

ГОСКОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений  
РАДИОФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С АПРЕЛЯ 1958 г.

Том 33, № 10

Нижний Новгород

октябрь 1990

СОДЕРЖАНИЕ

Слуцкий А. Г., Якушкин И. Г. О временной корреляции интенсивности поля импульсной волны, рассеянной морской поверхностью . . . . .	1103
Островский М. А. Модель сигнала, отраженного от хаотически распределенных объектов при периодическом зондировании пространства . . . . .	1111
Моисеев Ш. Ш., Ткаченко В. И., Чигладзе Г. Г., Щербинина И. Б. Нелинейное взаимодействие электронного пучка с активной плазменной средой . . . . .	1116
Павлов В. А. О магнитозвуковом ударе . . . . .	1124
Исмагилов Ф. М., Кравцов Ю. А. Об эффективности фокусировки обращенного волнового поля в случайно-неоднородных средах . . . . .	1130
Кукушкин А. В. Обобщение зоммерфельдовской формы рассеянного поля на случай описания явлений дифракции на импедансной полуплоскости . . . . .	1138
Молотков Е. Л., Швецов В. П. Метод анализа сфокусированного электромагнитного поля . . . . .	1144
Самохин А. Б., Куликов С. П. Итерационный метод решения интегральных уравнений электродинамики неоднородных сред . . . . .	1150
Воробьев Г. С., Кириченко А. Я., Цвик А. И., Цвик Л. И. Экспериментальное определение редуцированной плазменной частоты электромагнитного потока	1162
Уралов А. М. О внешних винтовых модах уединенного тока в неограниченной плазме . . . . .	1168
Постников И. И. Собственные функции ангармонических колебаний $n=15, n=33, n=51$ линзовых пьезоэлементов . . . . .	1176
Жигальский Г. П., Карев А. В., Сиранашвили И. Ш., Андрушко А. Ф., Ковалев В. Д. Влияние структурных факторов на фликкерный шум в мелкодисперсных пленках хрома . . . . .	1181

Краткие сообщения и письма в редакцию

Агафонов М. И., Подвойская О. А. Восстановление двумерного распределения яркости с использованием двух вариантов алгоритма CLEAN при ограниченном числе проекций в радиоастрономии и томографии . . . . .	1185
Божокин С. В. Излучение, создаваемое электрическим пробоем воздуха . . . . .	1187
Жук Н. П., Шульга С. Н., Яровой А. Г. Обратное рассеяние волн шероховатой поверхностью однородного слоя на проводящей подложке . . . . .	1189
Коваленко С. А., Семин С. П. Дополнительное усиление в спектре широкополосных лазеров, обусловленное эффектом насыщения во внутристационарной среде . . . . .	1191
Запевалов В. Е., Малыгин С. А., Мануилов В. Н., Цимлинг Ш. Е. Катодная неустойчивость в мощных гиротронах . . . . .	1193
Арутюнян В. М., Мхитарян З. О. Низкочастотные шумы в кремни с примесью селена . . . . .	1195

Аннотации депонированных статей

Егоров Г. С., Казарин П. В., Степанов Н. С. Многоцелевая демонстрационная установка по колебательным процессам в линейных системах с одной и двумя степенями свободы . . . . .	1161
Белов М. Л., Орлов В. М. О пространственном распределении интенсивности в изображении на трассе с отражением от случайно-неровной поверхности	1167

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, | В. И. ГАПОНОВ | ,  
В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),  
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРА-  
ТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИ-  
КОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР,  
В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 31.07.90. Подписано к печати 15.02.91.  
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 8,4. Усл. кр.-отт. 10,08. Уч. изд. л. 10. Тираж 1210 экз.  
Заказ 1008. Цена 1 р. 80 к.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Лядова, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика». Телефон 36-01-71.

---

Нижегородская областная типография управления издательств, полиграфии  
и книжной торговли, 603116, Нижний Новгород, ул. Гордеевская, 7.

УДК 621.371.4

## О ВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ ВОЛНЫ, РАССЕЯННОЙ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

*А. Г. Слуцкий, И. Г. Якушин*

На основе приближения Кирхгофа рассмотрено отражение импульсной волны от поверхности моря. Получено выражение для временной корреляционной функции интенсивности рассеянного поля при падении, близком к нормальному. Проведены численные расчеты, иллюстрирующие связь флуктуаций интенсивности с параметрами крупномасштабных компонент спектра поверхности.

Для задач дистанционного зондирования представляет интерес вычисление статистических моментов полей импульсных сигналов, рассеянных морской поверхностью. Средняя интенсивность и корреляционная функция импульсного поля рассматривались, в частности, в работах [1-3], где показана связь этих величин с совместной одноточечной плотностью вероятностей возвышений и наклонов поверхности. Ниже на основе приближения Кирхгофа вычисляются дисперсия флуктуаций и временная корреляционная функция интенсивности рассеянного морской поверхностью немонохроматического волнового поля (в частности, короткого импульса) с учетом особенностей спектра волнения.

Использование метода Кирхгофа предполагает выполнение неравенства  $(kL)^{1/3} \cos \theta_0 \gg 1$ , где  $k$  — волновое число падающей волны,  $1/L$  — кривизна поверхности,  $\theta_0$  — угол падения. Это условие, всегда выполненное для света, нарушается в радиодиапазоне при длинах волн порядка сантиметров и более, что требует применения двухмасштабной модели поверхности. Если, однако, рассматривать близкие к нормали направления зондирования и узкие диаграммы направленности излучателей, то брэгговской компонентой рассеянного поля можно пренебречь, что и предполагается в дальнейшем. Таким образом, последующие выкладки, проводимые в приближении Кирхгофа, относятся ко всем компонентам спектра волнения в оптическом случае и к «кирхгофовской» части спектра в смысле двухмасштабной модели в радиодиапазоне.

1. Будем считать, что длительность падающего импульса много меньше периодов колебаний всех спектральных компонент волнения, и описывать поверхность уравнением  $z = \zeta(\rho)$ ,  $\rho = (x, y)$ , где  $\zeta$  — случайное однородное поле возвышений. Падающую на поверхность скалярную волну представим в виде разложения по плоским волнам

$$u_0(r) = \int A(x, \omega) \exp[i(kar - \omega t)] dx d\omega ,$$

где  $r = (\rho, \zeta(\rho))$  — радиус-вектор точки поверхности,  $A(x, \omega)$  — спектральная амплитуда падающего поля,  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\alpha = (x, -\sqrt{1-x^2})$  — единичный волновой вектор падающего поля. В приближении Кирхгофа для рассеянного поля в точке  $r' = (\rho', z)$  в момент времени  $t$  получим

$$u(r', t) = \frac{i}{4\pi} \int \frac{ks^2 V(\alpha, N)}{Rs_z} A(x, \omega) \exp[ik(ar + R - ct)] dx d\omega d\rho ,$$

где  $s = \beta - \alpha = (s_\perp, s_\parallel)$  — нормированный вектор рассеяния,  $\beta = -(r' - r)/R = (q, \sqrt{1-q^2})$  — единичный вектор, направленный из точки на поверхности в точку наблюдения,  $R = |r' - r|$ ,  $V$  — коэффициент отражения,  $N$  — нормаль к поверхности.

Образуем произведение  $u(r', t_1)u^*(r', t_2)$  и в получившемся выражении перейдем к суммарно-разностным переменным  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ ,  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  и т. д. Имея в виду малые углы падения и рассеяния и считая, что  $|\Delta\mathbf{x}|, |\Delta q|, \Delta\omega/\omega, \zeta/ka^2 \ll 1$ , где  $a$  — размер пятна облучения на поверхности, после разложения по этим малым параметрам приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} u\left(r', t + \frac{\Delta t}{2}\right)u^*\left(r', t - \frac{\Delta t}{2}\right) &= \frac{V_0^2}{4\pi^2 c^3} \int k^3 A\left(\mathbf{x} + \frac{\Delta\mathbf{x}}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) A^* \times \\ &\times \left(\mathbf{x} - \frac{\Delta\mathbf{x}}{2}, \omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right) e^{i\psi} d\mathbf{x} d\Delta\mathbf{x} d\omega d\Delta\omega d\rho d\Delta\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= -\Delta\omega \left( t - \frac{\mathbf{x}\rho + R}{c} + \frac{\zeta' + \zeta''}{c} \right) k[\Delta\mathbf{x}\rho - s_\perp\Delta\rho + 2(\zeta'' - \zeta')] - \omega t, \\ s_\perp &= s_\perp(\rho), \quad \zeta' = \zeta\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right), \quad \zeta'' = \zeta(\rho - \Delta\rho/2), \quad R = R(\rho), \end{aligned}$$

$V_0$  — коэффициент отражения при нормальном падении. Здесь учтены члены нулевого порядка в предэкспоненциальном члене и линейные — в фазовом. Отличие рассматриваемой задачи от аналогичной монохроматической [5] состоит в наличии в  $\psi$  члена, пропорционального  $\Delta\omega$ . Наибольший интерес представляет случай  $\Delta\omega/c \gtrsim 1$ , соответствующий при падении импульсного поля соизмеримости длины волнового пакета с высотой неровностей.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при скоростях ветра, превышающих 5—7 м/с, основной вклад в наклоны морской поверхности дают капиллярные и короткие гравитационные волны с длинами волн порядка дециметров и менее [6, 7]. С другой стороны, возвышения поверхности формируются, в основном, крупномасштабными компонентами волнения. Исходя из этих данных разобьем спектр волнения на две части точкой  $v_0 = \beta v_\mu$ , где  $v_0$  — волновое число разбиения,  $v_\mu = (g/\mu)^{1/2}$  — характерное волновое число капиллярных волн,  $\mu$  — отношение поверхностного натяжения к плотности воды,  $g$  — ускорение свободного падения, численный коэффициент  $\beta_0 = 0.01 \div 0.1$ . Соответственно случайные возвышения  $\zeta$  представим в виде  $\zeta = \zeta_k + \zeta_m$ , где  $\zeta_k$  — крупномасштабная  $v < v_0$ , а  $\zeta_m$  — мелкомасштабная  $v > v_0$  части волнения. Будем считать поверхность гауссовой; тогда из дельта-коррелированности спектральных амплитуд однородного случайного поля вытекает статистическая независимость компонент  $\zeta_k$  и  $\zeta_m$  и, следовательно,  $h^2 = h_m^2 + h_k^2$ , где  $h^2$  — дисперсия возвышений поверхности. Конкретная величина коэффициента  $\beta_0$  не имеет значения, достаточного, чтобы мелкомасштабная составляющая содержала основные наклонообразующие компоненты спектра волнения и удовлетворялось неравенство  $kh_m \gg 1$ . Пренебрегая влиянием мелкомасштабных возвышений на временную задержку отраженных волн, т. е. ограничиваясь членом нулевого порядка по малому параметру  $h_m/h_k$ , положим в выражении для  $\psi$

$$\zeta' + \zeta'' \simeq 2\zeta_k(\rho), \quad \zeta'' - \zeta' = \zeta_m'' - \zeta_m' - \gamma_k \Delta\rho, \quad \gamma = \nabla \zeta. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и выполним усреднение по мелкомасштабным неровностям. Интегрируя затем по  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\mathbf{x}$ ,  $\Delta\omega$ , получаем для второго момента

$$\bar{\Gamma}_2(r', t, \Delta t) = \frac{V_0^2}{4\pi^2} \int d\rho d\omega dx J\left(\omega, x; \rho, t - \frac{R}{c} + \frac{2\zeta_k}{c}\right) F(s_1/2 + \gamma_k; k) e^{-i\omega\Delta t}. \quad (3)$$

В этом выражении  $J(\omega, x; \rho, t)$  — распределение интенсивности падающего поля по частотам  $\omega$  и направлениям  $x$  в точке  $(\rho, t)$  на плоскости  $z=0$ :

$$J(\omega, x; \rho, t) = \frac{k^2}{(2\pi)^3} \int u_0\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) u_0^*\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}, t - \frac{\Delta t}{2}\right) \times \\ \times \exp[-i(kx\Delta\rho - \omega\Delta t)] d\Delta\rho d\Delta t,$$

$F$  — индикаторика рассеяния мелкомасштабных компонент, зависящая в общем случае от волнового числа  $k$ :

$$F(p; k) = \frac{k^2}{\pi^3} \int \xi_m(2k, -2k; \Delta\rho) \exp(-i2kp\Delta\rho) d\Delta\rho, \quad (4)$$

$\xi(u_1, u_2; \Delta\rho) = \overline{\exp[i(u_1\xi'_m + u_2\xi''_m)]}$  — характеристическая функция мелкомасштабных возвышений; черта сверху означает усреднение по мелкомасштабным неровностям. Обозначая усреднение по крупному масштабу угловыми скобками и усредняя (3), получаем выражение для усредненной по всем неровностям временной корреляционной функции рассеянного поля

$$\langle \bar{\Gamma}_2(r', t, \Delta t) \rangle = \frac{V_0^2}{4\pi^2} \int d\rho d\omega dx dy dz d\gamma_k d\zeta_k J\left(\omega, x; \rho, t - \frac{R}{c} + \frac{2\zeta_k}{c}\right) \times \\ \times F(s_1/2 + \gamma_k) W_1(\zeta_k, \gamma_k) e^{-i\omega\Delta t}, \quad (5)$$

где  $W_1(\zeta_k, \gamma_k)$  — совместная плотность вероятностей возвышений и наклонов крупномасштабной компоненты волнения. Формула (5), охватывающая как оптический, так и сантиметровый диапазоны, обобщает соответствующий результат работы [1] по лазерному зондированию и переходит в последний в коротковолновом пределе, когда в  $\xi$  коэффициент корреляции мелкомасштабных неровностей можно разложить в ряд Тейлора по  $\Delta\rho$  и  $F(p; k) \rightarrow W_{ym}(p)$ , где  $W_{ym}$  — плотность вероятностей наклонов мелкомасштабных волн.

При вычислении временной корреляционной функции интенсивности, так же как и при вычислении второго момента, усреднение проведем в два этапа: сначала по мелкомасштабным, а затем по крупномасштабным неровностям. (Отметим, что последовательное усреднение по волнам различных масштабов в задаче зондирования морской поверхности использовалось, в частности, при вычислении сечения рассеяния в работе [9].) Предположим, что размер пятна на поверхности  $a$  велик по сравнению с радиусом корреляции мелкомасштабных волн  $a > 2\pi/\nu_0$ . В этом случае число бликовых участков, от которых в точку наблюдения приходят отраженные волны, велико (многолучевые флюктуации [5, 8]). Поэтому на первом этапе при усреднении по мелкомасштабным неровностям (что физически означает усреднение по флюктуациям поля, связанным с мелкомасштабными неровностями, при фиксированной реализации крупномасштабной компоненты волнения) можно говорить о нормализации такого поля и выразить при усреднении по мелкому масштабу четвертый момент через второй. В соответствии с этим для усредненной по мелкому масштабу временной корреляционной функции интенсивности положим

$$\bar{I}(t_1)\bar{I}(t_2) = \bar{I}(t_1)\bar{I}(t_2) + |\bar{\Gamma}_2(t_1, t_2)|^2, \quad (6)$$

где  $I(t) = |u(t)|^2$  — интенсивность рассеянного поля. Для справедливости этого соотношения необходимо, кроме того, перекрытие по врем-

мени импульсов, отраженных бликовыми участками, расстояние между которыми меньше  $2\pi/v_0$ .

Отсюда следует ограничение на полосу частот падающего поля  $[D(2\pi/v_0)]^{1/2} < c/\Delta\omega$ , т. е. длина волнового пакета должна быть больше характерного изменения возвышений поверхности на масштабе максимальной длины волны в спектре мелкомасштабных неровностей ( $D(\rho)$  — структурная функция возвышений). Величина  $[D(2\pi/v_0)]^{1/2}/c$  характеризует временные интервалы на фронте и спаде рассеянного импульса, для которых соотношение (6) несправедливо. Кроме того, выполнение указанного условия обеспечивает допустимость пренебрежения мелкомасштабными неровностями в (2).

Усредняя (6) по крупномасштабным неровностям и используя (3), получаем для временной корреляционной функции интенсивности (далее индекс « $\langle \rangle$ » у крупномасштабных величин опускаем):

$$\begin{aligned}
 B_I(t_1, t_2; \mathbf{r}') &= B_I(t, \Delta t; \mathbf{r}') = \left\langle \overline{I\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)} \overline{I\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)} \right\rangle + \\
 &+ \left\langle \overline{\Gamma_2\left(t + \frac{\Delta t}{2}, t - \frac{\Delta t}{2}\right)} \right\rangle^* = \frac{V_0^4}{16\pi^4} \int dQ_1 dQ_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\gamma_1 d\gamma_2 \times \\
 &\times \left[ J\left(\omega_1, \mathbf{x}_1; \rho_1, t + \frac{\Delta t}{2} - \frac{R_1}{c} + \frac{2\zeta_1}{c}\right) J\left(\omega_2, \mathbf{x}_2; \rho_2, t - \frac{\Delta t}{2} - \frac{R_2}{c} + \frac{2\zeta_2}{c}\right) + \right. \\
 &+ J\left(\omega_1, \mathbf{x}_1; \rho_1, t - \frac{R_1}{c} + \frac{2\zeta_1}{c}\right) J^*\left(\omega_2, \mathbf{x}_2; \rho_2, t - \frac{R_2}{c} + \frac{2\zeta_2}{c}\right) \times \\
 &\times \exp(-i(\omega_1 - \omega_2)\Delta t) \left. \right] F(s_{11}/2 + \gamma_1; k_1) F(s_{12}/2 + \gamma_2; k_2) W_2(\zeta_1, \zeta_2, \gamma_1, \gamma_2),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\zeta_i, \gamma_i, R_i, s_{1i}$  берутся в точках  $\rho_i, i=1, 2, dQ_i = d\rho_i d\omega_i d\mathbf{x}_i$ . Отметим, что возможность независимого усреднения по неровностям крупного и мелкого масштабов связана с предполагаемой гауссостью поверхности. Если поверхность негауссова, то формула связи второго и четвертого моментов (6) сохраняется, но черт будет иметь смысл условного среднего, так что для вычисления  $\Gamma_2$  по формуле (3) потребуется задание условной функции распределения мелкомасштабных компонент при фиксированных крупномасштабных. Соответственно введенная посредством (4) индикатриса рассеяния окажется зависящей от волн крупного масштаба.

Формула (7) связывает временную корреляционную функцию интенсивности рассеянного поля с двухточечной, совместой плотностью вероятностей возвышений и наклонов крупномасштабных компонент морского волнения  $W_2(\zeta_1, \zeta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ . Учитывая, что в соответствии с произведенным разбиением спектра масштаб индикатрисы  $F$  больше среднеквадратического значения наклонов крупных волн,  $F$  можно разложить в ряд по степеням  $\gamma$ :

$$F(s_{11}/2 + \gamma) = F(s_{11}/2) + \gamma \nabla F + \dots \tag{8}$$

Кроме того, в (7) можно выделить следующие временные масштабы:  $\tau_h = 2h/c$  — характерная временная задержка импульса из-за возвышений поверхности,  $a^2/c\tau$  — временное уширение импульса за счет сферичности фазового фронта,  $\sqrt{D(a)/c}$  — характерный разброс временных задержек в пределах пятна облучения  $a$  ( $R \approx z + \rho^2/2z$ ,  $a$  — масштаб  $J$  по переменной  $\rho$ ). В случае малости какого-либо из этих времен по сравнению с длительностью падающего импульса  $\tau_h$  ( $\tau_h$  — масштаб  $J$  по переменной  $t$ ) возможны соответствующие упрощения общей формулы (7), а именно:

1)  $\tau_h/\tau_n \ll 1$  — длина волнового пакета велика по сравнению с высотой волн. Тогда

$$J\left(\omega, \mathbf{x}; \rho, t - \frac{R}{c} + \frac{2\xi}{c}\right) \simeq J\left(\omega, \mathbf{x}; \rho, t - \frac{R}{c}\right) + \frac{\partial J}{\partial t} \frac{2\xi}{c} + \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \frac{2\xi^2}{c^2} + \dots,$$

2)  $a^2/z\tau_n \ll 1$  —

$$J\left(\omega, \mathbf{x}; \rho, t - \frac{R}{c} + \frac{2\xi}{c}\right) \simeq J\left(\omega, \mathbf{x}; \rho, t - \frac{z}{c} + \frac{2\xi}{c}\right).$$

В этом режиме временное уширение импульса связано только с возвышениями поверхности.

3)  $\tau_h/\tau_n \gtrsim 1$ ,  $\sqrt{D(a)}/c\tau_n \ll 1$  — случай сравнительно малого пятна. Полагая в (7)  $\xi_1 = \xi(\rho_0) + \Delta\xi_1$ ,  $\xi_2 = \xi(\rho_0) + \Delta\xi_2$ , где  $\rho$  — координата центра пятна, можно разложить  $J_1$  и  $J_2$  в ряды по  $2\Delta\xi_1/c$  и  $2\Delta\xi_2/c$ . Тогда, ограничиваясь основным членом в (8), т. е. пренебрегая влиянием крупномасштабных наклонов, получаем для нормированной дисперсии флюктуаций интенсивности

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\langle \bar{I}^2 \rangle}{\langle \bar{I} \rangle^2} - 1 \simeq \\ &\simeq \left\{ \left[ 2 \int dQ_1 dQ_2 d\xi J\left(\omega_1, \mathbf{x}_1, t - \frac{R_1}{c} + \frac{2\xi}{c}\right) J\left(\omega_2, \mathbf{x}_2, \rho_2, t - \frac{R_2}{c} + \frac{2\xi}{c}\right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times F_1 F_2 W(\xi) \right] \left[ \int dQ d\xi J\left(\omega, \mathbf{x}; \rho, t - \frac{R}{c} + \frac{2\xi}{c}\right) F W(\xi) \right]^{-2} \right\} - 1, \end{aligned}$$

где  $W(\xi)$  — плотность вероятностей крупномасштабных возвышений. В этом режиме флюктуации интенсивности связаны с флюктуациями среднего (в пределах пятна) уровня поверхности.

2. Для конкретизации выражения (7) рассмотрим обратное рассеяние поля квазимонокроматического импульсного излучателя, расположенного в точке  $\mathbf{r} = (\rho = 0, z)$ :

$$u_0(\mathbf{r}, t) = v(t - R/c) f(\theta) \exp[-i\omega_0(t - R/c)]/R,$$

где  $v(t)$  — огибающая сигнала,  $f(\theta)$  — диаграмма направленности излучателя, которую считаем ориентированной вертикально вниз. Для лучевой интенсивности падающего поля в плоскости  $z=0$  имеем

$$\begin{aligned} J(\omega, \mathbf{x}; \rho, t) &= I_0(\rho) \delta(\mathbf{x} - \rho/z) \int d\Delta\omega \Phi(\omega - \omega_0 + \Delta\omega/2) \times \\ &\quad \times \Phi^*(\omega - \omega_0 - \Delta\omega/2) e^{-i\Delta\omega t}, \end{aligned}$$

где  $I_0(\rho)$  — интенсивность падающего поля в плоскости  $z=0$ , а  $\Phi(\Omega)$  — спектр огибающей:

$$\Phi(\Omega) = (1/2\pi) \int v(t) e^{i\Omega t} dt.$$

Примем, что индикаторика рассеяния  $F$  шире диаграммы направленности излучателя, а также пренебрежем ее зависимостью от частоты; тогда  $F$  можно вынести из-под интегралов в точке  $s_z = 0$ . Огибающую  $v(t)$  и интенсивность  $I_0(\rho)$  примем гауссовыми:

$$v(t) = (2/\pi)^{1/4} \exp(-t^2/\tau_n^2)/\sqrt{\tau_n}, \quad I_0(\rho) = \exp(-\rho^2/a^2)/\pi a^2.$$

Подставляя эти выражения в (7) и вновь пренебрегая влиянием наклонов крупных волн, после интегрирования по  $\omega_1$ ,  $\mathbf{x}_1$ ,  $\xi_1$  получаем

$$B_1(\tilde{t}, \Delta t) = \frac{V_0^4 F^2(0)}{32\pi^3 z^4 a^4 \tau_h^2} \int \left[ d\rho d\Delta\rho \exp\left(-\frac{2\rho^2 + \Delta\rho^2/2}{a^2}\right) \right] \times$$

$$\times (\gamma(1+\alpha^2)^2 - \eta^2)^{-1} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{4z^2 h^2} \left( \frac{(\rho^2 + \Delta\rho^2/4 - zct)^2}{1+\alpha^2+\eta} + \frac{(\rho\Delta\rho)^2}{1+\alpha^2-\eta} \right) \right] + \exp \left[ -\frac{\Delta t^2}{\tau_h^2} - \frac{1}{4z^2 h^2} \left( \frac{\rho^2 + \Delta\rho^2/4 - zct}{1+\alpha^2+\eta} + \frac{(\rho\Delta\rho)^2}{1+\alpha^2-\eta} \right) \right] \right\},$$

где введены переменные  $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ,  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ ,  $\tilde{t} = t - 2z/c$  и обозначения  $\alpha = \tau_h/2t_h$ ,  $t_h = 2h/c$ ;  $\eta(\Delta\rho) = \langle \xi(\Delta\rho/2) \xi(-\Delta\rho/2) \rangle \times \langle \langle \xi^2 \rangle \rangle^{-1} \langle \xi^2 \rangle$  — полный, т. е. с учетом волн всех масштабов, коэффициент корреляции возвышений (учтено оговоренное в примечании к формуле (6) условие  $D(2\pi/v_0) < (c\Delta\omega)^2 \approx (2\tau_h)^2$ ).

