейший анализ адаптивной системы проводить исходя из точного решения уравнений (3), (4). Отметим, что алгоритм (10) в идейном плане близок к методу обращения волнового фронта, однако он реализуется в контуре обратной связи нелинейной системы (в частности, этим обусловлена смена знака на обратный в соотношении (10)).

Рассмотрим результаты численного моделирования адаптивной системы. Фазовые флуктуации ϕ_c на трассе пучка будем моделировать случайными фазовыми экранами, расположенными в плоскости выходной апертуры системы. Случайную функцию ϕ_c удобно представлять в виде разложения по ортогональным (в пределах апертуры) полиномам $Z_j(\mathbf{r})$, в качестве которых выбирались полиномы Цернике [8]:

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \xi_j Z_j(\mathbf{r}), \quad N=11. \quad (11)$$

Случайные коэффициенты ξ_j , характеризующие силу отдельных aberrаций, задавались в соответствии с колмогоровской моделью турбулентности атмосферы [8]. Среднее значение глубины модуляции фазовых искажений на трассе пучка $\Delta = [\sum_{j=1}^N \langle \xi_j^2 \rangle]^{1/2}$ равнялось 2π (одной длине волны). Качество адаптивной фокусировки оценивалось числом Штреля St , равным отношению интенсивности на объекте при адаптации к максимально возможному значению интенсивности. Распределение интенсивности входного поля задавалось в виде $|A_{in}(r)|^2 = I_0 \exp[-(r/a_0)^p]$, где a_0 — характерный радиус пучка, p — параметр ($p=2$ соответствует гауссову пучку, $p \gg 1$ описывает световой пучок с распределением интенсивности, близким к равномерному).

Работа адаптивной системы моделировалась следующим образом. Задавалась некоторая реализация случайной фазовой функции $\phi_c(\mathbf{r})$. Согласно выбранному алгоритму (10) определялось корректирующее воздействие φ_u на фазу волны в контуре обратной связи. Далее решалось уравнение (3) для устойчивого состояния, соответствующего максимальной выходной интенсивности. На его основании определялся стационарный профиль нелинейной фазовой модуляции $\hat{\phi}$. По формуле (4) рассчитывалась комплексная амплитуда выходного поля и соответствующее ему значение числа Штреля St . После этого процесс повторялся для другой реализации фазовых неоднородностей $\phi_c(\mathbf{r})$. На рис. 2 пунктирными линиями показаны зависимости от параметров γ и k_0 среднего значения числа Штреля в адаптивной системе с алгоритмом управления (10) (усреднение проводилось по 20 реализациям случайной функции ϕ_c): а) $p \gg 1$: 1— $\gamma=0,3$, 2— $\gamma=0,1$, 3— $\gamma=0,05$; б) $p=2$: 1— $\gamma=0,2$, 2— $\gamma=0,1$; в) $k_0=32$: 1— $p \gg 1$, 2— $p=2$. Из приведенных зависимостей следует, что система способна осуществить эффективную фокусировку излучения при существенном ослаблении лучевой нагрузки на управляемое зеркало. При $\gamma=0,32$ ($P_0 \approx 0,1$, лучевая нагрузка уменьшена в 10 раз) пиковая интенсивность на объекте возрастила для $k_0=30$ до величины, в 100 раз большей интенсивности на объекте в системе без адаптации (число Штреля при этом составляло примерно 0,8). Следует отметить, что переход от пучка с равномерным профилем интенсивности к гауссову пучку (рис. 2б) приводит к некоторому снижению уровня адаптации. Это связано с тем, что модуляция интенсивности входного поля приводит к паразитной фазовой модуляции выходного дня.

Рассмотрим другую возможность адаптивного управления, основанную на использовании алгоритма апертурного зондирования [7]. Согласно этому алгоритму для организации адаптивного управления достаточно измерять величину некоторого критерия (например, мощность рассеянного объектом поля в пределах некоторой апертуры) и с помощью сервосистемы максимизировать этот критерий. Для максимизации критерия используется тот или иной итерационный метод оптимизации [7]. Эффективность использования метода апертурного зондирования в системе с оптической обратной связью исследовалась численно. Предполагалось, что управляемое зеркало могло вносить в фазу волны дополнительную модуляцию

$$\varphi_u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N a_j Z_j(\mathbf{r}), \quad (12)$$

где a_j — управление.

Оптимальные коэффициенты a_j , соответствующие наилучшей фокусировке излучения, выбирались на основе итерационной процедуры $a_j^{n+1} = a_j^n + \alpha_j J_j^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, где J_j — градиенты оптимизируемого критерия (в рассматриваемом случае градиенты числа Штреля St), α_j — постоянные параметры. На рис. 2 сплошными линиями показаны результаты численного моделирования адаптивной системы апертурного зондирования для пучков с гауссовым и прямоугольным профилями интенсивности. Приведенные результаты свидетельствуют о возможности эффективного управления в такой системе. Сравнение методов фазового сопряжения (пунктирные линии на рис. 2) и апертурного зондирования (сплошные линии на рис. 2) показывает, что метод апертурного зондирования позволяет достичь более высоких уровней интенсивности на объекте фокусировки.

В результате дополнительного численного моделирования было установлено, что приведенные на рис. 2 зависимости практически не меняются при введении в оптический тракт системы фазовых искажений $\phi_g(\mathbf{r})$ среды усиления. В полном соответствии с результатами приближенного анализа (разд. 2) в системе происходит их эффективная самокомпенсация. Физически механизм самокомпенсации фазовых искаже-

ний в усилительном тракте существенно отличается от известных методов обращения волнового фронта [4] и происходит за счет многократного прохождения волны через нелинейную среду в системе с оптической обратной связью.

Таким образом, проведенное исследование свидетельствует об эффективности предложенного метода фокусировки лазерного излучения с управлением фазой относительно слабого поля в контуре оптической обратной связи. Метод позволяет существенно уменьшить расходимость излучения при значительных снижениях лучевых нагрузок на управляемых зеркалах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Д. У. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 31.
2. Воронцов М. А., Изаксон Т. М., Кудряшов А. В. и др. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 7. С. 1337.
3. Беспалов В. И., Пасманик Г. А. Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. — М.: Наука, 1985. — 134 с.
4. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985. — 240 с.
5. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. — М.: Мир, 1988. — 520 с.
6. Воронцов М. А., Шишаков К. В. Препринт физического ф-та МГУ. № 27. 1989.
7. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
- 8 Noll J. // JOSA. 1976. V. 66. № 3. P. 207.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
8 сентября 1989 г.

ADAPTIVE SYSTEMS OF LIGHT FOCUZATION WITH LOCAL FEEDBACK

M. A. Vorontsov, V. I. Shmal'gauzen, K. V. Shishakov

New possibilities of phase control organization in adaptive optical systems by weak local optical feedback are investigated.

УДК 621.37

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО СИСТЕМУ ТОНКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

B. N. Красильников, A. B. Тюхтин

С помощью метода усредненных граничных условий исследуется поле точечного заряда, пролетающего через сетку из тонких неидеальных проводников перпендикулярно ей. Анализируется влияние геометрических и электромагнитных параметров сетки на объемные и поверхностные волны.

Дифракционное излучение, возникающее при пролете заряженных частиц или пучков параллельно периодической металлической структуре, рассматривалось нередко (см. [1] и приведенную там литературу). Меньшее внимание уделялось часто встречающимся в ускорительной технике и электронике СВЧ ситуациям, когда частицы пересекают подобную структуру. Точными методами исследовано дифракционное излучение нити, влетающей или вылетающей из системы параллельных полуплоскостей [2], а также излучение, возникающее при пересечении плоским модулированным электронным пучком (и совокупностью пучков) решетки из идеально проводящих лент, параллельных пучку [3–5]. В ряде работ использовалась замена сетки сплошной плоскостью, на которой задавались определенные граничные условия, что допустимо в случае достаточно малого периода решетки. Таким способом рассматривалось поле точечного заряда при его движении параллельно [6, 7], перпендикулярно [8] и наклонно [9] к системе параллельных проводов, которая моделировалась плоскостью, идеально проводящей в одном направлении и не проводящей в другом. Влияние геометрии идеальных проводов затрагивалось в [9] для случая параллельного или нитевидного источника. В настоящей работе рассмотрено поле пересекающего сетку точечного заряда с учетом как геометрических характеристик, так и конечной проводимости проводов.

1. Пусть в плоскости $z=0$ в вакууме расположена бесконечная система параллельных оси x круглых проводов, диаметр которых $2r_0$ много меньше периода решетки a . Точечный заряд q движется перпендикулярно решетке со скоростью $v = ve_z$ ($v > 0$), так что объемная плотность стороннего тока равна

$$j = qv\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0), \quad z_0 = vt. \quad (1)$$

Как и в [8], падающее поле будем описывать векторным потенциалом $A^i(0, 0, A_z^i)$, фурье-образ которого имеет вид

$$A_{\omega z}^i = \frac{q}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z/v} \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2 + \omega^2 v^{-2}(1 - \beta^2)} = \\ = \frac{q}{\pi c} K_0(\omega v^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} \rho) \exp(i\omega z/v), \quad (2)$$

где $\beta = v/c$ (c — скорость света), $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $K_0(\xi)$ — функция Макдональда.

Ограничимся таким частотным диапазоном, для которого расстояние между проводами много меньше характерного масштаба изменения падающего поля в плоскости сетки и длины волны, т. е.

$$a \ll v/(\omega\sqrt{1-\beta^2}), \quad a \ll 2\pi c/\omega. \quad (3)$$

Тогда можно воспользоваться методом усредненных граничных условий (УГУ) Конторовича [10], в соответствии с которым справедливы соотношения

$$E_{\omega x}|_{z=\pm 0} = -\frac{c}{4\pi} \left(A + B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \{H_{\omega y}\}, \quad \{E_{\omega y}\} = \{H_{\omega x}\} = 0, \quad (4)$$

где

$$A = a \{Z - 2i\omega c^{-2} \ln[a/(2\pi r_0)]\}, \quad (5)$$

$$B = -2ia\omega^{-1} \ln[a/2\pi r_0].$$

В (4) $E_{\omega x,y}$, $H_{\omega x,y}$ представляют собой фурье-образы компонент полных полей, усредненных по периоду решетки (знак усреднения всюду опускаем), а фигурной скобкой обозначена величина скачка заключенной в ней функции $\{f(z)\} = f(+0) - f(-0)$. Сопротивление единицы длины отдельного провода, входящее в (5), приближенно равно [10]

$$Z \approx \frac{1}{\sigma} \begin{cases} (\pi r_0^2)^{-1}, & r_0 \ll 2d \\ (\sqrt{2}\pi r_0 d)^{-1} \exp(-i\pi/4), & r_0 \gg 2d \end{cases}, \quad (6)$$

где σ и d — проводимость и толщина скин-слоя для материала проводов.

2. Полное усредненное поле представим в виде суммы падающего поля (2) и дополнительного поля, которое, как и в [8], удобно описывать с помощью однокомпонентного векторного потенциала $\mathbf{A}'_{\omega}(A'_{\omega x}, 0, 0)$. Представляя последний в виде разложения по плоским волнам и удовлетворяя условиям (4), получаем

$$\mathbf{A}'_{\omega x} = \frac{q\omega}{2\pi^2 cv} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{k_x \exp(ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k^2 - k_\perp^2} |z|)}{(k^2 - k_x^2)(1 - ix\sqrt{k^2 - k_\perp^2}/k) + \delta k\sqrt{k^2 - k_\perp^2}} \times$$

$$\times \frac{dk_x dk_y}{k_\perp^2 + \omega^2 v^{-2}(1 - \beta^2)}, \quad (7)$$

где

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k = \omega/c, \quad \kappa = \frac{ak}{\pi} \ln \frac{a}{2\pi r_0}, \quad \delta = \frac{acZ}{2\pi}. \quad (8)$$

Заметим, что согласно (6) $\arg \delta$ может меняться в пределах от $-\pi/4$ до нуля.

Используя метод перевала [11], вычислим интеграл (7) в дальней зоне $kR \gg 1$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Вклад седловой точки, определяющий объемную часть поля излучения, равен

$$\mathbf{A}_{\omega x}^{\text{tr}} = \frac{iq\beta}{\pi\omega} \frac{\sin \theta |\cos \theta| \cos \varphi}{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)(1 - ix|\cos \theta|) + \delta |\cos \theta|} \times$$

$$\times (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{-1} R^{-1} \exp(ikR), \quad (9)$$

где использована сферическая система координат R, θ, φ ($x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$). Применяя формулы

$$\mathbf{H}_{\omega} = \text{rot } \mathbf{A}_{\omega}, \quad \mathbf{E}_{\omega} = ic\omega^{-1} \text{rot rot } \mathbf{A}_{\omega}, \quad (10)$$

для компонент поля получаем

$$\begin{aligned} E_{\omega R}^{\text{tr}} &= H_{\omega R}^{\text{tr}} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} E_{\omega \theta}^{\text{tr}} \\ E_{\omega \varphi}^{\text{tr}} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} H_{\omega \varphi}^{\text{tr}} \\ -H_{\omega \theta}^{\text{tr}} \end{array} \right\} = \frac{q\beta}{\pi c} \left\{ \begin{array}{l} -\cos \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{array} \right\} \times \\ &\times \frac{\sin \theta |\cos \theta| \cos \varphi}{[(1-\sin^2 \theta \cos^2 \varphi)(1-i\kappa |\cos \theta|) + \delta |\cos \theta|](1-\beta^2 \cos^2 \theta)} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в волновой зоне объемное поле излучения состоит из волн E -поляризации (E_{θ}^{tr} , H_{φ}^{tr}) и H -поляризации (E_{φ}^{tr} , H_{θ}^{tr}). Энергия излучения для каждой волны равна

$$W_{E, H}^{\text{tr}} = \int_0^{\omega_{\max}} W_{\omega E, H}^{\text{tr}} d\omega = \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta w_{\omega E, H}^{\text{tr}}(\theta, \varphi), \quad (12)$$

где ω_{\max} — предельная частота, определяемая неравенствами (3), $W_{\omega E, H}^{\text{tr}}$ — спектральные, а $w_{\omega E, H}^{\text{tr}}$ — спектрально-угловые плотности энергии, равные

$$w_{\omega E}^{\text{tr}} = cR^2 E_{\omega \theta}^{\text{tr}} \bar{H}_{\omega \varphi}^{\text{tr}}, \quad w_{\omega H}^{\text{tr}} = -cR^2 E_{\omega \varphi}^{\text{tr}} \bar{H}_{\omega \theta}^{\text{tr}} \quad (13)$$

(чертка означает комплексное сопряжение). Для полной спектрально-угловой плотности энергии в силу взаимной ортогональности поляризаций имеем $w_{\omega}^{\text{tr}} = w_{\omega E}^{\text{tr}} + w_{\omega H}^{\text{tr}}$. Подстановка (11) в (13) дает

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} w_{\omega E}^{\text{tr}} \\ w_{\omega H}^{\text{tr}} \\ w_{\omega}^{\text{tr}} \end{array} \right\} &= \frac{q^2 \beta^2}{\pi^2 c} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \varphi \\ 1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \end{array} \right\} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \times \\ &\times |(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)(1 - i\kappa |\cos \theta|) + \delta |\cos \theta| |^{-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $\kappa = \delta = 0$ выражение для w_{ω}^{tr} совпадает с полученным в [8].

Отметим некоторые особенности соотношений (14). Из них видно, что энергетические характеристики объемного излучения в любой из областей $n\pi/2 \leq \varphi \leq (n+1)\pi/2$, $m\pi/2 \leq \theta \leq (m+1)\pi/2$, где $n=0, 1, 2, 3$, $m=0, 1$, идентичны друг другу. В плоскости $\varphi=0$ излучаются только волны E -поляризации, а в направлении проводов ($\theta=\pi/2$, $\varphi=0$) излучение имеется только при $\delta=0$.

Если $\varphi \neq 0, \pi/2$, то объемное излучение содержит волны обеих поляризаций. Из (14) следует, что при $|\operatorname{tg} \varphi| < |\cos \theta|$ преобладает E -поляризация, а в противном случае — H -поляризация (если $|\operatorname{tg} \varphi| > 1$, то последняя преобладает для любого угла θ).

Важной характеристикой излучения является направление, при котором спектрально-угловая плотность энергии максимальна. Нетрудно показать, что для E -поляризации такое направление лежит в плоскости $\varphi=0$. Оно характеризуется углом $\theta=\theta_{Em}$, зависимость которого от κ представлена на рис. 1а (см. на вклейке). Сплошные линии соответствуют нерелятивистскому приближению, при котором в знаменателе (14) не учитываются члены порядка β^2 , а пунктирные — случаю $\beta=0.9$. Кривые с разными номерами соответствуют следующим значениям $|\delta|$: 1—0; 2—0.2; 3—1.0. Величина $\arg \delta$ всюду принята равной $-\pi/4$, поскольку для наиболее интересных диапазонов метровых-сантиметровых волн при толщине проводов 0,1 мм и более выполняется условие $r_0 \gg 2d$ и сопротивление Z вычисляется по второй из формул (6). Направление максимального излучения для H -поляризации характеризуется углами $\theta=\theta_{Hm}$, $\varphi=\varphi_{Hm}$, зависящими от κ при тех же значениях β .

и δ представлены на рис. 1б, в. Как видим, если $\delta \neq 0$, то с ростом x оба направления максимального излучения приближаются к направлению проводов ($\theta = \pi/2, \varphi = 0$), причем эта зависимость тем более выражена, чем больше β . Увеличение $|\delta|$ или β приводит к противоположному смещению этих направлений. Особый является случай $\delta = 0$. Можно показать, что если при этом $\beta < 1/\sqrt{2}$, то $\theta_{Em} = \theta_{Hm} = \pi/2, \varphi_{Hm} = 0$. Если же $\beta > 1/\sqrt{2}$, то рассматриваемые углы испытывают скачкообразные изменения при определенных значениях x .

В случае идеально проводящей в одном направлении плоскости ($x = \delta = 0$) интегралы, определяющие спектральные плотности энергии объемных волн, сводятся к табличным:

$$\begin{aligned} W_{\omega E}^{\text{tr}} &= \frac{q^2}{\pi c \beta (1 - \beta^2)^2} \left[(1 - 3\beta^2) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} + 2\beta^3 \ln \frac{4}{1 - \beta^2} - \beta(1 - \beta^2)(2 - \beta^2) \right], \\ W_{\omega H}^{\text{tr}} &= \frac{q^2 \beta}{\pi c (1 - \beta^2)^2} \left[(1 + \beta^2) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta \ln \frac{4}{1 - \beta^2} + \beta(1 - \beta^2) \right], \\ W_{\omega}^{\text{tr}} &= \frac{q^2}{\pi c \beta} \left(\ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Последняя из этих формул была получена в [8]. Отсюда следует, что если $\beta \ll 1$, то спектральные плотности энергии пропорциональны β^2 , а вклады E - и H -поляризаций в W_{ω}^{tr} примерно равны 66 и 34%. Если же $\beta \rightarrow 1$, то величины $W_{\omega E}^{\text{tr}}$ и $W_{\omega H}^{\text{tr}}$ стремятся к бесконечности по логарифмическому закону, а их относительные вклады равны соответственно 75 и 25%.

На рис. 2 изображены зависимости величины $\tilde{W}_{\omega}^{\text{tr}} = \pi c (2q^2)^{-1} W_{\omega}^{\text{tr}}$ от x при $\beta = 0.9$. Значения $|\delta|$ указаны на рисунке, а $\arg \delta = -\pi/4$. Как видим, спектральная плотность энергии объемного излучения с ростом параметра $|\delta|$, отражающего электромагнитные свойства проводов, уменьшается быстрее, чем с ростом параметра x , определяемого только геометрией сетки. Так, примерно одинаковое падение W_{ω}^{tr} происходит при изменении $|\delta|$ от нуля до 0,5 или x — от нуля до двух. Нетрудно показать, что при $x \ll 1, \delta = 0$ поправки к выражениям (15) пропорциональны x^2 , а при $x = 0, |\delta| \ll 1$ они имеют порядок $|\delta|$.

3. Наряду с седловой точкой в интеграл (7) вносят вклад некоторые особенности подынтегрального выражения. Рассмотрим сначала случай идеальных проводов ($\delta = 0$). Тогда имеются полюсы при $k_x = \pm k$, которые, как показано в [8] для идеально проводящей в одном направлении плоскости, определяют поверхностные волны. Можно показать, что вклады других особых точек в интеграл являются либо нулевыми, либо экспоненциально малыми в волновой зоне. Вычисляя вклад указанных полюсов с учетом принципа исчезающее малого затухания, получаем

$$A_{\omega x}^s = -\frac{i q \omega}{2 \pi c v} e^{ik|x|} \operatorname{sgn} x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i k_y y - |k_y z|) dk_y}{(1 + \kappa |k_y| k^{-1}) (k_y^2 + \omega^2 v^{-2})}. \quad (16)$$

Для ненулевых компонент поверхностных волн согласно (10) имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_{\omega z}^s \\ E_{\omega y}^s \end{array} \right\} &= \operatorname{sgn} x \left\{ \begin{array}{l} -H_{\omega y}^s \\ H_{\omega z}^s \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{q \omega}{2 \pi c v} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} i |k_y| \operatorname{sgn} z \\ k_y \end{array} \right\} \frac{\exp(i k_y y - |k_y z|) \exp(i k|x|) dk_y}{(1 + \kappa |k_y| k^{-1}) (k_y^2 + \omega^2 v^{-2})}. \end{aligned} \quad (17)$$

Компоненты $E_{\omega z}^s$, $H_{\omega y}^s$ характеризуют поверхностную E -волну, а компоненты $E_{\omega y}^s$, $H_{\omega z}^s$ — поверхностную H -волну.

Особый интерес представляет структура поля поверхностных волн в плоскости сетки. Если $\kappa=0$, то интегралы (17) при $z=\pm 0$ сводятся к табличным [12]:

$$\begin{Bmatrix} E_{\omega z}^s \\ E_{\omega y}^s \end{Bmatrix} = \frac{q\omega}{2\pi c v} e^{ik|x|} \begin{Bmatrix} i \operatorname{sgn} z [e^{-\eta} \operatorname{Ei}(\eta) + e^{\eta} \operatorname{Ei}(-\eta)] \\ -\pi \operatorname{sgn} y e^{-\eta} \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

где $\eta=\omega|y|v^{-1}$, а $\operatorname{Ei}(\eta)$ — интегральная показательная функция. Отсюда следует, что при $\eta \rightarrow 0$ компоненты E -волн имеют логарифмическую особенность, а компоненты H -волн терпят конечный разрыв. Если же $\eta \gg 1$, то первые уменьшаются пропорционально η^{-2} , а вторые — экспоненциально.