Рассмотрим более подробно режим  $a^2/zct_h \ll 1$ , являющийся типичным для лазерного зондирования, но реализующийся и в радиодиапазоне, например, при  $z \approx 10^3$  м,  $a \approx 10$  м,  $ct_h \approx 0,3 \div 1$  м. Будем для простоты считать крупномасштабную часть волнения одномерной, т. е. положим  $\eta(\Delta\rho) = \eta(\Delta x)$ ,  $\Delta\rho = (\Delta x, \Delta y)$ ; тогда из (9) с учетом (5) получаем простую формулу для нормированной дисперсии флюктуаций интенсивности при  $\Delta t = \tilde{t} = 0$ :

$$m^2 = \frac{4}{V\pi} \int_0^\infty \frac{ds \exp(-s^2)}{\sqrt{1 - [\eta(\sqrt{2}as)/(1+\alpha^2)]^2}} - 1. \quad (10)$$

Для функции корреляции интенсивности соответственно получим

$$B_I(\tilde{t}=0, \Delta t) = \frac{V_0^4 F^2(0)}{16\pi^{3/2} z^4 \tau_h^2} \int_0^\infty \frac{ds \exp(-s^2)}{\sqrt{(1+\alpha^2)^2 - \eta^2(\sqrt{2}as)}} \times \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{\tau_h^2(1+\alpha^2-\eta)}\right) + \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{\tau_h^2}\right) \right]. \quad (11)$$

На рис. 1\* представлены результаты численного расчета  $m^2$  по формуле (10), а на рис. 2 — нормированной корреляционной функции  $b_I = B_I(\Delta t)/B_I(\Delta t=0)$  по формуле (11). При расчете использован степенной спектр волновых чисел  $\Psi(v) \approx 2 \cdot 10^{-3} v^{-3}$  [8]. На рис. 1 по оси абсцисс отложено отношение размера пятна к длине крупной волны  $\Lambda = 2\pi/v_m$  ( $v_m$  — волновое число, соответствующее пику в спектре возвышений), а параметром семейства является  $\alpha$ ; на рис. 2 параметром является отношение  $a/\Lambda$  при фиксированной длительности падающего импульса. Вид кривых отражают два физических механизма, с которыми связаны флюктуации интенсивности. При малых пятнах флюктуации интенсивности обусловлены флюктуациями временного положения центра тяжести индивидуальных импульсов, длительность которых в этом случае близка к длительности падающего импульса (режим  $\gamma D(a)/ct_h \ll 1$ ). При этом дисперсия флюктуаций не зависит от корреляционных свойств поверхности (горизонтальные участки кривых  $\alpha = 0,25; 0,5$  на рис. 1) и определяется исключительно дисперсией возвышений; масштаб корреляционной функции интенсивности определяется длительностью падающего импульса. При увеличении размеров пятна каждый индивидуальный импульс уширяется из-за отражений от различных неровностей в пределах пятна, на рис. 1 проявляется зависимость флюктуаций интенсивности от размера крупных волн, а функция корреляции становится двухмасштабной. Отметим, что в рассматриваемом режиме измерения  $m^2$  позволяют оценить длину крупной вол-

\* См. рис. 1 на вклейке.

ны, поскольку среднеквадратическая высота волн  $h$  может быть определена из анализа средней интенсивности.

Из формул (10) и (11) и соответствующих графиков видно, что значительные флуктуации интенсивности имеют место, когда размер пятна на поверхности меньше радиуса корреляции крупных волн — в противном случае происходит нормализация поля и  $t^2 \rightarrow 1$ . Для спутниковых радиовысотомеров выполняется обратное соотношение  $a^2/g\tau_i \gg 1$  (например, в системе Seasat —  $1 \text{ с} \approx 0,9 \text{ м}$ , ширина диаграммы направленности порядка  $3 \cdot 10^{-2}$ , так что  $a^2/g\tau_i \sim 10^2$ ). В этом случае область интегрирования по пространственным переменным в (7) и (9) оказывается зависящей от времени и оценивается (без учета случайных возвышений) из неравенства  $|t-z/c-\rho^2/2zc| < \tau_i$ . Эта область оказывается больше длины крупных волн, за исключением момента касания волнового пакета облучаемой поверхности, так что значительные флуктуации интенсивности следует ожидать на переднем фронте рассеянного импульса.

Формула (9)' может быть упрощена и в других случаях. В частности, при выполнении условия  $l = a^2/\sqrt{2}zh \ll 1$ , не содержащего длительности импульса, из (9) получаем (одномерные неровности)

$$m^2|_{\tau=0} \frac{4\sqrt{2}}{\pi!} \int_0^\infty \frac{ds K_0(s^2/2 + (1+\alpha^2-\eta)/l^2)}{\sqrt{1+\alpha^2+\eta}} \exp\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{1+\alpha^2-\eta}{l^2}\right) - 1, \quad (12)$$

где  $K_0$  — функция Макдональда нулевого порядка,  $\eta = \eta(\sqrt{2}as)$ .

При облучении поверхности с движущегося носителя из (9) можно получить выражение для междуимпульсной корреляции. Если  $V_n$  — скорость носителя,  $T$  — период повторения импульсов, то взаимная временная корреляционная функция интенсивности двух последовательных импульсов следует из (9) при отбрасывании второго слагаемого и замене аргумента в коэффициенте корреляции:  $\Delta\rho \rightarrow \Delta\rho + V_n T$  (в предположении, что на интервале времени  $T$  крупномасштабные компоненты волнения можно считать «замороженными»). В частности, в режиме  $a^2/g\tau_i \ll 1$  из (10) для нормированной междуимпульсной корреляционной функции интенсивности имеем

$$\left( \frac{\langle I(\tilde{t})I(\tilde{t}+T) \rangle}{\langle \tilde{t} \rangle^2} - 1 \right)_{\tilde{t}=0} = \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty \frac{ds \exp(-s^2)}{\sqrt{1 - [\eta(\sqrt{2}as + V_n T \cos \varphi)/(1+\alpha^2)]^2}} - 1, \quad (13)$$

где  $\varphi$  — угол между вектором скорости  $V_n$  и направлением распространения крупных волн. В случае достаточно малого пятна масштаб этой функции по аргументу  $V_n T$  дает оценку радиуса корреляции крупных волн в направлении вектора скорости  $V_n$ .

Энергия сигнала, рассеянного поверхностью в направлении точки наблюдения, пропорциональна интегралу по времени от интенсивности рассеянного поля

$$E = \int I(t) dt.$$

Средняя энергия  $\langle \bar{E} \rangle$  вычисляется интегрированием выражения (5) и не зависит от крупномасштабных возвышений поверхности. Средний квадрат энергии рассеянного сигнала

$$\langle \bar{E}^2 \rangle = \int \langle \overline{I(t_1)I(t_2)} \rangle dt_1 dt_2 = \int B_I(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

может быть вычислен с использованием выражений (7) или (9). Если пренебречь влиянием наклонов крупных волн, то первое слагаемое в правой части (7) после интегрирования по времени дает квадрат

средней энергии рассеянного импульса, а второе — дисперсию флуктуаций энергии. Для обратного рассеяния при условиях, рассмотренных в начале разд. 2, в режиме  $a^2/zct_i \ll 1$  получаем для нормированной дисперсии флуктуаций энергии рассеянного сигнала

$$m_E^2 = \frac{\langle \bar{E}^2 \rangle}{\langle \bar{E} \rangle^2} - 1 = \frac{2i}{V\pi} \frac{\alpha}{V1+\alpha^2} \int_0^\infty \frac{ds \exp(-s^2)}{V1-\eta(\sqrt{2}as)/(1+\alpha^2)}.$$

Построенные по этой формуле зависимости  $m_E^2$  от  $a/\Lambda$  представлены на рис. 3. Флуктуации энергии уменьшаются с ростом размера пятна, но, в отличие от флуктуаций интенсивности, растут с увеличением длительности падающего импульса. Приведенные кривые указывают на возможность определения размеров крупных волн по измерениям флуктуаций энергии коротких импульсов.

В заключение отметим, что примененный подход может быть использован и для вычисления пространственно-временной корреляционной функции интенсивности импульсов, рассеянных поверхностью моря.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Г. С. // Тезисы докл. 4-го Всесоюзного симпозиума по лазерному зондированию атмосферы. — Томск, 1976.
2. Tsai B. M., Gargnef C. S. // Appl. Optics. 1982. V. 21. P. 3932.
3. Андреев Г. А., Черная Л. Ф. // Радиотехника. 1988. № 2. С. 67.
4. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровных поверхностях. — М.: Наука, 1972. С. 343.
5. Белоусов С. И., Якушкин И. Г. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1986. Т. 22. № 8. С. 859.
6. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. — Мир. 1969. С. 118.
7. Buffon J. L. et al. // Appl. Optics. 1983. V. 22. № 17. P. 2603.
8. Якушкин И. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 5. С. 535.
9. Лемента Ю. А., Фукс И. М. // Изв. вузов Радиофизика. 1978. Т. 21. № 3. С. 379.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
29 мая 1989 г.,  
после доработки  
24 октября 1989 г.

## ON THE TEMPORAL CORRELATION OF INTENSITY OF THE FIELD OF PULSE WAVE SCATTERED BY THE SEA SURFACE

A. G. Slutskij, I. G. Yakushkin

The reflection of the pulse wave from the sea surface on the base of Kirchoff's approximation is considered. The expression for temporal correlation function of scattered field intensity for a nearvertical direction of incidence is derived. Numerical calculations illustrated the relationship between the fluctuations of intensity and the parameters of largescale components of the surface spectrum are carried out.

УДК 537.86:519.2(075)

## МОДЕЛЬ СИГНАЛА, ОТРАЖЕННОГО ОТ ХАОСТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВА

*M. A. Островский*

Рассмотрены статистические характеристики отражений от хаотически распределенных объектов при облучении пространства последовательностью простых и сложных сигналов. Предложены математические модели помех, позволяющие найти многомерные плотности вероятности в обоих случаях.

В литературе [1–4] для описания отражений от хаотически распределенных в пространстве объектов широко используется пуассоновская модель, сущность которой состоит в представлении помехи суперпозицией детерминированных функций со случайными аргументами и случайными комплексными множителями:

$$\eta(t) = \sum_{v=1}^k \xi_v f(t - t^{(v)}) , \quad (1)$$

где  $t^{(v)}$  — случайный момент возникновения импульса  $f(t)$ ,  $k$  — количество отражателей в импульсном объеме.

Из сопоставления (1) с выражением для интенсивности отраженного сигнала, вытекающим из уравнения радиолокации, следуют зависимости:  $\xi_v \sim \bar{\gamma} \sigma_v e^{j\phi_v}$ , где  $\sigma_v$  — ЭПР элементарного отражателя;  $\phi_v$  — начальная фаза элементарного отражения, обусловленная ориентацией отражателя относительно РЛС, и  $f(t - t^{(v)}) \sim g(t) u(t - 2R_v/c)$ , где  $g(t)$  — произведение диаграмм направленности на излучение и прием, которое при сканировании антенны является функцией времени;  $u(t)$  — зондирующий сигнал;  $R_v$  — дальность до  $v$ -го отражателя;  $c$  — скорость света.

При облучении пространства одиночным зондирующим импульсом регулярная функция  $f(t)$  с точностью до постоянного множителя повторяет зависимость зондирующего сигнала от времени. В зависимости от того, какой сигнал излучается, сложный ( $\Delta f\tau_i \gg 1$ ) или простой ( $\Delta f\tau_i = 1$ ), сам случайный процесс, свойства которого достаточно подробно изучены в [1], является сложным или простым.

Используя результаты работы [1], рассмотрим статистические характеристики случайных отражений при сканировании антенны по угловой координате и при облучении пространства периодической последовательностью зондирующих сигналов.

При периодическом зондировании пространства функция  $f(t)$  в пределах импульсного объема зависит от двух аргументов:  $\mu$  — номера периода повторения, меняющегося в пределах ширины сигнального пакета  $[0, N-1]$ ,  $\tau$  — внутривидового времени, область изменения которого ограничивается длительностью зондирующего импульса  $[0, \tau_i]$ . В соответствии с принятой индексацией отраженный сигнал от совокупности из  $k$  отражателей имеет вид

$$\eta(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{v=1}^k \xi_v(\mu) f(t - \mu T - \tau^{(v)}) , \quad (2)$$

где  $\xi_v(\mu)$  — комплексная амплитуда  $v$ -го отражения, принятого в  $\mu$ -м

периоде повторения;  $\tau^{(v)} = 2R_v/c$  — случайный момент возникновения  $v$ -го импульса;  $k$  — число импульсов, принятых в одном периоде повторения в пределах длительности зондирующего импульса.

Статистика помехи в одном импульсном объеме характеризуется смешанным моментом  $m(t_1; t_2; \dots; t_l)$  порядка  $l=dN$ :

$$m_l(t_1; t_2; \dots; t_l) = \sum_{\mu_1=0}^{N-1} \dots \sum_{\mu_l=0}^{N-1} \left\langle \sum_{v_1=1}^{k_1} \dots \sum_{v_l=1}^{k_l} \xi_{v_1}(\mu_1) \dots \xi_{v_l}(\mu_l) \times \right. \\ \left. \times f(t_1 - \mu_1 T - \tau^{(v_1)}) \dots f(t_l - \mu_l T - \tau^{(v_l)}) \right\rangle, \quad (3)$$

где  $d$  — база сигнала,  $T$  — период повторения.

Поскольку усреднение в (3) осуществляется по трем случайным параметрам  $k_i$ ,  $\xi_{vi}$ ,  $\tau^{(vi)}$ , для нахождения смешанного момента сделаем следующие предположения.

1) Число импульсов, возникающих на длительности  $\tau_u$ , случайно и подчинено пуассоновскому закону распределения

$$p(k, \tau_u) = \frac{(\lambda \tau_u)^k}{k!} e^{-\lambda \tau_u}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — среднее число импульсов в единицу времени.

2) Все комплексные амплитуды статистически независимы по обоим индексам. Все моменты возникновения импульсов статистически независимы и независимы от амплитуд.

3) Закон распределения моментов времени  $\tau^{(vi)}$  равномерный:

$$W(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_u} & \text{при } |\tau| < \frac{\tau_u}{2} \\ 0 & \text{при } |\tau| > \frac{\tau_u}{2} \end{cases}.$$

Усреднение по случайному числу импульсов произведем с использованием формулы полной вероятности

$$\alpha(\mu; \tau^{(v)}; k) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} p(k, \tau_u) \alpha(\mu; \tau^{(v)}/k), \quad (5)$$

где  $\alpha(\mu; \tau^{(v)}/k) = k \langle \xi' \rangle \langle \prod_{r=1}^l f(t_r - \mu T - \tau^{(v)r}) \rangle$  — условное среднее, соответствующее условию возникновения на длительности  $\tau_u$  в одном периоде повторения ровно  $k$  импульсов, полученное при использовании второго предположения и при условии одинаковости законов распределения комплексных амплитуд.

Используя при вычислении (5) первое и третье предположения и подставляя (5) в (3), получаем при  $k/\tau_u = \lambda$

$$m_l(t_1; \dots; t_l) = \lambda \langle \xi' \rangle \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\lambda \tau_u)^k}{k!} e^{-\lambda \tau_u} \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} \prod_{r=1}^l f(t_r - \mu T - \tau) d\tau.$$

Учитывая, кроме того, что  $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} = \exp(\beta)$ , а функция  $f$  ограничена по времени интервалом  $\tau_u$ , получим при расширении пределов интегрирования до бесконечности

$$m_l(t_1; \dots; t_l) = \lambda \langle \xi' \rangle \sum_{\mu=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^l f(t_r - \mu T - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Выражение (6) отличается от приведенного в [1] наличием дополн-

нительной суммы по междуperiодному индексу  $\mu$ , обусловленной периодическим характером зондирования пространства. При  $\mu=0$  из (6) следует известное выражение для случая одиночного зондирования

$$m_l(t_1; \dots t_l) = \lambda \langle \xi^l \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^l f(t_r - \tau) d\tau.$$

Представляет интерес разложение детерминированной функции  $f$  на произведение внутри- и междуperiодной. Хотя в общем случае такое разбиение не всегда правомерно (например, при непрерывном облучении пространства), существует ряд практически важных областей, когда  $f(t)$  представляется в виде указанного произведения. Так, при импульсном зондировании, когда  $\tau_i \ll T$ , детерминированная функция приближенно равна

$$f(t_r - \mu T - \tau) \simeq g(t_r - \mu T - \tau) u(t_r - \mu T - \tau).$$

Представляя текущее время набором дискретных отсчетов  $t_r = nT + v\tau_s$ , где  $\tau_s$  — интервал корреляции процесса, и полагая, что произведение ДН на прием и передачу не зависит от внутриperiодного времени (например, при дискретном импульсном сканировании), а зондирующие сигналы при высоком уровне когерентности слабо зависят от номера периода повторения, получаем

$$f(t_r - \mu T - \tau) = f(n, v, \tau) \simeq g[(n - \mu)T] u(v\tau_s - \tau). \quad (7)$$

При этом выражение (6) перепишется в виде

$$m_{Nd}(0, 1 \dots 0, d \dots N-1, 1 \dots N-1, d) = \quad (8)$$

$$= \lambda \langle \xi^{dN} \rangle \sum_{\mu=0}^{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} g[(n - \mu)T] \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{v=1}^d u(v\tau_s - \tau) d\tau.$$

Двойная индексация временных отсчетов  $(i, j)$  в (8) соответствует  $i$  — номеру периода повторения,  $j$  — номеру элемента дальности.

Зондирование пространства последовательностью простых сигналов. Если  $u(\tau)$  — простой сигнал ( $d=1$ ) прямоугольной формы с единичной амплитудой, то второе произведение в выражении (8) аннулируется, а сам смешанный момент равен

$$m_N(0 \dots N-1) = \lambda \tau_i \langle \xi^N \rangle \sum_{\mu=0}^{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} g[(n - \mu)T]. \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что точно такое же выражение для смешанного момента имеет случайный процесс на выходе линейного междуperiодного фильтра с импульсной переходной характеристикой  $g(nT)$  при воздействии стационарного негауссова процесса  $\xi(nT)$

$$\eta(nT) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi(\mu T) g[(n - \mu)T]. \quad (10)$$

Действительно, смешанный момент распределения такого процесса равен

$$m_N(0, \dots N-1) =$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\mu_N=0}^{\infty} g(-\mu_1 T) g(T - \mu_2 T) \dots g(NT - T - \mu_N T) \langle \xi(\mu_1 T) \dots \xi(\mu_N T) \rangle.$$

Поскольку выборочные значения процесса  $\xi(\mu T)$  статистически независимы, то полученное выражение отлично от нуля только при совпадении индексов  $\mu_i = \mu$ . При этом

$$m_N(0, 1 \dots N-1) = \langle \xi^N \rangle \sum_{\mu=0}^{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} g[(n - \mu)T],$$

что при ограниченности во времени междупериодной функции  $\tilde{g}(nT)$  с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением (9).

В этой связи, при рассмотрении сигнала, отраженного от совокупности хаотически распределенных объектов, имеет смысл использовать модель, суть которой заключается в представлении отражений в одном кольце дальности результатом междупериодной фильтрации отсчетов статистически независимого процесса  $\xi(nT)$ . При этом импульсная переходная характеристика междупериодного фильтра равна  $g(nT)$ . Физический смысл  $\xi(nT)$  состоит в представлении отсчетов статистически независимого процесса суммой элементарных отражений из объема пространства  $V = \Delta R \cdot \Delta \epsilon \cdot (\Delta \beta / N)$ , где  $\Delta R$ ,  $\Delta \epsilon$ ,  $\Delta \beta$  — элементы разрешения РЛС по дальности, углу места и азимуту.

Используя модель (10), найдем выражение для многомерной плотности вероятности случайных отражений при зондировании пространства последовательностью простых сигналов. В соответствии с [5] она равна

$$W_N(\eta_0; \dots; \eta_{N-1}) = W_N(\eta) = w_N \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta(\mu T) \varphi[(n-\mu)T] \right\} \left| \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_\mu} \right|,$$

где  $\varphi$  — обратное (инверсное) преобразование, выражающее статистически независимые отсчеты  $\xi$  через статистически зависимые  $\eta$ .

Учитывая, что инверсное преобразование линейно, а  $\frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_\mu} = 0$  при  $n < \mu$  (в силу принципа причинности), якобиан этого преобразования представляет собой определитель треугольной матрицы, равный

$$\left| \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_\mu} \right| = |\varphi(0)|^n.$$

При этом многомерная плотность вероятности помехи со статистически зависимыми отсчетами принимает окончательный вид:

$$W_N(\eta_0; \dots; \eta_{N-1}) = |\varphi(0)|^N \prod_{n=0}^{N-1} w_1 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta(\mu T) \varphi[(n-\mu)T] \right\}, \quad (11)$$

где  $\varphi(n)$  — импульсная характеристика инверсного (обеляющего) междупериодного фильтра.

**Зондирование пространства последовательностью сложных сигналов.** Смешанный момент для рассматриваемого случая описывается выражением (8). Покажем, что в этом случае помеха является результатом двумерной (внутри- и междупериодной) фильтрации статистически независимых отсчетов помехи  $\xi(n, \tau)$ , т. е.

$$\eta(nT, v\tau_s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g[(n-\mu)T] \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\mu T, \tau) u(v\tau_s - \tau) d\tau. \quad (12)$$

Действительно,  $Nd$ -мерный смешанный момент процесса равен

$$\begin{aligned} m_{Nd}(0, 1 \dots 0, d \dots N-1, 1 \dots N-1, d) &= \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\mu_N=0}^{\infty}}_N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_d g(-\mu_1 T) \times \\ &\times g(T - \mu_2 T) \dots g(NT - T - \mu_N T) \times \\ &\times u(d\tau_s - \tau_d) \dots u(\tau_s - \tau_1) \langle \xi(\mu_1; \tau_1) \dots \xi(\mu_N; \tau_d) \rangle d\tau_1 \dots d\tau_d \end{aligned}$$

и при статистической независимости отсчетов помехи имеет вид

$$m_{Nd}(0, 1 \dots N-1, d) = \langle \xi^{Nd} \rangle \sum_{\mu=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} g[(n-\mu)T] \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{v=1}^d u(v\tau_s - \tau) d\tau,$$

с точностью до постоянного множителя совпадающий с выражением (8).

Таким образом, при зондировании пространства последовательностью сложных сигналов совокупность «передатчик—передающая ан-

тённа—пространство—приёмная антённа» эквивалентна двумерному внутри- и междупериодному фильтру, на вход которого действует процесс со статистически независимыми отсчетами  $\xi(\mu T, t)$ .