Согласно (17) векторы Умова—Пойнтинга для обеих волн параллельны проводам. Полную энергию W^s , излученную в виде поверхностных волн, можно найти, интегрируя плотность потока энергии по удаленным плоскостям $x = \pm x_0$ ($kx_0 \gg 1$). После ряда преобразований получим

$$W^s = \int_0^{\omega_{\max}} W_\omega^s d\omega, \quad (19)$$

где W_ω^s — спектральная плотность энергии поверхностных волн, равная

$$W_\omega^s = \frac{4q^2 \omega^3}{\pi c v^3} \int_0^\infty \frac{k_y dk_y}{(1+\omega k_y k^{-1})^2 (k_y^2 + \omega^2 v^{-2})^2}. \quad (20)$$

Интересно, что вклады E - и H -волн в W_ω^s являются одинаковыми. Разумеется, эти результаты можно получить и другим способом, интегрируя плотность энергии поверхностных волн по всему пространству при $t \rightarrow \infty$.

Интеграл (20) можно приближенно найти при $\lambda\kappa/\beta \ll 1$:

$$W_\omega^s \approx 2q^2 (\pi c)^{-1} (1 - \lambda\kappa/\beta). \quad (21)$$

Если $\kappa=0$, то зависимость от ω и β исчезает, что согласуется с выводом работы [8].

На рис. 3 пунктирные линии представляют зависимости величины $\tilde{W}_\omega^s = \pi c (2q^2)^{-1} W_\omega^s$ от β при $\delta=0$. Значения параметра κ , определяемого геометрией сетки, указаны на рисунке. Для сравнения сплошными кривыми показаны зависимости $\tilde{W}_\omega^{\text{tr}}$ от β при $\delta=0$, $\kappa=0$ и $\kappa=1$. Как видим, с ростом β величина W_ω^s монотонно растет, причем влияние параметра κ наиболее значительно при небольшом β . Если $\beta \rightarrow 1$, то W_ω^s стремится к бесконечности по логарифмическому закону, в то время как W_ω^{tr} остается конечным. С ростом κ величина W_ω^s уменьшается быстрее, чем W_ω^{tr} . Если β меньше некоторого значения β^* , то в общем энергобалансе преобладают поверхностные волны ($W_\omega^s > W_\omega^{\text{tr}}$), а в противном случае преобладает объемное излучение. Величина β^* уменьшается с ростом κ : например, при $\kappa=0$ $\beta^* \approx 0,96$, а при $\kappa=1$ $\beta^* \approx 0,76$.

Осветим кратко вопрос о влиянии конечной проводимости проводов (т. е. параметра δ) на поверхностные волны. Ограничимся случаем малых значений $|\delta|$. Тогда точки расположения полюсов подынтегрального выражения в (7), определяющие поверхностные волны, находятся методом последовательных приближений. Вычисляя вклад этих полюсов, нетрудно показать, что при условии

$$|\delta| \ll 2(\beta + \kappa) \quad (22)$$

выражения для потенциала и компонент поля отличаются от (16), (17) наличием в подынтегральном выражении множителя

$$\exp\left[-\frac{\delta k(|k_yx|+ik|z|)}{2(k+x|k_y|)}\right].$$

Спектральная плотность энергии поверхностных волн, протекающей через плоскости $x = \pm x_0$ ($kx_0 \gg 1$), отличается от (20) тем, что под знаком интеграла присутствует множитель

$$\exp[-|x|kk_y(k+ik_y)^{-1} \operatorname{Re} \delta].$$

Как и при $\delta=0$, вклады E - и H -волн в W_ω^s равны друг другу.

Падение W_ω^s с ростом $|x|$ обусловлено диссипацией электромагнитной энергии в проводах. В случае $\kappa=0$ соответствующий интеграл сводится к табличному:

$$W_\omega^s = 2q^2(\pi c)^{-1}\{1-\chi[\operatorname{ci}(\chi)\sin\chi - \operatorname{si}(\chi)\cos\chi]\}, \quad (23)$$

где $\chi=\omega v^{-1}|x|\operatorname{Re} \delta$, $\operatorname{si}(\chi)$ — интегральный синус, $\operatorname{ci}(\chi)$ — интегральный косинус. В частности, при $\chi \ll 1$

$$W_\omega^s \approx 2q^2(\pi c)^{-1}(1-\pi\chi/2). \quad (24)$$

Если же $\chi \gg 1$, то

$$W_\omega^s \approx 4q^2(\pi c\chi^2)^{-1}. \quad (25)$$

Таким образом, при больших χ спектральная плотность энергии поверхностных волн убывает пропорционально χ^{-2} .

В заключение отметим, что все полученные результаты можно использовать и в случае проводов с некруговым сечением, если в выражении для κ вместо r_0 использовать некоторый «эквивалентный» радиус [10] и соответствующим образом записать выражение для сопротивления Z .

Авторы благодарны К. А. Барсукову за обсуждение и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. // УФН. 1968. Т. 94. № 3. С. 377.
- Айвазян Ю. М., Седракян Д. М. // Изв. АН АрмССР. 1965. Т. 18(1). С. 117.
- Прокопчук Ю. А. // Радиотехника (респ. межведомств. тематич. науч.-техн. сб.). — Харьков, 1971. Вып. 19. С. 96.
- Прокопчук Ю. А. // Вестник Харьковского ун-та. 1985. № 273. С. 33.
- Прокопчук Ю. А. // Вестник Харьковского ун-та. 1980. № 203. С. 17.
- Барсуков К. А., Нарышкина Л. Г. // ЖТФ. 1966. Т. 36. № 2. С. 225.
- Барсуков К. А., Нарышкина Л. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 4. С. 509.
- Барсуков К. А., Нарышкина Л. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 5. С. 936.
- Барсуков К. А., Бекова С. Х. // Ученые записки МГПИ им. В. И. Ленина. 1968. № 313. С. 25.
- Конторович М. И., Астрахан М. И., Акимов В. П., Ферсман Г. А. Электродинамика сетчатых структур. — М.: Радио и связь, 1987.
- Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978 Т. 1.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 июля 1989 г.

THE RADIATION OF THE CHARGE INTERSECTING THE SYSTEM OF THE THIN PARALLEL CONDUCTORS

V. N. Krasil'nikov, A. V. Tyukhtin

The field of the point charge, which flying perpendicular through the grid of the thin non-ideal conductors, has been investigated with the help of the averaged boundary conditions method. The influence of the geometrical and electromagnetic parameters of the grid on the body and surface waves has been analysed.

УДК 621.382.2.029.64

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ШУМОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕНЕРАТОРОВ ГАННА МИЛЛИМЕТРОВОГО И САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНОВ

И. А. Кравцов, В. М. Малышев, А. В. Мещеряков

Обсуждаются причины различия флуктуационных характеристик генераторов Ганна сантиметрового и миллиметрового диапазонов. Путем сопоставления результатов численного моделирования с экспериментом показано, что это различие вызвано проявлением в коротковолновых генераторах нового модуляционного механизма. На основе численного моделирования могут быть объяснены уровни спектров флуктуаций и корреляционные зависимости.

Низкочастотные флуктуации в генераторах на диодах Ганна (ГДГ) трехсантиметрового диапазона качественно и в достаточной степени количественно описываются с помощью результатов численного моделирования, проведенного в [1]. Известны основные механизмы возникновения флуктуаций в таких генераторах. Применительно к ГДГ миллиметрового диапазона столь полной картины явлений нет. Экспериментальное обследование низкочастотных флуктуаций в ГДГ восьмимиллиметрового диапазона выявило их отличие от шумовых характеристик генераторов трехсантиметрового диапазона [2]. Приведенные к одной частоте генерации уровни флуктуаций частоты в тех и других примерно одинаковы, в то время как флуктуации амплитуды и питающего тока в коротковолновых приборах на 10 дБ ниже. Различен и вид спектров флуктуаций. Так у длинноволновых генераторов в спектрах низкочастотных шумов амплитуды $S_\alpha(F)$ и частоты $S_f(F)$ фликкерные составляющие выражены сильнее, чем в шумах тока питания $S_i(F)$, в которых превалируют генерационно-рекомбинационные (ГР) составляющие. В коротковолновых ГДГ картина прямо противоположна, ГР шумы преобладают в спектрах $S_\alpha(F)$, $S_f(F)$. Имеются и численные расчеты [3], обнаруживающие иной механизм шумообразования в генераторах миллиметрового диапазона. Цель настоящей работы состоит в выяснении того, в какой мере этот механизм может объяснить наблюдаемые различия флуктуационных характеристик ГДГ двух диапазонов.

1. Методика расчета. В [1] с помощью локально-полевой, а в [3] двухтемпературной моделей рассчитывалось влияние флуктуаций концентрации электронов в области прикатодной неоднородности профиля легирования (в «зарубке») δn_t и в равномерно легированном активном слое δn_0 на высокочастотную проводимость $Y = -G + jB$ и постоянную составляющую тока I диода Ганна. В [1] рассматривались длинноволновые диоды с пролетной частотой $f_0 = 8$ ГГц, длиной $L = 12$ мкм и концентрацией электронов $n_0 = 10^{15}$ см⁻³, а в [3] коротковолновые: $f_0 = 70$ ГГц, $L = 2$ мкм, $n_0 = 8 \cdot 10^{15}$ см⁻³. Рассчитанные в этих работах значения коэффициентов модуляционной чувствительности $a_{0,t}$, $b_{0,t}$, $c_{0,t}$ позволяют по заданным интенсивностям флуктуаций концентрации в соответствующих сечениях диода определить уровни шумов амплитуды S_α , частоты S_f , тока S_i генератора, а также коэффициент корреляции между флуктуациями частоты и тока r_{if} . В квазистатическом приближении для диода, работающего в параллельном колебательном контуре без потерь, аналогично [4] имеем

$$S_\alpha(F) = \frac{G^2}{V^2(\partial G/\partial V)^2} \left[a_0^2 \frac{S_0(F)}{n_0^2} + a_t^2 \frac{S_i(F)}{n_t^2} \right],$$

$$S_f(F) = \frac{f^2}{4Q^2} \left[B_0^2 \frac{S_0(F)}{n_0^2} + B_t^2 \frac{S_t(F)}{n_t^2} \right],$$

$$\frac{S_t(F)}{I^2} = C_0^2 \frac{S_0(F)}{n_0^2} + C_t^2 \frac{S_t(F)}{n_t^2},$$

где

$$B_{0,t} = -\frac{B}{G} b_{0,t} + \frac{\partial B/\partial V}{\partial G/\partial V} a_{0,t}; \quad (2)$$

$$C_{0,t} = c_{0,t} - \frac{\partial I/\partial V}{\partial G/\partial V} \frac{G}{I} a_{0,t}. \quad (3)$$

Здесь V, f — амплитуда и частота колебаний, Q — внешняя добротность контура, $S_t(F)/n_t^2, S_0(F)/n_0^2$ — спектральные интенсивности относительных флуктуаций концентрации в прикатодной области и в активном слое диода, полагаемые статистически независимыми. Последнее, по-видимому, справедливо при расстоянии между пространственно разнесенными источниками шума $\delta n_t, \delta n_0$, превышающем радиус Дебая [5], который в нашем случае составляет $r_D = 0,05$ мкм и в несколько раз меньше длины рассмотренной в [3] «зарубки». Зависимости $G(V), B(V), I(V)$ рассчитаны в [1, 3], величина Q измерена для обследованных в [2] ГДГ по затягиванию частоты. Таким образом, для расчета уровней S_a, S_f, r_{if} в этих генераторах необходимо определить лишь интенсивности источников шума $S_0/n_0^2, S_t/n_t^2$.

В [6] для диодов трехсантиметрового диапазона показано, что величину S_t/n_t^2 можно оценить по уровню шумов тока, измеренному при напряжениях смещения, близких к пороговому значению U_t : $S_t/n_t^2 \approx S_t(U_t)/I^2$. Допустим, что это справедливо и для диодов миллиметрового диапазона. Интенсивность флуктуаций S_0/n_0^2 можно оценить по уровню шумов тока генератора в рабочем режиме $S_0/n_0^2 \approx S_t(U_0)/I^2$, так как согласно [1, 3] последний не менее чем на 90% определяется флуктуациями δn_0 ($c_0 \approx 1 \gg c_t$).

Таблица 1

$U=3,5$ В, $F=1$ кГц

Номер диода		1	2	3	4
S_0/n_0^2 , Гц ⁻¹		$1,4 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$1,2 \cdot 10^{-17}$	$3,2 \cdot 10^{-17}$
S_t/n_t^2 , Гц ⁻¹		$1,4 \cdot 10^{-17}$	$2,5 \cdot 10^{-16}$	10^{-17}	$7,6 \cdot 10^{-17}$
$\frac{\partial B}{\Gamma_C}$	Эксперимент	< -155	-154	< -155	< -155
	Расчет по [3]	-161	-149	-161	-157
	Расчет по [4]	-181	-168	-182	-174
$\frac{S_f}{\Gamma_C}$	Эксперимент	2	50	4	25
	Расчет по [3]	1,4	15	2,8	6,3
	Расчет по [4]	0,06	1	0,1	0,6
r_{if}	Эксперимент	-0,23	-0,6	-0,2	-0,25
	Расчет по [3]	-0,66	-0,61	-0,7	-0,38
	Расчет по [4]	0,02	0,03	0,01	0,07

Результаты измерения спектральной интенсивности шумов тока $S_i(F)/I^2$ в предпороговом режиме ($U_t = 1,3$ В) для обследовавшихся в [2] образцов представлены на рис. 1 (см. на вклейке, номера кривых соответствуют номерам диодов). Уровни флуктуаций тока диодов в режиме генерации ($U_0 = 3,5$ В) приведены в [2] (рис. 4, 5), сделанные на основе этих данных оценки величин S_0/n_0^2 , S_t/n_t^2 представлены в табл. 1. Следует отметить, что они примерно на 10 дБ ниже обычно наблюдаемых в диодах трехсанитметрового диапазона [6-8]. Это может быть связано с большим значением концентрации электронов n_0 в коротковолновых образцах и их меньшей длиной [5].

2. Результаты расчетов. Обсуждение. В табл. 1 приведены измеренные в [2] уровни флуктуаций амплитуды и частоты в генераторах восьмимиллиметрового диапазона. Далее представлены значения S_α , S_f , рассчитанные по формулам (1). Описанные в [2] ГДГ работали на частоте, близкой к пролетной. Поэтому при расчетах использовались данные, полученные в [1, 3] для случая $f=f_0$. Из таблицы видно, что уровни флуктуаций, рассчитанные на основании локально-полевой модели [1] и полученных для коротковолновых диодов оценок S_0/n_0^2 , S_t/n_t^2 , на 16—23 дБ ниже измеренных. Результаты расчета по температурной модели [3] отличаются от экспериментальных не более чем на 6 дБ. Это дает основание в нашем случае использовать работу [3] для более детального обсуждения шумовых характеристик.

Из сопоставления результатов моделирования в [1, 3] следует, что значения коэффициентов B/G , $(\partial B/\partial V)(\partial G/\partial V)^{-1}$, $(G/V)(\partial G/\partial V)^{-1}$ и $|a_t|$, $|b_t|$ в (1) для генераторов сантиметрового и миллиметрового диапазонов примерно одинаковы. Более высокие расчетные уровни флуктуаций, полученные на основании [3], объясняются более высокими, по сравнению с [1], значениями коэффициентов модуляционной чувствительности a_0 , b_0 . В [3] показано, что это связано с возникновением в коротковолновых генераторах нового модуляционного механизма, обусловленного перестройкой под действием флуктуаций δn_0 , δn_t формы волны объемного заряда от обогащенного слоя к домену.

Уровень флуктуаций частоты S_f в ГДГ определяется в значительной степени флуктуациями δn_0 и пропорционален величине $b_0 S_0/n_0^2$. Интенсивность же источников шума S_0/n_0^2 , S_t/n_t^2 в генераторах миллиметрового диапазона ниже, чем в длинноволновых ГДГ. Поэтому при пересчете на одну частоту генерации величина S_f в приборах двух диапазонов не должна существенно различаться, что объясняет результаты измерений в [2].

Флуктуации амплитуды S_α длинноволновых генераторов определяются прикатодным источником шума δn_t и пропорциональны величине $a_t S_t/n_t^2$ [1]. Ее значение в миллиметровом диапазоне уменьшается примерно пропорционально S_t/n_t^2 , приводя к уменьшению величины S_α . Это согласуется с результатами измерений в [2].

В [7] для длинноволновых диодов показано, что флуктуации δn_t имеют преимущественно ГР происхождение. Если это справедливо и для коротковолновых генераторов, то увеличение коэффициентов a_0 , b_0 должно приводить к увеличению в них уровня ГР составляющих в спектрах флуктуаций $S_\alpha(F)$, $S_f(F)$. Как видно из рис. 5 в [2], это наблюдалось экспериментально и наиболее наглядно проявлялось в спектре флуктуаций амплитуды $S_\alpha(F)$. Аналогично увеличение фликкерной составляющей во флуктуациях тока коротковолновых генераторов связано с тем, что благодаря эффекту автодетектирования, описываемому вторым слагаемым в (3), вклад флуктуаций δn_t возрастает более чем на 10 дБ.

В табл. 1 приведены также результаты расчета измерявшегося в [2] коэффициента корреляции r_{if} . Видно, что полученные на основании [3] коэффициенты модуляционной чувствительности $B_{0,t}$, $C_{0,t}$ позволяют правильно определить знак r_{if} , хотя само значение коэффи-

циента корреляции несколько завышено по абсолютной величине.

Таким образом, сделанные в работе оценки показывают, что результаты проведенного в [3] численного моделирования могут использоваться для расчета уровней флуктуации амплитуды и частоты в ГДГ восьмимиллиметрового диапазона. Полученное расхождение теории с экспериментом не превышает 6 дБ. При этом удается объяснить отмеченное в [2] различие уровней и вида спектров флуктуаций в генераторах сантиметрового и миллиметрового диапазонов, правильно определить знак коэффициента корреляции r_{if} . Причиной указанных различий является возникновение в коротковолновых генераторах нового модуляционного механизма, приводящего к увеличению вклада в шумы выходного колебания флуктуаций концентрации электронов в активной области диода Δn_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков А. В., Румянцев С. Л. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1984. № 11. С. 19.
2. Кравцов И. А., Малышев В. М., Мещеряков А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 7. С. 897.
3. Киреев О. А., Румянцев С. Л., Мещеряков А. В. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1986. № 9. С. 36.
4. Ohnoto M. // IEEE Trans. 1972. V. MTT-20. № 7. P. 425.
5. Воробьев М. Д., Склизнев С. М. и др. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1986. № 9. С 29.
6. Киреев О. А., Лосев В. Л., Малышев В. М. и др. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1983. № 2. С. 35.
7. Лосев В. Л., Киреев О. А. и др. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1983. № 11. С. 34.
8. Мещеряков А. В. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1983. № 4. С. 25.

Ленинградский политехнический
институт

Поступила в редакцию
17 июля 1989 г.,
после доработки
23 января 1990 г.

COMPARATIVE ANALYSIS OF NOISE CHARACTERISTICS IN KA-BAND AND X-BAND GUNN OSCILLATORS

I. A. Kravtsov, V. M. Malyshev, A. V. Meshcheryakov

Causes of difference of noise characteristics in Ka-band and X-band Gunn oscillators are discussed. Comparison of the results of computer simulations with the experiment has shown that this difference arises due to new modulating mechanism in Ka-band oscillators. Levels of noise spectra as correlative dependences can be explained on the basis of computer simulations.

УДК 621.385.69

МНОГОЛУЧЕВЫЕ ГИРОТРОНЫ

В. Е. Запевалов, Ш. Е. Цимринг

Анализируются гиротроны, содержащие помимо основного один или несколько дополнительных полых винтовых электронных пучков. Показано, что последние при надлежащем выборе параметров могут способствовать увеличению селекции мод как эффективные излучатели или циклотронные поглотители высокочастотной мощности.

Применение в МЦР пространственно-развитых электродинамических структур позволяет значительно увеличить выходную мощность, но ставит при этом ряд задач, среди которых наиболее серьезной является селекция типов колебаний. Поскольку селекция по продольному индексу решается путем применения дифракционного вывода энергии [1], то основные трудности связаны с проблемой селекции мод по поперечному индексу. Ощущимый эффект здесь дает комбинация электродинамической и электронной селекции [2, 3]. По мере увеличения поперечного сечения рабочего пространства спектр мод сгущается и существующие методы селекции становятся недостаточными. Особенно невыгодно положение МЦР, работающих на гармониках циклотронной частоты, так как в число конкурирующих включаются моды, синхронные с пучком на всех низших гармониках, для которых стартовые токи обычно меньше.

В настоящей статье обсуждается предложенная в [4–6] возможность улучшения селекции мод по поперечному индексу и повышения выходной мощности путем реализации многолучевых гиротронов, чему способствует большое поперечное сечение резонатора. В указанных гиротронах к основному пучку добавляются один или несколько соосных с ним полых винтовых электронных пучков. В зависимости от параметров (главным образом величин осцилляторной и дрейфовой скоростей) дополнительные пучки могут быть излучающими или выполнять функцию электронных поглотителей [4, 5].

В статье показано, что излучающие дополнительные пучки помимо повышения электронной селекции по поперечному индексу способствуют увеличению выходной мощности. Поглощающие дополнительные пучки дают возможность существенно улучшить селекцию по поперечному индексу, особенно при работе на второй гармонике циклотронной частоты.

1. ИЗЛУЧАЮЩИЕ ПУЧКИ

1. На рис. 1 (см. на вклейке) показано сечение аксиально-симметричного резонатора гиротрона, нагруженного N тонкими трубчатыми моноскоростными винтовыми электронными пучками, которые расположены соосно с резонатором. Получим аналогично [7] условие устойчивости одномодовых колебаний на рабочей mode 1 по отношению к конкурирующей mode 2.

Уравнения (см., например, [7, 8]) для нестационарных амплитуд указанных мод, модифицированные на случай N пучков, имеют вид

$$\frac{dA_s}{dt} = \left(-\frac{n_s}{Q_s} + \sum_{l=1}^N I_s^{(l)} \hat{\Phi}_s^{(l)} \right) A_s, \quad (1)$$

Здесь s — индекс моды ($s=1,2$), n_s — номер гармоники гирочастоты, A_s — амплитуда поля соответствующей моды, Q_s — добротность, $I_s^{(i)}$ — безразмерный ток i -го парциального пучка, приведенный к параметрам s -й моды; $\hat{\Phi}_s^{(i)}$ — реальные части приведенных факторов возбуждения, которые пропорциональны электронным восприимчивостям каждого из пучков. Факторы возбуждения зависят от амплитуд полей обеих мод. Формулы для $I_s^{(i)}$, $\hat{\Phi}_s^{(i)}$, а также для фигурирующей ниже безразмерной амплитуды поля рабочей моды $F_1^{(i)}$ мы не приводим. Они совпадают с соответствующими выражениями, полученными в [7, 8] для одного пучка, характеризующегося тем же набором параметров, что и i -й парциальный пучок.

Стационарная амплитуда одномодовых колебаний (мода 1) определяется условием баланса активных мощностей, которое следует непосредственно из (1):

$$\sum_{i=1}^N I_1^{(i)} \hat{\Phi}_1^{(i)} (F_1^{(i)}) = n_1 / 2Q_1. \quad (2)$$

Условие устойчивости стационарных колебаний получается из (1) и (2) аналогично соответствующему условию из [7] для однопучковой системы:

$$x_N = \frac{\sum_{i=1}^N I_1^{(i)} \hat{\Phi}_1^{(i)} (F_1^{(i)})}{\sum_{i=1}^N I_2^{(i)} \hat{\Phi}_2^{(i)} (F_1^{(i)})} > \frac{n_1 Q_2}{n_2 Q_1}. \quad (3)$$

Нарушение (3) означает возбуждение паразитной моды в условиях генерации на рабочей моде с конечной амплитудой поля рабочей моды.

2. Сравним величины x_N для однолучевого ($N=1$) и N -лучевого гиротронов, в которых установилась одинаковая амплитуда поля рабочей моды. Пусть радиусы основного пучка в обоих случаях одинаковы, а радиусы дополнительных пучков удовлетворяют условию нулевой связи с полем паразитной моды*. При этом легко показать, что

$$I_2^{(i)} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, N). \quad (4)$$

Для однолучевого гиротрона

$$x_1 = I_1^{(0)} \hat{\Phi}_1^{(0)} (F_1) / I_2^{(0)} \hat{\Phi}_2^{(0)} (F_1), \quad (5)$$

где $I_1^{(0)}$, $I_2^{(0)}$ — безразмерный ток основного пучка, приведенный соответственно к параметрам мод 1 и 2.

Для N -лучевого гиротрона

$$x_N = \sum_{i=1}^N I_1^{(i)} \hat{\Phi}_1^{(i)} (F_1^{(i)}) / I_2^{(1)} \hat{\Phi}_2^{(1)} (F_1^{(1)}). \quad (6)$$

Числители в (5) и (6) одинаковы согласно уравнениям баланса (2). Из равенства амплитуд полей в однолучевом и N -лучевом гиротроне и равенства радиусов пучка однолучевого гиротрона и 1-го (основного) пучка в N -лучевом гиротроне следует также, что

$$F_1^{(1)} = F_1. \quad (7)$$

*Это условие имеет вид [6] $J_{m-n}(2\pi R^{(i)} / \lambda_s) = 0$ ($i=2, 3, \dots, N$), где J_{m-n} — функция Бесселя порядка $(m-n)$, m — азимутальный индекс, n — номер гармоники гирочастоты, $R^{(i)}$ — радиус i -го пучка, λ_s — длина волны s -й моды.

Исходя из вышеизложенного, а также (5) и (6) получим

$$\kappa_N/\kappa_1 = I_2^{(0)}/I_1^{(1)}. \quad (8)$$

Фактор κ_N/κ_1 можно принять за показатель эффективности селекции в многолучевом гиротроне: согласно (3) увеличение κ_N/κ_1 способствует созданию определенного запаса устойчивости колебаний на рабочей моде.

Физический смысл (8) очевиден: чем меньше ток в многолучевой системе приходится на тот пучок, который, кроме рабочей моды, также связан с паразитной модой и является рабочим пучком в однолучевом гиротроне, тем больше запас устойчивости колебаний. С этой точки зрения наилучший результат дает случай $I_2^{(1)} = 0$, т. е. парциальный пучок, который имеет ненулевую связь с паразитной модой, должен быть исключен. На практике, однако, условие обеспечения максимума выходной мощности не позволяет удалить пучок, который связан с паразитной модой. Как правило, этот пучок имеет наибольший радиус и передает полю рабочей моды большую часть мощности.

Для выяснения в этом случае роли добавочных пучков рассмотрим взятую из [9] зависимость факторов возбуждения $\hat{\Phi}_1$ и $\hat{\Phi}_2$ однолучевого гиротрона от амплитуды поля рабочей моды (рис. 2, кривые 1 и 2). В области больших амплитуд кривые сближаются, что уменьшает κ_1 и в конечном счете приводит к нарушению условия устойчивости (3). Однако при больших амплитудах кривые $\hat{\Phi}_1$ и $\hat{\Phi}_2$ идут почти параллельно. Добавление пучков, не взаимодействующих с полем рабочей моды, как показано ниже, эквивалентно смещению кривой $\hat{\Phi}_1$ вверх. При этом сближение кривых происходит при значительно больших амплитудах с соответствующим возрастанием запаса устойчивости.

Рассмотрим численные примеры, иллюстрирующие приведенные выше рассуждения. В связи с этим представим фактор κ_N/κ_1 в виде

$$\kappa_N/\kappa_1 = \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_1, \quad (9)$$

где

$$\hat{\Phi}_2 = \sum_{i=1}^N K^{(i)} \hat{\Phi}_1^{(i)} (F_1^{(i)}). \quad (10)$$

Коэффициенты $K^{(i)}$ равны отношениям приведенного тока i -го парциального пучка к току основного пучка. Очевидно, что $K^{(1)} = 1$. Формула (9) получается непосредственно из (5) и (6), если учесть, что

$$I_2^{(0)}/I_1^{(0)} = I_2^{(1)}/I_1^{(1)}. \quad (11)$$

Каждое из отношений в (11) не зависит от абсолютной величины тока пучка, а определяется радиусами соответствующих пучков и параметрами рабочей моды, которые одинаковы для однолучевого и многолучевого гиротронов.

На рис. 2 кривые 1, 2 описывают, как отмечалось выше, зависимость факторов возбуждения рабочей и паразитной мод от амплитуды поля рабочей моды в однолучевом гиротроне. Кривые 3 и 4 представляют факторы $\hat{\Phi}_2$ (см. (10)), когда введен дополнительный пучок, соответственно, во внутренний по отношению к основному пучку и внешний максимумы взаимодействия с рабочей модой. Наконец, кривая 4 относится к случаю, когда кроме основного пучка в пространство взаимодействия введены оба указанных выше дополнительных пучка. Параметры пучков следующие (см. табл. 1).

Таблица 1

Номер кривой	$\mu_s^{(0)}$	$\mu_1^{(1)}$	$\mu_1^{(2)}$	$\mu_1^{(3)}$	$K^{(1)}$	$K^{(2)}$	$K^{(3)}$	$\left(\frac{x_N}{x_1}\right) F_1^{(1)} = 0,16$
1	10	—	—	—	—	—	—	—
2	10	—	—	—	—	—	—	—
3	—	10	3,5	—	1	1,9	—	2
4	—	10	10	—	1	0,67	—	2,3
5	—	10	3,5	10	1	2,2	0,67	3,6

Здесь $\mu_s^{(i)} = \frac{\omega_N^{(i)} \beta_{\perp}^{(i)}}{2c\beta_{\parallel}^{(i)}} L$ — параметр неизохронности i -пучка в поле s -й моды (см., например, [7, 9]).

Анализ кривых на рис. 2 показывает, что введение внутреннего дополнительного пучка, ток которого составляет 0,43 тока основного пучка, дает отношение $x_N/x_1=2$ при амплитуде $F_1^{(1)}=0,16$. Внешний пучок (токи дополнительного и основного пучков одинаковы) дает величину $x_N/x_1=2,3$ при той же величине $F_1^{(1)}$. Наконец, в трехлучковой системе с током внутреннего пучка 0,5 от основного и током внешнего пучка, равным основному, величина x_N/x_1 при $F_1^{(1)}=0,16$ составляет 3,6.

Отметим, что для количественного исследования условий устойчивости требуется вычислять $\hat{\Phi}_1^{(i)}$ из решений нелинейных уравнений гиротрона [7, 8] для заданных параметров $\mu_s^{(i)}, \Delta_s^{(i)}, F_s^{(i)}$.

3. КПД N -лучевого гиротрона определяется аналогично кпд однолучевого. Парциальный поперечный кпд каждого пучка может быть вычислен по формуле (см., например, [7])

$$\eta_{\perp}^{(i)} = 2\hat{\Phi}^{(i)} F^{(i)2}. \quad (12)$$

Выходная мощность от N пучков

$$P = \sum_{i=1}^N I^{(i)} t_{\perp}^{(i)} \eta_{\perp}^{(i)} U^{(i)} \quad (13)$$

и результирующий электронный кпд системы

$$\eta = \sum_{i=1}^N I^{(i)} t_{\perp}^{(i)} \eta_{\perp}^{(i)} U^{(i)} / \sum_{p=1}^N I^{(p)} U^{(p)}. \quad (14)$$

Здесь $I^{(i)}$ — парциальные токи пучков, $U^{(i)}$ — энергии электронов в i -м пучке, $t_{\perp}^{(i)}$ — отношение осцилляторной и полной энергий частиц в i -м пучке. В практических важных случаях удается подобрать параметры многолучковой системы так, чтобы кпд многолучевого гиротрона был достаточно близок к типичным кпд однолучевых гиротронов несмотря на то, что связь дополнительного пучка с полем рабочей моды отличается в общем от оптимальной. Основным фактором здесь является то, что повышение устойчивости генерации при введении дополнительного пучка позволяет приблизиться к режимам, оптимальным по кпд для основного пучка.

Пространственное разделение парциальных пучков ослабляет влияние объемного заряда на скоростной разброс (см., например, [10]). Поэтому суммарный ток в многолучевой системе может быть сделан достаточно большим без ухудшения качества пучка. Пространственное

разделение пучков снижает также вероятность возникновения двухпучковой неустойчивости, которая, в принципе, может иметь место за счет многогорбой функции распределения продольных скоростей в N -лучевом электронном потоке.

Отметим, наконец, что использование нескольких пучков облегчает решение тепловых проблем, возникающих при проектировании коллектора.

2. ПОГЛОЩАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ПУЧКИ

2. Поглощающие электронные пучки должны иметь параметры, обеспечивающие максимум циклотронного поглощения паразитной моды при минимальном взаимодействии с полем рабочей моды. Рассмотрим в связи с этим в приближении малых амплитуд выражение для мощности, передаваемой полю электронным пучком [11]:

$$P = -\frac{P_{10}|F_0|^2 n^3 \mu^2}{4} \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial \psi}\right) \left(\left|\int_0^1 e^{i\psi\sigma} f(\sigma) d\sigma\right|^2\right), \quad (15)$$

где P_{10} — осцилляторная мощность пучка, σ — нормированная продольная координата, ψ — угол пролета, μ — параметр неизохронности.

Первое слагаемое в круглых скобках соответствует циклотронному поглощению, тогда как второй член обусловлен неизохронностью электронных осцилляторов и связан, как правило, с их индуцированным излучением. При $\mu=0$, т. е. для случая прямолинейных траекторий электронов, имеет место поглощение. В случае гауссова продольного распределения высокочастотного поля $f=\exp[-(2z/L_s)^2]$ условие циклотронного поглощения принимает вид (для i -го пучка)

$$\frac{\pi^2 g^{(i)2}}{2} \left(\frac{L_s}{\lambda_s}\right)^2 \left(\frac{\omega_s - n_s \omega_H^{(i)}}{\omega_s}\right) < n_s. \quad (16)$$

Мощность, поглощаемая i -м пучком при сильном неравенстве (16),

$$P \sim \frac{A_s^2 I^{(i)} \beta_{\perp}^{(i)2(n-1)}}{\beta_{\parallel}^{(i)}} \left(\frac{L_s}{\lambda_s}\right)^2 J_{m-n}(k_s R_0^{(i)}) \exp[-(\psi_s^{(i)2}/8)], \quad (17)$$

где

$$k_s = 2\pi/\lambda_s, \quad \psi_s^{(i)} = n_s \mu_s^{(i)} \Delta_s^{(i)} = \frac{2\pi}{\beta_{\parallel}^{(i)}} \frac{L_s}{\lambda_s} \left(\frac{\omega_s - n_s \omega_H^{(i)}}{\omega_s}\right) \quad (18)$$

является углом пролета врачающегося осциллятора относительно поля.

Приведенная расстройка $\Delta_s^{(i)} = \frac{2}{\beta_{\parallel}^{(i)2}} \left(\frac{\omega_s - n_s \omega_H^{(i)}}{\omega_s}\right)$.

Согласно (17) при $n_s=1$ поглощаемая мощность не зависит от $\beta_{\perp}^{(i)}$, т. е. имеет такую же величину, как и для прямолинейного пучка, а при $n_s=2$ она пропорциональна $\beta_{\perp}^{(i)2}$. Это соответствует известному факту (см., например, [11]) отсутствия взаимодействия прямолинейного пучка с электромагнитным полем на второй и более высоких гармониках гирочастоты и наличию не зависящего от β_{\perp} поглощения на основном циклотронном резонансе.

Условие (16) определяет дающую поглощение область изменения параметров L_s (длины) и $\omega_s - n_s \omega_H^{(i)}$ (расстройки) как функций энергии электронов в каждом пучке и параметра $g^{(i)}$, который равен отношению осцилляторной скорости к скорости дрейфа (длина и магнитное поле определяются условиями эффективного взаимодействия излучающих пучков). Поэтому свободными параметрами являются только $g^{(j)}$, $\beta_{\perp}^{(j)}$ и $I^{(j)}$, где j относится к поглощающим пучкам.

При наличии поглощающих пучков уравнение баланса мощностей (2) целесообразно записать в виде

$$\sum_{l \neq j}^N I_s^{(l)} \hat{\Phi}_s^{(l)} = \frac{n_s}{2Q_s} = \frac{n_s}{2Q_s} + \frac{n_s}{2} \sum_j^{N'} \frac{1}{Q_s^{(j)}} . \quad (19)$$

Параметр

$$Q_s^{(j)} = - (n_s/2) (I_s^{(j)} \hat{\Phi}_s^{(j)})^{-1} \quad (20)$$

имеет смысл электронной добротности, вносимой j -пучком. Эффективность электронной селекции, производимой поглощающими пучками, зависит, очевидно, от отношения Q_s и $Q_s^{(j)}$, где Q_s — добротность резонатора на s -й паразитной моде.

Пренебрегая неизохронностью электронов в поглощающих пучках, получим, что при гауссовом продольном распределении поля s -й моды

$$Q_s^{(j)} = \frac{5.4 \cdot 10^2 (\gamma_{mp}^2 - m^2) J_m^2(\gamma_{mp})}{I^{(j)} n_s J_{m-n}^2(2\pi R_0^{(j)} L_s / \lambda_s)} \left(\frac{n_s^{n_s}}{2n_s n_s!} \right) \frac{\beta_{||}^{(j)2} \lambda_s}{(\beta_{\perp}^{(j)})^{2(n_s-1)}} \exp\left(\frac{\psi_s^{(j)2}}{8}\right) . \quad (21)$$

Согласно (21) $Q_s^{(j)}$ пропорциональна $\beta_{||}^{(j)2}$ и не зависит от $\beta_{\perp}^{(j)}$ для $n_s=1$. Для второй гармоники гирочастоты $Q_s^{(j)} \sim 1/g^{(j)} \rightarrow \infty | g^{(j)} \rightarrow 0$.

Рассмотрим два частных случая, представляющих наибольший интерес.

a) Рабочая и паразитная моды синхронны с пучком на основном циклотронном резонансе. Поглощающий пучок должен вводиться в тот из нулей поля рабочей моды, в котором максимальна связь пучка с полем паразитной моды. Если при этом электронная добротность оказалась равной холодной, то стартовый ток паразитной моды возрастает вдвое. Так, для типичного значения холодной добротности конкурирующей моды $3 \cdot 10^2$ при следующих характерных параметрах: $(L_s/\lambda_s) = 3$, $\beta_{||}^{(j)} \approx \beta^{(j)} = 0.45$, $(\gamma_{mp}^2 - m^2) J_m^2(\gamma_{mp}) [J_{m-1}^2(2\pi R_0^{(j)}/\lambda_s)]^{-1} = 20$ — электронная добротность сравнивается с холодной при токе поглощающего пучка 10 А.

При $n_s=1$ согласно (21) электронная добротность пропорциональна $\beta_{||}^{(j)2} / I^{(j)}$. Следовательно,

$$Q_s^{(j)} \sim U^{(j)} / I^{(j)} \sim R_{\text{зФФ}}^{(j)} , \quad (22)$$

т. е. $Q_s^{(j)}$ пропорциональна сопротивлению пучка по постоянному току. Мощность поглощающего пучка, требуемая для получения заданной величины электронной добротности,

$$P^{(j)} = I^{(j)} U^{(j)} \sim U^{(j)2} / Q_s^{(j)} . \quad (23)$$

Согласно (23) наилучшими являются пучки с возможно меньшей энергией электронов. Однако при уменьшении энергии поглощающих пучков возрастает расстройка циклотронных частот электронов в этих пучках относительно циклотронной частоты излучающих пучков, а также сужается полоса циклотронного поглощения. Поэтому реальная энергия $U^{(j)}$ в (23) не должна быть чрезмерно малой. В особенности это относится к тому случаю, когда энергия электронов основного пучка сравнима с энергией покоя. В этом случае электроны поглощающего пучка также должны иметь высокую энергию (во избежание расстройки циклотронных частот) и ток. Отметим, что при высокой степени селекции мод поглощающий пучок остается моноскоростным и возможна его эффективная рекуперация.

б) Рабочая мода синхронна со второй гармоникой гирочастоты, а конкурирующая — с первой. Выводы предыдущего пункта сохраняются за исключением требования к радиусу встречи поглощающего пучка,

так как последний не взаимодействует (при достаточно малых $g^{(j)}$) с полем рабочей моды. Радиус встречи $R^{(j)}$ должен выбираться только из условий наилучшего взаимодействия с полем паразитной моды. Указанная особенность специфична только для второй гармоники циклотронной частоты: введение поглощающего (неосциллирующего) пучка обеспечивает поглощение энергии низшей гармоники и совершенно не влияет на поле рабочей (второй) гармоники.

Условие устойчивости одномодовых стационарных колебаний рабочей моды (3) принимает вид (N' пучков не взаимодействуют с полем рабочей моды и настроены на поглощение паразитной моды ($I_2^{(j)} \hat{\Phi}_2^{(j)} < 0$))

$$\chi_N = \frac{\sum_{i \neq j}^N I_1^{(i)} \hat{\Phi}_1^{(i)} (F_1^{(i)})}{\sum_{i \neq j}^N I_2^{(i)} \hat{\Phi}_2^{(i)} (F_1^{(i)}) - \sum_j^{N'} I_2^{(j)} |\hat{\Phi}_2^{(j)}|} > \frac{n_1 Q_2}{n_2 Q_1}. \quad (24)$$

Величина $|I_2^{(j)}|\hat{\Phi}_2^{(j)}|$ может быть определена по линейной теории (из соотношения (20)). Наличие в знаменателе (24) слагаемых, ответственных за поглощение, увеличивает фактор χ_N , что создает запас устойчивости и предпосылки для наращивания выходной мощности путем повышения тока излучающих пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов С. Н. и др. // Изв. вузов Радиофизика. 1969. Т. 12. № 8. С. 1236.
2. Гапонов А. В. и др. // Изв. вузов Радиофизика. 1975. Т. 18. № 2. С. 280.
3. Запевалов В. Е., Кораблев Г. С., Цимлинг Ш. Е. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. № 8. С. 1661.
4. А. с. 786677 СССР с приоритетом от 25.07.1979 г. Мазер на циклотронном резонансе. // В. Е. Запевалов и др. — Опубл. в Б. И. 1989. № 7. С. 281.
5. А. с. 897039 СССР с приоритетом от 28.07.1980 г. Двулучевая пушка мазера на циклотронном резонансе (варианты). // Запевалов В. Е. и др. — Опубл. в Б. И. 1989.
6. Wang Hui, Zhao Jin-lin et al. // 10-th Int Conf Infrared and millimeter waves. Orlando. Dec. 1985. P. 265.
7. Зарница И. Г., Нусинович Г. С. // Изв. вузов Радиофизика. 1974. Т. 17. № 12. С. 1858.
8. Монсеев М. А., Нусинович Г. С. // Изв. вузов Радиофизика. 1974. Т. 17. № 11. С. 1709.
9. Зарница И. Г., Нусинович Г. С. // Изв. вузов Радиофизика. 1977. Т. 20. № 13. С. 461.
10. Мануилов В. Н., Цимлинг Ш. Е. // Изв. вузов Радиофизика. 1981. Т. 24. № 4. С. 491.
11. Петелин М. И., Юлпатов В. К. В кн.: Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар для инженеров). — Саратов: Гос. ун-т. 1974. Кн. 4. С. 95.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
9 августа 1989 г.

MULTIBEAM GYROTRONS

V. E. Zapevalov, Sh. E. Tsimring

Gyrotrons having one or several supplementary tubular helical electron beams added to the fundamental one are analysed. It is shown that supplementary beams with properly chosen parameters can amplify the mode selection as efficient radiators and high-frequency power absorbers.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 533.951

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАННОГО ПОЛЯ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

С. М. Файнштейн, Ю. Я. Яшин, Н. Ф. Яшина

При исследовании взаимодействия волн в сплошных средах часто используется приближение заданного поля, т. е. ситуация, когда одна из волн имеет амплитуду много больше амплитуд других волн, участвующих в резонансном обмене энергии (см., например, [1–3]). Несомненный интерес представляет анализ приближения заданного поля в неоднородной плазме при различных соотношениях характерных параметров — нелинейности, неоднородности и расстройки от синхронизма. В данной работе на примере взаимодействия двух попутных электромагнитных (индексы 1, 2) и одной плазменной волн (индекс 3) в изотропной неоднородной плазме изучена распадная неустойчивость в двух случаях — задано поле ВЧ электромагнитной волны и поле НЧ волны с учетом самовоздействия сильной волны*. На основе уравнений квазигидродинамики и уравнений Максвелла можно получить укороченные уравнения для комплексных амплитудных множителей взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} a_1' &= -\sigma_1 a_2 a_3^* e^{-i\psi}, \quad a_2' = \sigma_2 a_1 a_3 e^{i\psi}, \quad a_3' = -\sigma_3 a_1^* a_2 e^{-i\psi}, \\ \psi &= \int \Delta k(x) dx, \quad a_i' = da_i / dx, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta k(x) = k_2 - k_1 - k_3, \quad \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 - \omega_3 = 0, \quad (2)$$

где ω_i , k_i — частоты и волновые векторы соответствующих волн, $a_i = E_i / \sqrt{k_i}$, $\sigma_{1,2} = ek_{1,2}/2m\omega_{1,2}c\sqrt{k_3}$, $\sigma_3 = ek_3\omega_p^2/2m\omega_1\omega_2\omega_3v_{pl}$, n_i — показатель преломления. E_i — амплитуды электрических полей волн, $v_{pl} = k_3 v_T^2 / \omega_p$, $\omega_p^2 = 4\pi N(x)e^2/m$ — квадрат ленгмюровской частоты, $N(x)$ — равновесная концентрация плазмы, e , m , v_T — заряд, масса, тепловая скорость электронов. Связь между ω_i и k_i определяется локальными дисперсионными уравнениями

$$c^2 k_{1,2}^2 = \omega_{1,2}^2 - \omega_p^2, \quad v_T^2 k_3^2 = \omega_3^2 - \omega_p^2. \quad (3)$$

Среда считается прозрачной: $n_i^2 = c^2 k_i^2 / \omega_i^2 > 0$. В некоторых локализованных точках пространственного синхронизма x_c выполняется условие $\Delta k(x_c) = 0$.