Аналогично вышерассмотренному случаю несложно показать, что если  $\det$  преобразования (12) отличен от нуля и существует обратное (обеляющее) преобразование

$$\xi(nT, v\tau_s) := \sum_{\mu=0}^{\infty} \Phi[(n-\mu)T] \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mu T, \tau) V(v\tau_s - \tau) d\tau,$$

где  $V(v\tau_s)$  — импульсная переходная характеристика инверсного внутрипериодного фильтра, известного в литературе под названием фильтра Урковица [6], то выражение для многомерной плотности вероятности помехи имеет вид

$$W_{Nd}(0, 1 \dots N-1, d) = |\varphi(0)|^N |V(0)|^d \times \\ \times \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{v=1}^d w_1 \left\{ \sum_{\mu=0}^{N-1} \Phi[(n-\mu)T] \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mu T, \tau) V(v\tau_s - \tau) d\tau \right\}. \quad (13)$$

Формула (13), выражающая многомерные плотности вероятности помехи через произведение одномерных плотностей результатов ее обеляющего преобразования, может быть использована в задачах, связанных с синтезом обнаружителей сигналов на фоне статистически зависимых помех с произвольным законом распределения [7, 8].

## ЛИТЕРАТУРА

- Зачепицкая Л. П. Пуассоновские случайные процессы. Особенности простых и сложных процессов: Учебное пособие. — Горький: Гос. ун-т, 1982.
- Фельдман Ю. И., Мандуровский И. А. Теория флуктуаций локационных сигналов, отраженных распределенными целями. — М.: Радио и связь, 1988.
- Бакут П. А., Герасимов И. А. и др. Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 1. / Под ред. Тартаковского Г. П. — М.: Сов. радио, 1963.
- Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976.
- Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1966. Т. 1.
- Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1971.
- Островский М. А., Пахомов Ю. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 6. С. 689.
- Островский М. А., Пахомов Ю. И., Дряхлов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 5. С. 580.

Правдинское конструкторское бюро  
завода радиорелейной аппаратуры

Поступила в редакцию  
15 мая 1989 г.

## THE SIGNAL MODEL REFLECTED FROM RANDOM DISTRIBUTED OBJECTS IN PERIODICALLY PROBED SPACE

M. A. Ostrovskij

This paper studies statistical characteristics of the reflections from random distributed objects at radiating the space by series of simple and complex signals. The mathematical clutter models which allow to define multimeasure probability densities in both cases are presented.

УДК 533.951.7

## НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С АКТИВНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДОЙ

*Ш. Ш. Моисеев, В. И. Ткаченко,  
Г. Г. Чигладзе, И. Б. Щербинина*

В одномодовом приближении исследовано нелинейное взаимодействие электронного пучка малой плотности с плазмой, содержащей примесь активных молекул. Молекулы моделируются нелинейной двухуровневой системой с частотой перехода  $\Omega$ . Численно и аналитически исследовано дисперсионное уравнение в случае произвольного соотношения между характерными параметрами плазмы и двухуровневой системы. Определены собственные частоты такой среды, инкременты и условия развития неустойчивостей. Показано наличие двух интервалов неустойчивых волновых чисел, ширина которых пропорциональна максимальному инкременту в этом интервале. Исследовано нелинейное взаимодействие пучка с плазмой, содержащей нелинейную активную среду в условиях, когда она неинвертирована. Показано, что при малых и больших частотах Раби инверсия среды мало изменяется. Когда частота Раби оказывается порядка инкремента пучковой неустойчивости, инверсия среды, осциллируя, на некоторый интервал времени может изменять знак.

1. Исследование взаимодействия потоков заряженных частиц с плазмой, содержащей примесь «активных» молекул, представляет интерес для решения проблемы повышения КПД приборов плазменной электроники при оптимизации работы газовых лазеров с накачкой ускоренными электронами. Газовые лазеры с предионизацией электронными пучками обладают высокими энергетическими характеристиками, легко перестраиваемыми по частоте [2], и поэтому привлекают в последнее время внимание исследователей. Электронные пучки в таких системах не только ионизируют газовую смесь в результате элементарных актов взаимодействия, но и могут передавать энергию направленного движения в электромагнитную энергию волн в образованной им же плазме вследствие развития пучковых неустойчивостей [1]. Генерируемые пучком высокочастотные поля способны повысить степень ионизации нейтрального газа разогретыми в этих полях электронами плазмы (т. е. улучшать предионизационные процессы) [3], осуществлять накачку энергетических уровней активных молекул среды [2].

Для описания полной физической картины взаимодействия пучка с активной плазменной средой необходимо рассмотреть следующую модельную задачу: электронный пучок движется через плазму, содержащую нелинейную двухуровневую систему с частотой перехода  $\Omega$ .

Линейные неустойчивости в неравновесных активных плазменных средах исследованы в работах [4, 5]. Здесь получены и решены дисперсионные уравнения как в случае пренебрежения релаксационными процессами [4], так и при их учете [5]. Влияние нелинейности двухуровневой среды на взаимодействие электронного пучка малой плотности с плазмой исследовано в [5]. Здесь показано, что при малых плотностях пучка наблюдается периодическая перекачка энергии плазменных колебаний в энергию активной среды. При больших плотностях пучка в среде возможно развитие неустойчивости с инкрементом, слабо отличающимся от пучкового.

В настоящей работе продолжено исследование взаимодействия электронного пучка малой плотности с активной плазмой. Рассмотрено влияние активных молекул на дисперсионные свойства системы при произвольном соотношении между параметрами среды. Анализируется нелинейная динамика развития однодомовой пучковой неустойчивости в плазме с примесью активных молекул, моделируемых нелинейной двухуровневой системой.

2. Рассмотрим взаимодействие электронного пучка малой плотности с безграничной электронной плазмой, содержащей примесь активных молекул. Тепловым движением частиц плазмы пренебрегаем, полагая их тепловые скорости малыми по сравнению с фазовыми скоростями рассматриваемых волн. Считаем, что амплитуда  $\mathbf{E}$  напряженности электрического поля возбуждаемой в среде волны мала ( $|E| \ll mv_{\phi}\omega/e$ , где  $v_{\phi}, \omega$  — фазовая скорость и частота волны), и на этом основании движение частиц плазмы описываем в линейном приближении. Наличие активных молекул в плазме моделируем, как и ранее [4, 5], нелинейной резонансной двухуровневой системой, приводящей к дополнительной поляризации плазмы.

Исходные уравнения включают в себя уравнения Пуассона, уравнения квазигидродинамики для электронов плазмы и уравнения, описывающие нелинейную активную среду [6],

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = -4\pi e(n_b + n_e); \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{e0} \mathbf{v}_e) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}; \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} + \frac{2}{\tau_2} \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \Omega^2 \mathbf{P} = -\frac{\omega_m^2}{4\pi} \frac{N}{N_0} \mathbf{E}; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{N}{N_0} \right) + \frac{N - N_0}{N_0 \tau_1} = \frac{2}{\hbar \Omega N_0} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{P}$  — поляризация двухуровневой среды,  $N = N_1 - N_2$  — разность населенностей верхнего и нижнего энергетических уровней,  $n_b, n_e$  — возмущенные плотности электронов пучка и плазмы,  $\mathbf{v}_e$  — возмущенная скорость электронов плазмы,  $n_{e0}$  — равновесная плотность электронов плазмы,  $N_0$  — равновесная разность заселенностей,  $\tau_{1,2}$  — времена релаксаций двухуровневой системы,  $\omega_m^2 = 8\pi\Omega L |\mu_{12}|^2 N_0 / 3\hbar$ ,  $L = [(\eta^2 + 2)/3]^2$  — поправочный коэффициент Лоренца для изотропной среды [6] ( $\eta$  — показатель преломления),  $\mu_{12}$  — недиагональный дипольный матричный элемент.

Система уравнений (1)–(4) должна быть дополнена уравнениями, описывающими динамику плотности электронов пучка  $n_b$ . Это могут быть, например, гидродинамические уравнения непрерывности и движения частиц пучка. Однако с их помощью не удастся описать нелинейное взаимодействие пучка с волной. В нашем случае необходимо использовать следующий метод [7]: отдельно вычислить траекторию движения каждой частицы пучка в электрическом поле волны, а обратное влияние частиц на волну определять интегральным вкладом всех частиц в правую часть уравнения (1). Для реализации этого метода частицы пучка моделируем плоскими слоями площасти  $S$ , перпендикулярными направлению движения и характеризуемыми координатой каждого слоя  $z_i(t)$  и количеством слоев  $M$  на длине волны  $l = 2\pi/k$  ( $k$  — волновое число). Координата каждого слоя удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{e}{m} \operatorname{Re}(E(z_i, t)). \quad (5)$$

В таком представлении плотность частиц пучка в правой части уравнения (1) имеет следующий вид:

$$n_b = n_{b0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(z - z_i(t)), \quad (6)$$

где  $n_{b0} = M/SI$  — равновесная плотность электронного пучка,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Таким образом, уравнения (1)–(5) являются замкнутыми и описывают взаимодействие электронного пучка с активной плазменной средой.

3. Исследуем сначала линейный отклик такой среды на малые возмущения. Релаксационными процессами пренебрегаем, так как время развития неустойчивости  $\tau \sim [\Omega_e(n_{b0}/n_{e0})^{1/3}]^{-1}$  значительно меньше характерных времен релаксационных процессов [4]. Дисперсионное уравнение в этом случае определяется выражением [4, 5]

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\omega_m^2}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega_b^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0. \quad (7)$$

Тройной резонанс, соответствующий условиям  $\Omega \approx \Omega_e \approx kv_0$ , исследован ранее в [4, 5]. Здесь показано, что при плотностях пучков, превышающих некоторое критическое значение, в среде развивается неустойчивость реактивного типа [4]. В области меньших плотностей, когда инкремент может быть сравним по величине с декрементом затухания колебаний в отсутствие пучка (релаксационные процессы существенны), характер неустойчивости изменяется на диссипативный [5].

Дисперсионное уравнение (7), при произвольном значении параметров среды ( $\Omega \neq \Omega_e$ ) исследовано аналитически и численными методами на ЭВМ. Результаты исследования представлены в табл. 1. Здесь приведены значения собственных частот активной плазмы  $\omega_i$  и значения инкрементов неустойчивостей. Использованные в таблице обозначения определяются следующими выражениями:

$$\gamma_n(x_1, x_2) = \alpha^{1/2} \Omega_e \frac{|1 - \Omega^2/k^2 v_0^2|^{1/2}}{|1 - x_1^2/k^2 v_0^2|^{1/2} |1 - x_2^2/k^2 v_0^2|^{1/2}},$$

$$\gamma_p(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \alpha^{1/3} \Omega_e \left( \frac{x_1}{\Omega_e} \right)^{1/3} \left| \frac{\Omega^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \right|^{1/3},$$

$\alpha = n_{b0}/n_{e0} \ll 1$ , индексы «н» и «р» обозначают соответственно инкремент нерезонансной и резонансной неустойчивостей.

Обсудим кратко результаты аналитического исследования дисперсионного уравнения (7), представленные в табл. 1. Предположим, что  $\omega_m^2 < 0$ . В этом случае волновое число зависит от частоты следующим образом:

$$k = \frac{\omega}{v_0} \left[ 1 \mp \frac{\Omega_b \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_2^2}} \right], \quad (8)$$

где собственные частоты  $\omega_{1,2}$  определены в таблице и удовлетворяют неравенствам  $\omega_1 < \Omega < \omega_2$ .

Из (8) следует, что неустойчивость возможна в частотных интервалах  $0 < \omega \leq \omega_1$ ,  $\Omega \leq \omega \leq \omega_2$ . Инкременты нерезонансной  $\omega = kv_0 + \delta$  ( $|\delta| \ll \omega$ ) и резонансной  $kv_0 = \omega_{1,2}$  неустойчивостей определяются выражениями:

$$\gamma_n = \text{Im } \delta = \gamma_n(\omega_1, \omega_2), \quad k < \omega_1/v_0,$$

Таблица I

		Нерезонансная неустойчивость		Резонансная неустойчивость	
		Инкремент		Инкремент	
		Волновое число		Волновое число	
		$\gamma$	$k$	$\gamma$	$k$
$\omega_m^2 < 0$	$\omega_{1,2} = \frac{\Omega_e + \omega_e^2 +  \omega_m^2 }{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{[\Omega^2 + \Omega_e^2 +  \omega_m^2 ]^2 - 4\Omega_e\Omega^2}$ $\omega_1 < \Omega < \omega_2$	$\gamma_H(\omega_1, \omega_2)$	$k < \omega_1/v_0$ $\Omega/v_0 \leq k < \omega_2/v_0$	$\gamma_p(\omega_1, \omega_2)$ $\gamma_p(\omega_2, \omega_1)$	$k = \omega_1/v_0$ $k = \omega_2/v_0$
$\omega_m^2 > 0$	$\omega_{3,4} = \frac{\Omega_e + \omega_e^2 - \omega_m^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\Omega^2 + \Omega_e^2 - \omega_m^2)^2 - 4\Omega_e\Omega^2}$ $ \Omega - \Omega_e  > \omega_m$	$\Omega < \sqrt{\Omega_e^2 - \omega_m^2}$ $\Omega < \omega_3 < \omega_4$ $\Omega > \sqrt{\Omega_e^2 - \omega_m^2}$ $\omega_4 < \Omega$	$\gamma_H(\omega_3, \omega_4)$ $\gamma_H(\omega_3, \omega_4)$ $\gamma_H(\omega_3, \omega_4)$	$k < \Omega/v_0$ $\omega_3/v_0 < k < \omega_4/v_0$ $k < \omega_3/v_0$ $\omega_4/v_0 < k < \Omega/v_0$	$k = \omega_3/v_0$ $k = \omega_4/v_0$ $k = \omega_3/v_0$ $k = \omega_4/v_0$
		$ \Omega - \Omega_e  < \omega_m$	$\gamma$ $\gamma_{\max}$	$k < \Omega/v_0$ $k = (\Omega/v_0)(1 + \omega_m/\Omega_e)^{-1/2}$	

$$\Omega/v_0 \leq k < \omega_2/v_0$$

— нерезонансная неустойчивость;

$$\gamma_p = \operatorname{Im} \delta = \begin{cases} \gamma_p(\omega_1, \omega_2), & k = \omega_1/v_0 \\ \gamma_p(\omega_2, \omega_1), & k = \omega_2/v_0 \end{cases} \quad (10)$$

— резонансная неустойчивость.

Для среды с  $\omega_m^2 > 0$  и  $|\Omega - \Omega_e| \geq \omega_m$  волновое число определяется выражением (8), в котором собственные частоты  $\omega_{1,2}$  необходимо заменить на  $\omega_{3,4}$ , величина которых определена в табл. 1. Соотношение между собственными частотами среды  $\omega_{3,4}$  и частотой переходов  $\Omega$  теперь не однозначное, как для случая  $\omega_m^2 < 0$ , а зависит от величины отстройки частоты переходов от плазменной частоты. Так, в случае  $\Omega \leq \sqrt{\Omega_e^2 - \omega_m^2}$  имеем  $\Omega < \omega_3 < \omega_4$ , а при  $\Omega > \sqrt{\Omega_e^2 - \omega_m^2}$  справедливы неравенства  $\omega_3 < \omega_4 < \Omega$ . Аналогично случаю  $\omega_m^2 < 0$  можно определить инкременты неустойчивостей и интервалы неустойчивых волновых чисел. Результаты этого исследования приведены в табл. 1.

Для среды с  $\omega_m^2 > 0$ ,  $|\Omega - \Omega_e| < \omega_m$  инкремент неустойчивости равен

$$\gamma = \alpha^{1/2} \Omega_e \frac{k v_0 (\Omega^2 - k^2 v_0^2)^{1/2}}{(k^4 v_0^4 - k^2 v_0^2 (\Omega^2 + \Omega_e^2 - \omega_m^2) + \Omega_e^2 \Omega^2)^{1/2}}, \quad (11)$$

реализуется при  $k < \Omega/v_0$  и обусловлен наличием активного компонента в плазме. Его максимальное значение достигается при  $k = \Omega/[v_0(1 + \omega_m/\Omega_e)^{1/2}]$  и равно

$$\gamma_{\max} = \Omega_e \alpha^{1/2} [(\Omega_e + \omega_m)^2 - \Omega^2]^{-1/2}. \quad (12)$$

Из приведенных в таблице данных следует, что в «активной» плазме существует два интервала по волновому числу, в которых возможно развитие неустойчивости. Вблизи волновых чисел  $k_i = \omega_i/v_0$  инкременты максимальны,  $\gamma = \gamma_p(x_i, x_k)$ . Вид инкрементов и условия их реализации указывают на то, что неустойчивость имеет характерные черты резонансной неустойчивости пучка малой плотности в плазме.

С удалением от волновых чисел  $k_i$  инкременты уменьшаются по величине и качественно соответствуют развитию в среде нерезонансной пучковой неустойчивости. Численные расчеты уравнения (7) показывают, что ширина интервалов неустойчивых волновых чисел в области максимума инкремента, как и в случае пучковой неустойчивости, оказывается порядка  $\Delta k \simeq \gamma_p(x_i, x_k)/v_0$ .

4. Исследуем влияние активных молекул на нелинейную динамику взаимодействия пучка малой плотности с плазмой. Предположим, что в среде выполнены условия тройного резонанса ( $\Omega \simeq \Omega_e \simeq k v_0$ ), а возбуждаемое возмущение — одномодовое. Последнее предположение справедливо для пучков достаточно малой плотности  $\alpha \ll 1$  [1].

Анализ дисперсионного уравнения (7) показал [4, 5], что в среде реализуются два существенно отличающихся по величине характерных масштаба времени: период осцилляции поля  $T_1 = 2\pi/\Omega$  и время, обратное инкременту неустойчивости  $T_2 \simeq \gamma_p^{-1} \gg T_1$ . Тогда усредняя систему (1)–(5) по быстрому времени, аналогично [7] преобразуем ее к уравнениям, определяющим медленные изменения амплитуд электрического поля  $\mathbf{E}$ , поляризации  $\Pi$  соответствующих им фаз  $\varphi_1, \varphi_2$  и инверсии  $Q$ ,

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = -\Pi \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \cos(2\pi\xi_i + \varphi_1); \quad (13)$$

$$g \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \Pi \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sin(2\pi\zeta_i + \varphi_1); \quad (14)$$

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = -\Omega_R^2 Q g \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (15)$$

$$\Pi \frac{d\varphi_2}{d\tau} = -\Omega_R^2 Q g \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (16)$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = g \Pi \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (17)$$

$$\frac{du_i}{d\tau} = -g \cos(2\pi\zeta_i + \varphi_1); \quad (18)$$

$$2\pi \frac{d\zeta_i}{d\tau} = u_i, \quad (19)$$

где

$$\tau = \alpha^{1/3} \Omega_e t, \quad g = E/E_*, \quad \Pi = 2\pi P/\alpha^{1/3} E_*,$$

$$E_*^2 = 4\pi n_{b0} m v_0^2 \alpha^{1/3}, \quad \Omega_R = \omega_R / \alpha^{1/3} \Omega_e$$

— безразмерная частота Раби,  $\omega_R = |\mu_{12}| E_*/\hbar$  [8],  $L \approx 1$ ,

$$Q = 2\pi \hbar \Omega N / E_*^2 = \frac{3}{4} \frac{\omega_m^2}{\omega_R^2} \frac{N}{N_0}.$$

Величина  $Q$  характеризует отношение плотности энергии, аккумулированной двухуровневыми молекулами, к плотности энергии электрического поля, создаваемого электронным пучком в плазме в отсутствие активных молекул.

Система уравнений (13)–(19) имеет интегралы

$$I_1 = g^2/2 + Q + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u_i = \text{const}; \quad (20)$$

$$I_2 = \Pi^2 + \Omega_R^2 Q^2 = \text{const}. \quad (21)$$

Первый из них соответствует закону сохранения энергии системы двухуровневая среда — неравновесная плазма, второй описывает сохранение длины вектора Блоха в отсутствие релаксационных членов.

Исследование уравнений (13)–(19) начнем сначала в линейном приближении. Анализ начальной стадии взаимодействия показывает наличие неустойчивых корней  $g = g_0 \exp(\gamma\tau)$ ,  $\Pi = \Pi_0 \exp(\gamma\tau)$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 = C$ ,  $\varphi_1 = \delta t$ , инкремент  $\gamma$  и реальная поправка к частоте  $\delta$  которых совпадают с полученными из уравнения (7). Соотношение между константами  $\Pi_0$ ,  $g_0$ ,  $C$  и параметрами среды следующее:

$$\Pi_0 = g_0 \frac{|\omega_m|}{2\alpha^{1/3} \Omega_e} (\gamma^2 + \delta^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} C = \gamma/\delta.$$

Таким образом, начальная стадия неустойчивости соответствует предсказаниям линейной теории.

Система уравнений (13)–(19) анализировалась численно для неинвертированной среды ( $Q_0 > 0$ ) при следующих значениях параметров  $\Omega_R \leq 10$ ,  $g_0 \approx 0.01$ ,  $\Pi_0 \ll 1$ . Точность счета контролировалась сохранением интегралов  $I_{1,2}$ .

## Результаты численного анализа следующие.

Увеличение начального значения  $Q_0$  сопровождается уменьшением инкремента и затягиванием начальной стадии неустойчивости. Выше некоторого критического значения  $Q_k$  неустойчивость не развивается. Пороговое значение  $Q_k$  связано следующим соотношением с безразмерной частотой Раби  $\Omega_R^2$ :  $Q_k \approx 1,2$  и совпадает с выводами линейной теории [4, 5].

Вдали от порога устойчивости ( $Q_0 \ll Q_k$ ) для малых частот Раби ( $\Omega_R \ll 1$ ) амплитуда электрического поля экспоненциально нарастает достигая стационарного значения  $\mathcal{E} \sim 1$ , и в дальнейшем, осциллирует вблизи этого уровня. Максимальная амплитуда электрического поля при этом оказывается порядка  $\mathcal{E} \approx 1,5 \div 1,7$ . Инверсия среды изменяется незначительно, и среда остается в неинвертированном состоянии (рис. 1, см. на вклейке). Этот факт может быть объяснен слабой связью двухуровневой и пучково-плазменной колебательными системами из-за малости параметра  $\Omega_R$  (на рис. 1  $\Omega_R^2 = 0,01$ ).

С увеличением частоты Раби ( $\Omega_R \geq 1$ ) изменяется характер взаимодействия. Оказывается, что вдали от порога устойчивости возможен перевод «активного» компонента плазмы в инвертированное состояние. На рис. 2а, б приведены типичные зависимости напряженности электрического поля и инверсии среды от времени при условии, что плотность энергии, запасаемая в двухуровневой среде, мала по сравнению с плотностью энергии, возбуждаемой в плазме электронным пучком ( $Q_0 \approx 0,1$ ). Это условие соответствует режиму осцилляций Раби в электрическом поле напряженностью  $E_*$  [8].

На рис. 2а, б различимы два масштаба времени. Мелкий масштаб соответствует периоду перекачки энергии пучка в волну и обратно  $T_b$ . Оказывается, что при  $\Omega_R \leq 1$  (когда изменения инверсии среды наиболее существенны) период оптической нутации  $T_R$  сравним с  $T_b$ . Очевидно, большой масштаб времени является результатом интерференции двух мелких масштабов  $T_b$  и  $T_R$  (рис. 2а —  $\Omega_R^2 = 0,3$ ; рис. 2б —  $\Omega_R^2 = 1$ ).

При достаточно больших частотах Раби ( $\Omega_R^2 \gg 1$ ) двухуровневая среда является сильнонелинейной. Численный анализ укороченной системы уравнений показывает, что разность заселенностей испытывает нерегулярные изменения, а напряженность электрического поля вдали от порога устойчивости ведет себя практически так же, как и в случае  $\Omega_R^2 \ll 1$ .

5. Обобщая проведенные исследования нелинейного взаимодействия электронных пучков малой плотности с «активной» плазменной средой, можно сделать следующие выводы.