Пусть $|a_{2,0}| \gg |a_1|, |a_3|$, где $a_{2,0} = a_2(0) = \text{const}$, $x=0$ — начальная точка, находящаяся вдали от x_c . Полагая $a_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}$; $|a_{2,1}| \sim |a_1| \sim |a_3| \ll |a_{2,0}|$, из (1) находим**

$$a_1' = -\sigma_1 a_{2,0} a_3^* e^{-i\psi}, \quad a_3' = -\sigma_3 a_{2,0} a_1^* e^{-i\psi}, \quad a_{2,1}' = \sigma_2 a_1 a_3 e^{i\psi}. \quad (4)$$

Избавляясь в (4) от a_1 , получаем

$$a_3'' - g a_3' - \Gamma_2^2 a_3 = 0, \quad (5)$$

* Отметим, что в [4] исследованы частные случаи указанного взаимодействия в неоднородной плазме без предположения о заданном поле волн, в [5] — взаимодействие мод в хаотически неоднородной среде.

** Если применить использованную в [4] процедуру разложения полей, оставляя в качестве нулевого приближения $a_{2,0}$, то (4) совпадает с уравнениями для первых членов ряда теории возмущений. Пренебрегая поправкой $a_{2,1}$, приходим к тому, что традиционно называют приближением заданного поля. В этом приближении поле сильной волны изменяется по геометрооптическому закону $E_2(x)/\sqrt{k_2}(x) = E_2(0)/\sqrt{k_2}(0)$.

где $g = -i\psi' + \sigma_3'/\sigma_3$, $\Gamma_2^2 = \sigma_1\sigma_3|a_{20}|^2$ — квадрат пространственного инкремента распадной неустойчивости*. Если сильным является поле низкочастотной электромагнитной волны a_1 , то $a_1 = a_{10} + a_{11}$, $|a_{11}| \sim |a_2| \sim |a_3| \ll |a_{10}| = \text{const}$, в (4) нужно произвести замены $a'_1 \rightarrow a'_{11}$, $a_1 \rightarrow a_{10}$, $a_{20} \rightarrow a_2$, а в (5) — $\Gamma_2^2 \rightarrow \Gamma_1^2 = \sigma_2\sigma_3|a_{10}|^2$.

Коэффициенты уравнения (5) содержат три пространственных масштаба: $L \sim (\sigma_3/\sigma)^{-1}$ — масштаб неоднородности среды, $L_\Phi \sim |\psi'|^{-1} = (\Delta k)^{-1}$ — масштаб «расфазировки» волнового поля, $L_{\text{нл}} \sim \Gamma_0^{-1}$ — масштаб нелинейного нарастания поля волны**. Решение (5) при произвольном соотношении между L , L_Φ , $L_{\text{нл}}$ ($\min\{\Gamma, |g|\} \gg \max\{\Gamma'/\Gamma, |g'|/|g|\}$) может быть записано в виде

$$a_3 = -a_{10}^* a_{20} \frac{\beta \sigma_{30}}{\chi_0} \exp\left[-i \frac{\psi + \psi_0}{2}\right] \operatorname{sh} \int \chi dx ,$$

$$a_1^* = a_{10}^* \frac{\sigma_{30} \exp[i(\psi - \psi_0)/2]}{\sigma_3 \chi_0} \left[\beta \chi \operatorname{ch} \int \chi dx + \left(\beta' - \frac{i\psi'}{2} \beta \right) \operatorname{sh} \int \chi dx \right] , \quad (6)$$

где $\chi = \alpha - g'/4\alpha$, $\alpha = \sqrt{(g/2)^2 + \Gamma_2^2}$, $\beta = (\sigma_3 \sqrt{\alpha_0}/\sigma_{30} \sqrt{\alpha})^{1/2}$. Поправка к полю сильной волны a_{21} находится из третьего уравнения (4).

Рассмотрим предельные случаи. Если $L_{\text{нл}} \ll L, L_\Phi$, то из (6) следует

$$a_1^* \simeq a_{10} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_{20}} \left(\frac{\sigma_{30} \sqrt{\Gamma_{20}}}{\sigma_3 \sqrt{\Gamma_3}} \right)^{1/2} \exp\left(i \frac{\psi - \psi_0}{2}\right) \operatorname{ch} \int \Gamma_2 dx ,$$

$$a_3 \simeq -a_{10}^* a_{20} \frac{\sigma_{30}}{\Gamma_{20}} \left(\frac{\sigma_3 \sqrt{\Gamma_{20}}}{\sigma_{30} \sqrt{\Gamma_2}} \right)^{1/2} \exp\left(-i \frac{\psi + \psi_0}{2}\right) \operatorname{sh} \int \Gamma_2 dx ,$$

$$a_{21} = -a_{20} |a_{10}|^2 \int \frac{\sigma_{30}}{\Gamma_{20}} \sqrt{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_{20}}} \exp(i\psi_0) \frac{\sin 2 \int \Gamma_2 dx}{2} dx . \quad (7)$$

Поля обеих волн по абсолютной величине растут, промодулированы с пространственным периодом $2/|\Delta k|$ и находятся в противофазе. В противоположном случае $|g| \gg \Gamma_2$ ($\min\{L, L_\Phi\} \ll L_{\text{нл}}$) получаем

$$a_1^* \simeq a_{10}^* \frac{g}{g_0} \left(\frac{\sigma_{30}}{\sigma_3} \sqrt{\frac{g_0}{g}} \right)^{1/2} \exp\left(i \frac{\psi - \psi_0}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{30}}\right)^{1/2} - i \frac{\psi - \psi_0}{2}\right) ,$$

$$a_3 \simeq -a_{10}^* a_{20} \frac{2\sigma_{30}}{g_0} \exp\left(-i \frac{\psi + \psi_0}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_{30}}} - i \frac{\psi - \psi_0}{2}\right) . \quad (8)$$

В случае, когда мощной волной является НЧ электромагнитная, поле плазменной волны и высокочастотной электромагнитной является периодическим с двумя периодами $1/\Gamma_{10}$ и $2/|\Delta k|$.

Во всех этих случаях величина эффекта трансформации невелика (см. [4]). Это связано с тем, что в приближении «заданного поля» (даже с поправкой на самовоз действие) по существу не срабатывает эффект усредняющего действия среды с учетом точки пространственного синхронизма. Однако приближение заданного поля можно эффективно использовать в однородной среде (т. е. при размерах области взаимодействия меньших, чем $|\Delta k'|^{-1}$ [4]) или в среде с плавными хаотическими неоднородностями, размеры которых также меньше $|\Delta k'|^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. // ЖТФ. 1962. Т. 32. С. 1291.
2. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1973. Вып. 3.
3. Гусаков Е. З., Савельев А. Н. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 89.
4. Урусова Н. А., Файнштейн С. М., Яшин Ю. Я. // Физика плазмы. 1990. Т. 17. № 2.
5. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. Вып. 2. С. 458.

Нижегородский институт инженеров
водного транспорта

Поступила в редакцию
12 июля 1989 г.

* Аналогичное уравнение применительно к хаотически неоднородной среде получено в [5], где отсутствует слагаемое $a_3 \sigma_3/\sigma_3$, связанное с неоднородностью плазмы.

** Считается, что все эти масштабы велики по сравнению с длинами взаимодействующих волн, так что применительно к (1) и всем последующим соотношениям справедливо геометрооптическое приближение.

О СООТНОШЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ШУМА В ВОЛНОВОДЕ

Е. И. Деревягина, Б. Г. Кацельсон

В теоретических исследованиях шумового поля, обусловленного в океанических волноводах ветровым волнением, метеорологическими осадками, как правило, считается, [1-4], что источники шума распределены по всей поверхности волновода. Понятно, что такое предположение является идеализацией реальной ситуации. Поэтому представляет интерес выяснение роли конечных размеров шумящей поверхности.

Одним из основных вопросов, на который необходимо получить ответ для выполнения корректных расчетов, является вопрос о роли непрерывного спектра в формировании шумового поля поверхностных источников. Известно [5], что с увеличением расстояния от точечного источника амплитуда моды непрерывного спектра быстро затухает и поэтому им, как правило, пренебрегают. Однако при анализе шумового поля от источника, распределенного по поверхности волновода, непрерывная компонента (или, в соответствии с вышеуказанным, вклад поля ближних источников) может быть значительна.

Согласно выводам Купермана и Инженито [3], если потери в системе велики, основной вклад в интенсивность шумового поля вносит непрерывный спектр. В случае же малых потерь энергия мод от удаленных источников преобладает над непрерывным излучением ближних источников. Считая потери в дне волновода малыми, Бакингем в работе [1] рассматривает характеристики шумового поля в диапазоне частот до 1 кГц. При этом в расчетах он пренебрегает непрерывным спектром. Большое внимание соотношению вкладов дискретного и непрерывного спектров в интенсивность шумового поля, вызванного ветром в мелком море, уделяется Хэмсоном [2]. Анализируя отклики вертикальной и горизонтальной антенных линейных решеток на шумовое поле. Хэмсон сделал вывод, что вклад составляющих поля определяется сектором углов приема: вблизи горизонтального направления преобладает дискретная составляющая, вблизи вертикального — непрерывная. В [2] показано также, что уровни шума зависят от поглощающих свойств дна. Все результаты в работе приведены на одной и той же частоте — 480 Гц.

Известно, что условия поглощения при одном и том же типе дна зависят от частоты. Поэтому в данной работе мы также рассмотрим зависимость от частоты соотношения вкладов непрерывного и дискретного спектров в интенсивность шумового поля.

Будем считать, что рассматриваемая среда представляет собой волновод Пекериса. В цилиндрической системе координат r, z, φ поверхности волновода соответствует $z=0$, дну — $z=h$. В слое скорость звука c_1 , плотность среды ρ_1 , плотность дна ρ_2 , скорость звука в нем $c_2 = c_1 - i\sigma$ комплексная из-за поглощения. Считаем, что коэффициент поглощения звука $\chi = 2\pi f/\sigma/c_1^2$ в дне зависит от частоты f следующим образом [6]: $\chi = \alpha_f \nu^\gamma$, где параметры α_f и ν определяются типом дна. В качестве источников шума, подобно [2], рассматриваем равномерно распределенные по поверхности волновода статистически независимые точечные диполи. Однако полагаем, что источники занимают конечную область — круг радиуса R_0 . Точку наблюдения поместим под центром шумящего круга на середине глубины волновода. (Отметим, что согласно [1, 2] вдали от границ волновода уровни шума практически не зависят от глубины наблюдения.)

Рассмотрение начнем с поля точечного диполя, расположенного на поверхности волновода. Решение волнового уравнения в данном случае имеет вид [5, 7]

$$\psi(r, z) = \psi_d(r, z) + \psi_n(r, z),$$

$$\psi_d(r, z) = \frac{2\pi i}{h^3} \sum_{j=1}^N \frac{x_j \sin(x_j z/h) H_0^{(1)}(\xi_j r)}{1 - (\mu/nx_j)^2 (1/x_j) \sin^2 x_j \operatorname{tg} x_j} = \sum_{j=1}^N W_j H_0^{(1)}(\xi_j r),$$

$$\xi_j = (1/h) \sqrt{(k_1 h)^2 - x_j^2}, \quad \mu = k_1 h (1-n^2)^{1/2}, \quad n = c_1/c_2, \quad m = \rho_2/\rho_1, \quad k_1 = 2\pi f/c_1,$$

$x_j (j=1, N)$ — вещественные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} x = (-1/mx) \sqrt{\mu^2 - x^2},$$

$$\psi_n(r, z) = 2imk_2^2 \int_0^\infty \tau^2 g(\tau, z) H_0^{(1)}(k_2 r \sqrt{1-\tau^2}) d\tau, \quad \operatorname{Im} \sqrt{1-\tau^2} > 0,$$

$$g(\tau, z) = \frac{s \sin(k_2 z)}{s^2 m^2 \cos^2(k_2 s h) + \tau^2 \sin^2(k_2 s h)},$$

$$s = [(c_2/c_1)^2 - \tau^2]^{1/2}, \quad k_2 = 2\pi f/c_2,$$

ψ_d и ψ_n определяют поле дискретного и непрерывного спектров.

Для интенсивности, усредненной по пространственному интервалу, большему, чем пространственный масштаб интерференции мод дискретного и непрерывного спектров (в результате чего исчезают перекрестные члены), получим следующее выражение: $\tilde{I}(r, z) = I_n + I_d$, где $I_n = |\psi_n|^2$ и $I_d = |\psi_d|^2$ определяют соответственно интенсивность непрерывной и дискретной компоненты поля. На рис. 1 (см. на вклейке) приведена зависимость от расстояния $\gamma(r)$ величины $\gamma = I_n/I_d$, характеризующей соотношение вкладов непрерывной и дискретной составляющих в суммарное поле в случае точечного источника.

Проинтегрировав интенсивность единичного источника по шумящей области, получим интенсивность шумящего кружка

$$I(z) = 2\pi\eta \int_0^{R_0} r \tilde{I}(r, z) dr = I_n(z) + I_d(z),$$

где η — поверхностная плотность диполей, которая предполагается постоянной. При $R_0 \rightarrow \infty$ получаем выражение для интенсивности поля от всей шумящей плоскости:

$$I_\infty(z) = I_{n\infty}(z) + I_{d\infty}(z),$$

$$I_{n\infty}(z) = 8m^2 k_2^3 \int_0^1 \tau(1-\tau^2) g_1^2(\tau, z) d\tau,$$

$$g_1(\tau, z) = \frac{t \sin(k_2 t z)}{t^2 m^2 \cos^2(k_2 t h) + (1-\tau^2) \sin^2(k_2 t h)}, \quad t = [(c_2/c_1)^2 - \tau^2]^{1/2},$$

$$I_{d\infty}(z) = 2\pi A f^{-n} \sum_{j=1}^N W_j,$$

где величина A зависит от параметров задачи m, n, α_n, h .

На рис. 2 приведены зависимости от нормированного радиуса кружка $R = R_0/h$ интенсивности непрерывной и дискретной компонент $\hat{I}_n = I_n/I_{n\infty}$, $\hat{I}_d = I_d/I_{d\infty}$. Как видно из рис. 2а, интенсивность непрерывной составляющей поля при $R = \infty$ практически такая же, как и при $R \sim 2/3$. Интенсивность дискретной компоненты в большей степени зависит от размеров шумящей области: при увеличении R от 30 до 10^4 интенсивность возрастает на два порядка и только при $R > 10^4$ можно считать $R = \infty$. На рис. 2б также показана зависимость от R соотношения $\delta = I_d/I_n$ вкладов дискретного и непрерывного спектров в полное поле. При $R > 3 \cdot 10^3$ $\delta > 10$, т. е. интенсивность полного поля, можно считать, полностью определяется дискретной составляющей. Кривые на рис. 2 соответствуют $f = 100$ Гц. Зависимости $\delta(f)$ при различных размерах излучающей поверхности приведены на рис. 3. Анализируя кривые рис. 3, можно заключить, что соотношение вкладов дискретной и непрерывной составляющей в полном поле зависит от размеров излучающей области и рассматриваемого частотного диапазона. Так, интенсивность непрерывного спектра отличается от интенсивности дискретного более чем на порядок при $f < 100$ Гц для $R = \infty$ и при $f < 40$ Гц для $R = 10^2$. В этих случаях при расчетах непрерывным спектром можно пренебречь.

Расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $c_1 = 1500$ м/с, $m = 1.4$, $Re = 0.83$, $\chi = 10^{-3} f$, $h = 100$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Buckingham M. J. // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 4. P. 1186.
2. Hamson R. M. // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 78. № 5. P. 1702.
3. Кирегман В. А., Инженито Ф. // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 6. P. 1988.
4. Фурдуев А. В. В кн.: Акустика океана / Под ред. Бреховских Л. М. — М.: Наука, 1974. С. 615.
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 502 с.
6. Акустика океана / Под ред. Купермана У., Енсена Р. — М.: Мир, 1984. — 454 с.
7. Stickler D. P., Ammicht E. // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 6. P. 2018.

О КРИТЕРИЯХ АДИАБАТИЧНОСТИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР

Д. В. Виноградов, Г. Г. Денисов, М. И. Петелин, Э. М. Шер

Согласно [1], если у консервативного (без диссипации) волновода параметры изменяются в пространстве достаточно плавно, то у невырожденной моды можно считать поток энергии сохраняющимся от сечения к сечению, тогда как ее поперечная структура на больших расстояниях может претерпеть весьма существенные изменения. Критерий плавности (адиабатичности) нетрудно записать из спектральных соображений:

$$\delta h \ll |h_n - h_s|, \quad (1)$$

где $\delta h \sim \pi/L$ — спектральная ширина нерегулярности, обусловленная длиной плавного перехода L между двумя характерными сечениями, а h_n и h_s — локальные значения постоянных распространения исходной n -й моды и всех других s -х мод волновода (включая и встречную волну, по своей поперечной структуре идентичную исходной).

Если характерные поперечные размеры волновода и волнового потока одного порядка a_1 и намного больше, чем $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$, то $|h_n - h_s| > (\pi/a_1)^2 k^{-1}$ и ограничение (1) редуцируется к дифракционному («френелевскому») виду

$$L \gg ka_1^2. \quad (2)$$

Критерии адабатичности типа (1), (2) могут быть распространены на электродинамические системы весьма общего вида, в частности, на периодические, включая линзовье и зеркальные, волноводы. Однако эти критерии, как правило, весьма условны и не позволяют надежно оценить искажения волнового поля относительно разделения, определенного из нулевого приближения.

Чтобы проанализировать эффекты последнего рода, исследуем следующую модель. Пусть плоская волна $E = E_0 \exp(-i\omega t + ikz)$ падает из однородного полупространства на плавно неоднородную среду с диэлектрической проницаемостью, периодической по координате z :

$$\epsilon(x, z) = \epsilon_0(1 - \tilde{\epsilon}(z)f(x)), \quad f(x) = f(x+d) \quad (3)$$

при $z < 0 \quad \tilde{\epsilon} = 0$. Если период d значительно больше длины волны λ ,

$$d \gg \lambda, \quad (4)$$

и диэлектрическая проницаемость изменяется по z достаточно плавно,

$$|\partial\epsilon/\partial z| \ll ke, \quad (5)$$

то поле $E = E_0 A(x, z) \exp(-i\omega t + ikz)$ описывается параболическим уравнением [2]*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial \eta} - 2q(\eta)f(2\xi)A = 0, \quad (6)$$

где $\eta = \pi^2 z/kd^2$, $\xi = \pi x/d$, $q(\eta) = (1/2)\tilde{\epsilon}(\eta)(kd/\pi)^2$.

Поле в произвольном сечении η может быть представлено суперпозицией локальных волн [5]

$$A(\xi, \eta) = \sum_n C_n(\eta) b_n(\xi, \eta) \exp(-(i/2)a_n \eta), \quad (7)$$

где $b_n(\xi, \eta)$ — решение уравнения Хилла,

$$\partial^2 b_n / \partial \xi^2 + (a_n - 2q(\eta)f(2\xi))b_n = 0, \quad (8)$$

с соответствующими собственными значениями a_n . Используя ортонормальность локальных волн, из (6), (7) получим уравнения для комплексных амплитуд $C_n(\eta)$:

$$\frac{dC_n}{d\eta} + \frac{i}{2} a_n(\eta) C_n + \sum_m C_n \alpha_{nm}(\eta) = 0 \quad (9)$$

где

* Это уравнение описывает также распространение вдоль поверхности волнищущей галереи [3] и в некоторых случаях волн в плавно нерегулярных сверхразмерных волноводах [4].

$$\kappa_{nm}(\eta) = \frac{dq(\eta)}{d\eta} \int_0^\zeta b_n(\zeta, q) \frac{\partial b_m}{\partial q} d\zeta, \quad (10)$$

— коэффициенты связи волн.

Энергообмен волн, описываемых уравнением (9), характеризуется (см., например, [1, 5]) параметром связности

$$P_{n,m} = \left| \frac{2\kappa_{n,m}(\eta)}{a_n(\eta) - a_m(\eta)} \right|. \quad (11)$$

Чтобы для выбранной волны с $n=n_p$ потери на трансформацию были малы, необходимо

$$P_{n_p m} \ll 1. \quad (12)$$

Сравнивая последнее условие (12) с условием (1) и вспоминая, что разность собственных значений ($a_n - a_m$) пропорциональна разности волновых чисел ($\hbar_n - \hbar_m$), отметим, что именно коэффициенты связи волн являются более точной (чем π/L) «спектральной» характеристикой неоднородного участка.

Конкретизируем условие (12) для синусоидальной $f(\zeta) = \cos 2\zeta$ модуляции ϵ . При этом периодическими решениями уравнения (8) будут функции Матье. В случае слабой ($q \ll 1$) и сильной ($q \gg 1$) модуляции эти функции имеют простые аппроксимации [6], что дает возможность получить простые аналитические условия адиабатичности.