Для неинвертированной среды ( $\omega_m^2 < 0$ ) при любой величине расстройки  $|\Omega - \Omega_e|$ , а для инвертированной среды ( $\omega_m^2 > 0$ ) при расстройках  $|\Omega - \Omega_e| \geq \omega_m$  возможно развитие неустойчивости в двух интервалах по волновому числу. В области максимального инкремента ширина неустойчивого интервала по волновому числу пропорциональна инкременту резонансной неустойчивости  $\gamma_p(x_i, x_k)$ . В этих интервалах неустойчивость аналогична неустойчивости пучка в плазме.

В неинвертированной среде при малых расстройках  $|\Omega - \Omega_e| < \omega_m$  неустойчивость обусловлена наличием «активного» компонента плазмы.

Нелинейное взаимодействие электронного пучка с плазмой, содержащей примесь нелинейных двухуровневых молекул, в одномодовом рассмотрении характеризуется резонансной зависимостью инверсии среды от безразмерной частоты Раби  $\Omega_R$ . При малых и больших значениях последней изменения инверсии среды несущественны в первом случае, нерегулярны — во втором. С приближением  $\Omega_R$  к единице наблюдается синхронизация обмена энергией в пучково-плазменной и активной колебательных системах. При этом первоначально неинвертированная среда на определенное время  $\Delta t \sim T_b$  может переходить в инвертированное состояние.

Авторы благодарны А. Н. Кондратенко за поддержку работы и конструктивные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 307 с.
2. Басов Н. Г., Беленов Э. И., Данилычев В. А. и др. // УФН. 1974. Т. 114 № 2. С. 213.
3. Лебедев П. М., Онищенко И. Н., Файнберг Я. Б. и др. // Физика плазмы. 1976. Т. 2. № 3. С. 407.
4. Крашенинников С. И., Старых В. В. // Физика плазмы. 1977. Т. 3. № 6. С. 1403.
5. Бондаренко М. Б., Кондратенко А. Н., Ткаченко В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 11. С. 1382.
6. Пантелеев Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники. — М.: Мир, 1972.—384 с.
7. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. — М.: Атомиздат, 1977.—343 с.
8. Коcharовский В. В., Коcharовский Вл. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 9. С. 1099.

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
5 июня 1989 г.

## NONLINEAR INTERACTION OF AN ELECTRON BEAM WITH ACTIVE PLASMA MEDIUM

Sh. Sh. Moiseev, V. I. Tkachenko,  
G. G. Chigladze, I. B. Shcherbinina

The interaction between the electron beam of small density and the plasma containing impurity of active molecules is investigated. The dispersive equation of such system in the case of arbitrary ratio between characteristic parameters of the medium is analysed. Increments and conditions of instability development are defined. The nonlinear dynamics of the beam interaction with nonlinear active plasma medium is investigated. It is shown that medium inversion changes little at small and large Raby's frequencies. When the Raby frequency is of increment the beam instability, the medium inversion, oscillating for some time interval may change its sign.

---

УДК 553.951:84

## О МАГНИТОЗВУКОВОМ УДАРЕ

В. А. Павлов

Аналитически исследованы закономерности формирования и эволюции ударной магнитозвуковой волны, возбуждаемой движущимся в плазме тонким осесимметричным телом. Проведено сопоставление полученных результатов с результатами задачи о звуковом ударе.

Большой круг явлений, происходящих на Солнце и в окрестности Луны, обусловлен магнитогидродинамическими процессами [1, 2]. Основная часть солнечного ветра покидает Солнце в виде потоков высокой скорости, направленных вдоль открытых магнитных полей корональных дыр. При обтекании солнечным ветром планет, не обладающих магнитным полем и плотной атмосферой, характер обтекания зависит от электромагнитных свойств планеты. Примером такой ситуации является Луна [2], которую можно считать полностью поглощающим набегающие частицы незлектропроводным телом. Позади такого тела образуется вытянутая каверна, отделенная от плазмы тангенциальным разрывом.

Известен ряд работ [3–9], посвященных исследованию линейных магнитогидродинамических волн, возбуждаемых движущимися источниками. Для описания процессов на Солнце и в окрестности Луны представляет интерес изучение нелинейной эволюции таких полей при формировании и развитии магнитозвуковых ударных волн [1, 2]. Отметим, что аналогичный круг проблем для динамики нейтрального газа (задача о звуковом ударе) подробно исследован [10–15]. Методика [12, 15, 16] может быть использована для описания магнитозвукового удара быстрой волны в двух ситуациях. Первая ситуация  $v_0 > a_0 \gg b_0$  ( $v_0$  — скорость тела (набегающего потока),  $a_0$  — линейная скорость звука,  $b_0$  — альфвеновская скорость) приближенно сводится к задаче, исследованной в [10–15]. Новыми свойствами обладают поля при выполнении неравенства  $v_0 > b_0 \gg a_0$  — именно такое условие имеется в окрестности Луны:  $v_0/b_0 \sim 10$ ,  $b_0 \gg a_0$ .

Существуют еще две ситуации обтекания, представляющие значительный интерес с общетеоретической точки зрения:  $b_0 > v_0 > a_0$ ,  $a_0 > v_0 > b_0$ . Здесь возможны случаи [17]: эллиптико-гиперболический (две действительные характеристики у медленной волны) и квазигиперболический (четыре действительные характеристики у медленной волны). При этом черенковским механизмом возбуждается только медленная волна, но ее эволюция не удовлетворяет условиям применимости приближения «нелинейной геометрической акустики». В настоящее время не разработаны методы описания таких неодномерных нелинейных (в частности ударных) медленных магнитозвуковых волн. В случаях  $b_0 > v_0 > a_0$ ,  $a_0 > v_0 > b_0$  для быстрой волны нет действительных характеристик — описание таких волн встречает большие трудности [18, 19].

Ниже рассмотрим случай  $v_0 > b_0 \gg a_0$  и исследуем поле, возбуждающее движущимся со скоростью  $v_0 = v_0 e_z = \text{const}$  телом в холодной плазме  $b_0 \gg a_0$ . В системе координат, связанной с этим телом, имеем стационарную задачу:

$$v_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \operatorname{div} \rho v = 0,$$

$$v_0 \frac{\partial v}{\partial z} + \left( v \frac{\partial}{\partial r} \right) v = - \frac{\mu}{\rho} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] = 0, \quad (1)$$

$$v_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} - \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0,$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$  — скорость и плотность плазмы,  $\mathbf{H}$  — магнитное поле,  $\mu$  — магнитная проницаемость вакуума. Осесимметричное тело опишем уравнением  $r=R(z)$ , где  $r$  — цилиндрическая координата. В невозмущенном состоянии имеем равномерный поток однородной плазмы:  $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{H}=H_0 \mathbf{e}_z$ ,  $\rho=\rho_0$ . Рассмотрение ситуации  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{v}_0$  упрощает задачу — приводит к осевой симметрии полей. Из-за симметрии не происходит вращения плазмы относительно оси тела — отсутствует возбуждение альфавеновской волны. При условии  $v_0 > b_0 \gg a_0$  медленная волна возбуждается черенковским механизмом и возмущение сосредоточено в окрестности оси  $z$  позади тела. Угол раскрыва конуса этой области порядка  $2a_0/v_0$ . Поэтому только в этой узкой области существенно взаимодействие медленной и быстрой волн. Из-за конечности отношения  $a_0/b_0$  возникают эффекты дисперсии у быстрой магнитозвуковой волны. В частности, при этом должны возникнуть поправки  $O(a_0^2/b_0^2)$  для поля быстрой волны, возможно возникновение осцилляций позади фронта — анализ этих эффектов может быть проведен лишь в результате построения следующего за «нелинейной акустикой» приближения.

Границное условие на поверхности тела состоит в том, что на ней нормальная компонента скорости  $v_n$  равна нулю:

$$v_r/v_z = dR/dz, \quad r = R(z), \quad (2)$$

при этом условие тангенциального разрыва  $H_n=0$  при  $v_n=0$  в холодной плазме соответствует условию непрерывности касательной компоненты вектора  $\mathbf{H}$  на границе. Эти граничные условия имеют место для непроводящих планет, не обладающих магнитным полем и имеющих неплотные атмосферы.

Интересуясь слабыми нелинейными эффектами, рассмотрение начнем с линейного приближения для быстрой волны:

$$\frac{v_z}{v_0} = 1, \quad \frac{v_r}{v_0} = \frac{H_r}{H_0} = \Phi(r, z - \beta r), \quad \frac{H_z}{H_0} = 1 - \Psi(r, z - \beta r), \quad (3)$$

где

$$\Phi = \frac{I(z - \beta r)}{2\pi v_0} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{z-\beta r} \frac{d\eta q(\eta)}{\sqrt{(z-\eta)^2 - \beta^2 r^2}},$$

$$\Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int_{\beta r}^z dz' \Phi(r, z' - \beta r) \right),$$

$$\beta = \sqrt{m^2 - 1}, \quad m = \frac{v_0}{b_0} > 1, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

$$q(z)|_{r \rightarrow 0} \approx 2\pi r v_r.$$

Для тонкого тела условие (2) принимает вид

$$q(z) = v_0 d\Sigma(z)/dz, \quad \Sigma = \pi R^2(z).$$

Понятие тонкого тела соответствует тому, что функция  $dR/dz$  является одним из малых параметров задачи — при этом допустима линеаризация граничных условий. Если иметь в виду обтекание планет плазмой, то условие «тонкого тела» плохо выполняется для самих планет, но оно

может быть использовано при получении оценок, если за «тонкое тело» принять каверну позади планеты. Границей каверны является тангенциальный разрыв, и форма каверны находится из отдельной задачи.

Поведение поля вблизи волнового фронта (черенковского конуса) и на больших расстояниях от оси ( $r \gg z - \beta r$ ) описывается одинаково:

$$\Phi \approx \sqrt{\frac{\beta}{2r}} I(z - \beta r) F(z - \beta r); \quad (4)$$

$$\Psi \approx -\beta \Phi, \quad (5)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\xi \frac{d\eta \Sigma''(\eta)}{\sqrt{\xi - \eta}}.$$

Как отмечалось выше, вне узкого конуса с углом раскрыва порядка  $2a_0/b_0$  влияние медленной волны не существенно. Для тела конечных размеров функция  $F(\eta)$  обладает свойством  $\int_0^\infty d\eta F(\eta) = 0$  [16], [15]

(§ 7.5). Типичная зависимость  $F(\eta)$  — двуполярная функция, имеющая одинаковые площади положительного и отрицательного выбросов.

Решение системы (1) в случае слабых нелинейных эффектов будем строить методом Пуанкаре—Лайтхилла—Го [19] в виде формальных рядов при  $\varepsilon < 1$  и в окончательных формулах примем  $\varepsilon = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{v_r(r, \xi)}{v_0} &= \varepsilon \left( \frac{\beta}{2r} \right)^{1/2} I(\xi) A_1(\xi) + \sum_2^\infty \varepsilon^k A_k(r, \xi), \\ \frac{H_r(r, \xi)}{H_0} &= \varepsilon \left( \frac{\beta}{2r} \right)^{1/2} I(\xi) B_1(\xi) + \sum_2^\infty \varepsilon^k B_k(r, \xi), \\ \frac{H_s(r, \xi)}{H_0} &= 1 + \varepsilon \frac{\beta^{3/2}}{(2r)^{1/2}} I(\xi) C_1(\xi) + \sum_2^\infty \varepsilon^k C_k(r, \xi), \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= 1 + \varepsilon \frac{\beta^{3/2}}{(2r)^{1/2}} I(\xi) D_1(\xi) + \sum_2^\infty \varepsilon^k D_k(r, \xi), \\ \frac{v_z}{v_0} &= 1 + \sum_2^\infty \varepsilon^k E_k(r, \xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\xi = \xi(r, z)$  — деформированная координата [18, 19], которая определяется из условия увеличения точности решения для приближения первого порядка. В задачах о слабонелинейных процессах функция  $\xi(r, z)$  находится из уравнения для  $C_+$ -характеристики. Таким образом, делается отождествление волнового фронта с  $C_+$ -характеристикой. Уравнение неподвижной характеристики, быстрой волны имеет вид

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) + b = 0, \quad (7)$$

где  $b = ((\mu/\rho) H^2)^{1/2}$ ,  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к характеристике. Если  $\chi$  — угол между характеристикой и осью  $z$ ,  $Q$  — угол между вектором  $\mathbf{v}$  и осью  $z$ ,  $s$  — расстояние вдоль характеристики, то имеют место соотношения  $dz = ds \cos \chi$ ,  $dr = ds \sin \chi$ ,  $v_z = v \cos Q$ ,  $v_r = v \sin Q$  и уравнение (7) приводится к виду

$$dz/dr = \operatorname{ctg}(Q + v), \quad (8)$$

где

$$v = \arcsin b/v.$$

При описании первого приближения используем идеализацию лучевых трубок, боковые поверхности которых непроницаемы потоку энергии.

В отличие от динамики нейтрального газа, для быстрой волны имеем движение плазмы поперек оси лучевой трубы. Волновой фронт будет ортогонален оси трубы, и, как отмечалось выше, фронт  $\xi(r, z) = \text{const}$  совпадает с  $C_+$ -характеристикой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(r, \xi)}{\partial r} &= \operatorname{ctg}(Q + v) \approx \operatorname{ctg} v_0 - \sin^{-2} v_0 (v - Q - v_0) \approx \\ &\approx \beta - \frac{m^2}{\beta} \frac{b - b_0}{b_0} - m^2 \Phi(r, \xi). \end{aligned} \quad (9)$$

В результате интегрирования (9) с учетом (4), (5) уравнение для  $\xi(r, z)$

$$z = \beta r - kF(\xi)\sqrt{r} + \xi, \quad (10)$$

где

$$r \gg \xi, \quad k = 2^{-1/2} 3m^2(m^2 - 1)^{1/4} I(\xi). \quad (11)$$

Конечно, структура формулы (10) (наличие членов, пропорциональных  $r$  и  $r^{1/2}$ ) находится в соответствии с законами для цилиндрических ударных волн, впервые установленными Ландау [16]. Отличие описания задачи о магнитозвуковом ударе от задачи звукового удара заключается в представлении коэффициента  $k$  в (11). Для звукового удара  $k \sim M^4(M^2 - 1)^{-3/4}$ ,  $\beta = (M^2 - 1)$ ,  $M = v_0/a_0$ . Ограничиваюсь первым приближением в (6), на основе исходной системы (1) получим

$$A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = F(\xi).$$

Начало формирования ударной волны (скачок нулевой интенсивности) соответствует появлению огибающей у однопараметрического семейства  $z(r, \xi)$ :  $\frac{\partial z(r, \xi)}{\partial \xi} = 0$ , что приводит к соотношению для поперечной координаты начала возникновения ударной волны

$$r_0 = [kF'(\xi_m)]^{-2},$$

где  $\xi_m$  — точка максимума  $F'(\xi)$ . У двуполярного импульса могут образоваться две ударные волны на участках, где  $F'(\xi) > 0$ . Для слабой стационарной волны наклон  $\partial z / \partial r$  ударного фронта равен среднему арифметическому наклонов характеристик по обе стороны от фронта и положение фронта определяется условием «равных площадей» [15]:

$$\frac{1}{2} [F(\xi_1) + F(\xi_2)] (\xi_2 - \xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi F(\xi), \quad (12)$$

где индексы 1 и 2 относятся к значениям  $\xi$  перед и позади ударного фронта. Если ударная волна становится головной:  $F(\xi_1) = 0$ ,  $\xi_1 = 0$ , то положение ударного фронта определяется системой уравнений

$$r^{1/2} = \frac{2}{kF^2(\xi)} \int_0^{\xi} d\xi F(\xi); \quad (13)$$

$$z = \beta r - kF(\xi_2)r^{1/2} + \xi_2. \quad (14)$$

В качестве примера рассмотрим обтекание конуса с углом раскрыва  $2\delta$ :

$$\Sigma(z) = \pi(\delta r)^2, \quad F(\xi) = 2\delta^2 \xi^{1/2},$$

$$\xi = r((\beta/2)k\delta^2)^2,$$

$$z = r(\beta - (3/4)k^2\delta^2).$$

На основе формул (9), (11), (15) получим величину угла раскрыва конической ударной волны

$$2(v+Q) = 2v_0 + (27/4)\delta^4 m^2(m^2-1)^{1/2}. \quad (16)$$

Оценим интенсивность магнитозвукового удара такой волны на основе уравнения состояния  $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$ :

$$\frac{p-p_0}{p_0} = -1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \approx 2^{-3/2} 27\gamma (\delta m)^4 (m^2-1)^{5/4}. \quad (17)$$

Отметим, что закономерности обтекания конуса в динамике нейтрального газа отличаются от (16), (17):  $(v+Q-v_0) \sim \delta^4 M^6 (M^2-1)^{-3/2}$ ,  $(p-p_0) \sim \delta^4 M^6 (M^2-1)^{-1}$ . Общей чертой этих двух задач является то, что  $(v+Q-v_0) \sim (p-p_0) \sim \delta^4$  и при больших числах Маха угол раскрыва  $(v+Q-v_0)$  пропорционален третьей степени числа Маха.

Исследуем свойства ударной волны на больших расстояниях от оси тела. Из (13) имеем  $\xi_2 \rightarrow \xi_0$  при  $r \rightarrow \infty$ , где  $F(\xi_0) = 0$ . Следствием этого является асимптотика

$$F(\xi) \simeq r^{-1/4} [(2/k) \int_0^{\xi_0} d\xi F(\xi)]^{1/2}, \quad (18)$$

$$r = \beta r - [2k \int_0^{\xi_0} d\xi F(\xi)]^{1/2} r^{1/4} + \xi,$$

и в такой ситуации интенсивность магнитозвукового удара дается соотношением

$$\frac{p-p_0}{p_0} \approx \gamma 2^{1/4} 3^{1/2} r^{-3/4} [ \int_0^{\xi_0} d\xi F(\xi) ]^{1/2} (m^2-1)^{5/8} m^{-1}.$$

Отметим, что закономерность  $(p-p_0) \sim r^{-3/4}$  является универсальной для цилиндрических ударных волн [18]. Для звукового удара  $(p-p_0) \sim (M^2-1)^{1/8}$ . В случае магнитозвукового удара зависимость от числа Маха более сильная:  $(p-p_0) \sim (m^2-1)^{5/8} m^{-1}$ , но при больших числах Маха скачок давления в обеих задачах пропорционален числу Маха в степени  $1/4$ .

В области между двумя ударными волнами в двуполярном импульсе имеем  $\xi = \xi_0$ ,  $F(\xi) \approx 0$ :

$$F(\xi) \approx (\beta r - z + \xi_0) k^{-1} r^{-1/2}, \quad (19)$$

$$\frac{p-p_0}{p_0} \approx \frac{\gamma}{3} m^{-2} (m^2-1)^{1/2} r^{-1} (\beta r - z + \xi_0).$$

Любопытно, что формула (19) очень близка к аналогичной зависимости для звукового удара. Последняя совпадает с (19), если в (19) сделать замену  $3 \rightarrow (\gamma+1)$ ,  $m \rightarrow M$ .

Поля  $v$ ,  $H$ ,  $\rho$  находятся на основе (6), (10), (15), (18). Известные представления нелинейной геометрической акустики [13, 14] позволяют сделать обобщения на случаи отсутствия осевой симметрии, неоднородной плазмы, а также криволинейного и неравномерного движения тела.

Соотношения (6), (10), (18) дают оценку структуры поля. Формулы (10), (16) могут быть использованы для решения «обратной за-

дачей», т. е. для определения скорости набегающего потока плазмы по известной альфвеновской скорости и по измерению угла раскрыва конуса ударной волны и для определения альфвеновской скорости по известной скорости потока и по углу раскрыва, при условии применимости приближения тонкого тела.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прист Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985. С. 589.
2. Баранов В. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. — М.: Наука. С. 335.
3. Морозов А. И. // Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М.: АН СССР, 1958. Т. 4. С. 331.
4. Докучаев В. П. // Астрон. журн. 1964. Т. 41. № 1. С. 33.
5. Докучаев В. П. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. Вып. 2. С. 587.
6. Брегауз В. Д. // Астрон. журн. 1969. Т. 46. № 1. С. 49.
7. Докучаев В. П. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. Вып. 2. С. 723.
8. Павлов В. А. // Магнитная гидродинамика. 1975. № 3. С. 58.
9. Павлов В. А. // Сб. Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: Гос. ун-т, 1979. С. 76.
10. Taylor G. I., MacColl J. W. // Proc. Roy. Soc. A. 1933. V. 139. P. 278.
11. Lighthill M. J. // Q. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. P. 309.
12. Whitham G. B. // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 390.
13. Фридмен М., Кейн Э., Сигалла А. // Ракет. техн. и космонавт. 1963. № 6. С. 56.
14. Жилин Ю. Л. // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 4. С. 21.
15. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Наука, 1977. С. 319.
16. Ландау Л. Д. // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 4. С. 286.
17. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1962. С. 246.
18. Lighthill M. J. // Phil. Mag. 1949. (7). V. 40. P. 1179.
19. Цянь Сюэ-Сень. // Сб. Проблемы механ. — М.: ИЛ, 1959. Вып. 2. С. 7.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 мая 1989 г.

## MAGNETOSONIC BANG

V. A. Pavlov

The laws of formation of magnetosonic shock excited by symmetrical slender body moving in plasma are investigated. The results received and sonic bang results are compared.

## ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФОКУСИРОВКИ ОБРАЩЕННОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ф. М. Исмагилов, Ю. А. Кравцов

В фазовом приближении геометрической оптики для функции Грина рассчитана эффективность фокусировки обращенного волнового поля в случайно-неоднородных средах для неоднородностей, описываемых гауссовой корреляционной функцией, и для турбулентных флуктуаций, описываемых степенной структурной функцией с произвольным показателем. Фокусировка поля в произвольную точку пространства, отличную от точки излучения, обеспечивалась коррекцией функции Грина фазовым множителем, определяемым для свободного пространства. Проведена оценка размеров области, в которой интенсивность поля, сфокусированного по алгоритмам свободного пространства, сохранит свою величину при наличии случайных неоднородностей, что позволяет оценить минимально необходимое число реперных источников, позволяющее осуществить эффективную фокусировку поля в любую точку заданной области.

**1. Введение.** В последнее время большое внимание уделяется созданию адаптивных систем, обращающих волновой фронт — антенн ОВФ [1, 2], предназначенных для компенсации влияния случайных неоднородностей среды и достижения дифракционного предела фокусировки отраженного излучения в окрестности источника. Вопрос об эффективности фокусировки обращенного волнового поля в среде с флуктуирующими во времени параметрами был рассмотрен в работе [3] в рамках корреляционной модели неоднородностей среды и в работе [4] для турбулентной среды.

В данной работе мы проанализируем вопрос о необходимом числе реперных источников, позволяющем осуществить эффективную фокусировку поля в любую точку заданной области. Пусть волна, исходящая от реперного источника, расположенного в точке  $r_0$ , обращается антенной  $A$ , координаты точек поверхности которой обозначим  $\rho$ . Начало отсчета координат О поместим в центр антенны (рис. 1, см на вклейке). Поле, падающее на обращающую антенну, выражается через функцию Грина неоднородной среды (множитель  $\exp\{-i\omega t\}$  для краткости опускаем);

$$E_{\text{пад}}(\rho) = G(r_0 \rightarrow \rho). \quad (1)$$

Обращенная волна создается сопряжением фазы, так что на поверхности антенны

$$E_{\text{обр}}(\rho) = BE_{\text{пад}}^*(\rho), \quad (2)$$

где  $B$  — коэффициент усиления антенны. Волна с граничным условием (2) автоматически фокусируется в точку  $r_0$ . Если неоднородности среды покоятся, а характерные масштабы неоднородностей велики по сравнению с длиной волны, то, как известно [5], при обращении волны в точку  $r_0$  реализуется дифракционный предел фокусировки для однородной среды.

Для фокусировки обращенного поля в произвольную точку пространства  $r_1$  необходимо усложнить алгоритм обращения, так что излучаемая волна

$$E_{\text{изл}}(\rho) = A(r_0, \rho, r_1) E_{\text{обр}}(\rho), \quad (3)$$

где  $A(r_0, \rho, r_1)$  — управляющий множитель.

Управление лучом будем осуществлять при помощи фазового множителя

$$A(r_0, \rho, r_1) = \exp\{i\varphi_q(r_0, \rho, r_1)\} = \exp\{-ik(|r_1 - \rho| - |r_0 - \rho|)\}, \quad (4)$$

где фазовая функция  $\varphi_q(r_0, \rho, r_1)$  переводит в свободном пространстве сферическую волну, покидающую точку  $r_0$ , в сферическую волну, скользящую в точке  $r_1$ . В сущности, слагаемое  $-|\rho - r_1|$  превращает падающую сферическую волну в плоскую, а слагаемое  $|\rho - r_0|$  осуществляет фокусировку в точку  $r_1$ .

Используя алгоритм (4), поле в произвольной точке  $r_2$  можно записать при помощи кирхгофовского дифракционного интеграла:

$$E(r_2) = -2ikB \int_{S_A} G^*(r_0 \rightarrow \rho) A(r_0, \rho, r_1) G(\rho \rightarrow r_2) d^2\rho, \quad (5)$$

где  $k$  — волновое число.

В силу (5) выражение для средней интенсивности поля в точке  $r_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} I(r_2) = & 4k^2 B^2 \iint \langle G^*(r_0 \rightarrow \rho_1) A(r_0, \rho_1, r_1) G(\rho_1 \rightarrow r_2) \times \\ & \times G(r_1 \rightarrow \rho_2) A^*(r_1, \rho_2, r_2) G^*(\rho_2 \rightarrow r_2) \rangle d^2\rho_1 d^2\rho_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по ансамблю реализаций случайных неоднородностей среды.

Вопрос, который мы хотели бы рассмотреть в данной работе, заключается в том, чтобы оценить размеры области, в которой интенсивность поля, сфокусированного по алгоритмам свободного пространства, сохранит свою величину при наличии случайных неоднородностей.

**2. Используемые приближения.** Следуя [4], анализ эффективности фокусировки поля во флуктуирующей среде проведем в предположении, что функция Грина  $G(r \rightarrow \rho)$  описывается фазовым приближением геометрической оптики

$$G(r \rightarrow \rho) = G_0(r \rightarrow \rho) \exp\{\tilde{\varphi}(r \rightarrow \rho)\}. \quad (7)$$

Здесь  $G_0(r \rightarrow \rho) = -(4\pi)^{-1}|r - \rho| \exp\{ik|r - \rho|\}$  — функция Грина для однородной среды,

$$\tilde{\varphi}(r \rightarrow \rho) = k/2 \int_r^\rho \tilde{\epsilon}(r(s)) ds \quad (8)$$

— флуктуационная составляющая фазы,  $\tilde{\epsilon}(r)$  — флуктуации диэлектрической проницаемости. Интегрирование в (8) ведется вдоль невозмущенного луча  $r(s) = r - s(r - \rho)|r - \rho|^{-1}$ , соединяющего точки  $r$  и  $\rho$ . Несмотря на то, что функция Грина флуктуирующей среды описывается фазовым приближением геометрической оптики, формула Кирхгофа (5) описывает дифракционные эффекты.

Во френелевском приближении ( $|r_\perp - \rho| \ll z$ ) для невозмущенной функции Грина имеем

$$G_0(r \rightarrow \rho) = -(4\pi z)^{-1} \exp\{ik(z + (r_\perp - \rho)^2/2z)\}, \quad (9)$$

тогда как управляющий множитель (4) равен:

$$A(r_0, \rho, r_1) = \exp\{ik(B\rho + (1/2)C\rho^2)\}, \quad (10)$$

где  $B = z_1^{-1}r_1 - z_0^{-1}r_0$ ,  $C = k(z_0 - z_1)/(z_1 z_0)$ ,  $r_\perp$  — поперечная составляющая радиуса-вектора точки наблюдения  $r = (r_\perp, z)$ , ось  $0z$  выбрана вдоль оси симметрии антенны. Линейный член в (10) поворачивает

чивает фазовый фронт волны в направлении точки  $r_1$ , а квадратичный его искривляет для перефокусировки с расстояния  $z_0$  на расстояние  $z_1$ .

При сделанных допущениях в плоском случае ( $r_\perp = (x, 0)$ ,  $\rho = (\xi, 0)$ ) средняя интенсивность запишется в виде

$$I(r_2) = [4k^2B^2/(16\pi^2z_1z_0)^2] \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta_1 \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta_2 \times \\ \times \exp\left\{ik\sin\theta(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{ik}{2} \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) - \frac{1}{2} \sigma_\varphi^2\right\}, \quad (11)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями наблюдения и фокусировки (рис. 1),  $L$  — размер антенны,

$$\sigma_\varphi^2 = \langle [\tilde{\varphi}(r_0 \rightarrow r_1) - \tilde{\varphi}(r_1 \rightarrow r_2) - \tilde{\varphi}(r_0 \rightarrow r_2) + \tilde{\varphi}(r_2 \rightarrow r_1)]^2 \rangle. \quad (12)$$

Необходимо отметить, что даже в однородной среде вследствие ограниченности апертуры идеальной фокусировки достичь не удается: вместо желаемой точки получаем систему фокальных пятен. Наибольшая интенсивность приходится на центральное пятно с центром в точке  $r_1$  с размерами:

$$\text{поперечный } \Delta x = (\lambda/2)(z_1/L),$$

$$\text{продольный } \begin{cases} \Delta z = (\lambda/2)(z_1/L)^2, & kL^2 \gg z_1 \\ \Delta z = \infty, & kL^2 \ll z_1 \end{cases}.$$

В зоне Фраунгофера ( $kL^2 \ll z_1$ ) пятно расплывается в полосу и о фокусировке можно говорить весьма условно (только по углу, но не по расстоянию). При фокусировке в исходную точку излучения  $r_0$  влияние неоднородностей устраняется ( $\sigma_\varphi^2 = 0$ ) и максимальная интенсивность в фокальном пятне равна интенсивности для случая однородной среды.

$$I_0^{\max} = 4k^2L^2B^2/(16\pi^2z_0^2)^2. \quad (13)$$

Фокусировка в произвольную точку пространства  $r_1 \neq r_0$  приводит к некоторому размыванию дифракционной картины, в результате чего интенсивность в фокальном пятне уменьшается:

$$I_{\text{foc}}(r_1) = \frac{I_0^{\max}}{L^2} \left( \frac{z_0}{z_1} \right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta_1 \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta_2 \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_\varphi^2\right\}. \quad (14)$$

Попробуем оценить область допустимых отклонений  $r_1$  от  $r_0$ , в которой выполнено неравенство

$$I_{\text{foc}} \geqslant (1/2) I_0^{\max}, \quad (15)$$

рассматриваемое как критерий эффективности фокусировки.

Входящую в (14) величину  $\sigma_\varphi^2$  вычислим для неоднородностей, описываемых гауссовой корреляционной моделью, и для турбулентных флуктуаций.

**3. Фокусировка поля в средах, описываемых гауссовой корреляционной функцией.** Пусть флуктуации проницаемости  $\epsilon$  являются статистически однородными и описываются корреляционной функцией  $\psi_\epsilon(r) = \langle \tilde{\epsilon}(r)\tilde{\epsilon}(r + \Delta r) \rangle$ , имеющей радиус корреляции  $l_\epsilon$ . В этом случае статистическое усреднение (12) дает (при  $z \gg l_\epsilon$ )

$$\sigma_\varphi^2 = k^2 \int_0^{z_1} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ \psi_\epsilon(0, \xi) - \psi_\epsilon\left(\eta \frac{z_2 - z_1}{z_1}, \xi\right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + k^2 \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ \psi_e(0, \xi) - \psi_e \left( \eta \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{z_0}, \xi \right) \right\} + \\
& + k^2 \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\infty d\xi \psi_e \left( \zeta_2 - \zeta_1 + \eta \left[ \frac{x_0}{z_0} - \frac{x_1}{z_1} + \frac{\zeta_1}{z_1} - \frac{\zeta_2}{z_0} \right], \xi \right) + \\
& + k^2 \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\infty d\xi \psi_e \left( \zeta_2 - \zeta_1 + \eta \left[ \frac{x_1}{z_1} - \frac{x_0}{z_0} + \frac{\zeta_1}{z_0} - \frac{\zeta_2}{z_1} \right], \xi \right) - \\
& - k^2 \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\infty d\xi \psi_e \left( \eta \left[ \frac{x_0}{z_0} - \frac{x_1}{z_1} + \frac{\zeta_2}{z_1} - \frac{\zeta_1}{z_0} \right], \xi \right) - \\
& - k^2 \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\infty d\xi \psi_e \left( \eta \left[ \frac{x_1}{z_1} - \frac{x_0}{z_0} + \frac{\zeta_1}{z_0} - \frac{\zeta_2}{z_1} \right], \xi \right),
\end{aligned} \tag{16}$$

где  $z_{10} = \min(z_1, z_0)$ .

Ограничимся рассмотрением корреляционной функции, имеющей гауссову форму:

$$\psi_e(r) = \sigma_e^2 \exp\{-r^2/2l_e^2\}.$$

Считая, что точки излучения и фокусировки разнесены только в поперечном направлении ( $z_1 = z_0$ ), из (16) найдем зависимость дисперсии  $\sigma_\varphi^2$  от поперечной координаты  $x_1$ :

$$\sigma_\varphi^2 = \sqrt{2\pi} \sigma_e^2 k^2 l_e z_0 \{1 - (b^2 F(a) - a^2 F(b)) / (b^2 - a^2)\}, \tag{17}$$

где  $a = (\zeta_2 - \zeta_1)/l_e$ ,  $b = (x_0 - x_1)/l_e$ ,  $F(x) = (1/x) \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ . Выражение (17) обладает симметрией относительно замены  $(a \leftrightarrow b)$ ,  $(a \leftrightarrow -a)$ ,  $(b \leftrightarrow -b)$  и всегда положительно. В предельных случаях имеем

$$\sigma_\varphi^2 = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \sigma_e^2 k^2 l_e z_0 \left\{ \frac{1}{6} + \frac{F(a) - 1}{a^2} \right\} b^2, & b \ll \min(a, 1) \\ \sqrt{2\pi} \sigma_e^2 k^2 l_e z_0 \left\{ 1 - F(a) \left[ 1 + \frac{a^2}{b^2} \right] \right\}, & b \gg \max(a, 1) \end{cases}$$

Предполагая  $(x_1 - x_0) \gg L$ , разложим (17) в ряд по  $a$  (ограничившись членами  $\sim a^2$ ) и подставим получившееся выражение для  $\sigma_\varphi^2$  в (14). В итоге получим

$$I_{\text{foc}}(r_1) = 2I_0^{\max} \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \exp(-\alpha \xi^2), \tag{18}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \sigma_e^2 k^2 L^2 (z_0/l_e) \left\{ \frac{1}{6} + \frac{F(b) - 1}{b^2} \right\}. \tag{19}$$

В предельных случаях имеем

$$I_{\text{foc}} = \begin{cases} I_0^{\max} (1 - (1/6)\alpha), & \alpha \ll 1 \\ I_0^{\max} \sqrt{\pi/\alpha}, & \alpha \gg 1 \end{cases} \tag{20}$$

Качественный ход зависимости нормированной интенсивности  $I_{\text{foc}}/I_0^{\max}$  от  $\alpha$  для неоднородностей, описываемых гауссовой корреляционной функцией, приведен на рис. 2. Начальный участок кривой отвечает первой формуле (20), а конечный — второй. (рис. 2, штриховые линии). Критерий эффективной фокусировки (15) выполнен при

$$\alpha \leq \alpha_0 = 8,069, \quad (21)$$

что позволяет, пользуясь формулой (19), выделить поперечные размеры области пространства, в которой осуществима удовлетворительная фокусировка поля.

Предполагая, что точки фокусировки и излучения находятся на одном луче,  $x_1/z_1 = x_0/z_0$ , найдем зависимость дисперсии  $\sigma_\varphi^2$  от продольной координаты  $z_1$  (при  $z_1 \geq z_0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 k^2 l_e (z_1 + z_0) \left\{ 1 - \frac{cd}{(c-a)(d+a)} F(a) + \right. \\ & \left. + \frac{z_0}{z_1 + z_0} \frac{a}{c-a} F(c) - \frac{z_0}{z_1 + z_0} \frac{a}{d+a} F(d) \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $c = \frac{\zeta_1}{l_e} \left( \frac{z_0}{z_1} - 1 \right)$ ,  $d = \frac{\zeta_2}{l_e} \left( \frac{z_0}{z_1} - 1 \right)$ . Поведение  $\sigma_\varphi^2$  при  $z_1 < z_0$  определяется той же формулой (22), если осуществить в ней замену  $(z_1 \leftrightarrow z_0)$ . В предельных случаях имеем

$$\sigma_\varphi^2 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 \frac{z_0}{l_e} \frac{k^2}{6} (\zeta_2 - \zeta_1)^2, & z_1 \ll z_0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 \frac{z_0}{l_e} \frac{k^2}{6} \left( \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right)^2 (\zeta_2 - \zeta_1)^2, & \left| \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right| \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 \frac{z_1}{l_e} \frac{k^2}{6} (\zeta_2 - \zeta_1)^2, & z_1 \gg z_0 \end{cases} \quad (23)$$

Качественный ход зависимости  $\sigma_\varphi^2$  от  $z_1$  представлен на рис. 3. (Штриховые линии — зависимости, построенные по формулам (23).)

Для нахождения области эффективной фокусировки воспользуемся второй формулой (23), подставив которую в (14) найдем интенсивность в центре фокального пятна:

$$I_{\text{foc}}(z_1) = 2I_0^{\max} \int_0^1 d\xi (1-\xi) \exp(-\gamma \xi^2), \quad (24)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 k^2 L^2 \frac{z_0}{l_e} \left( \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right)^2. \quad (25)$$

Критерий эффективной фокусировки (15) выполнен при  $\gamma \leq \gamma_0 = 8,069$ , что позволяет определить область допустимых значений  $z_1$ :

$$\left( \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right)^2 \leq \frac{3\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{\gamma_0}{\sigma_e^2} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{l_e}{z_0} \right). \quad (26)$$

Отметим, что при фокусировке во фраунгоферову зону антенны ( $z_1 \gg kL^2$ ) соотношение (26) является излишним, поскольку в этой области удается осуществить только угловую фокусировку.

**4. Фокусировка волн в турбулентной атмосфере.** Пусть флюктуации  $\varepsilon$  в турбулентной атмосфере описываются структурной функцией  $D_\varepsilon(r) = \langle [\tilde{\varepsilon}(r) - \tilde{\varepsilon}(r + \Delta r)]^2 \rangle$ , причем для  $D_\varepsilon(r)$  воспользуемся степенной аппроксимацией

$$D_\varepsilon(r) = \begin{cases} C_\varepsilon^2 r^{2p}, & r \leq L_0 \\ C_\varepsilon^2 L_0^{2p}, & r \geq L_0 \end{cases}, \quad (27)$$

которая при  $p=1/3$  переходит в «закон 2/3» Колмогорова—Обухова [3]. Статистическое усреднение (12) в этом случае дает

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 = & \frac{k^2}{2} \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ D_\varepsilon \left( \eta \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{z_0} \xi \right) - D_\varepsilon(0, \xi) \right\} + \\ & + \frac{k^2}{2} \int_0^{z_1} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ D_\varepsilon \left( \eta \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{z_1} \xi \right) - D_\varepsilon(0, \xi) \right\} + \\ & + \frac{k^2}{2} \int_0^{z_{10}} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ D_\varepsilon \left( \eta \left[ \frac{x_0}{z_0} - \frac{x_1}{z_1} + \frac{\zeta_1}{z_1} - \frac{\zeta_1}{z_0} \right], \xi \right) - D_\varepsilon(0, \xi) \right\} + \\ & + \frac{k^2}{2} \int_0^{z_{10}} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ D_\varepsilon \left( \eta \left[ \frac{x_0}{z_0} - \frac{x_1}{z_1} + \frac{\zeta_2}{z_1} - \frac{\zeta_2}{z_0} \right], \xi \right) - D_\varepsilon(0, \xi) \right\} - \\ & - \frac{k^2}{2} \int_0^{z_{10}} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ D_\varepsilon \left( \zeta_2 - \zeta_1 + \eta \left[ \frac{x_0}{z_0} - \frac{x_1}{z_1} + \frac{\zeta_1}{z_1} - \frac{\zeta_2}{z_0} \right], \xi \right) - D_\varepsilon(0, \xi) \right\} - \\ & - \frac{k^2}{2} \int_0^{z_{10}} d\eta \int_0^\infty d\xi \left\{ D_\varepsilon \left( \zeta_2 - \zeta_1 + \eta \left[ \frac{x_1}{z_1} - \frac{x_0}{z_0} + \frac{\zeta_1}{z_0} - \frac{\zeta_2}{z_1} \right], \xi \right) - D_\varepsilon(0, \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для нахождения  $\sigma_\eta^2$  необходимо вычислить двукратный интеграл

$$D_\Phi(a, b) = \int_0^1 d\eta \int_0^\infty d\xi \{ D_\varepsilon(\sqrt{[\eta a + (1-\eta)b]^2 + \xi^2}) - D_\varepsilon(\xi) \},$$

приближенное значение которого при  $p=1/3$  приведено в [4]. Воспользуемся аппроксимацией (27) и, следуя [4], интеграл по  $\xi$  вычислим приближенно, разбив ось  $\xi$  на интервалы  $(0, A)$ ,  $(A, \sqrt{L_0^2 - A^2})$ ,  $(\sqrt{L_0^2 - A^2}, L_0)$  и  $(L_0, \infty)$ , где  $A = |\eta a + (1-\eta)b|$ . На первом интервале можно воспользоваться разложением  $r^{rp} = (\xi^2 + A^2)^{p/2}$  в ряд по степеням параметра  $(\xi/A) < 1$ , а на втором — по степеням параметра  $(A/\xi) < 1$ . Три первых члена каждого из разложений обеспечивают точность не хуже 1%. Получившееся после интегрирования по  $\xi$  выражение  $f(\eta)$  аппроксимируем затем квадратичным трехчленом по  $\eta$ , добиваясь совпадения аппроксимирующей функции  $\tilde{f}(\eta)$  с  $f(\eta)$  в точках  $\eta=0, 1/2$  и  $1$ . В итоге получим выражение

$$\begin{aligned} D_\Phi(a, b) = & \beta_1 \{ |a|^{2p+1} + |b|^{2p+1} + \beta_2 |a + b|^{2p+1} \} + \\ & + \beta_3 L_0^{2p-1} (|a|^2 + |b|^2 + (ab)), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\beta_1 = (1/6)(1+p/3+1/(2p+1)-p/(2p-1)-p(p-1)(p-4))/[5(2p-3)],$$

$$\beta_2 = 2^{1-2p}, \quad \beta_3 = p/[3(2p-1)].$$

Подставляя (29) в (28) при  $z_0=z_1$ , найдем зависимость  $\sigma_\varphi^2$  от поперечных переменных  $x_i$ :

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{2} C_\varepsilon^2 k^2 z_0 \beta \{2|\zeta|^{2p+1} + 2|x|^{2p+1} - |\zeta-x|^{2p+1}\}, \quad (30)$$

где  $\zeta=\zeta_2-\zeta_1$ ,  $x=x_1-x_0$ ,  $\beta=\beta_1\beta_2$ . Выражение (30) симметрично относительно замены  $(\zeta \leftrightarrow x)$ ,  $(\zeta \leftrightarrow -\zeta)$ ,  $(x \leftrightarrow -x)$  и всегда положительно при  $2p < 1$ , причем  $\sigma_\varphi^2 = 0$  при  $2p=1$ . В предельных случаях имеем

$$\sigma_\varphi^2 = \begin{cases} C_\varepsilon^2 k^2 z_0 \beta |x|^{2p+1}, & x \ll \zeta \\ \frac{1}{2} C_\varepsilon^2 k^2 z_0 \beta \{2|\zeta|^{2p+1} - 2p(p+1)\zeta^2 x^{2p-1}\}, & x \gg \zeta \end{cases}. \quad (31)$$

Качественный ход зависимости  $\sigma_\varphi^2$  от  $x$  приведен на рис. 4. Начальный участок кривой описывается первой формулой (31), а конечный — второй (штриховые линии).

Подставляя (29) в (28) при  $x_1/z_1=x_0/z_0$ , найдем зависимость  $\sigma_\varphi^2$  от продольной переменной  $z_1$  (при  $z_1 > z_0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 = & \frac{1}{2} C_\varepsilon^2 k^2 (z_1 + z_0) \left\{ \beta_1 \left( \frac{z_1 - z_0}{z_1 + z_0} + \beta_2 \right) |\zeta|^{2p+1} + \right. \\ & + \frac{z_0}{z_0 + z_1} \beta_1 \beta_2 [|\zeta'_1|^{2p+1} + |\zeta'_2|^{2p+1} - |\zeta + \zeta'_2|^{2p+1} - |\zeta - \zeta'_1|^{2p+1}] + \\ & \left. + \beta_3 L_0^{2p-1} (z_1 - z_0)^2 / [z_1(z_1 + z_0)] |\zeta|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\zeta'_1 = \zeta_1 \frac{z_1 - z_0}{z_1}$ ,  $\zeta'_2 = \zeta_2 \left(1 - \frac{z_0}{z_1}\right)$ . Поведение  $\sigma_\varphi^2$  при  $z_1 < z_0$  определяется той же формулой (32), если осуществить в ней замену  $(z_1 \leftrightarrow z_0)$ . В предельных случаях имеем

$$\sigma_\varphi^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} C_\varepsilon^2 k^2 z_0 \{\beta_1(1+\beta_2) |\zeta|^{2p+1} + \beta_3 L_0^{2p-1} |\zeta|^2\}, & z_1 \ll z_0 \\ \frac{1}{2} C_\varepsilon^2 k^2 z_0 \beta_1 (1-2p\beta_2) \left| \frac{z_0 - z_1}{z_0} \right| |\zeta|^{2p+1}, \quad \left| \frac{z_1 - z_0}{z_0} \right| \ll 1, & \\ \frac{1}{2} C_\varepsilon^2 k^2 z_1 \{\beta_1(1+\beta_2) |\zeta|^{2p+1} + \beta_3 L_0^{2p-1} |\zeta|^2\}, & z_1 \gg z_0 \end{cases}. \quad (33)$$

Качественный ход зависимости  $\sigma_\varphi^2$  от  $z_1$  приведен на рис. 5 (штриховые линии — зависимости, построенные по формулам (33)). Выражение (30) позволяет найти область пространства в поперечном направлении, а (32) — в продольном, в которой выполнено условие (15).

В трехмерном случае наблюдаются те же качественные особенности, что и в двумерной задаче, но сами выражения для  $\sigma_\varphi^2$  и  $I_{loc}$  оказываются весьма громоздкими, и поэтому мы их не приводим.

Располагая поперечными ( $\Delta l$ ) и продольными ( $\Delta z$ ) размерами области эффективной (по критерию (15)) фокусировки, мы в состоянии оценить минимально необходимое число реперных источников для данной области пространства. Если  $\Delta V = (\Delta l)^2 \Delta z$  — объем области надежной фокусировки вокруг одного источника, находящегося во френелевской зоне антенны, то для области объемом  $V$  потребуется

$N = V/\Delta V$  реперных источников. Если же источник находится во фраунгоферовой зоне антенны и  $\Delta\Omega = (\Delta l/z)^2$  — угловой размер зоны эффективной фокусировки, то для перекрытия сектора углов раствором  $\Omega$  требуется примерно  $N = \Omega/\Delta\Omega$  источников.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адаптивная оптика. // Сб. статей / Под ред. Э. А. Витриченко. — М.: Мир, 1980.
2. Лукин В. П. Атмосферная адаптивная оптика. — Новосибирск: Наука, 1986.
3. Ахунов Х. Г., Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 6. С. 1287.
4. Ахунов Х. Г., Бункин Ф. В. и др. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 1. С. 1.
5. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.

Временный инженерный центр  
«Лидар»

Поступила в редакцию  
22 июня 1989 г.