Ограничившись членами первого порядка, при $q \ll 1$ имеем для четных функций

$$b_0(\zeta, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{q}{2} \cos 2\zeta \right), \quad (13)$$

$$b_n(\zeta, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos 2n\zeta - \frac{q}{4} \left(\frac{\cos(2n+2)\zeta}{2n+1} - \frac{\cos(2n-2)\zeta}{2n-1} \right) \right], \quad n > 1;$$

для нечетных функций —

$$\tilde{b}_n(\zeta, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sin 2n\zeta - \frac{q}{4} \left(\frac{\sin(2n+2)\zeta}{2n+1} - \frac{\sin(2n-2)\zeta}{2n-1} \right) \right], \quad n \geq 1, \quad (14)$$

а их собственные числа

$$a_n = 4n^2. \quad (15)$$

При этом коэффициенты связи локальных волн отличны от нуля только для волн с одинаковой четностью и индексами, отличающимися на единицу. В частности, для четных волн получили

$$\kappa_{01} = -\kappa_{10} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{dq(\eta)}{d\eta}, \quad \kappa_{n, n \pm 1} = -\kappa_{n \pm 1, n} = \pm \frac{1}{4(2n \pm 1)} \frac{dq(\eta)}{d\eta}. \quad (16)$$

Если на рассматриваемый переход (3) поступает плоская волна (собственная волна немодулированной среды), то при слабой модуляции она близка к нулевой четной волне и связана только с первой четной волной. Условие адиабатичности при этом имеет вид

$$P_{01} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{dq}{d\eta} \ll 1. \quad (17)$$

В области сильной модуляции локальные волны среды близки к функциям Эрмита—Гаусса [6]:

$$b_n(\zeta, \eta) \simeq \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \frac{1}{2^n n!} \exp[-\sqrt{q}(\pi/2 - \zeta)^2] H_n(\sqrt{2}q^{1/4}(\pi/2 - \zeta)), \quad (18)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

а собственные числа равны

$$a_n = 2\sqrt{q}(2n+1-\sqrt{q}). \quad (19)$$

Коэффициенты связи нулевой (b_0) и первой (b_1) четных волн, вычисленные в этом приближении, равны

$$x_{02} = -x_{20} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{q} \frac{dq}{d\eta}, \quad (20)$$

и, соответственно, условие адиабатичности записывается как

$$P_{02} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{1}{q\sqrt{q}} \frac{dq}{d\eta} \ll 1. \quad (21)$$

Запись условий (17) и (21) в размерных переменных дает, что качественное изменение структуры поля можно осуществить адиабатически лишь на длинах L , существенно превышающих длину дифракционного расплывания потока $L_{\Phi} \sim ka_1^2$. Например, для линейного перехода $q=\beta\eta$ из условия (17) следует, что для изменения глубины модуляции $\Delta q \sim 1$ требуется длина перехода $L \gg k(d/\pi)^2 \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Условия адиабатичности (17) и (21) записаны аналитически для случаев сильной и слабой модуляции среды. В общем случае анализ трансформации волн может быть проведен численно. В данной работе численно исследовалось возбуждение плоской волны собственных волн сильномодулированной среды ($q=10$) с синусоидальным $f(\zeta) = \cos 2\zeta$ и параболическим на периоде $f(\zeta) = (\zeta - \pi/2)^2$, $0 < \zeta < \pi$, поперечным профилем при использовании линейного перехода $q(\eta) = \beta\eta$, $0 < \beta\eta < 10$ от однородной среды. Структура поля $A(\zeta, \eta)$ вычислялась решением уравнения (5) с начальным условием $A(\zeta, 0) = 1/\sqrt{\pi}$ при различных значениях скорости нарастания модуляции β .

При малых значениях β , удовлетворяющих условиям адиабатичности (17), (21) ($\beta \ll 4\sqrt{2}$), взаимная трансформация локальных волн мала и на протяжении всего перехода присутствует только одна нулевая локальная волна (рис. 1, 2, см. на вклейке; на рис. 1а, б кривые 1 соответствуют собственной волне среды, 2 — гауссову пучку с максимальным коэффициентом возбуждения). Увеличение скорости нарастания модуляции приводит к трансформации в собственную волну сильномодулированной среды (рис. 1, 2а — при $\beta=0.23$; 2б — при $\beta=2.3$). Взаимная трансформация локальных волн приводит также к наличию осцилляций коэффициента трансформации. Наличие в конце согласующего участка кроме основной волны еще одной локальной волны приводит к увеличению (синфазное сложение волн) или к уменьшению (противофазное сложение) эффективной ширины поля. На рис. 1 представлены зависимости от скорости изменения глубины модуляции эффективности возбуждения полем одного периода $-\pi/2 < \zeta < \pi/2$ в конце согласующего участка ($q=10$) гауссова пучка $\exp(-(\zeta - \pi/2)^2/a^2)$. Рис. 2 иллюстрирует структуру поля волны в разных сечениях согласующего участка при разных β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваганов Р. Б., Матвеев Р. Ф., Мериакри В. В. Многоволновые волноводы со случайными нерегулярностями. — М.: Сов. радио, 1972.—232 с.
2. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.—518 с.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.—456 с.
4. Белоусов В. И., Власов С. Н., Пискунова Л. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 9. С. 1214.
5. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987.—656 с.
6. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.—832 с.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
3 августа 1989 г.

УДК 621.373.826:621.396

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МНОГОМОДОВЫХ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ

Ю. А. Быковский, Ю. Н. Кульчин, О. Б. Витрик

Исследования по использованию многомодовых волоконных световодов (МВС) в интерферометрических датчиках физических величин показали, что их фазовая чув-

ствительность возрастает с увеличением длины и числовой апертуры МВС [1, 2]. Распространение когерентного излучения в МВС связано с появлением сложной картины спеклов, характеристики которой зависят от свойств излучения и параметров световода [2, 3]. Внешнее воздействие на МВС приводит к перестройке картины спеклов, что может быть положено в основу методов обработки интерференционных сигналов, использующих пространственную амплитудную [2, 4–8] и согласованную фильтрацию [7]. Эффективность обработки зависит от контраста и распределения интенсивности в спектральной картине. Это определяется как выбор метода обработки и материала для изготовления фильтра, так и длину МВС в датчике. Поскольку в реальных МВС моды претерпевают случайные рассеяния на неоднородностях сердцевины и оболочки, процесс образования спектральной картины носит случайный характер [8, 9], что и обуславливает соответствующий подход к описанию поля излучения в МВС. Целью настоящей работы явилось исследование таких статистических характеристик излучения в МВС, как контраст и плотность вероятности распределения интенсивности в формируемой спектральной картине.

В связи с тем, что уже на коротких длинах МВС направляемые моды могут претерпеть большое число актов рассеяния на неоднородностях [10], изменение освещенности от точки к точке в спектральной картине на выходном торце целесообразно рассматривать как среднее по ансамблю возможных реализаций освещенности для одной точки. Так как рассеяние носит случайный характер, то фаза мод распределена равномерно в интервале от нуля до 2π [8, 11], а напряженность поля распределена по нормальному закону при рэлеевском законе распределения амплитуды [12, 13]. Обычно на выходе датчиков на основе МВС используют поляризаторы. Поэтому излучение в выбранной для рассмотрения точке с координатами (x, y) на выходном торце можно считать линейно поляризованным. Тогда комплексная амплитуда поля излучения в выбранной точке будет являться суперпозицией полей всех направляемых мод со случайными амплитудами и фазами:

$$E(x, y) = \sum_{lm} E_{lm}(x, y) = \sum_{lm} \mathcal{E}_{lm}(x, y) \exp[-i\phi_{lm}(x, y)], \quad (1)$$

где $E_{lm}(x, y)$ — комплексная амплитуда поля (l, m) -моды; $\mathcal{E}_{lm}(x, y)$ и $\phi_{lm}(x, y)$ — случайные амплитуда и фаза моды. В дальнейшем обозначение координат выбранной точки опускаем.

Согласно сделанным предположениям интенсивность каждой моды распределена с плотностью вероятности [12, 13]

$$P(I_{lm}) = \frac{1}{\sigma_{lm}} \exp(-I_{lm}/\tau_{lm}), \quad (2)$$

с дисперсией $\sigma_{lm} = \sigma[I_{lm}] = 2\sigma[E_{lm}]$ и математическим ожиданием $M[I_{lm}] = \bar{\sigma}_{lm}$. Как показано в [14, 15], пространственная степень когерентности излучения, прошедшего через МВС, близка к единице и практически не зависит от его длины. Поэтому распределение интенсивности на выходном торце МВС можно представить как

$$\begin{aligned} I &= \sum_{lm} I_{lm} + \sum'_{lm} \sum_{pq} \sqrt{I_{lm} I_{pq}} |\gamma_{lmpq}| \cos(\phi_{lm} - \phi_{pq}) \simeq \\ &\simeq (1 - \bar{\gamma}) \sum_{lm} I_{lm} + \bar{\gamma} \sum_{lm} \sum_{pq} \sqrt{I_{lm} I_{pq}} \cos(\phi_{lm} - \phi_{pq}) \pm \\ &\pm \sigma_{\bar{\gamma}} \sum'_{lm} \sum_{pq} \sqrt{I_{lm} I_{pq}} \cos(\phi_{lm} - \phi_{pq}), \end{aligned} \quad (3)$$

где γ_{lmpq} — комплексная степень когерентности излучения мод (l, m) и (p, q) [8, 16], обозначение $(')$ указывает на суммирование только по перекрестным членам; $\bar{\gamma}$ — среднее значение степени когерентности излучения в МВС, введенное по аналогии с [17],

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{N^2 - N} \sum_{lm} \sum'_{pq} |\gamma_{lmpq}|, \quad (4)$$

где N — число мод, направляемых в МВС, и, наконец,

$$\sigma_{\bar{\gamma}} = \sqrt{\bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}^2}. \quad (5)$$

Используя (1)–(5) и центральную предельную теорему [18], можно получить выражение для плотности вероятности распределения интенсивности в наблюдаемой спектральной картине:

$$P(J) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{J - A}{\bar{\gamma}}\right) \Phi_u\left[\sqrt{\frac{J - A - (\sigma_{\bar{\gamma}}^2/4\bar{\gamma})}{\sigma_{\bar{\gamma}}^2}}\right], \quad (6)$$

$$\text{где } J=I/J_0, \quad J_0 = \sum_{lm} \bar{I}_{lm}, \quad \Phi_u(v) = \int_{-\infty}^v \exp(-u^2/2) du, \quad M[J] = J_0, \quad \sigma[J] = J_0 \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\sigma_\gamma^2}{2}},$$

$$A = [\sigma_\gamma^2 + \frac{1}{\gamma} (1 - \frac{1}{\gamma})]/4\gamma.$$

На основании полученных соотношений и [13] контраст спекл-картины на выходе из МВС можно найти как

$$C = \frac{\sigma[J]}{M[J]} = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_\gamma^2}{\gamma^2}}{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\sigma_\gamma^2}{2}}}. \quad (7)$$

Значение γ можно рассчитать, используя результаты [16] и (4). Например, для четырехмодового лазера и МВС со ступенчатым профилем распределения показателя преломления

$$\gamma \simeq \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\sin^2 z}{2z^2} + \frac{\sin^2 3z}{2(3z)^2} + \sin^2 z (1 + \cos^2 z) \right], \quad (8)$$

где $z = \pi \Delta n L / L_1$, $\Delta n = n_1 - n_2$, n_1 и n_2 — показатели преломления сердцевины и оболочки МВС, L — длина световода, L_1 — длина резонатора лазера.

Таким образом, контраст спекл-картины и функция плотности вероятности распределения интенсивности зависят от параметров и дисперсионных свойств МВС, а также от когерентности излучения лазера. Обе эти характеристики могут быть легко определены на практике по математическому ожиданию и дисперсии выборки интенсивности в одной точке на поверхности выходного торца световода или его изображения.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведена рассчитанная в соответствии с (5), (7) и (8) зависимость изменения C от длины световода L и параметра z для МВС с $NA=0,21$. Как видно, на начальном участке с ростом L и z контраст спекл-картины быстро уменьшается, а затем приобретает монотонный характер. Такое его поведение обусловлено сильным влиянием межмодовой дисперсии, которое в дальнейшем уменьшается в результате рассеяния излучения, что хорошо согласуется с результатами [16, 19]. На рис. 2 приведены расчетные зависимости для $P(J)$ от величины нормированной интенсивности, полученные для значений контраста $C=0,85$ и $0,4$ (кривые 1 и 2 соответственно). Полученные зависимости иллюстрируют наблюдаемое на практике выравнивание интенсивности в спекл-картине с увеличением длины МВС.

Для экспериментальной проверки полученных результатов в работе использовалась установка, схема которой приведена на рис. 3. В качестве источника излучения использовался Не-Не лазер 1 ($L_1=0,4$ м), генерирующий четыре аксиальные моды. Излучение лазера микрообъективом 2 вводилось в МВС 3. Призма Грана 4 использовалась для выделения излучения с одной поляризацией. При помощи объектива 5 и микроскопа 6 увеличенное изображение выходного торца МВС проецировалось на видикон телевизионной камеры 7. Это позволяло наблюдать спекл-картины непосредственно на экране видеоконтрольного устройства 9 и измерять интенсивность излучения в выбранной точке изображения торца, для чего использовался блок обработки изображения 8. Для получения статистического набора измерений интенсивности МВС подвергалось кратковременным деформациям. Это приводило к перестройке спекл-картины излучения из МВС без внесения дополнительных потерь мощности. Статистическая обработка данных производилась с использованием мини-ЭВМ 10. В работе применялись квартцевые МВС со ступенчатым профилем показателя преломления, числовой апертурой $NA=0,21$ и диаметром сердцевины 50 мкм.

На рис. 1 точками нанесены измеренные значения контраста спекл-картины, полученные для разных длин МВС. Во всех случаях условия ввода излучения в МВС оставались неизменными. Данные эксперимента в пределах доверительной вероятности согласуются с результатами расчетов.

Рассчитанные на основании опытных данных значения $P(J)$ для МВС с длинами $L=1$ и 800 м, что соответствовало значениям контраста $C=0,85$ и $0,4$ показаны на рис. 2. Как видно, в этом случае также имеется хорошее согласие с результатами произведенных расчетов.

Таким образом, результаты исследований показали, что статистические параметры спекл-картины излучения в МВС зависят от дисперсионных свойств световода и его длины, а также от когерентности используемого излучения. Полученные данные позволяют при разработке интерференционных датчиков подобрать оптимальную длину МВС, при которой уменьшение чувствительности за счет снижения контраста спекл-картины будет скомпенсировано увеличением длины световода. Приведенные выражения с учетом требований к чувствительности и динамическому диапазону датчика, характеристикам МВС и источника излучения открывают возможность для правильного выбора динамического диапазона материала пространственного фильтра. Наряду с этим результаты исследований позволяют предложить простую методику исследования дисперсионных свойств МВС по измерению контраста спекл-картины.

ЛИТЕРАТУРА

- Бусурин В. И., Семенов А. С., Удалов Н. П. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 5. С. 901.
- Волоконная оптика и приборостроение / Под ред. М. М. Бутусова. — Л.: Машиностроение, 1987. — 328 с.

3. Мировицкий Д. И., Будагян Н. Ф., Дубровин В. Ф. Микроволновая оптика и голография. — М.: Наука, 1983. — 320 с.
4. Кульчин Ю. Н., Обух В. Ф. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 3. С. 650.
5. Котов О. И., Николаев В. Н. и др. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. № 22. С. 1375.
6. Кульчин Ю. Н., Обух В. Ф. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 8. С. 1675.
7. Быковский Ю. А., Витрик О. Б. и др. // Квантовая электроника. 1990. Т. 17. № 1. С. 95.
8. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. № 3. С. 763.
9. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. № 7. С. 1475.
10. Нефедов И. Е., Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 1. С. 34.
11. Ривлин Л. А., Семенов А. Т., Шелков М. В. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 1. С. 201.
12. Ахманов А. С., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
13. Гудмен Дж. Статистическая оптика. — М.: Мир, 1988. — 528 с.
14. Дедловский М. М., Коршунов И. П., Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 3. С. 482.
15. Дерюгин И. А., Абдуллаев С. С., Мирзаев А. Т. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. № 10. С. 2173.
16. Абдуллаев С. С., Ахмеджиев Т., Мирзаев А. Т. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 1. С. 157.
17. Волков И. С., Воляр А. В. и др. // ЖПС. 1987. Т. 47. № 3. С. 393.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974. — 831 с.
19. Crosier B., Daino B., DiPorto P. // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. № 11. P. 1312.

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
26 июня 1989 г.

УДК 621.372.412

СПЕКТР РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ НЕОДНОРОДНОГО ДИСКОВОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Ю. Ф. Филиппов, С. Н. Харьковский

Дисковые диэлектрические резонаторы (ДДР), возбуждаемые в режиме азимутальных колебаний высшего порядка, обладают высокой добродетельностью, что определяет перспективу их применения в СВЧ и КВЧ диапазонах [1–4]. При этом возникают проблемы, связанные с неоднородностью материала, из которого изготовлен резонатор, с необходимостью введения локальных элементов в поле ДДР и т. д. [2, 4–6]. Под их влиянием возникает расщепление и взаимодействие колебаний в ДДР, изменение спектра его резонансных частот и добродетостей, что необходимо учитывать, а в ряде случаев можно и использовать. В данной работе теоретически и экспериментально исследуется спектр ДДР с локальными диэлектрическими и полупроводниковыми неоднородностями.

Рассмотрим сначала однородный резонатор. Полный спектр его состоит из дискретного (резонансные колебания) и непрерывного (волны излучения) $EH(H_z \gg E_z)$ - и $HE(E_z \gg H_z)$ -спектров [7]. Поля собственных колебаний удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_V [\epsilon E_p^*(r) E_q(r) + H_p^*(r) H_q(r)] dV = 2N_p \delta_{pq} \quad (1)$$

и ортогональны волнам излучения

$$\int_V [\epsilon E_p^*(r) E(\tau, r) + H_p^*(r) H(\tau, r)] dV = 0. \quad (2)$$

Интегрирование в этих соотношениях проводится по бесконечному объему, $\epsilon = \epsilon_g$ при $r < r_0$, $0 < z < L$; $\epsilon = 1$ при $r > r_0$, $0 > z > L$; L — высота резонатора, ϵ_g — диэлектрическая проницаемость материала, из которого изготовлен резонатор; $E_p(r)$, $H_p(r)$ и $E(\tau, r)$, $H(\tau, r)$ — соответственно поля дискретного и непрерывного спектров,

$$N_p = \int_V \epsilon |E_p(r)|^2 dV = \int_V |H_p(r)|^2 dV$$

— норма p -го колебания. Под p подразумевается тройной индекс, характеризующий, соответственно, число вариаций поля по азимутальной координате, радиусу и высоте ДДР. Радиальная компонента волнового вектора внутри резонатора

$$x_g = (\epsilon_g k_p^2 - k_{zp}^2)^{1/2} \quad (3)$$

определяется решениями следующего характеристического уравнения, полученного при удовлетворении граничным условиям на его боковой поверхности ($r=r_0$) [8]:

$$(\alpha_g - \alpha_0)(\epsilon_g \alpha_g - \alpha_0) = [(\epsilon_g - 1)n k_{zp} k_p r_0^2 / x_0^2 x_g^2]^2. \quad (4)$$

Здесь

$$\alpha_g = \frac{j'_n(x_g)}{x_g J_n(x_g)}, \quad \alpha_0 = \frac{H_n^{(1)*}(x_0)}{x_0 H_n^{(1)}(x_0)}, \quad x_j = x_j r_0,$$

$x_0 = \sqrt{k_p^2 - k_{zp}^2}$, $k_p = \omega_p/c$, $J_n(x)$ и $H_n^{(1)}(x)$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода, штрих — дифференцирование по аргументу, k_{zp} — осевая компонента волнового вектора.

Существуют различные модели для определения k_{zp} , носящие приближенный характер [3]. Мы использовали данные экспериментальных измерений резонансных частот ω_p и азимутального индекса n однородного ДДР. Эти данные и соотношения (3), (4) позволили не только точно определить k_{zp} , но и исследовать его частотную зависимость.

Исследование спектра неоднородного резонатора проведем при помощи интегрального соотношения

$$(\omega - \omega_p) \int_V [\epsilon E_p^*(r) E(r) + H_p^*(r) H(r)] dV = \omega \int_V (\epsilon - \tilde{\epsilon}) E_p^*(r) E(r) dV, \quad (5)$$

полученного из системы уравнений Максвелла и условий непрерывности тангенциальных компонент электромагнитных полей на поверхности ДДР. Здесь $\tilde{\epsilon} = \epsilon(r, \varphi)$ при $r < r_0$, $0 < z < L$; $\tilde{\epsilon} = 1$ при $r > r_0$, $0 > z > L$; ω и $E(r)$, $H(r)$ — частота и поля неоднородного ДДР с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(r, \varphi)$. В отличие от аналогичного соотношения для закрытых резонаторов [9] интегрирование в (5) проводится по бесконечному объему.

Поля неоднородного резонатора $E(r)$ и $H(r)$ представим в виде разложения по EH -либо HE -резонансным модам и волнам излучения

$$H(r) = \sum \alpha_p H(r) + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau) H(\tau, r) d\tau, \quad E(r) = \sum \alpha_p E(r) + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau) E(\tau, r) d\tau. \quad (6)$$

При этом мы не рассматриваем возможное взаимодействие между EH - и HE -типами колебаний, проявляющееся в точках совпадения частот этих колебаний. Подставляя (6) в (5) и используя условия ортогональности (1), (2), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно α_p :

$$\Sigma[(\omega - \omega_p)\delta_{pq} - \omega \Lambda_{pq}] \alpha_p = 0. \quad (7)$$

Здесь $\Lambda_{pq} = \int (\epsilon - \tilde{\epsilon}) E_p^* E_q dV / N_p$ описывает влияние неоднородностей на частоты резонатора и взаимодействие различных типов колебаний одной поляризации (EH либо HE), p — номер строки, q — номер столбца. Условием существования нетривиальных решений системы (5) является обращение в нуль определителя

$$D = \det \Delta = 0 \quad (8)$$

матрицы

$$\Delta = \|(\omega - \omega_p)\delta_{pq} - \omega \Lambda_{pq}\|.$$

Дисперсионное уравнение (8) определяет частоты неоднородного резонатора.

Исследуем его с неоднородностями в виде набора N диэлектрических вставок, помещенных в разрезы по радиусам с углами раскрыва $2\delta_s$. При малых δ_s взаимодействием мод, пропорциональных квадрату угла раскрыва, в первом приближении можно пренебречь. Дисперсионное уравнение для EH -колебаний при этом приводится к виду

$$\frac{\omega \pm -\omega_p}{\omega \pm} = \sum_{s=1}^N \frac{\epsilon_g - \epsilon_s(\omega)}{2\pi\epsilon_g} \delta_s (f_g^{\pm} - \beta f_0^{\pm})^{-1} \left(f_g^{\pm} \pm f \frac{\sin 2\pi\delta_s}{2\pi\delta_s} \cos n\varphi_s \right), \quad (9)$$

где $\varepsilon_s(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость материала вставок,

$$f^\pm = (1 + \varepsilon_s \eta^2) a_j + 2(1 + b^2) a_j x_j^\pm \pm 4nb, \quad \beta = x_g^\pm / \varepsilon_g x_0^\pm,$$

$$f = (1 - \varepsilon_g \eta^2) a_g + 2(1 - b^2) \{ \alpha_g x_g^2 + n[\alpha_g x_g^2 J_n(x_g) - J'_n(x_g)] / J_n(x_g) \},$$

$$a_j = x_j^2 (1 + \alpha_j x_j^\pm) - n^2, \quad b = \eta k_{zp} / k_p, \quad \eta = \frac{n k_{zp} k_p^2}{r_0} \frac{\varepsilon_g - 1}{x_g^2 x_0^2} (\alpha_0 - \varepsilon_g \alpha_g)^{-1}.$$

Точка — дифференцирование по индексу, φ_s — азимутальный угол середины s -й вставки, верхний знак относится к четной зависимости поля от φ ($H_z \sim \cos n\varphi$), нижний — к нечетной ($H_z \sim \sin n\varphi$).