## ON THE EFFECTIVENESS OF THE REVERSED WAVEFIELD FOCUSING IN RANDOMLY UNHOMOGENEOUS MEDIA

F. M. Ismagilov, Yu. A. Kravtsov

The effectiveness of the reversed wavefield focusing in randomly unhomogeneous media was studied with the use of phase approximation for the Green function. Calculations were made for inhomogeneities described by the Gaussian correlation function as well as for turbulence fluctuations obeying a structural function with an arbitrary power law. To provide focusing of a reference source field in a given point a correcting phase factor, calculated for a homogeneous medium, was introduced. We estimated the size of a region wherein the intensity of a free-space algorithm-focused field decreased due to random inhomogeneities to no less than half as much. The minimal number of reference sources necessary for effective field focusing in any point of the region under consideration was estimated.

---

УДК 537.87; 537.8.029.6

**ОБОБЩЕНИЕ ЗОММЕРФЕЛЬДОВСКОЙ ФОРМЫ  
РАССЕЯННОГО ПОЛЯ НА СЛУЧАЙ ОПИСАНИЯ  
ЯВЛЕНИЙ ДИФРАКЦИИ  
НА ИМПЕДАНСНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

A. B. Кукушкин

Получено аналитическое продолжение решения Зоммерфельда на случай описания явлений рассеяния на импедансной полуплоскости. При этом двухсторонние граничные условия удовлетворяются асимптотически. Проведена апробация решений в случае реактанской полуплоскости, возбуждаемой бегущей из бесконечности поверхностью волной. Результаты апробации показали высокую эффективность решений, очень удобных и для анализа качественной стороны физических явлений в полу бесконечных волноведущих структурах открытого типа. В частности, в рамках описания направляемых волн с помощью полученных решений отмечается и объясняется с позиций принципа причинности невозможность существования таких мод (бегущих от кромки), как быстры, собственные, и медленны, несобственные.

Строгое решение задачи дифракции электромагнитных волн на импедансной полуплоскости (вставка на рис. 2) часто ищется на основе двух подходов. Первый из них связан с применением метода Винера—Лопфа [1], а второй — с оригинальным подходом Малюжинца [2]. Общим здесь является то, что отыскивается точное математическое решение задачи с двухсторонними ( $\phi=0, 2\pi$ ) граничными условиями:

$$z^{-1}(\partial U/\partial \phi) \pm \gamma_0 U = 0. \quad (1)$$

Здесь  $z = k_0 r$ ,  $\gamma_0 = \gamma/k_0$ , где, согласно [3], для ТМ-волн ( $U \equiv H_z$ )  $\gamma = -ik_0 Z/Z_0$ , а для ТЕ-волн ( $U \equiv E_z$ )  $\gamma = -ik_0 Z_0/Z$ ;  $Z$  — заданный импеданс граней,  $Z_0$  — импеданс свободного пространства,  $k_0$  — волновое число в нем. Тем не менее физическая ценность этих решений не может не вызывать определенных сомнений из-за физической некорректности условия (1) в окрестности острия полуплоскости [1]. Поэтому будет разумным отказаться от точного выполнения условия (1) и потребовать его удовлетворения в асимптотическом смысле: при «достаточном» удалении от кромки. Конкретнее, следует отказаться от применения условий (1) к полному полю и потребовать их удовлетворения только для его экспоненциальной части, но уже на всей полуплоскости, тем более что это, с другой стороны, позволит воспользоваться своеобразием геометрии краевой задачи в полной мере, подобно тому, как это сделал Зоммерфельд [4], фактически постулировав наличие разрывов (на идеально проводящей полуплоскости) у рассеянного поля и, таким образом, получив для него математически замкнутые выражения.

Отвлекаясь пока от внешних условий возбуждения, представления для рассеянного поля будем искать в виде интеграла плоских волн в комплексно-угловой форме по разветвленным контурам интегрирования типа Зоммерфельда. Задавая подынтегральную экспоненту в виде  $\exp(iz \cos \theta)$  (при временной зависимости поля  $\exp(i\omega t)$ ), можно заметить, что существуют только два нетривиальных и независимых разветвленных контура интегрирования, допускающие такой способ их деформирования в перевальный, при котором выполняется условие из-

лучения Зоммерфельда. Два этих контура показаны на рис. 1а и б, где они обозначены буквами  $C_1$  и  $C_2$ ; а перевальный контур — буквой  $D$ . Области переменной интегрирования  $\vartheta$ , запрещенные с точки зрения их пересечения деформируемыми контурами, на рис. 1а, б заштрихованы. Далее, поскольку соображения, связанные с геометрией

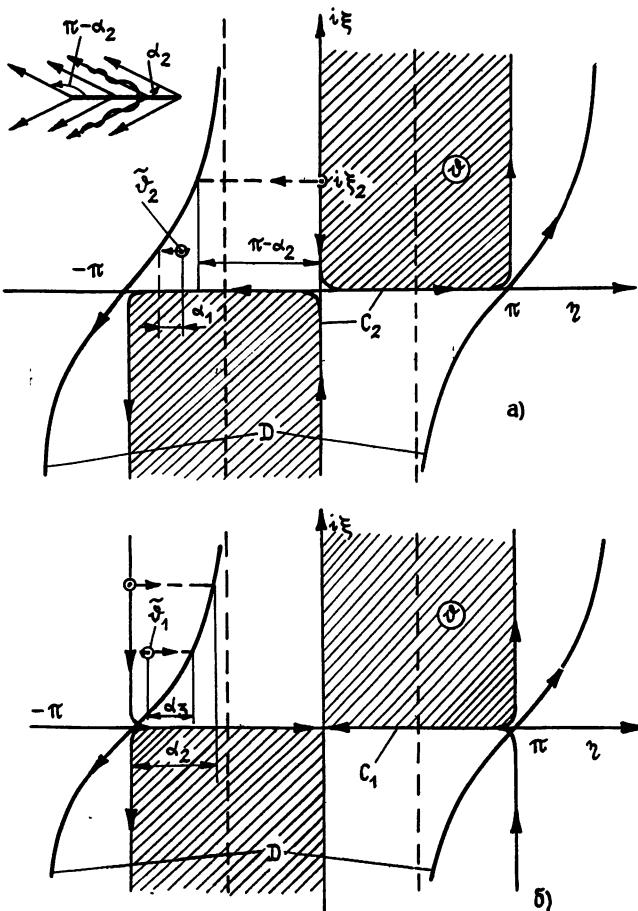


Рис. 1.

краевой задачи, являются здесь определяющими, то достаточно, оставив сам функциональный вид трансформанты Зоммерфельда [4] по существу неизменным, заменить в ее аргументе (в соответствии с изменением граничных условий) вещественный параметр  $\varphi_0$  (полярный угол падения возбуждающей плоской волны) на комплексный  $\vartheta$ , численно зависящий от заданного значения нормированного импеданса граней  $\gamma_0$ . Тогда искомые представления можно записать в виде

$$U_{1,2} = A_{1,2}(4\pi)^{-1} \int_{C_{1,2}} \left\{ \left[ 1 - \exp\left( \mp \frac{i}{2}(\vartheta \mp \varphi - \tilde{\vartheta}_{1,2}) \right) \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ 1 + \exp\left( \mp \frac{i}{2}(\vartheta \pm \varphi - \tilde{\vartheta}_{1,2}) \right) \right]^{-1} \right\} \exp(i z \cos \vartheta) d\vartheta, \quad (2)$$

где  $A_{1,2}$  — незвестные амплитудные коэффициенты,  $\tilde{\vartheta}_{1,2} = \vartheta_{1,2} + i\xi_{1,2}$  — комплексный параметр. Деформируя исходные контура в перевальный с выделением вычетов в полюсах спектральной функции в виде экспонент  $A_{1,2} \exp[-iz \cos(\varphi \pm \vartheta_{1,2})]$ , где  $\vartheta_{1,2} = \tilde{\vartheta}_{1,2} + \pi$ , после стандарт-

ногого интегрирования [6] получим

$$U_{1,2} = A_{1,2}[S^{(u)}, L^{(l)} + S^{(l)}, L^{(u)}], \quad (3)$$

где

$$S^{(u)}, L^{(l)} = \frac{1}{2} \exp [-iz \cos(\varphi + \theta_{1,2})] \operatorname{erfc} \left( e^{i\pi/4} \sqrt{2z} \sin \frac{\varphi + \theta_{1,2}}{2} \right); \quad (4)$$

$$S^{(l)}, L^{(u)} = \frac{1}{2} \exp [-iz \cos(\varphi - \theta_{1,2})] \operatorname{erfc} \left( e^{i\pi/4} \sqrt{2z} \sin \frac{\varphi - \theta_{1,2}}{2} \right); \quad (5)$$

$$\operatorname{erfc}(\sqrt{2z} W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_W^{\infty} \exp(-t^2) dt. \quad (6)$$

Чтобы потом убедиться в выполнении граничных условий (1), выпишем нужный для этого компонент поля:

$$z^{-1} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial \varphi} = A_{1,2} \left\{ i \sin(\varphi - \theta_{1,2}) S^{(l)}, L^{(u)} + i \sin(\varphi + \theta_{1,2}) S^{(u)}, L^{(l)} - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp[-i(z - \pi/4)] \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta_{1,2}}{2} \right\}. \quad (7)$$

После этого заметим, что функции  $U_{1,2}$  и  $z^{-1}(\partial U_{1,2}/\partial \varphi)$  обладают свойством симметрии:

$$U_{1,2}(\varphi) = U_{1,2}(2\pi - \varphi), \quad z^{-1} \frac{\partial U_{1,2}(\varphi)}{\partial \varphi} = -z^{-1} \frac{\partial U_{1,2}(2\pi - \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Поэтому в дальнейшем, там, где это удобно, можно рассматривать лишь верхнее полупространство:  $\varphi \in [0, \pi]$ . Следовательно, и выполнение граничных условий достаточно проверить только на верхней грани полуплоскости.

Рассмотрим в связи с этим условия захвата полюсов спектральной функции при деформировании контуров  $C_{1,2}$ . Иллюстрацией к этому служит изображенная на плоскости  $\vartheta$  при  $\varphi=0$  (рис. 1) локализация полюсов (отмечены на рисунках точками) соответствующих трансформант Зоммерфельда в (2). Стрелками показано направление смещения полюсов с ростом  $\varphi$ . Предварительно заметим, что для волн, бегущих

от кромки,  $\operatorname{Re} \theta_{1,2} = \eta_{1,2} \in [0, \pi/2]$  ( $\eta_{1,2} = \eta_{1,2} + \pi$ ). Из рис. 1 видно, что полюса из этого интервала захватываются при деформировании обоих контуров  $C_1$  и  $C_2$ , но разница состоит в том, что с ростом  $\varphi$  эти полюса движутся в разные стороны и перестают захватываться после пересечения ими перевального контура, разделяющего области быстрых и медленных волн. Тот факт, что полюса из интервала  $\eta_{1,2} \in [0, \pi/2]$ , разделенные контуром  $D$ , движутся навстречу друг другу, является признаком того, что один из них порождает медленную собственную (поверхностную) волну (MCB), описываемую функцией  $A_1 \exp[-iz \times \cos(\varphi + \theta_1)]$  (полюс  $\theta_1$  на рис. 1б), а другой (полюс  $\theta_2$  на рис. 1а) — быструю несобственную (вытекающую) волну (БНВ), которой соответствует функция  $A_2 \exp[-iz \cos(\varphi - \theta_2)]$ . Экспоненты именно этого типа аддитивно представлены в функциях  $S^{(u)}$  и  $L^{(u)}$  соответственно, но только в верхнем (upper) полупространстве. В нижнем (lower) полупространстве, напротив, поверхность волну (ПВ) описывает функция  $A_1 \exp[-iz \cos(\varphi - \theta_1)]$ , а вытекающую (ВВ) —  $A_2 \exp[-iz \cos(\varphi + \theta_2)]$ . Экспоненты этого типа аддитивно представлены в функциях  $S^{(l)}$  и  $L^{(l)}$  соответственно. Этим и объясняется целесообразность введения для функций  $S$  и  $L$  поднятых латинских индексов  $u$  и  $l$  как удобный способ

указать, в каком полупространстве — верхнем ( $u$ ) или нижнем ( $l$ ) — в отмеченной таким образом функции ( $S$  или  $L$ ) аддитивно содержится именно та экспонента, которая входит в эту функцию в виде сомножителя. Учитывая все сказанное и подставляя выражения (3) и (7) при  $\phi=0$  в (1), убеждаемся в том, что применительно к экспоненциальному составляющим условие (1) выполняется, если удовлетворяется соотношение

$$\pm i \sin \theta_{1,2} + \gamma_0 = 0, \quad (8)$$

представляющее собой дисперсионное уравнение для ПВ (медленных) и ВВ соответственно. Что же касается алгоритма, посредством которого экспоненты, представленные в функциях  $S$  и  $L$  как сомножители, переводятся в аддитивное состояние, то он целиком базируется на двух формальных свойствах дополнительной функции ошибок.

Первое из них вытекает из функционального соотношения [7]

$$\operatorname{erfc}(x) + \operatorname{erfc}(-x) = 2, \quad (9)$$

где  $x$  — любое комплексное число, а второе, дополняющее первое, основано на каноническом представлении [8]

$$\exp(a^2z) \operatorname{erfc}(a\sqrt{z}) = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-zt^2) dt}{t^2 + a^2} \sim (pa^2z)^{-1/2} + O(z^{-3/2}), \quad (10)$$

справедливом для  $|\arg(a\sqrt{z})| < \pi/2$ . Из формулы (10) следует, что если  $\arg x$  функции  $\operatorname{erfc}(x)$ , входящей в (4) и (5), по модулю меньше, чём  $\pi/2$ , то функции  $S$  и  $L$  не содержат в себе никаких экспонент и описывают расходящиеся от острия цилиндрические волны. Наоборот, если  $|\arg x| > \pi/2$ , то, используя (9), можно записать

$$\operatorname{erfc}(x) = 2 - \operatorname{erfc}(-x), \quad (11)$$

и так как при этом  $|\arg(-x)| < \pi/2$ , то из (11) следует, что выражения для  $S$  и  $L$ , записанные как произведение экспоненты и функции  $\operatorname{erfc}(x)$ , аддитивно содержат эту экспоненту и цилиндрическую волну. Таким образом, граница света и тени для неоднородных плоских волн (НПВ), направляемых импедансной полуплоскостью (иными словами — область локализации этих волн), полностью определяется формальными свойствами интеграла вероятностей; и положение этой границы в пространстве, таким образом, уже не зависит от произвола в выборе исходных контуров интегрирования, если рассматривать решения (3) как некие базисные (априорно выбранные) решения волнового уравнения и отвлекаться от способа, каким они здесь получены. Так, например, можно показать, что из условия  $\arg x = 3\pi/2$  выводится формула для угла локализации  $\alpha_1$  (рис. 1а) ВВ:

$$\alpha_1 = \arccos \sigma - \arccos(\sigma/\beta_1), \quad (12)$$

где

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \beta_1^2}}, \quad x = 1 + \beta_1^2 + \beta_2^2,$$

$\beta_{1,2}$  — соответственно действительная и мнимая части ее нормированного на  $k_0$  продольного волнового числа. А из условия  $\arg x = \pi/2$  вытекает формула для углов локализации  $\alpha_{2,3}$  медленных ПВ (рис. 1б) в случае мнимого и комплексного импедансов соответственно:

$$\alpha_2 = \arccos(\beta_1^{-1}); \quad (13)$$

$$\alpha_3 = \arccos(\sigma/\beta_1) - \arccos \sigma. \quad (14)$$

Из формул (12)–(14) следует, что критический режим для всех трех случаев один и тот же:  $\beta_1=1$ , так как  $\alpha_{1,2,3} \rightarrow 0$  при  $\beta_1 \rightarrow 1$ . Эти формулы также показывают, что независимо от того, как это расценивать, формальные свойства полученных здесь решений (3), являющихся по существу аналитическим продолжением (по параметру  $\phi_0$ ) решения Зоммерфельда, таковы, что они исключают появление таких мод (бегущих от кромки), как БСВ и МНВ. Наиболее прямой путь, ведущий к физической интерпретации этих формальных свойств решений (3), состоит в перманентном переносе на исследуемые здесь явления тех физических особенностей поведения полей в задаче Зоммерфельда, которые регулируются там теми же математическими свойствами решений, но с вещественным параметром  $\phi_0$ .

Хорошо известно, что аналитические свойства решения Зоммерфельда, базирующиеся на тех же формальных свойствах (9) и (10) интеграла вероятностей, регулируют в этой задаче местоположение в пространстве границы света и тени для рассеянного поля. В физическом же аспекте положение этой границы в пространстве регулируется, как известно, положением в нем крайнего луча из всей совокупности световых лучей, излучаемых полуплоскостью или, точнее, индуцированным на ней (падающей волной) током. Таким образом, здесь можно отметить существование причинной связи между токами и световыми лучами, относящимися к однородной плоской волне (ОПВ). Тривиальность последнего очевидна только в отношении ОПВ, поскольку ее лучи, распространяющиеся со световой скоростью\*, переносят энергию. При этом неявно подразумевается, что причинные отношения носят энергетический характер.

Рассматривая аналитическое продолжение (3) под этим углом зрения, нетрудно обнаружить, что здесь по-прежнему существуют причинные отношения между токами полуплоскости и комплексно-затухающими световыми лучами, которые поэтому энергии не переносят. Следовательно, причинные отношения здесь носят неэнергетический характер, перерастая в энергетические только в частном случае ОПВ (вещественный параметр  $\phi_0$ ). Таким образом, становится понятным, почему функции (3), в принципе, при любых значениях  $\theta_{1,2}$ , не содержат экспонент, соответствующих БСВ и МНВ, поскольку их световые лучи «втекают» в полуплоскость, а не «вытекают» из нее. Отсюда ясно, сколь важную роль играют именно световые лучи, поскольку и здесь крайний луч задает положение границы света и тени для НПВ, и формулы (12)–(14) получают самое естественное объяснение как для ВВ, так в равной мере и для ПВ (медленных).

Исходя из этого принципа на вставке к рис. 1а изображена реактанная лента и световые лучи (показаны стрелками) ПВ, возбужденной на правом краю этой ленты. Пространство, которое заполняет совокупность этих лучей, соответствует пространству локализации волны. Причем подтверждением тому, что способ локализации этой волны на левом краю ленты будет именно таким (секториальный угол  $\pi - \alpha_2$ ), служит следующий опущенный выше случай, относящийся к функции

$U_2$  при  $\theta_2 = \pi + i\xi_2$  ( $\theta_2 = i\xi_2$  — полюс, изображенный на рис. 1а на мнимой оси плоскости  $\theta$  при  $\phi=0$ ). Нетрудно показать, что этот частный случай имеет отношение уже не к ВВ, а к ПВ, но возбужденной не на острье полуплоскости, а на ее бесконечно удаленном правом краю ( $\text{Re } Z=0$ ). Полярный угол локализации этой волны, как это следует из рис. 1а, равен  $\pi - \alpha_2$  (верхняя часть рис. 2).

Вычислим поле излучения, создаваемое функцией  $U_2$  при подстановке в нее значения  $\theta_2 = \pi + i\xi_2$ , где  $\xi_2$  определяется из уравнения (8) (первое его слагаемое берется со знаком «—») при заданном значении  $v_0$  как  $\sin \xi_2 = v_0$ ; амплитуду падающей волны  $A_2$  при этом положим рав-

\* Будем называть лучи, распространяющиеся со световой скоростью (в вакууме) световыми, независимо от того, переносят они в направлении своего распространения энергию или нет, как в случае НПВ.

ной единице, а вкладом отраженной волны  $U_1$  (при  $\Phi_1 = i\zeta_2$ ) в поле излучения пренебрежем, положив  $A_1 = 0$ ; что можно сделать в первом приближении для излучения вперед ( $x < 0$ ) при  $\gamma_0 < 1$ .

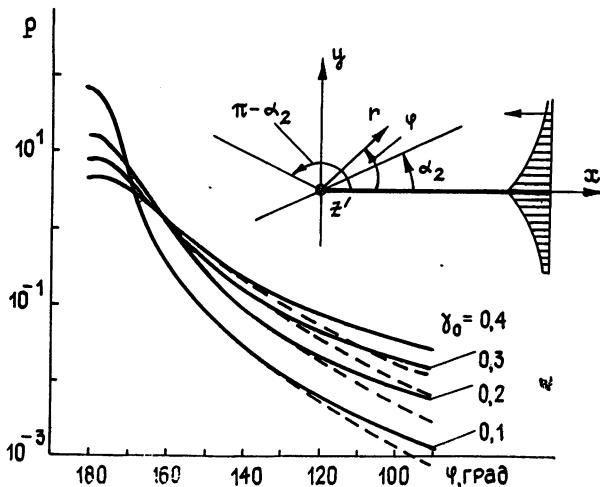


Рис. 2.

Сплошные кривые на рис. 2 соответствуют асимптотическому ( $z \rightarrow \infty$ ) приближению функции  $zU_2U_2^*$ ; пунктирные рассчитаны по «точной», как указано в [9] на стр. 163, формуле, приведенной там же и полученной в результате решения соответствующего интегрального уравнения. Из приведенных графиков мощности в дальней зоне следует, что при малых значениях  $\gamma_0$  уже одна функция  $U_2$  дает хорошее приближение для поля излучения в довольно широкой угловой области. Это является численным подтверждением того, что полученное здесь аналитическое продолжение решения Зоммерфельда действительно имеет отношение к описанию явлений дифракции на импедансной полу-плоскости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966. — 432 с.
2. Малюжинец Г. Д. // ДАН СССР. 1958. Т. 121. № 3. С. 436.
3. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969. — 192 с.
4. Зоммерфельд А. В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — Л.—М.: ОНТИ, 1937. Гл. 20. С. 849.
5. Недедов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. — М.: Наука, 1979. — 272 с.
6. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962. — 243 с.
7. Абрамович М., Стиган Н. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
8. Лук Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
9. Фелсен Л., Маркувич Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. Т. 2. — 555 с.

Поступила в редакцию  
13 июня 1988 г.,  
после переработки  
4 июля 1989 г.

#### SOMMERFELD SOLUTION GENERALIZATION OF A SCATTERED FIELD TO DESCRIBE DIFFRACTION BY THE IMPEDANCE HALF-PLANE

A. V. Kukushkin

The analytical prolongation of Sommerfeld solution to describe diffraction by the impedance half-plane is produced. In this case impedance boundary conditions are asymptotically satisfied. The improvement of solutions at the reactance half-plane excited by a surface wave is carried out. At the describing of guided waves by the obtained solutions the existence impossibility of such modes (travelling from edge) as rapid proper or slow improper ones is stated and explained.

УДК 621.396.67.01

## МЕТОД АНАЛИЗА СФОКУСИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Е. Л. Молотков, В. П. Швецов*

Для  $E$ -поляризованного сфокусированного электромагнитного излучения разработан метод векторного анализа. Предложен операторный способ определения всех составляющих электрического и магнитного полей по известному скалярному решению. Получены аналитические соотношения и исследованы свойства векторного решения для сфокусированного поля.

Перспектива применения метода фокусировки к определению диаграммы направленности антенн посредством измерения поля в ближней зоне [1–3] вызвала интерес к изучению структуры сфокусированного электромагнитного поля. Известно [1], что в окрестности фокуса электромагнитное поле имеет более сложную структуру, чем поле в дальней зоне антенны. Наличие продольных составляющих и несимметрия структур электрического и магнитного полей не позволяют провести исчерпывающий анализ поляризационных, энергетических, амплитудных и фазовых характеристик скалярными методами, применение которых физически обосновано для электромагнитного излучения с простыми поляризационными свойствами поперечной волны.

Скалярные методы решения дифракционных задач, известные в теории волн, значительно проще известных методов решения аналогичных электродинамических задач [4] и нашли широкое применение в теории антенн.

В данной работе предлагается метод анализа ближнего поля антennы, в котором первоначально, по заданному закону возбуждения антennы, скалярным методом определяют распределение поперечной составляющей электрического поля на выбранной гладкой поверхности, аппроксимирующей фазовый фронт волны, а затем по известному поперечному распределению электрического и магнитного полей.