Видно, что влияние неоднородности приводит к эффекту расщепления колебаний, которые в однородном ДДР являются двукратно вырожденными. Этот специфический эффект может возникнуть под влиянием возбуждающего диэлектрического волновода [2] в анизотропных ДДР [4], но в этих случаях он пренебрежимо мал. При рассматриваемых неоднородностях из (9) следует, что величина расщепления по частоте зависит от количества и взаимного расположения разрезов со вставками, может управляться изменением $\varepsilon_s(\omega)$, например, в случае полупроводниковых вставок. В частности, для двух разрезов с одинаковыми углами раскрытия ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$), разнесенных друг от друга на угол θ , имеем

$$\frac{\omega^\pm - \omega_p}{\omega^\pm} = \frac{(\varepsilon_g - 1)\delta}{\pi\varepsilon_g} (f_g^\pm - \beta f_0^\pm)^{-1} \left(f_g^\pm \pm f \cos \theta \frac{\sin 2n\delta}{2n\delta} \right). \quad (10)$$

Из этого соотношения замечаем отсутствие расщепления (вырождение) при $\theta = \pi/2$ для колебаний с нечетными азимутальными индексами ($n = 2l+1$). Это объясняется одинаковым, но раздельным влиянием вставок на противофазные колебания ДДР. Из (10) следует также, что при $\theta = \pi/4$ такая компенсация расщепления повторяется через четыре резонансные частоты однородного резонатора. Аналогичные эффекты должны наблюдаться и для НЕ-колебаний. Влияние неоднородности приводит также к появлению слабого излучения в свободное пространство. Его особенности могут быть также исследованы.

Экспериментальные исследования были проведены в диапазоне частот 39,00—45,00 ГГц. В ДДР, выполненных из фторопластика-4, посредством распределенной связи лиэлектрическим волноводом возбуждались колебания EH_{n11} с $n = 40, 41, \dots, 44$. Неоднородности были выполнены в виде радиальных разрезов шириной 0,5—0,6 мм вдоль радиусов ДДР. На рис. 1 (см. на вклейке) показаны отношения разности частот $\Delta f_{1,2}$ расщепившихся колебаний неоднородного ДДР к соответствующим резонансным частотам f_n однородного ДДР для одного (точки 1) и двух (точки 2) разрезов, разнесенных по периметру РДДР на угол $\theta = \pi/2$. Здесь же приведены результаты численного счета по формуле (10) для данных параметров ДДР и соответствующих f_n и n . Для наглядности расчетные точки соединены линиями. Для одного разреза имеется расщепление всех колебаний по частоте, величина которого монотонно увеличивается с ростом n . По абсолютной величине расщепление не меньше ширины резонансов и поэтому хорошо проявляется. Для двух разрезов, проведенных под углом $\theta = \pi/2$, величины расщепления по частоте увеличиваются в два раза на частотах с четными n , а на частотах с нечетными n восстанавливается вырождение.

Полученные результаты представляют интерес при сопряжении ДДР с диэлектрическими или полупроводниковыми элементами для получения генерации колебаний, обеспечения перестройки частот при помощи электрических либо магнитных полей, для измерения свойств материалов и т. д.

Авторы благодарны А. Я. Кириченко за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- Багдасаров Х. С., Брагинский В. Б. и др. // УФН. 1985. Т. 145. № 1. С. 151.
- Вязатышев В. А., Калиничев В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26 № 4. С. 475.
- Иванов Е. Н., Калиничев В. И. // Радиотехника. 1988. № 10. С. 86.
- Егоров В. И., Мальцева И. Н. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1984. Вып. 2. С. 36.
- Лауринович А. К., Малакаускас П. З., Маркевичюс Р. В. // Тезисы докл. Всесоюзной конференции Проектирование радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах. — Тбилиси, 1988. С. 40.
- Кириченко А. Я., Соловьев В. А., Харьковский С. Н. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. Т. 31. № 7. С. 74.
- Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы — М.: Сов. радио, 1966. — 475 с.
- Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957. — 580 с.

УДК 621.385.6

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С АЗИМУТАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАМЕДЛЕННОЙ ВОЛНОЙ

A. С. Шлапаковский

В настоящее время известны релятивистские черенковские генераторы, в которых рабочей модой является азимутально-несимметрическая волна [1]. С другой стороны, имеется возможность генерации целого семейства мод, различающихся азимутальным индексом, в комбинации с симметрической волной [2, 3]. Поэтому представляет интерес теоретический анализ, учитывающий несимметрию возбуждаемого поля.

В качестве первого этапа такого анализа естественно построить и исследовать самосогласованную систему нелинейных уравнений для релятивистской ЛБВ без учета высокочастотного пространственного заряда. Аналогичная задача для симметричного случая была решена еще в [4]. В нелинейной теории, однако, в отличие от линейной уравнения возбуждения замедляющей системы записываются для несимметрического и симметрического случаев по-разному. Динамика частиц теперь различна на разных азимутах, и плотность ВЧ тока зависит от азимутальной переменной, так что в уравнениях возбуждения появляется дополнительное интегрирование. Кроме того, в общем случае необходимо учитывать вырождение, т. е. записывать уравнения возбуждения отдельно для мод с различным направлением вращения поперечной структуры поля. В конечном итоге получается следующая нелинейная система:

$$\begin{aligned} \frac{dE_+}{dz} &= \frac{|E_0|^2}{N} \frac{I}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 d\theta_0 e^{i(\theta - l\varphi_0)}, \\ \frac{dE_-}{dz} &= \frac{|E_0|^2}{N} \frac{I}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 d\theta_0 e^{i(\theta + l\varphi_0)}, \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{\omega}{v} - k_0(\omega), \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{e}{mv} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \operatorname{Re} [E_+ e^{-i(\theta - l\varphi_0)} + E_- e^{-i(\theta + l\varphi_0)}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь z — продольная координата, φ_0 — азимутальная, E_{\pm} — амплитуды волн с различным направлением вращения структуры поля, $\theta = \omega t - k_0(\omega)z$ — фаза волны относительно электрона, v — скорость, I — ток пучка, ω — частота, $k_0(\omega)$ — волновое число, l — число азимутальных вариаций, N — норма волны с амплитудой поля в месте нахождения пучка E_0 .

Введем теперь безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\omega}{2\gamma^2 u} z, \quad \nu = 2\gamma^2 \left(1 - \frac{v}{u}\right), \\ \mathcal{E}_{\pm} &= -\frac{4ieE_{\pm}}{m\omega u}, \quad \delta = 2\gamma^2 \left(\frac{k_0 u}{\omega} - 1\right), \\ q &= -\frac{8eI\gamma^3}{m\omega^2} \frac{|E_0|^2}{N}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где u — равновесная скорость электронов, а также переменную $\varphi = l\varphi_0$. Заметим, что вследствие гармонической зависимости поля от азимутальной переменной и при отсутствии поперечных движений θ является периодической функцией φ_0 с периодом $2\pi/l$. Поэтому параметр l исчезает из системы уравнений, так что она принимает универсальный вид, не зависящий от числа азимутальных вариаций. Используя стандарт-

ные допущения $\gamma^2 \gg 1$ и $v \ll 2\gamma^2$, получаем окончательную систему в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_+}{d\zeta} &= \frac{q}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\theta_0 e^{i(\theta-\varphi)}, \\ \frac{d\mathcal{E}_-}{d\zeta} &= \frac{q}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\theta_0 e^{i(\theta+\varphi)}, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = v - \delta, \\ \frac{dv}{d\zeta} &= (1 + v)^{3/2} \operatorname{Re} [\mathcal{E}_+ e^{-i(\theta-\varphi)} + \mathcal{E}_- e^{-i(\theta+\varphi)}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для моноэнергетического, первоначально не модулированного пучка условия на входе в область взаимодействия записываются в виде

$$v(0) = 0, \theta(0) = \theta_0 \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, 2\pi).$$

Амплитуды же \mathcal{E}_+ , \mathcal{E}_- можно задавать на входе по-разному, моделируя тем самым взаимодействие с волнами, имеющими как фиксированную ($\mathcal{E}_+(0) = \mathcal{E}_-(0) = \mathcal{E}_0$), так и вращающуюся по азимуту структуру поля либо произвольную промежуточную структуру.

Наконец, кпд прибора определяется (при малом уровне входного сигнала) выражением

$$\eta = (|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)_{\max} / 8q. \quad (4)$$

Система нелинейных уравнений (3) исследовалась для 400 частиц, равномерно распределенных на входе по фазе и азимуту (20×20). Начальное значение амплитуд задавалось так, чтобы $\sqrt{|\mathcal{E}_+(0)|^2 + |\mathcal{E}_-(0)|^2} = 0,01$. На каждом шаге контролировался интеграл сохранения

$$\frac{d}{d\zeta} \left(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2 + \frac{2q}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\theta_0}{\sqrt{1+v}} \right) = 0.$$

Динамика группировки электронов в азимутально-несимметричном поле различна для «стоячей» и бегущей по азимуту волны. При фиксированной азимутальной структуре поля частицы испытывают расслоение по азимуту в сравнении с симметричным случаем. Это расслоение иллюстрируется фазовыми портретами (рис. 1 см. на вклейке; а) симметрична волна, б) волна, фиксированной структурой), а также семействами кривых $\theta(\zeta)$ для частиц из одного азимутального положения (рис. 2), полученными при $\delta=0$, $q=0,25$. Видно, что электроны с разных азимутов собираются в сгусток на разных длинах ζ (для частиц, находящихся в нуле поля, группировка вообще не происходит). Другая важная особенность состоит в том, что группировка идет вокруг двух значений фаз на интервале $(0, 2\pi)$, поскольку все электроны как бы разделены на две группы, так что каждая частица имеет свой «кантипод», который движется в таком же по величине поле, но с противоположным знаком.

В случае же вращающейся волны азимутального расслоения нет (за счет усреднения по времени) и сгустки на разных азимутах образуются на одной линии ζ . Однако фаза, в которой оказывается сгусток, зависит здесь от азимутального положения и поэтому фазовый портрет всего ансамбля выглядит однородным. Физически же это означает, что трубчатый пучок в этом случае разворачивается в спираль в отличие от разбиения на колыца при взаимодействии с симметричной волной или со «стоячей» по азимуту несимметричной (когда это разбиение из-за расслоения менее отчетливо).

Практическое значение имеют зависимости кпд прибора (4) от обобщенного параметра тока q . Соответствующие расчеты были проделаны для расстройки $\delta=0$ (максимум усиления) и $\delta=\delta_m=3(q/4)^{1/3}$ (максимум кпд). Результаты для моды с вращающейся поперечной структурой, естественно, совпадают с полученными ранее для симметричной моды: максимально достижимый кпд $\eta_m \approx 31\%$ при $\delta=\delta_m$ и $\eta_m \approx 18\%$ при $\delta=0$. В случае же моды с фиксированной структурой расслоение ведет к уменьшению кпд: здесь $\eta_m \approx 17\%$ при $\delta=\delta_m$ и $\eta_m \approx 13\%$ при $\delta=0$.

Промежуточный случай, когда $\mathcal{E}_+(\zeta) \neq \mathcal{E}_-(\zeta) \neq 0$, приводит к промежуточному результату. Кривые зависимостей $|\mathcal{E}_+(\zeta)|$, $|\mathcal{E}_-(\zeta)|$ и $\mathcal{E}(\zeta) = \sqrt{|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2}$ приведены для случая $\delta=0$, $q=0,5$ на рис. 3.

Автор выражает глубокую благодарность Г. П. Фоменко за поддержку и полезные обсуждения, а также Т. Г. Ташкун за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абубакиров Э. Б., Гинцбург В. А., Зайцев Н. И. и др. // Тезисы докл. VII Всесоюзного симпозиума по сильноточной электронике. — Томск, 1988. Ч. I. С. 188.
2. Вдовин В. А., Соколов С. А., Черепенин В. А. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 10. С. 2130.
3. Фоменко Г. П., Шлапаковский А. С. // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 2. С. 121.
4. Ковалев Н. Ф., Смогоронский В. А. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 6. С. 1305.

Научно-исследовательский
институт
ядерной физики
при Томском политехническом
институте

Поступила в редакцию
5 июля 1989 г.

УДК 535.3

О ПОРОГЕ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ХОЛЕСТЕРИКЕ С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ

Н. В. Шипов

Спектрально-угловая плотность излучения заряженных частиц в пространственно-неоднородных средах [1] возрастает в условиях брегговской дифракции излучения ($\lambda \sim p$) по сравнению со спектрально-угловой плотностью переходного излучения [4], а также резонансного переходного излучения [2-5], интенсивность которого пропорциональна θ^4 . Из-за отсутствия простых аналитических зависимостей в неколлинеарной геометрии брегговского отражения для произвольных частот и направлений излучения, а также произвольных значений энергии частицы получены завышенные оценки интегральной интенсивности рентгеновского излучения, а также узости его частотного распределения [2]. Возрастание интенсивности считалось отсутствующим также в аксиально-симметричной коллинеарной геометрии отражения строго назад [4]. Однако вычисление радиационных потерь и анализ граничных задач [2, 5] показали, что такое возрастание в δ^{-1} раз имеет место именно в простейшем случае аксиально-симметричной коллинеарной геометрии.

Угловые зависимости интенсивностей рентгеновского излучения найдены в [6] для неколлинеарной геометрии, а соответствующие спектральные распределения в [2, 9]. Отмечается несовпадение максимумов спектральных распределений излучения разных поляризаций [6], приводящее к расщеплению суммарного максимума [2, 9], которое, по-видимому, наблюдалось на эксперименте [7].

Что же касается дифракции излучения в средах с плавным изменением неоднородности [2, 9], то это явление наиболее полно теоретически и экспериментально изучено в акустооптических взаимодействиях в режиме раман-натовской дифракции (см., например, обзор [8]). Анализ раман-натовской дифракции проводится в многоволновом приближении связанных волн [8]. В случае же холестерических жидких кристаллов (ХЖК) с большим шагом спирали описание оптических и нелинейно-оптических свойств усложняется в диапазоне длин волн $\lambda \sim p\delta$ [9, 10], т. е. для поля излучения аналогично раман-натовской дифракции необходимо применять многоволновое приближение [10]. В частном случае не слишком большого периода ($p < \lambda/\delta$) поле искалось в трехволновом приближении [10]. Развитый в [11, 12] анализ оптической задачи в многоволновом приближении в холестерике с большим шагом спирали не описывает, однако, случай малых отклонений пучка света от оси, а также предел Могена $p > \lambda/\delta$. Вместе с тем хорошо известно, что при распространении волн вдоль спиральной оси холестерического жидкого кристалла существуют точные решения уравнений в двухволновом приближении.

Поскольку с приближением скорости частицы к пороговой угол раствора черенковского конуса становится малым, то становятся актуальными корректные выражения для эффективных показателей преломления при малых отклонениях направлений от оси ХЖК. Соответствующие выражения представляют также значительный интерес в нелинейной оптике ХЖК при расчете фазовых синхронизмов генерации оптических гармоник для холестерика с большим шагом спирали, где применение даже точных решений вдоль оси не дает практических аналитических результатов.

В настоящей статье на примере холестерического жидкого кристалла (ХЖК) исследуется спектральное распределение излучения заряженных частиц в средах с плавно изменяющимися (на длине волны) диэлектрическими свойствами. Скорость частицы предполагается близкой к пороговой $c_\phi = c/V_e$ для изучения Вавилова—Черенкова в изотропной фазе холестерика, где $V_e = (\epsilon_1 + \epsilon_\perp)/2$, $\epsilon_1, \epsilon_\perp$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости.

Пусть заряженная частица движется вдоль спиральной оси ХЖК. Из уравнений Максвелла приходим к следующей бесконечной системе связанных уравнений для фурье-амплитуд поля частицы:

$$\hat{(\epsilon_0 - k_n^2 c^2/\omega^2)E_n + \epsilon_1 E_{n-1} + \epsilon_{-1} E_{n+1}} + k_n(k_n E_n)c^2/\omega^2 = -\frac{iev\delta(\omega - k_0 v)\delta_{0n}}{2\pi^2 \omega}, \quad (1)$$

где $\delta_{0n} = 1$ для $n=0$, $\delta_{0n}=0$ для $n\neq 0$, $k_n = k_0 + n\tau$, $\tau = (4\pi/p)\zeta$,

$$\hat{\epsilon}_0 = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon}_1 = \hat{\epsilon}_{-1} = \frac{\delta\epsilon}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{2i\Phi}, \quad \delta = \frac{\epsilon_{||} - \epsilon_{\perp}}{\epsilon_{||} + \epsilon_{\perp}},$$

угол Φ задает ориентацию директора на входной поверхности $z=0$. Поскольку угол раствора конуса при $v \rightarrow c_f$ будет малой величиной, то можно искать решения системы (1) в виде суперпозиции по широким ортам: $E_n = E_n^+ n_+ + E_n^- n_-$, где $n_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \cos \theta \pm iy - z \sin \theta)/\sqrt{2}$, $\theta = \varphi - \zeta$. Отсюда приходим к двум системам второго порядка относительно трех амплитуд E_0 , $E_{\pm 1}$:

$$E_0^- (1 - k_0^2/\kappa^2 + i\bar{\epsilon}'/\bar{\epsilon}) + \delta E_{-1}^+ e^{2i\Phi} = iev\theta\delta(\omega - k_0 v)/2\pi^2\omega\bar{\epsilon}\sqrt{2}, \quad (2a)$$

$$E_0^- \delta e^{-2i\Phi} + (1 - k_{-1}^2/\kappa^2 + i\bar{\epsilon}'/\bar{\epsilon}) E_{-1}^+ = 0;$$

$$E_0^+ (1 - k_0^2/\kappa^2 + i\bar{\epsilon}'/\bar{\epsilon}) + \delta e^{-2i\Phi} E_1^- = iev\theta\delta(\omega - k_0 v)/2\sqrt{2}\pi^2\omega\bar{\epsilon},$$

(26)

$$E_0^+ \delta e^{-2i\Phi} + (1 - k_1^2/\kappa^2 + i\bar{\epsilon}'/\bar{\epsilon}) E_1^- = 0, \quad \bar{\epsilon}'' = \text{Im } \bar{\epsilon}, \quad \kappa = (\omega/c)\sqrt{\bar{\epsilon}}.$$

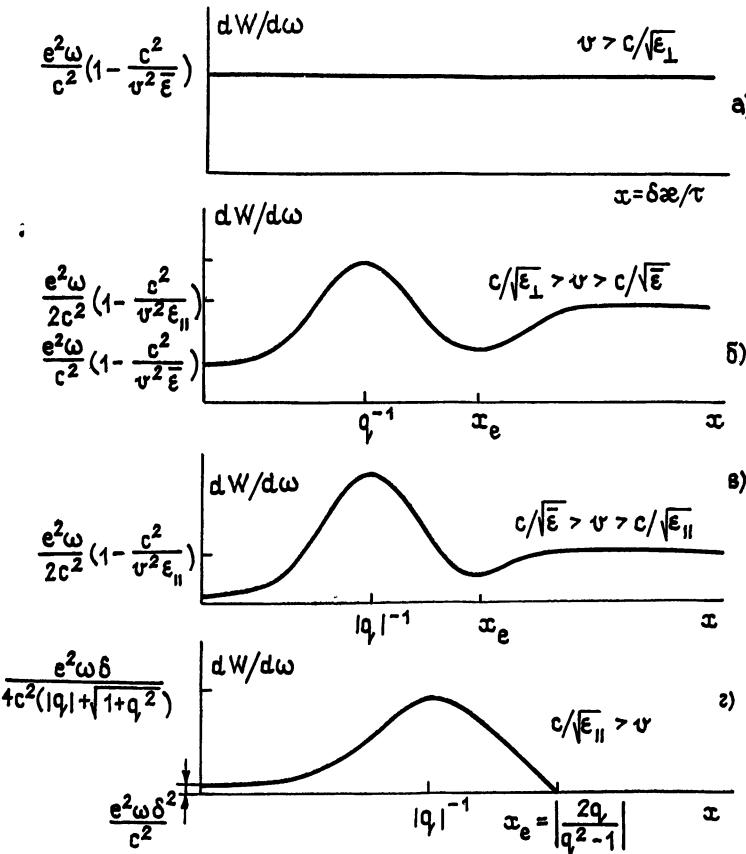


Рис. 1.

Все остальные амплитуды $E_n \propto (1 - \cos \theta) E_{0,\pm 1}$ ($|n| > 2$) оказываются малыми по сравнению с $E_{0,\pm 1}$, если угол θ отклонения k_0 от оси мал ($\theta \sim \gamma\theta$). Решения неод-

нородной системы (2а) или (2б) резко возрастают для направлений $\theta = (\eta\delta + \tau/\kappa \pm \sqrt{\delta^2 + \tau^2/\kappa^2})^{1/2}$, где $\eta = 2(v - c_\phi)/\delta c_\phi$. Вычисление радиационных потерь на единице длины пути частицы $W = e \int (E\sigma/v) d^3 k_0$ сводится поэтому к взятию вычетов в указанных направлениях. Отсюда для спектральной плотности излучения при $v > c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$ ($q > 1$, рис. 1а) получаем выражение, аналогичное формуле Тамма—Франка:

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{c^2} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{v^2 \epsilon} \right) = e^2 \omega \delta q / c^2. \quad (3а)$$

Хорошо известно, что в пределе больших частот $\delta\kappa \gg \tau$ (предел Могена) собственные волны холестерила близки к линейным поляризациям с показателями преломления $V_{\epsilon_{\parallel}} = V_{\epsilon}(1+\delta)$ и $V_{\epsilon_{\perp}} = V_{\epsilon}(1-\delta)$, а векторы поляризации каждой из волн поворачиваются вслед за директором при распространении вдоль оси z . Причем для первой волны вектор поля в каждой точке кристалла параллелен директору, а для второй волны — перпендикулярен директору. Для определенности считается $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$ ($\delta > 0$), $\kappa = \omega/\sqrt{\epsilon}/c$.

При уменьшении энергии частицы $c/V_{\epsilon_{\perp}} > v > c/V_{\epsilon_{\parallel}}$ ($0 < q < 1$) (рис. 1б) в пределе Могена для черенковского излучения разрешена только одна волна (ϵ_{\parallel}):

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} e^2 \omega \delta [3q + (x+q)/\sqrt{1+x^2}] / 4c^2, & x = \delta\kappa/\tau < \kappa_e \\ e^2 \omega \delta [q + x/\sqrt{1+x^2}] / 2c^2, & x \geq x_e = |2q/(q^2-1)| \end{cases}. \quad (3б)$$

Однако в пределе круговых поляризаций (малые частоты $\delta\kappa \ll \tau$), где эффективный показатель преломления равен $V_{\epsilon_{\parallel}}$, (3б) переходит в выражение, соответствующее однородной среде с показателем преломления $V_{\epsilon_{\parallel}}$.

При дальнейшем уменьшении энергии частицы $c/V_{\epsilon_{\parallel}} > v > c/V_{\epsilon_{\perp}}$ ($-1 < q < 0$), (рис. 1в) черенковское излучение в области малых частот становится невозможным:

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} e^2 \omega \delta (q + x/\sqrt{1+x^2}) / 2c^2, & x \geq x_e \\ e^2 \omega \delta (q + (x-q)/\sqrt{1+x^2}) / 4c^2, & x \leq x_e \end{cases}$$

Наконец, при $v < c/\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$ ($q < -1$, рис. 1г) черенковское излучение невозможно как в пределе Могена, так и в пределе циркулярных волн $\delta\kappa \ll \tau$, а спектральная плотность излучения описывается второй формулой (3в). Полученные выражения $dW/d\omega$ непосредственно описывают также и спектральное распределение, если изменения $\epsilon(\omega)$ вследствие частотной дисперсии в рассматриваемом диапазоне частот $\delta\kappa \sim \tau$ много меньше дифракционных изменений волновых векторов $\sim \delta\kappa$. Частотной дисперсией δ практически всегда можно пренебречь. Максимум зависимости $dW/d\omega$ при $v < c/\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$ достигается при значениях частоты (шага спирали), удовлетворяющих соотношению $\omega = tc_\phi^2/2(c_\phi - v)$, и в δ^{-1} раз превышает спектральную плотность структурного черенковского (параметрического черенковского) излучения $dW_e/d\omega \sim e^2 \omega \delta^2 / c^2$. Физическая причина возрастаания спектральной плотности излучения на частотах $\delta\kappa \sim \tau$ связана с дифракционными изменениями эффективных показателей преломления на величину порядка δ , а отношение интенсивностей излучения в черенковский конус k_0 и дифракционный конус k_{\perp} оказывается порядка единицы для указанных частот. С уменьшением частоты ($\delta\kappa \ll \tau$, рис. 1г) один из показателей преломления возрастает еще больше, но для указанной ветви дисперсионной поверхности резко изменяется отношение интенсивностей излучения в черенковский и дифракционный конусы: все излучение сосредоточено в дифракционный конус ($E_0/E_{-1} \ll 1$) и определяется тем самым интенсивность резонансного переходного (структурного черенковского) излучения пропорционально δ^2 .

В общем же случае пространственно-периодической среды анализ задачи об излучении должен проводиться в многоволновом приближении аналогично соответствующей задаче о раман-натовской дифракции света на звуке, так что будет иметь место, в принципе, бесконечный набор конусов излучения с волновыми векторами $k_n = -k_0 + n\tau$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Вследствие анизотропных и поляризационных особенностей холестерила многоволновая задача свелась к двухволновой. Можно ожидать, что возрастание интенсивности излучения в общем случае периодической среды будет более слабым, чем, например, в условиях раман-натовской дифракции, где вследствие конечной угловой расходимости пучка звука волновые векторы $k_n = |k_0 + \tau_n|$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, практически совпадают с волновым вектором $\kappa = \omega/\sqrt{\epsilon}/c$ в отсутствие звука, что и обуславливает интенсивную дифракцию излучения в n -конус. В случае же холестерила интенсивность излучения из-за поляризационных ограничений распределяется только между двумя конусами, что определяет немалые значения интенсивности излучения в каждой из двух конусов. Последовательное рассмотрение задачи об излучении

в многоволновом приближении в общем случае периодической среды будет изложено в отдельной публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Цитович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.
2. Буц В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 996.
3. Беляков В. А., Шипов Н. В. Тезисы докладов XIV Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. — М.: Гос. ун-т, 1984. С. 85.
4. Беляков В. А., Шипов Н. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. Вып. 5. С. 1547.
5. Шипов Н. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 1043.
6. Гегансчик И. Д., Ivashin A. V. // J. Phys. 1985. V. 46. № 11. P. 1981.
7. Адищев Ю. Н., Мун В. В., Углов С. Р. Тезисы докладов XVII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. — М.: Гос. ун-т, 1987. С. 74.
8. Гуляев Ю. В., Проклов В. В., Шкердин Г. Н // УФН. 1978. Т. 124. Вып. 1. С. 61.
9. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 257.
10. Шипов Н. В., Беляков В. А. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 1. С. 205
11. Осадчий С. М. // Кристаллография. 1984. Т. 29. Вып. 5. С. 976.
12. Коштария Д. Г., Осадчий С. М., Чилая Г. С. // Кристаллография. 1985. Т. 30. Вып. 4. С. 755.

Поступила в редакцию
11 мая 1987 г.,
в окончательном варианте
1 марта 1991 г.

Аннотации депонированных статей

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДИКАТРИС РАССЕЯНИЯ УГОЛКОВЫХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ В ФОРМЕ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ ($\pi/2$, $\pi/2$, π/s , s —ЧЕТНОЕ)

С. В. Процко, А. Д. Титов

(Окончание)

Зеркальная симметрия пространства предметов и изображений в УО приводит к тому, что пучок, выходящий из отражателя, распространяется обратно падающему на таком же расстоянии от центрального пучка (пучка, проходящего через вершину УО). Анализ траекторий распространения и условий отражения падающего излучения показывает, что поляризационное состояние рассеянного поля, создаваемого отражателями рассматриваемого семейства, будет таким же как и при отражении от плоской идеально проводящей пластины, независимо от параметра s и способа переотражения. Это приводит к синфазности всех точек апертуры отражателей. Длина хода пучка в каждом отражателе равна удвоенному расстоянию по ходу центрального пучка до вершины отражателя. Определение границ секториальных площадок, через которые наблюдаются пространства изображений, сведено к нахождению координат точек на фронтальной грани отражателя, проходя через которые пучок распространяется данным способом переотражения. Для этих расчетов использован критерий наименьшего расстояния. Согласно ему пучок падает на ту грань отражателя, до которой у него из данной точки минимальное расстояние по направлению пучка. Границы секторов образуются линиями, совпадающими с проекциями боковых ребер УО и их множеств изображений в боковых гранях на фронтальную плоскость в направлении визирования.

Характеристики основных лепестков моностатических индикаторис рассеяния проанализированы для отражателей с гранями треугольной формы. В случае равных по длине боковых ребер отражателя получены аналитические выражения для ЭМР. Проведена оптимизация различных конструкций отражателей по эффективной поверхности рассеяния. Поиск оптимальных соотношений, при которых достигаются максимальные значения ЭПР при фиксированных по отдельности объеме отражателя, площади его фронтальной грани или площади поверхности его отражающих граней, осуществлялся минимизацией построенного функционала методом флексиблекс. Получены аналитические соотношения, определяющие диапазоны рабочих углов возвратного отражения. Для описания эффективности действия УО определены полуширины индикаторис по уровням 0,25; 0,5; 0,75 и соответствующие им значения величин пространственных углов возвратного отражения. Оценена эффективность действия отражателей при произвольном направлении визирования. Характеристики индикаторис рассеяния отражателей табулированы. Проведено сравнение с прямоугольным УО.

Таким образом, углковые отражатели рассмотренного семейства существенно расширяют элементную базу радиолокационных систем и могут быть использованы для решения более широкого круга задач по сравнению с прямоугольным углковым отражателем.

Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 5209-В90. Деп. 2 октября 1990 г.

К ст. И. А. Кравцова и др.

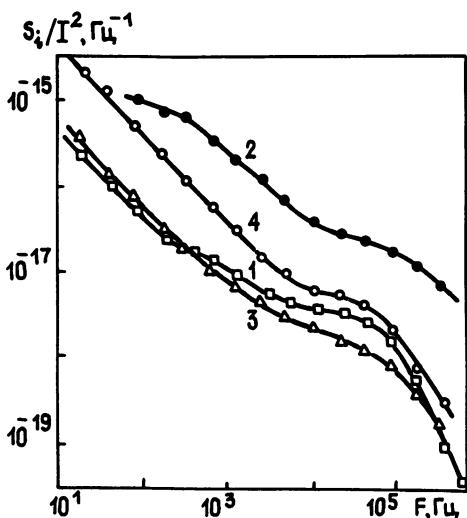


Рис. 1

К ст. Ю. Ф. Филипова и др.

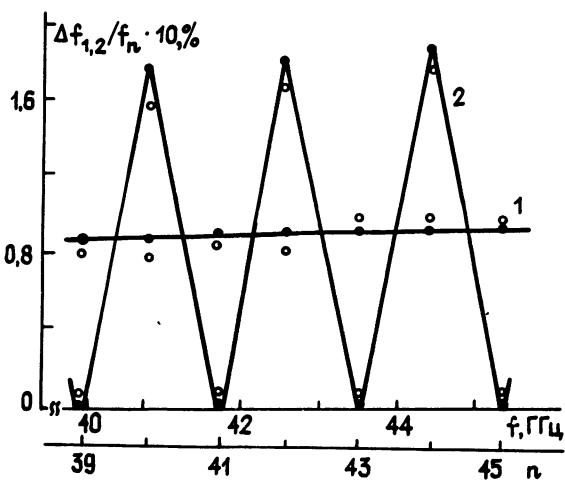


Рис. 1.

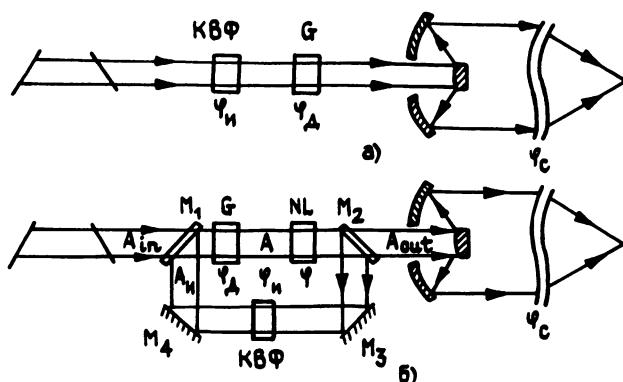


Рис. 1.

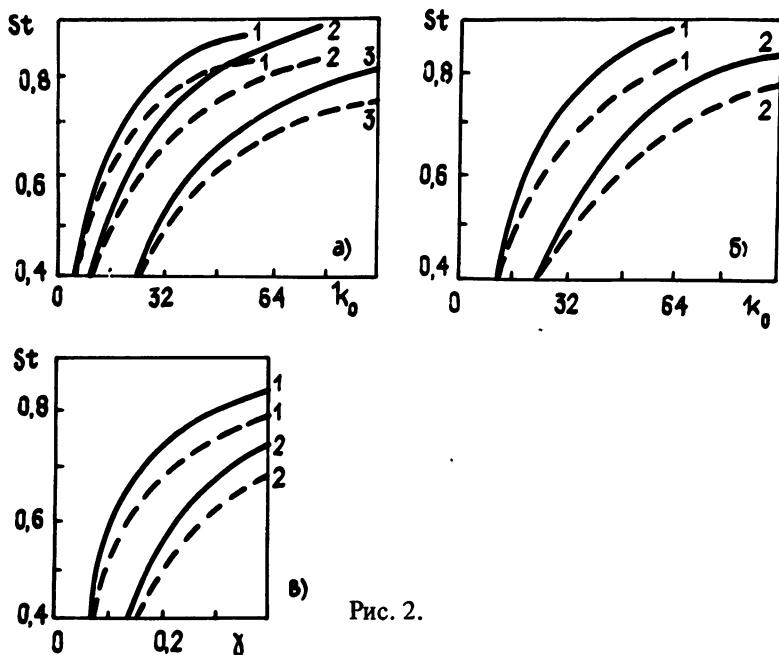


Рис. 2.

К ст. А. В. Кукушкина

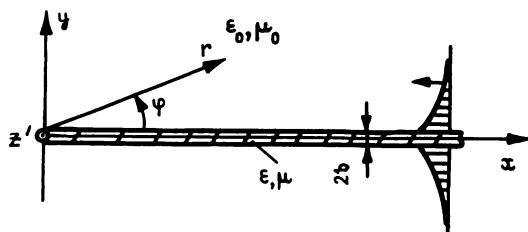


Рис. 1.

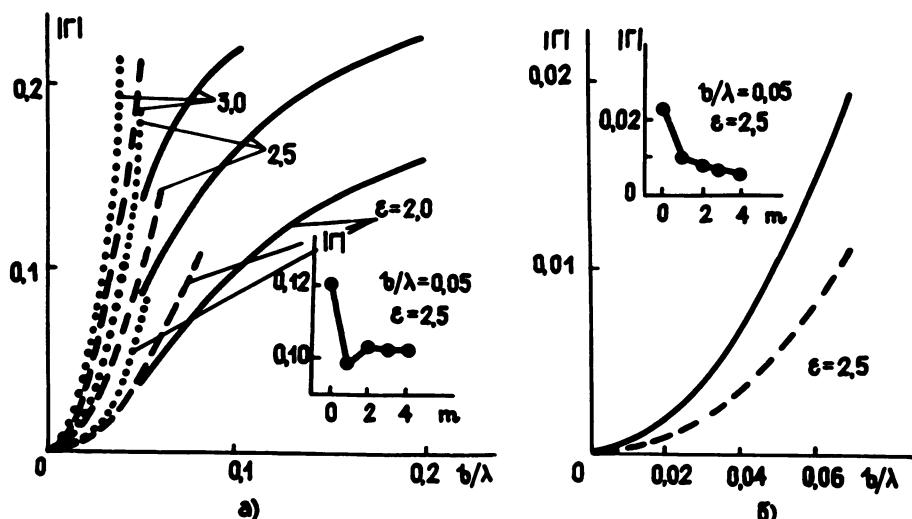


Рис. 2

К ст. В. Е. Запевалова и др.

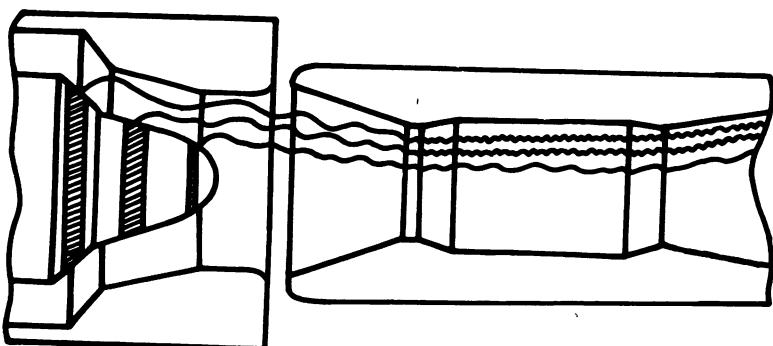


Рис. 1.

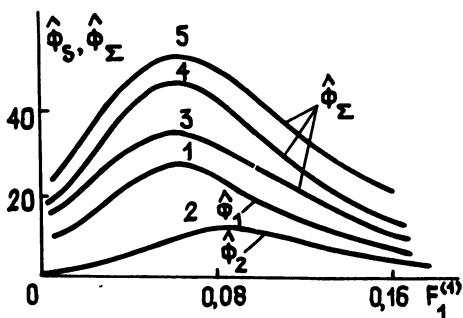


Рис. 2.

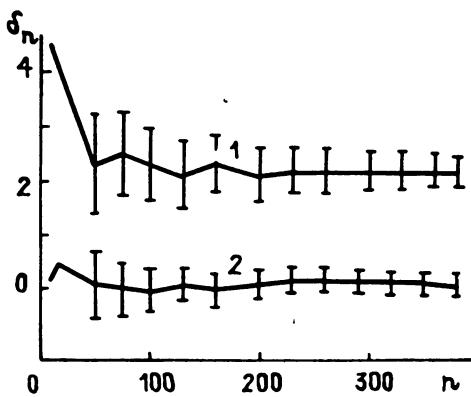


Рис. 1.

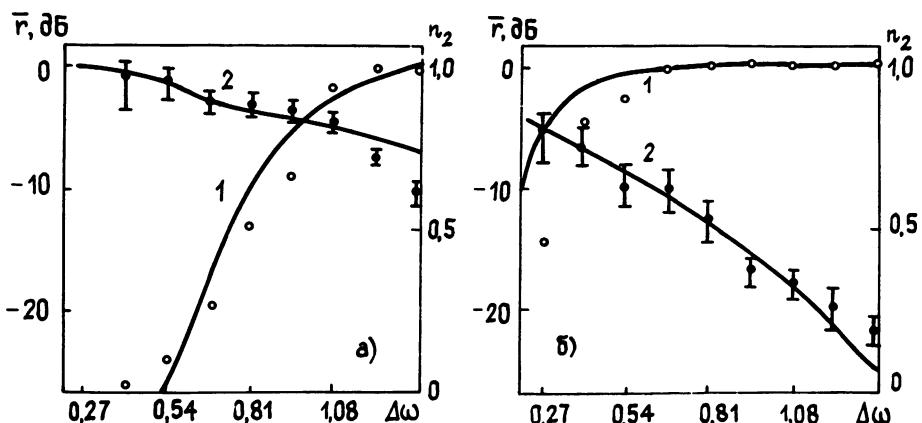


Рис. 2.

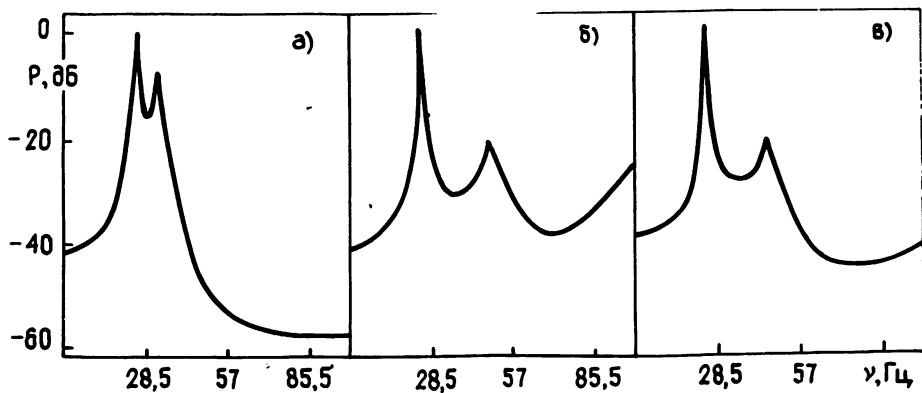


Рис. 3.

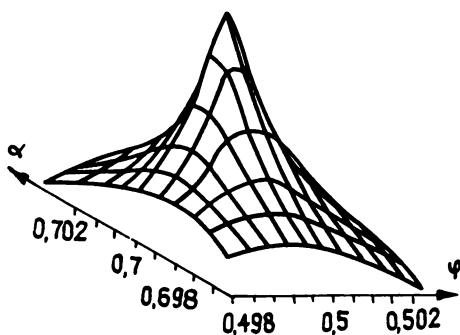


Рис. 4.

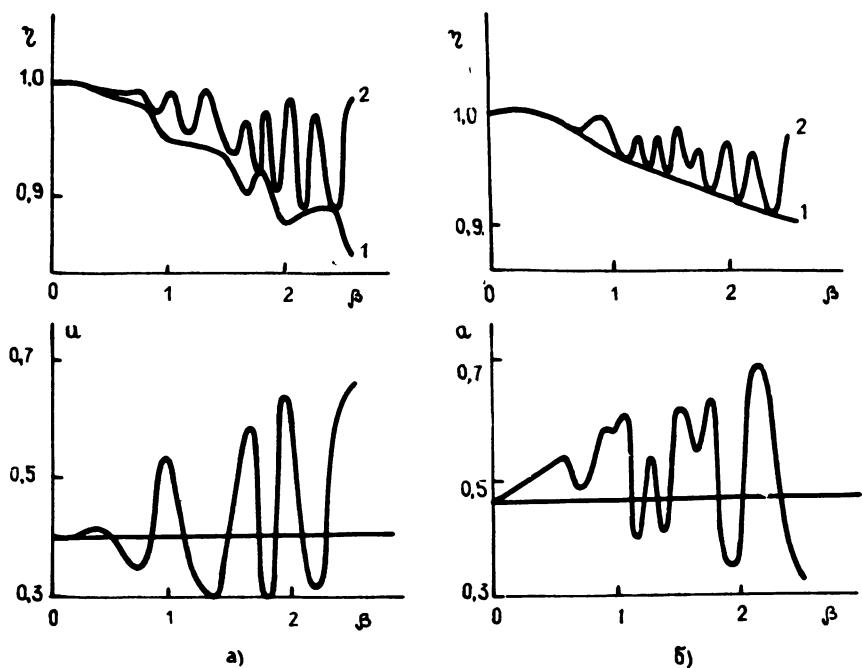


Рис. 1.

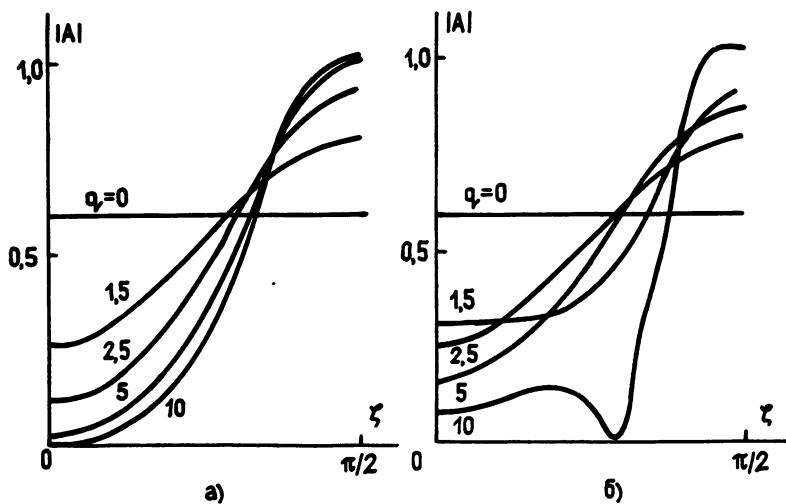


Рис. 2.

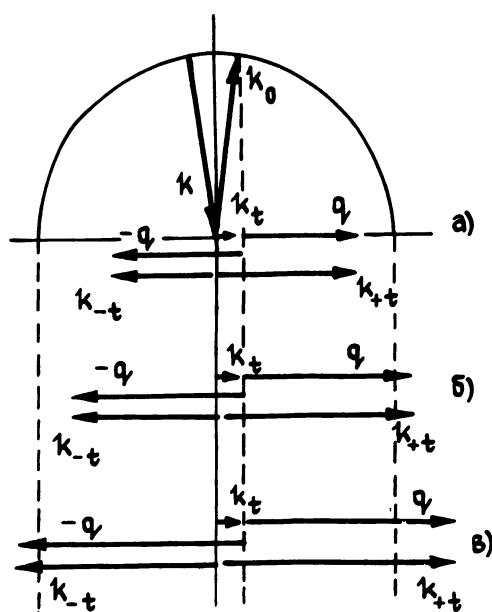


Рис. 1.