Первый этап предложенного метода выполняется известными способами решения задач дифракции. Для выполнения второго этапа предлагается операторный способ вычисления электрического и магнитного полей, который состоит в том, что соотношения между составляющими электромагнитного поля, верные для плоской волны, остаются верными и для излучения с ограниченным угловым спектром плоских волн [4], если компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  формально заменены операторами, вид которых вытекает из свойств преобразований Фурье. Если базис  $\{\pi, p, n\}$  выбран таким образом, что

$$k_t^2 + k_p^2 \ll k_0^2 < k^2, \quad k_n > 0 \quad (1)$$

для всех  $\mathbf{E}(\mathbf{k}) \neq 0$ , то операторным аналогом известных соотношений для плоской волны являются формулы

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \exp[j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{k}}] \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \exp[j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{k}}] \mathbf{H}(\mathbf{r}_0),$$

тде

$$\hat{k} = \hat{k}_\tau + \hat{k}_p p + \hat{k}_n n, \quad \hat{k}_n = \sqrt{\frac{\hat{k}_\tau^2 + \hat{k}_p^2}{k^2 - (\hat{k}_\tau^2 + \hat{k}_p^2)}} = k - \frac{\hat{k}_\tau^2 + \hat{k}_p^2}{2k} - \frac{(\hat{k}_\tau^2 + \hat{k}_p^2)^2}{8k^3} + \dots$$

Операторами пользуются как сомножителями, при этом

$$f(k_\tau, k_p) = \sum_{n,m}^\infty a_{nm} (\hat{k}_\tau/k)^n (\hat{k}_p/k)^m, \quad (3)$$

где  $a_{nm}$  — коэффициенты разложения функции  $f(k_\tau, k_p)$  в ряд Тейлора:

$$\hat{k}_\tau^n = (-j)^n \frac{\partial^n}{\partial(r, \tau)^n}, \quad \hat{k}_p^m = (-j)^m \frac{\partial^m}{\partial(r, p)^m}.$$

Соотношения являются основными соотношениями операторного способа вычисления  $E$  и  $H$  по известному распределению поперечной составляющей электрического поля. При условии, что известно распределение  $E_\tau$  и излучение обладает  $E$ -поляризацией, так что

$$E \cdot p \equiv 0, \quad (4)$$

поставленная задача посредством решения системы уравнений (2) решается однозначно и решение представляется в виде бесконечных функциональных рядов, которые при условии (1) сходятся абсолютно.

Аналитические соотношения между составляющими электромагнитного поля получим, ограничившись первыми тремя членами ряда. С целью обоснования такого приближения покажем, что именно в этих членах содержатся важнейшие свойства структуры ближнего поля, а погрешность приближений достаточно мала при расчете электромагнитного поля сфокусированной антенны.

Найдем приближенные аналитические решения (2) и исследуем их для наиболее общего случая, когда задано распределение тангенциальной составляющей  $E_\tau$  на гладкой поверхности  $S$  фазового фронта произвольной формы. В точке наблюдения  $O \in S$  построим ортонормированный базис  $\{\tau_0, p_0, n_0\}$ , где  $\tau_0, p_0$  — касательные к  $S$ , причем  $\tau_0$  принадлежит  $E$ -плоскости излучения. Введем вспомогательные функции  $E_0, H_0$  — распределение электромагнитного поля в плоскости  $S_0$ , касательной к  $S$  в точке  $O$ . Положив вначале известным распределение  $E_{\tau 0}$  в плоскости  $S_0$ , найдем из (2) с учетом (4)

$$H_{\tau 0} = \frac{1}{kW} \frac{\hat{k}_{\tau 0} \hat{k}_{p 0} - \operatorname{tg} \theta \hat{k}_{\tau 0} \hat{k}_{n 0}}{\hat{k}_{n 0} - \operatorname{tg} \theta \hat{k}_{p 0}} E_{\tau 0},$$

$$E_{p 0} = \frac{\operatorname{tg} \theta \hat{k}_{\tau 0}}{\hat{k}_{n 0} - \operatorname{tg} \theta \hat{k}_{p 0}} E_{\tau 0}, \quad H_{p 0} = \frac{1}{kW} \left[ \hat{k}_{n 0} + \frac{\hat{k}_{\tau 0}^2}{\hat{k}_{n 0} - \operatorname{tg} \theta \hat{k}_{p 0}} \right] E_{\tau 0}, \quad (5)$$

$$E_{n 0} = \frac{\hat{k}_{\tau 0}}{\hat{k}_{n 0} - \operatorname{tg} \theta \hat{k}_{p 0}} E_{\tau 0}, \quad H_{n 0} = \frac{1}{kW} \left[ \frac{\operatorname{tg} \theta \hat{k}_{\tau 0}^2}{\hat{k}_{n 0} - \operatorname{tg} \theta \hat{k}_{p 0}} - \hat{k}_{p 0} \right] E_{\tau 0},$$

где  $\operatorname{tg} \theta = (n_0, p)/(p_0, p)$ , и далее перейдем из плоскости  $S_0$  на исходную поверхность  $S$ :

$$E^* = \exp[j(r_s, n_0) \hat{k}_{n 0}] E_0, \quad H^* = \exp[j(r_s, n_0) \hat{k}_{n 0}] H_0, \quad (6)$$

после чего проведем преобразование координат от базиса  $\{\tau_0, p_0, n_0\}$  к базисам  $\{\tau, p, n\}$  для электрического поля и  $\{\tau, p_0, n_0\}$  для магнит-

нога поля в результате соответствующих матричных преобразований

$$\| \mathbf{E} \| = \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{E}^* \|, \quad \| \mathbf{H} \| = \| \mathbf{B} \| \| \mathbf{H}^* \| . \quad (7)$$

Система уравнений (7) с учетом (5) и (6) при известном распределении  $E_\tau$  разрешается относительно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  посредством исключения вспомогательных функций методом последовательных приближений. Степень приближений при этом оценивается по максимальной степени учтенных дифференциальных операторов.

В нулевом приближении в точке  $O$ ,

$$\mathbf{E}^{(0)} = E_\tau \mathbf{e}_\tau, \quad \mathbf{H}^{(0)} = \frac{1}{W} E_\tau \mathbf{p}_0, \quad (8)$$

решение (8) описывает поперечную электромагнитную волну.

Электродинамические особенности ближнего поля, а именно наличие продольных составляющих электрического и магнитного полей [1], проявляются в первом приближении:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{j}{k \cos \theta} \frac{\partial}{\partial(r_s, \tau_0)} E_\tau \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}^{(1)} = -\frac{j \operatorname{tg} \theta}{k W} \frac{\partial}{\partial(r_s, \tau_0)} E_\tau \mathbf{e}_\tau + \frac{j}{k W} \frac{\partial}{\partial(r_s, p_0)} E_\tau \mathbf{p}_0. \quad (9)$$

Продольная составляющая электрического поля  $E_\tau$  принадлежит  $E$ -плоскости излучения и перпендикулярна  $E_\tau$ , продольная составляющая магнитного поля  $H_{n0}$  нормальна по отношению к фазовому фронту волны. Фазы продольных составляющих (9) сдвинуты на  $\pi/2$  относительно поперечных составляющих, что указывает на наличие продольной эллиптической поляризации.

Сравнивая (8) и (9) следует отметить, что соотношения (8) симметричны, т. е. одно переходит в другое при перестановках  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{E} \leftrightarrow W \mathbf{H}$ , тогда как в (9) в общем случае эта симметрия нарушается. Однако в частном случае плоской неоднородной волны в малой окрестности фокуса [1]  $\theta=0$  и (9) приобретает симметричную форму.

Во втором приближении решения (7) проявляется несимметрия поперечных структур электрического и магнитного полей, которая имеет место даже для плоской неоднородной волны и выражается в наличии дополнительной поперечной составляющей магнитного поля

$$H_{n0}^{(2)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{k^2 W} \frac{\partial^2}{\partial(r_s, \tau_0) \partial(r_s, p_0)} E_\tau, \quad (10a)$$

и в несимметричной поправке к основной поперечной составляющей магнитного поля

$$H_{p0}^{(2)} = -\frac{1}{2k^2 W} \left[ \frac{\partial^2}{\partial(r_s, \tau_0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(r_s, p_0)^2} \right] E_\tau - \frac{j}{k W} \left( \frac{1}{R_{\tau 0}} - \frac{1}{R_{p0}} \right) E_\tau, \quad (10b)$$

где  $R_{\tau 0}$ ,  $R_{p0}$  — радиусы кривизны координатных линий  $(r_s, \tau_0) = 0$ ,  $(r_s, p_0) = 0$ , соответственно, в точке  $O$ .

Что касается продольных составляющих, то второе приближение только количественно уточняет амплитуды и фазы этих составляющих:

$$E_n^{(2)} = -\frac{\operatorname{tg} \theta}{k^2 W} \frac{\partial^2}{\partial(r_s, \tau_0) \partial(r_s, p_0)} E_\tau, \quad H_{n0}^{(2)} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k^2 W} \frac{\partial^2}{\partial(r_s, p_0)^2} E_\tau. \quad (10b)$$

Оценим погрешность аналитических приближений при расчете сфокусированного поля. В этом случае воспользуемся традиционной аппроксимацией фазового фронта плоскостью в малой окрестности главной оптической оси. Процедура решения в этом случае существенно упрощается, и решение выражается соотношениями вида (5), в дальнейшем изменим обобщенные координаты  $\{(r_s, \tau_0), (r_s, p_0), (r_s, n_0)\}$  декартовыми  $\{x, y, z\}$  и будем полагать  $\operatorname{tg} \theta = 0$ .

Оценки погрешностей аналитических приближений получены на основании численных экспериментов. На рис. 1 представлены точные (жирная линия) и приближенные (тонкая линия) решения для продольной  $E_z$ -составляющей электрического поля в окрестности фокуса линейной сфокусированной решетки элементарных магнитных диполей. Из рисунка видно, что аналитические приближения нулевого и первого порядков (цифры 0 и 1 соответственно) качественно правильно характеризуют максимумы и минимумы распределения  $E_z$  и сравнимы по порядку величины с точным решением. Погрешность расчета амплитуды в точках максимумов для нулевого приближения  $\delta_0 < 10\%$  при  $F > D$  и для первого приближения  $\delta_1 < 10\%$  при  $F > 0,4D$ . Ввиду однотипности разложения операторов выводы относительно точности приближений остаются верными для каждой из составляющих электрического и магнитного полей.

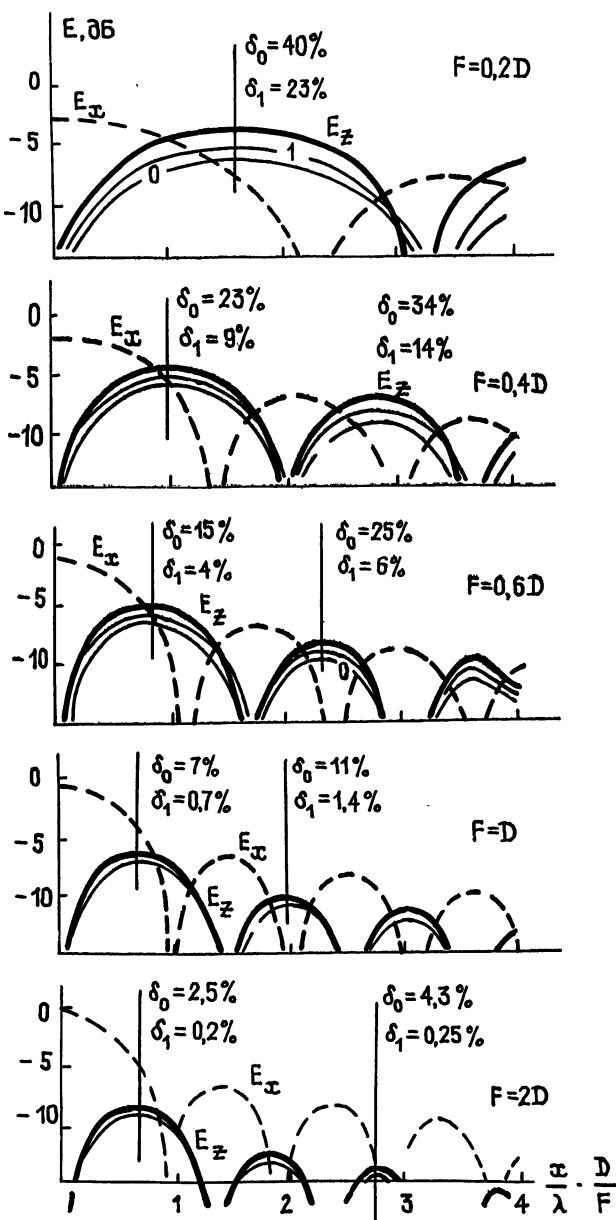


Рис. 1.

На рис. 2 представлены точные и приближенные решения для составляющих электрического поля в геометрооптической области света

сфокусированной антенны. Как видно из рисунка, точность определения продольной составляющей  $E_z$  и в этой области не хуже, чем в фокальной плоскости. Однако для анализа структуры поля удобней разложение (3) осуществить в окрестности волнового вектора  $\vec{k}^0$ , перпендикулярного сферическому фазовому фронту волны. В результате

$$E_z \approx -\frac{k_x^0}{k_z^0} E_x - \frac{k^2 - k_y^{02}}{k_z^{03}} \Delta \hat{k}_x E_x - \frac{k_x^0 k_y^0}{k_z^{03}} \Delta \hat{k}_y E_x, \quad (11)$$

где

$$\Delta \hat{k}_x E_x = \exp(jk_x^0 x) \left( -j \frac{\partial}{\partial x} \right)^n [\exp(-jk_x^0 x) E_x],$$

$$\Delta \hat{k}_y E_x = \exp(jk_y^0 y) \left( -j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m [\exp(-jk_y^0 y) E_x].$$

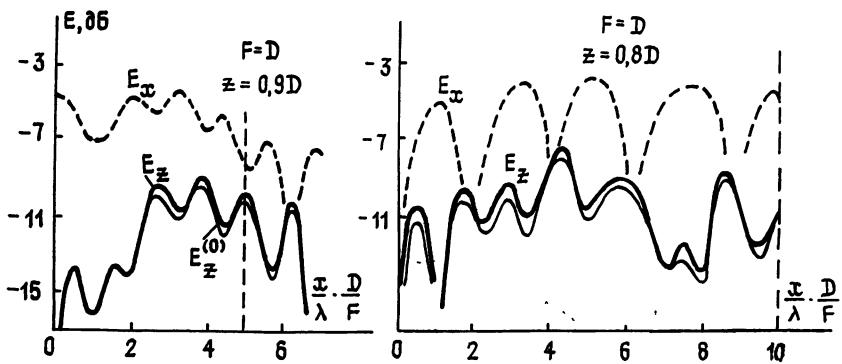


Рис. 2.

Первый член (11) соответствует геометрооптическому представлению о структуре электромагнитного поля, второй и третий члены выражаются частными производными от медленно меняющейся (амплитудной) функции.

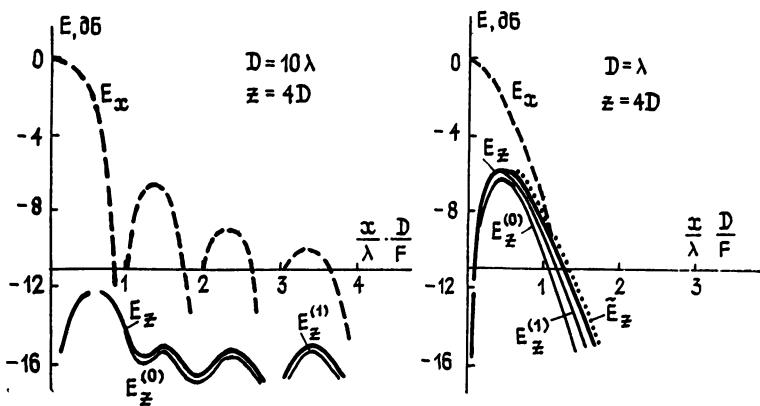


Рис. 3.

Соотношения (11) позволяют расширить область применения аналитических решений. На рис. 3 представлены точные и приближенные значения  $E_z$  в фокальной плоскости, причем приближенное вычисление производилось на основании разложения по степеням  $\hat{k}_x/k$ ,  $\hat{k}_y/k$  (точ-

кая сплошная линия) и по степеням  $(\hat{k}_x - k_x^0)/k$ ,  $(\hat{k}_y - k_y^0)/k$ , где  $k_x^0 = k(x/r)$ ,  $k_y^0 = k(y/r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + F^2}$  (пунктирная линия). Из рисунка видно, что погрешность первого разложения растет по мере удаления от фокуса и при  $D=\lambda$  существенна уже в пределах главного фокального максимума. Из результатов, представленных на рис. 3, следует, что такое разложение допустимо до тех пор, пока угол наклона фазового фронта относительно плоскости, аппроксимирующей его, не превышает  $\alpha \approx 20^\circ$  ( $\tan \alpha = x/r = 0,4$ ). Погрешность второго типа разложения операторов при  $\alpha > 20^\circ$  значительно ниже даже в первом приближении (11).

Итак, получены следующие результаты.

1) Предложен метод анализа ближнего поля антенны, включающий решение дифракционной задачи скалярными методами с последующим восстановлением полной структуры электромагнитного поля.

2) Разработан операторный способ решения полной электродинамической задачи по известному распределению поперечной составляющей электромагнитного поля.

3) Получены приближенные аналитические соотношения между составляющими электромагнитного поля и показано, что эти соотношения характеризуют важнейшие электродинамические особенности ближнего поля, а именно: нулевое приближение описывает поперечную электромагнитную волну, первое приближение — продольную структуру электромагнитного поля и явление продольной эллиптической поляризации, второе приближение — несимметрию поперечных структур электрического и магнитного полей.

4) Исследована точность аналитических приближений применительно к расчету сфокусированного электромагнитного поля. Показано, что при допустимой погрешности 10% аналитические формулы применимы к анализу электромагнитного поля как в области фокусировки, так и в геометрооптической области на дальностях, соизмеримых и превышающих диаметр раскрыва антенны.

5) Предложено два способа представления аналитических решений применительно к анализу сфокусированного поля. Первый состоит в разложении по степеням дифференциальных операторов вида  $\hat{k}_x/k$ ,  $\hat{k}_y/k$  и применяется в малой окрестности главной оптической оси, где угол наклона фазового фронта относительно поперечной плоскости не превышает  $20^\circ$ , второй состоит в разложении по степеням тех же операторов, но в окрестности волнового вектора, перпендикулярного сферическому фазовому фронту, что расширяет область применения аналитических приближений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Швецов В. П., Молотков Е. Л. // Сб. Антенны. 1988. Вып. 35.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г. П. Мотулевич. — М.: Наука, 1970.
3. Sherman I. W. // IRE Trans. 1962. VII, V. AP-10. № 4. Р. 399.
4. Виноградова М. Б. и др. Теория волн. — М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию  
28 июня 1989 г.

## METHOD OF ANALYSIS OF A FOCUSED ELECTROMAGNETIC FIELD

E. L. Molotkov, V. P. Shvetsov

For  $E$ -polarized focused electromagnetic field the method of analysis is developed. An operator way of determination of all electrical and magnetic field components from the known scalar solution is suggested. For a focused field the analytical correlations are received and the properties of solution are investigated.

УДК 519.64:537.874:621.372

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

*A. B. Самохин, С. П. Куликов*

Рассмотрен итерационный метод решения задач дифракции на трехмерных локально-неоднородных объектах. Метод основан на итерационном многошаговом процессе минимальных невязок при решении объемного сингулярного интегрального уравнения. Доказана сходимость метода. Исследована эффективность алгоритма для численного решения задач дифракции. Получено представление поля в дальней зоне, удобное для расчетов. Рассмотрены конкретные трехмерные электродинамические задачи с однородным, неоднородным диэлектриком и плазмой. Большое внимание уделено верификации разработанного пакета прикладных программ по результатам расчета.

Для решения задач дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах в рэлеевском и резонансном диапазонах длин волн широко используются: метод поверхностных интегральных уравнений, метод моментов, метод неортогональных рядов, проекционные методы и т. д., например [1–8]. Численная реализация указанных методов осуществлена для двумерных и обладающих осевой симметрией трехмерных задач. Однако во многих практических и теоретических разработках требуется решение векторных задач дифракции электромагнитных волн на трехмерных неоднородных диэлектрических и плазменных телях, не обладающих осевой или какой-либо другой симметрией.

Такие векторные задачи дифракции могут быть сведены к объемному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля (либо относительно электрических токов поляризации) [4, 5], которое пригодно как для непрерывных сред, так и в случае скачка диэлектрической проницаемости на границе [6]. В работах [7, 8] для численного решения этого уравнения был предложен оптимальный операторный ряд простой итерации. Оптимальный параметр для сходимости итерационного процесса, полученный в [8], обеспечивает достаточно быструю сходимость в случае трехмерных однородных изотропных тел в рэлеевском и примыкающем к нему резонансном диапазонах длин волн. Для тел неоднородной структуры достаточно большого электрического объема ( $\sim \lambda^3$ ) лучшие результаты получены с помощью итерационного метода, описанного в настоящей работе, в котором параметр сходимости изменяется в процессе итераций. При этом отпадает необходимость в каком-либо знании свойств спектра интегрального оператора, так как параметр сходимости выбирается автоматически.

### 1. Пусть задано линейное уравнение

$$Au = f \quad (1)$$

с непрерывным оператором  $A$ , действующим в гильбертовом пространстве  $E$ , которое, в частности, может состоять из комплексных векторфункций. Будем рассматривать условия сходимости к решению уравнения (1) итераций вида

$$u_{n+1} = u_n - \tau_n(Au_n - f), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

с комплексными итерационными параметрами  $\tau_n$ .

Из (2) очевидно, что невязки итераций

$$h_n = Au_n - f \quad (3)$$

связаны следующими соотношениями:

$$h_{n+1} = h_n - \tau_n Ah_n. \quad (4)$$

Будем определять параметры  $\tau_n$  из условий минимума функций

$$\gamma_n(\tau) = \sqrt{\frac{\langle h_n - \tau Ah_n, h_n - \tau Ah_n \rangle}{\langle h_n, h_n \rangle}}, \quad (5)$$

где  $\langle f, g \rangle$  — скалярное произведение элементов  $f, g \in E$ .

Представим  $h_n$  в виде суммы двух элементов, один из которых является проекцией  $h_n$  на элемент  $Ah_n \in E$ , а другой ортогонален  $Ah_n$ . Такое разложение единственно и определяется формулой

$$h_n = \tau_n^0 Ah_n + d, \quad \tau_n^0 = \frac{\langle h_n, Ah_n \rangle}{\langle Ah_n, Ah_n \rangle}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая, что  $\langle Ah_n, d \rangle = 0$ , получим

$$\gamma_n^2(\tau) = \frac{\|(\tau_n^0 - \tau)Ah_n\|^2 + \|d\|^2}{\|h_n\|^2}, \quad (7)$$

где  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  — норма  $f \in E$ . Теперь ясно, что  $\min(7)$ , а значит и (5), будет при значении  $\tau_n = \tau_n^0$ , т. е.

$$\tau_n = \frac{\langle h_n, Ah_n \rangle}{\langle Ah_n, Ah_n \rangle}. \quad (8)$$

Соответствующее значение  $\gamma_n(\tau_n)$  определяется выражением

$$\gamma_n(\tau_n) = \sqrt{1 - \frac{|\langle h_n, Ah_n \rangle|^2}{\langle h_n, h_n \rangle \langle Ah_n, Ah_n \rangle}}. \quad (9)$$

Заметим, что  $\gamma_n(\tau_n) \leq 1$ , причем равенство единице возможно лишь в том случае, если  $\langle h_n, Ah_n \rangle = 0$ , т. е. элементы  $h_n$  и  $Ah_n$  ортогональны.