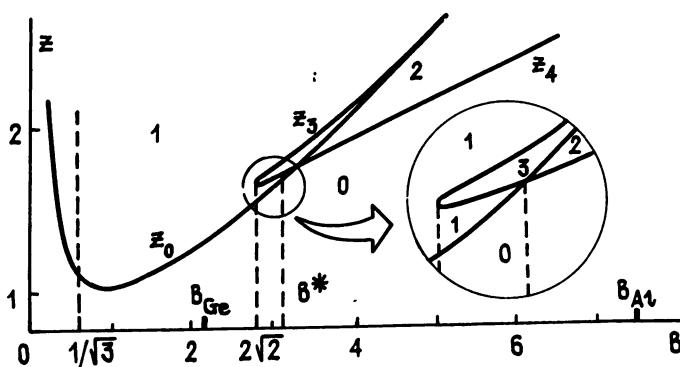


Рис. 3.

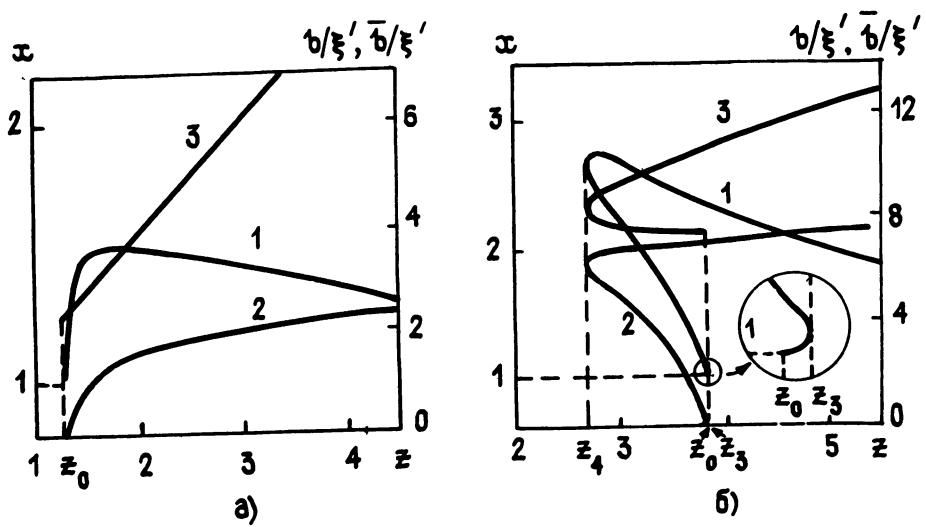


Рис. 4.

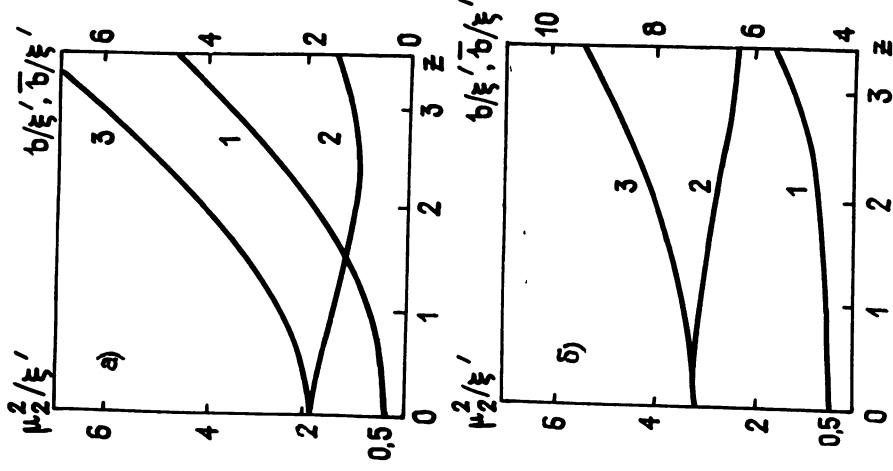


Рис. 2.

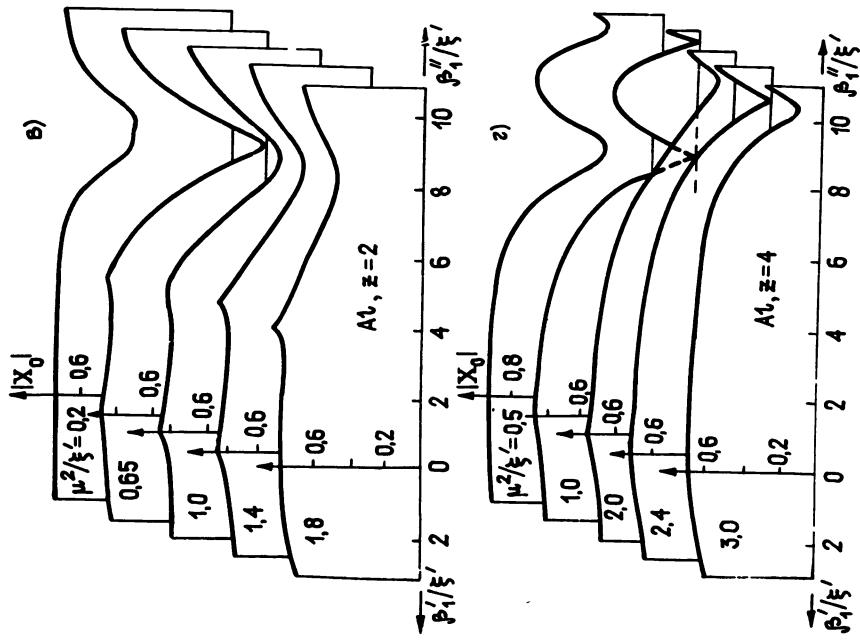
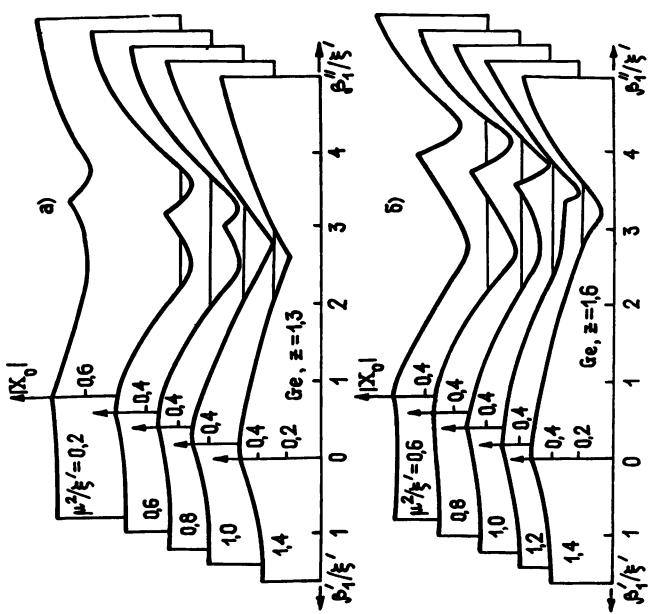


Рис. 5.



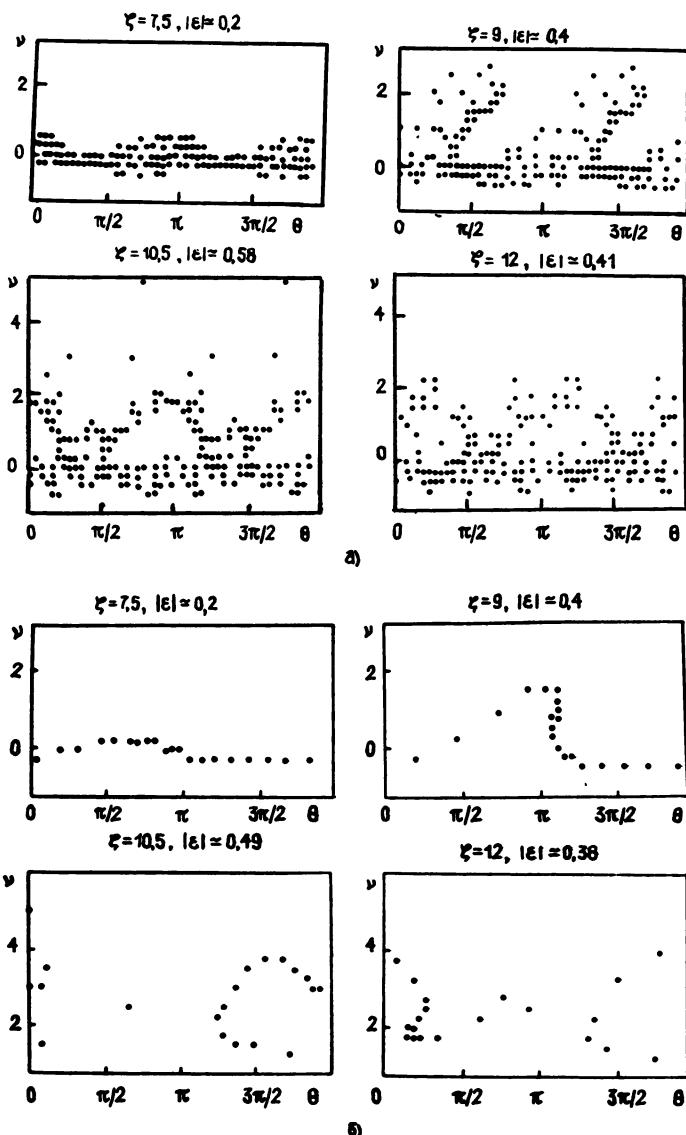


Рис. 1.

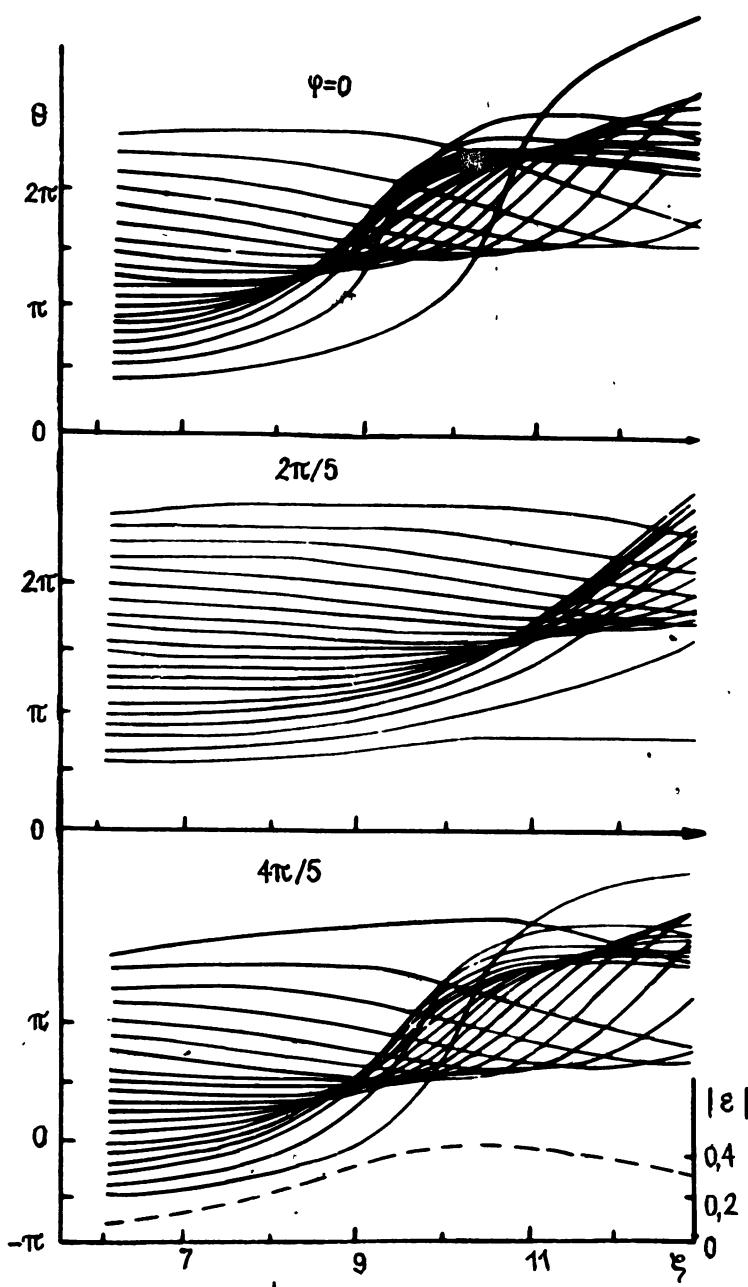


Рис. 2.

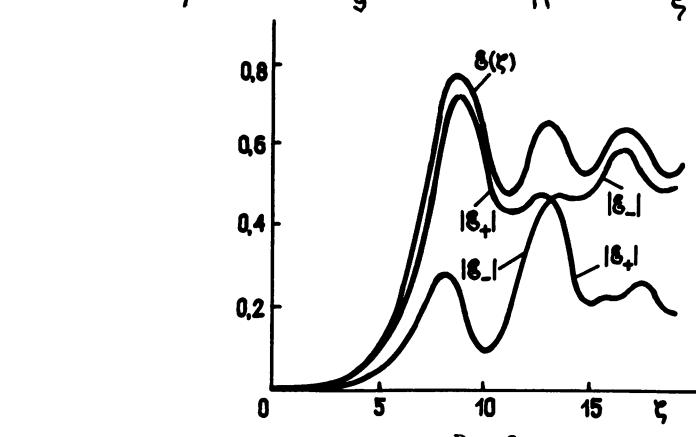


Рис. 3.

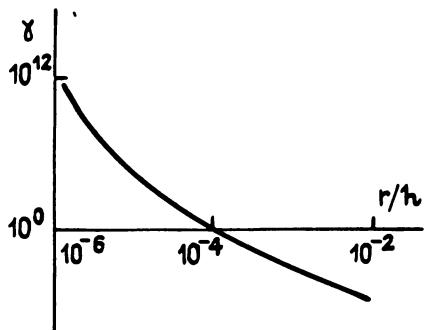
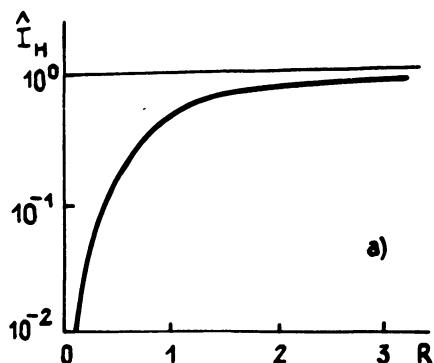


Рис. 1.



a)

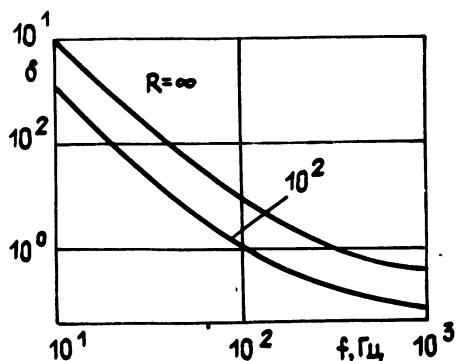
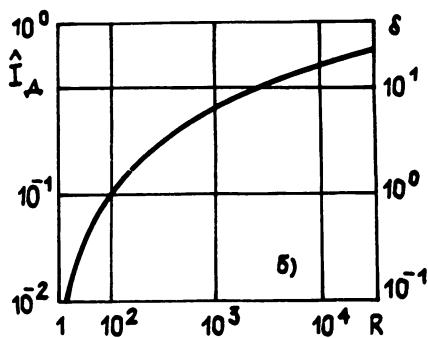


Рис. 3.



б)

Рис. 2.

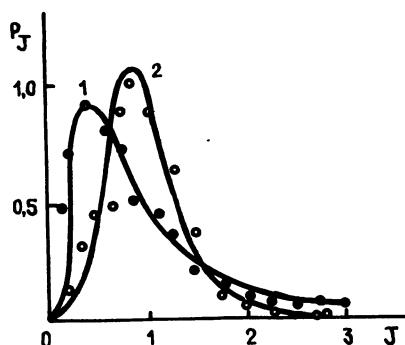
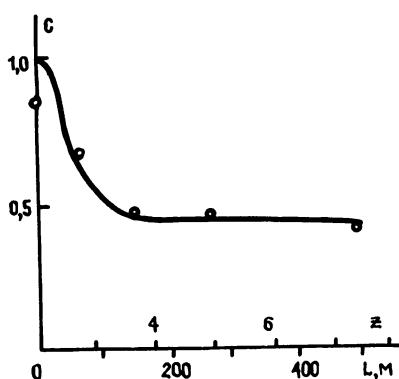


Рис. 1,2.

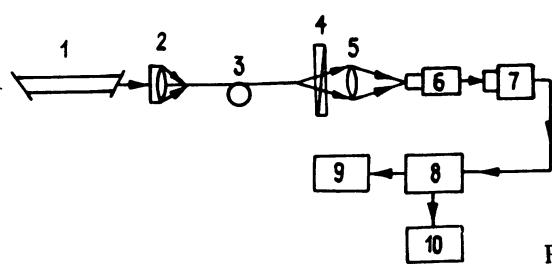


Рис. 3.

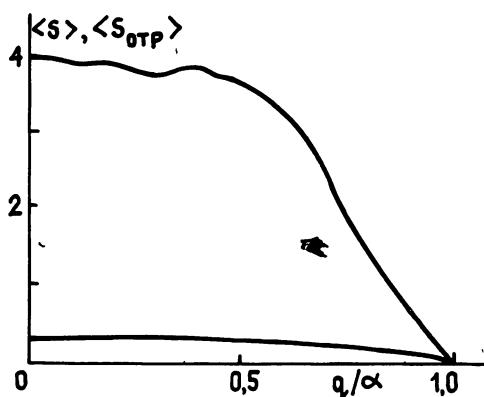


Рис. 1

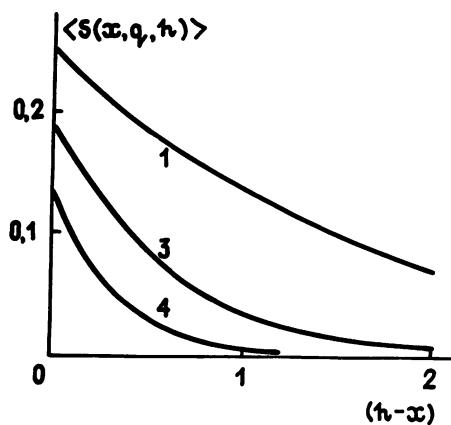


Рис. 2.

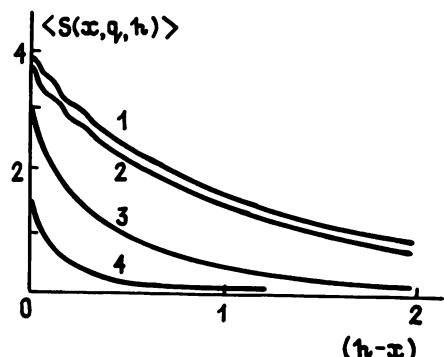


Рис. 3.

К ст. В. А. Казакова и др.

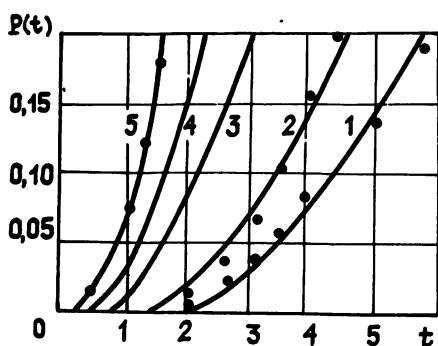


Рис. 1.

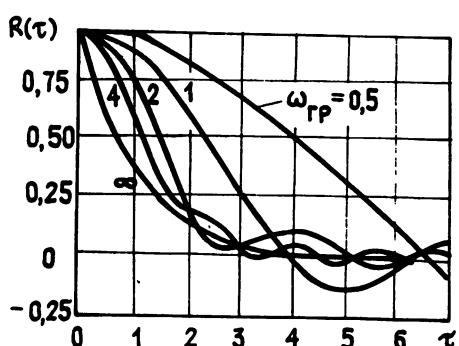


Рис. 2.

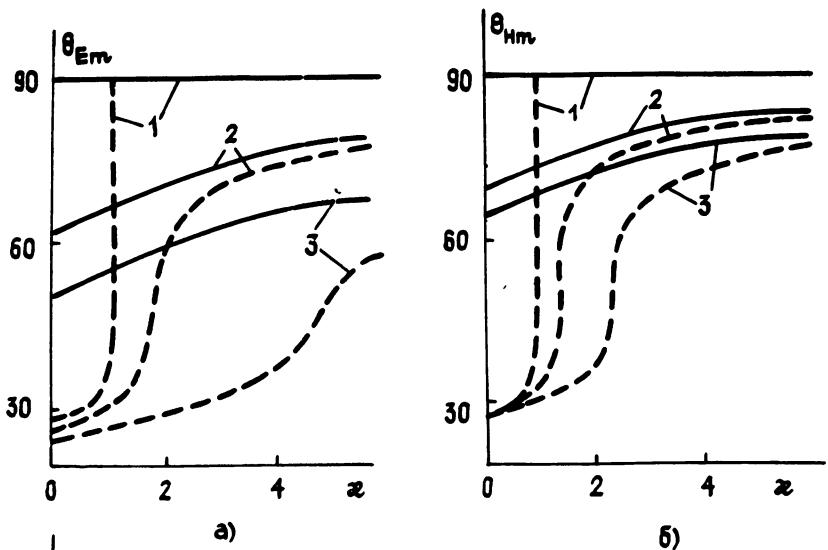


Рис. 1.

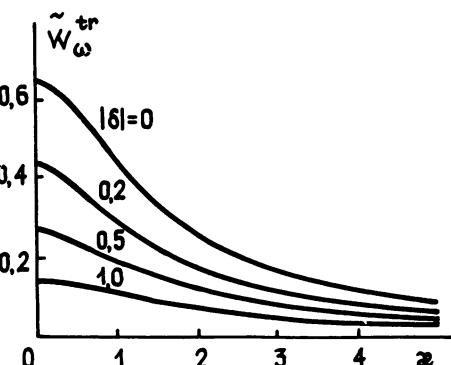


Рис. 2.

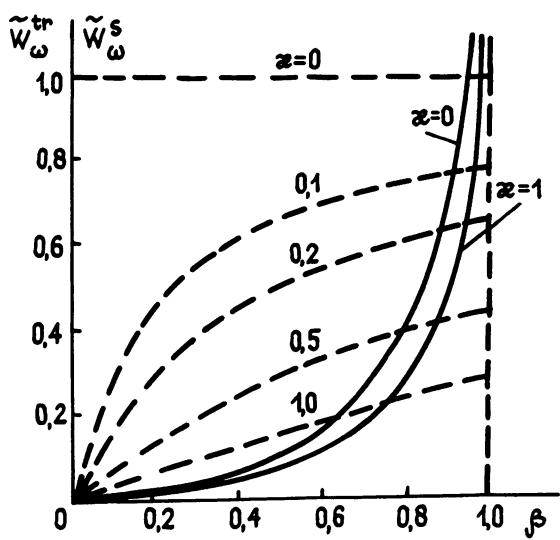


Рис. 3.