Из (4), (5) следует неравенство для убывания норм невязок

$$\|h_{n+1}\| \leq [\prod_{m=0}^n \gamma_m(\tau_m)] \|h_0\|. \quad (10)$$

Таким образом, из (9), (10) ясно, что если для любого  $v \in E$  выполняется

$$|\langle v, Av \rangle| \geq m_0 \langle v, v \rangle, \quad m_0 > 0, \quad (11)$$

то итерации (2) с комплексными итерационными параметрами  $\tau_n$ , определяемыми (8), (3), сходятся к решению уравнения (1) при любом начальном приближении  $u_0 \in E$ .

Заметим, что если  $A$  — самосопряженный положительно определенный оператор, то итерации вида (2) с действительными итерационными параметрами хорошо известны и широко используются в практике [9].

2. Рассмотрим задачи дифракции электромагнитных волн на локально неоднородном изотропном теле, диэлектрическая проницаемость которого является переменной функцией координат внутри тела, а вне тела параметры среды  $\epsilon_0, \mu_0$  постоянны. В такой постановке исходная задача может быть сведена к объемному сингулярному интегральному

уравнению относительно вектора электрического поля в области неоднородности [4, 5]

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{E}^0(p) - \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon(p)}{\epsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(p) + k^2 \int_Q \left( \frac{\epsilon(q)}{\epsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(q) G(R) dQ + \quad (12)$$

$$+ \int_Q \left( \left( \frac{\epsilon(q)}{\epsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(q), \operatorname{grad} \right) \operatorname{grad} G(R) dQ,$$

где  $\mathbf{E}^0(p)$  — электрическое поле, создаваемое сторонними токами в однородном пространстве с параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$ ;  $G(R) = \exp(ikR)/(4\pi R)$ ;  $R = |p - q|$ ,  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $q = (q_1, q_2, q_3)$ .

Запишем уравнение (12) в следующем символическом виде:

$$\mathbf{E} = L[(\epsilon/\epsilon_0 - 1)\mathbf{E}] + \mathbf{E}^0, \quad (13)$$

где вид оператора  $L$  очевидным образом определяется из (12).

Подставим выражение для тока поляризации  $\mathbf{J} = -i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$  в области неоднородности  $Q$  в правую часть (13). Тогда получим

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\epsilon_0} L\mathbf{J} + \mathbf{E}^0. \quad (14)$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}_1 = \frac{i}{\omega\epsilon_0} L\mathbf{J} \quad (15)$$

можно рассматривать как электрическое поле, которое создается токами  $\mathbf{J}$ , локализованными в  $Q$ , в свободном пространстве с параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$ . Соответствующее магнитное поле обозначим  $\mathbf{H}_1$ . Тогда из теоремы Умова—Пойнтинга для комплексных амплитуд поля [10] следует, что

$$-\operatorname{Re} \int_Q \mathbf{J}^* \mathbf{E}_1 dQ = \operatorname{Im} \epsilon_0 \int_{E_3} |\mathbf{E}_1|^2 dQ + \operatorname{Im} \mu_0 \int_{E_3} |\mathbf{H}_1|^2 dQ + P. \quad (16)$$

Здесь \* обозначает комплексное сопряжение, величина  $P \geq 0$  — мощность излучения,  $\operatorname{Im} \epsilon_0 \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \mu_0 \geq 0$ , а  $E_3$  — трехмерное евклидово пространство.

Подставляя (15) в (16), получим, что имеет место неравенство

$$\operatorname{Im}(1/\epsilon_0) \int_Q \mathbf{J}^* L\mathbf{J} dQ \geq 0, \quad (17)$$

которое выполняется для любых, интегрируемых с квадратом, вектор-функций  $\mathbf{J}$ .

На множестве комплекснозначных вектор-функций, интегрируемых с квадратом в  $Q$ , будем рассматривать гильбертово пространство  $L_2(Q)$  со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_Q (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dQ, \quad (18)$$

где  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}\mathbf{v}^*$  — скалярное произведение векторов в комплексном евклидовом пространстве.

Будем считать, что  $\operatorname{Im} \epsilon > 0$ ,  $\operatorname{Im} \epsilon_0 = 0$ , что обеспечивает существование и единственность решения рассматриваемых задач. Умножим обе части уравнения (13) на функцию  $(\epsilon^*(x) - \epsilon_0^*)$ . Получим

$$(\epsilon^* - \epsilon_0^*) \mathbf{E} - (\epsilon^* - \epsilon_0^*) L[(\epsilon/\epsilon_0 - 1)\mathbf{E}] = (\epsilon^* - \epsilon_0^*) \mathbf{E}. \quad (19)$$

Очевидно, что уравнения (13) и (19) эквивалентны, поскольку функци-

ция  $(\varepsilon(x) - \varepsilon_0)$  может обращаться в нуль на  $Q$  лишь на множестве точек меры нуль, например на границе области  $Q$ . Обозначим

$$\delta(x) = \varepsilon(x) - \varepsilon_0. \quad (20)$$

Пусть  $\operatorname{Im} \delta(x) > 0$  в  $Q$ , т. е.  $\operatorname{Im} \varepsilon(x) > \operatorname{Im} \varepsilon_0$ .

Запишем уравнение (19) в символьическом виде:

$$AE = F^0. \quad (21)$$

Пусть  $v \in L_2$ . Из (19) — (21) следует

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle &= \int_Q (\delta^* v, v) dQ - (1/\varepsilon_0) \int_Q (\delta^* L[\delta v], v) dQ = \\ &= \int_Q \operatorname{Re} \delta(v, v) dQ - i \int_Q \operatorname{Im} \delta(v, v) dQ - (1/\varepsilon_0) \int_Q (L[\delta v], \delta v) dQ. \end{aligned} \quad (22)$$

Первое слагаемое правой части (22) — действительная величина, а второе слагаемое — мнимая величина. Далее, поскольку  $\operatorname{Im} \delta > 0$  и принимая во внимание (17), получим

$$|\langle Av, v \rangle| \geq |\operatorname{Im} \langle Av, v \rangle| \geq \min \operatorname{Im} \delta \langle v, v \rangle. \quad (23)$$

Таким образом, из (11) следует, что для решения уравнения (19) можно использовать итерационную процедуру (2), (3), (8) в комплексном гильбертовом пространстве  $L_2(Q)$  при выполнении вышеприведенных условий на параметры задачи.

3. Из вышеизложенного очевидно, что основой рассматриваемого алгоритма является вычисление итераций вида  $w = Av$ , где оператор  $A$  определяется (12), (13), (19), (21), а  $v$  — заданная вектор-функция на  $Q$ .

В прямоугольной декартовой системе введем сетку, так чтобы область  $Q$  целиком находилась в прямоугольном параллелепипеде со сторонами  $L_1 h_1$ ,  $L_2 h_2$  и  $L_3 h_3$ , где  $h_1, h_2, h_3$  — шаги сетки по координатам  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда область  $Q$  разбивается данной сеткой на элементарные ячейки  $Q_q$ , которые являются прямоугольными параллелепипедами  $\Pi_q$  внутри области  $Q$ . Узловые точки, в которых будут определяться приближенные значения электрического поля  $E$ , выберем в центре элементарных параллелепипедов, принадлежащих области  $Q$ .

Ясно, что координаты любой узловой точки области  $Q$  могут быть описаны формулой

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 h_1 - h_1/2, \quad x_2 = p_2 h_2 - h_2/2, \quad x_3 = p_3 h_3 - h_3/2, \\ 1 \leq p_i &\leq L_i, \quad 1 \leq p_2 \leq L_2, \quad 1 \leq p_3 \leq L_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь множество троек целых чисел  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , задающее координаты узловых точек, определяется геометрией области, причем  $N \leq L_1 L_2 L_3$ , где  $N$  — количество узловых точек области  $Q$ . Пусть некоторая вектор-функция  $v$  определена в узловых точках области  $Q$ . Тогда для приближенного вычисления итерации  $w = Av$  в узловых точках  $Q$  применим следующую формулу численного интегрирования:

$$w_{pl} = \delta_p^* v_{pl} + \frac{1}{3\varepsilon_0} |\delta_p|^2 v_{pl} + \frac{\delta_p^*}{\varepsilon_0} \sum_q \sum_{n=1}^3 A_{pqln} \delta_q v_{qn}. \quad (25)$$

В (25) суммирование по  $q = (q_1, q_2, q_3)$  ведется по всем узловым точкам области;  $w_{pl}, v_{pl}$  — значения  $l$ -й декартовой координаты вектор-функций  $w$  и  $v$ , а  $\varepsilon_p$  — значение функции диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  в  $p$ -й узловой точке.

Значения  $A_{pqln}$ , согласно (12), при  $p \neq q$

$$A_{pqln} = - \int_{\Pi_q} G(R) \left\{ \left( \frac{3}{R^2} - \frac{3ik}{R} - k^2 \right) \frac{(x_{pl}-x_l)(x_{pn}-x_n)}{R^2} + \right. \\ \left. + \left( k^2 + \frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{ln} \right\} dx_1 dx_2 dx_3; \quad R = \sqrt{\sum_{r=1}^3 (x_{pr}-x_r)^2}, \quad (26)$$

где  $\Pi_q$  — параллелепипед, соответствующий  $q$ -й узловой точке,  $x_{pl}$  —  $l$ -я декартовая координата  $p$ -й узловой точки, а  $\delta_{ln}$  — символ Кронекера.

Несложно проверить, что для любого шара  $\Omega_r$  радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_{p1}, x_{p2}, x_{p3})$  справедливо

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} G(R) \left\{ \left( \frac{3}{R^2} - \frac{3ik}{R} - k^2 \right) \frac{(x_{pl}-x_l)(x_{pn}-x_n)}{R^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{3} k^2 + \frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{ln} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad l, n = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Тогда, используя (27), значения  $A_{ppln}$ , т. е. при  $p = q$ ,

$$A_{ppln} = - \int_{\Pi_p/\Omega_r} G(R) \left\{ \left( \frac{3}{R^2} - \frac{3ik}{R} - k^2 \right) \frac{(x_{pl}-x_l)(x_{pn}-x_n)}{R^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{3} k^2 + \frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{ln} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 - \frac{2}{3} k^2 \int_{\Omega_p} G(R) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (28)$$

где  $\Omega_r$  — наибольший шар, который можно вписать в ячейку  $\Pi_p$ .

Возьмем узловую точку  $p = (1, 1, 1)$ , координаты которой определяются согласно (24). Тогда из (26) следуют соотношения симметрии, которым удовлетворяют элементы массива  $\{A_{pqln}\}$  при  $p \neq q$ :

$$A_{pqln} = A_{pqnl}, \quad A_{pqln} = \text{sign}(p_l - q_l) \text{sign}(p_n - q_n) A_{pq'ln}, \quad l, n = 1, 2, 3, \quad (29)$$

$$p = (p_1, p_2, p_3), \quad q = (q_1, q_2, q_3),$$

$$q' = (|q_1 - p_1| + 1, |q_2 - p_2| + 1, |q_3 - p_3| + 1),$$

где  $\text{sign } a = 1$ , если  $a \geq 0$ , и  $\text{sign } a = -1$ , если  $a < 0$ . Учитывая (29), ясно, что для определения любого элемента  $A_{pqln}$  необходимо вычислить  $6L_1 L_2 L_3$  элементов вида  $A_{pqln}$ , где  $p = (1, 1, 1)$ ,  $q = (q_1, q_2, q_3)$  пробегает все множество узловых точек параллелепипеда  $\Pi$ , заключающего область  $Q$ , а  $l, n = 1, 2, 3$ , причем  $n \geq l$ . Теперь очевидно, что количество различных элементов массива  $\{A_{pqln}\}$ , которые надлежит хранить в памяти ЭВМ, определяется формулой

$$z = 6L_1 L_2 L_3. \quad (30)$$

Для сравнения укажем, что при решении уравнения (12) прямыми методами, например методом Гаусса, в памяти ЭВМ требуется хранить комплексную матрицу размером  $3N \times 3N$ , где  $N$  — количество узловых точек в  $Q$ , даже при наличии симметрии в исходной матрице.

Из вышеизложенного нетрудно видеть, что для приведенного алгоритма общее количество арифметических операций, необходимое для его реализации, определяется приближенной формулой

$$T \sim 10\alpha N^2 + T_0, \quad (31)$$

где  $\alpha$  — количество итераций, достаточное для получения заданной точности, а  $T_0$  — количество арифметических операций, требуемое для вычисления неодинаковых элементов  $A_{pqln}$ . Причем, поскольку  $\text{mes } Q_j$  достаточно мал, то при использовании кубатурных формул, как правило,  $T_0 < 10N^2$ . Кроме того, массивы  $A_{pqln}$  можно хранить в памяти на внешних носителях и использовать для решения различных задач на одинаковой сетке.

4. Если поле в области  $Q$  найдено, то расчет поля вне  $Q$  проводится также с помощью исходного интегрального уравнения (12), рассматриваемого уже как соотношение. При этом, конечно, отсутствует внеинтегральный член, выделенный из интегрального оператора при  $p=q$ . Таким образом, для рассеянного поля вне  $Q$

$$E^{\text{рас}} = k^2 \int_Q \left( \frac{\epsilon(q)}{\epsilon_0} - 1 \right) \Gamma E(q) dQ. \quad (32)$$

Здесь  $\Gamma = (I + k^2 \nabla \nabla) G$  — тензорная функция Грина, компоненты которой, согласно (12), имеют вид

$$\Gamma_{pqln} = \left\{ \delta_{ln} \left( 1 + \frac{i}{kR} - \frac{i}{(kR)^2} \right) + \frac{\Delta x_l \Delta x_n}{R^2} \left( -1 - \frac{3i}{kR} + \frac{3}{(kR)^2} \right) \right\} G(R), \quad (33)$$

$$\Delta x_l = x_{pl} - x_{ql}, \quad \Delta x_n = x_{pn} - x_{qn}, \quad l, n = 1, 2, 3.$$

Обозначим  $e_p$  единичный вектор в направлении точки наблюдения  $p$ ,  $q \in Q$  — точка истока,  $R = |p - q|$  (рис. 1).

Введем декартову систему координат  $\{x_l\}$ ,  $l=1, 2, 3$ , ось  $x_1$ , которой направлена по вектору  $e_p$ . В этой системе координат в дальней зоне тензор (33) имеет вид

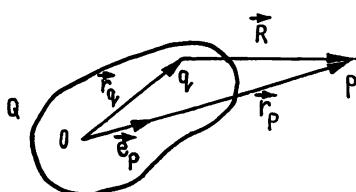


Рис. 1.

В дальней зоне, при  $R \rightarrow \infty$ , скалярная функция Грина принимает вид

$$G(R) = \frac{\exp(ikr_p)}{4\pi r_p} \exp(-ik(e_p, r_q)).$$

Для поля (32) в дальней зоне, таким образом, получаем

$$E_l^{\text{рас}} = 0, \quad (34)$$

$$E_l^{\text{рас}} = k^2 \frac{\exp(ikr_p)}{4\pi r_p} \int_Q \left( \frac{\epsilon(q)}{\epsilon_0} - 1 \right) \exp(-ik(e_p, r_q)) E_l(q) dQ, \quad l=2, 3.$$

Соотношения (34) показывают, что в дальней зоне поле  $E^{\text{рас}}$  находится в плоскости, перпендикулярной вектору  $e_p$ . Переходим в основную систему координат, связанную с телом  $Q$  и не зависящую от точки наблюдения  $p$ . Проекция поля, подсчитанного с помощью (32), на плоскость, перпендикулярную  $e_p$ , равна  $-e_p \times e_p \times E$  и в основной системе координат имеет, вообще говоря, все три составляющие. Окончательно для рассеянного поля в дальней зоне получаем

$$E^{\text{рас}} = -k^2 \frac{\exp(ikr_p)}{4\pi r_p} \left\{ e_p \times e_p \times \int_Q \left( \frac{\epsilon(q)}{\epsilon_0} - 1 \right) E(q) \exp(-ik(e_p, r_q)) dQ \right\}.$$

Эффективная площадь рассеяния тела или диаграмма направленности как функция угла наблюдения определяется как  $\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 |E^{\text{рас}}|^2 \times \times (|E^0|^2)^{-1}$ . В случае, если первичное поле  $E^0$  — падающая плоская волна, получаем

$$\sigma = \frac{k^4}{16\pi^2} \left| \mathbf{e}_p \times \int_Q \left( \frac{\epsilon(q)}{\epsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(q) \exp(-ik(\mathbf{e}_p, \mathbf{r}_q)) dQ \right|^2.$$

5. На основе описанного алгоритма был разработан комплекс программ (КП) на фортране, предназначенный для численного решения задач дифракции на изотропном локально неоднородном трехмерном теле в рэлеевском и резонансном диапазонах длин волн. Входными данными для разработанного КП являются: внешнее поле и диэлектрическая проницаемость в области неоднородности  $Q$  как функции координат; шаги сетки и количество узлов сетки по каждой декартовой оси, а также требуемая точность решения, которая в алгоритме определяется через относительную невязку. Геометрия области  $Q$  задается с помощью логической подпрограммы-функции. Таким образом, КП достаточно просто перестраивается с одной задачи на другую.

С целью апробации КП, определения параметров расчетной сетки, необходимых для достаточной точности аппроксимации задачи, проводились сравнения решений, полученных описанным методом, с существующими строгими решениями. Так, проводились многочисленные расчеты задачи дифракции плоской волны на однородном диэлектрическом шаре, для которой существует строгое решение Ми, удобное для расчетов на ЭВМ [11].

Количество узлов декартовой сетки в рассеивающей области для приведенных на рис. 2—6 задач дифракции на шаре  $N=512$ . Относительная точность по невязке решения не более 0,2%. Количество итераций для достижения этой точности 5—10.

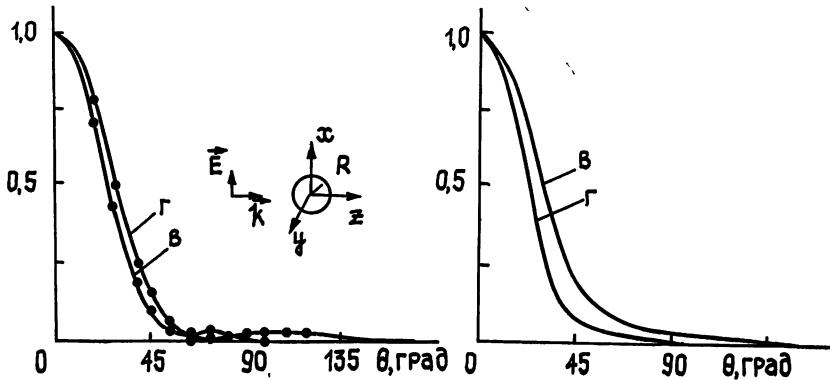


Рис. 2.

Рис. 3.

На рис. 2 представлены горизонтальная —  $\Gamma$  (в плоскости вектора  $E$  в падающей волне) и вертикальная —  $\beta$  (в перпендикулярной плоскости) диаграммы рассеяния на диэлектрическом шаре радиуса  $kR=3,2$  с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=1,56$ . Здесь  $k$  — волновое число свободного пространства. Шаг сетки в электрических размерах  $k\sqrt{\epsilon} h=1$ , т. е. около шести узловых точек на длину волны в среде. Здесь же представлено строгое решение метода собственных функций. Совпадение решений почти графическое, среднеквадратичное отклонение диаграмм менее 1%.

На рис. 3 — решение для плазменного шара с  $\epsilon=0,3$  и  $kR=4$ . Шаг сетки в среде  $\sim 0,55$ , т. е. кусочно-постоянная аппроксимация поля в данной задаче лучше, несмотря на большие размеры шара. Совпадение приближенных и строгих диаграмм здесь графическое.

Пониженные требования к точности аппроксимации для плазменных задач с  $0 < \epsilon < 1$  иллюстрирует также диаграмма на рис. 4. Здесь радиус плазменного шара  $kR = 6,4$  при том же  $\epsilon = 0,3$ . Шаг сетки в среде 0,9, примерно такой же, как и в первой задаче. Точность решения по диаграмме 1–2%. Решения на рис. 2–4 показывают, что в задачах дифракции на объектах с диэлектрической проницаемостью  $0 < \epsilon < 2$  для достижения в диаграмме рассеяния точности не более 1–2% достаточно использовать декартову сетку с количеством узлов 6–8 на длину волны в среде.

В общем случае, погрешность аппроксимации складывается из погрешностей двух типов: погрешности «физической» аппроксимации, связанной с учетом кусочно-постоянной аппроксимации поля в среде, и «геометрической», связанной с описанием формы тела с помощью расчетной сетки. Второй тип погрешности в рассмотренных выше задачах

проявлялся слабо, однако для случаев  $\epsilon > 2$  он становится существенным. Причина этого — чувствительность диаграммы рассеяния в этих случаях к небольшим изменениям размеров и формы тела. Вместе с тем расчетная декартова сетка форму тела вращения не всегда описывает хорошо. Так, вместо задачи дифракции на шаре решается задача дифракции на ступенчатом теле, составленном из кубических ячеек, таких, что центры всех ячеек лежат внутри шара. Суммарный объем ячеек при  $N = 512$ , например, меньше объема шара на 11%.

На рис. 5, 6 представлены диаграммы рассеяния для диэлектрического шара с  $\epsilon = 4$ . На рис. 5 сплошная и пунктирная линии — это приближенное и строгое соответственно решения для шара радиуса  $kR = 1,2$ . При шаге сетки в среде  $\sim 0,6$  (т. е. 10 точек на длину волны) погрешность в диаграмме больше, чем это следует из учета только «физической» погрешности аппроксимации. Однако расчет строгой диаграммы на шаре меньшего радиуса  $kR = 1,15$ , показанный точками, дает графическое совпадение с приближенным решением.

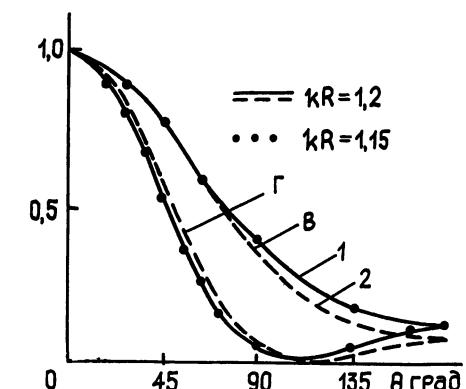


Рис. 4.

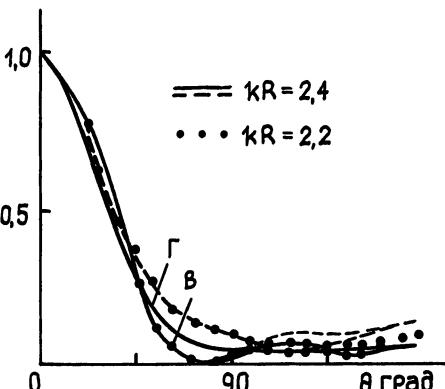


Рис. 5.

На рис. 6 — аналогичные диаграммы для шара радиуса  $kR = 2,4$ . Точками показано строгое решение для  $kR = 2,2$ , которое ближе к приближенному, но все же погрешность горизонтальной диаграммы около 10%. Вдвое больший шаг сетки в среде по сравнению с предыдущей задачей делает вклад погрешностей каждого типа в диаграмму значительным.

Для исследования влияния погрешности «физической» аппроксимации на точность решения при отсутствии погрешности аппроксимации второго типа проводились расчеты диаграмм рассеяния на диэлектрических прямоугольных параллелепипедах. Так, рассматривался параллелепипед со сторонами  $ka=kc=2,4$  и  $kb=3,6$ , диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=4$  (рис. 7). Проводились исследования сходимости диаграммы к некоторому предельному значению на расчетных сетках с количеством узлов  $N=12, 96, 324$  и  $768$ . Результаты для горизонтальной диаграммы при поляризации вектора  $E$  вдоль большего ребра представлены на рис. 7. Отличия диаграмм по среднеквадратичному отклонению при  $N=324$  и  $N=768$  составляют для вертикальной диаграммы  $0,3\%$  и для горизонтальной диаграммы  $0,7\%$ . В случае  $N=96$  диаграммы отличаются от предельного значения на  $1,2\%$  и  $2,8\%$  соответственно. Эти расчеты, а также расчеты, проведенные на других телях, форма которых полностью описывается декартовой сеткой, показывают, что при отсутствии погрешности второго типа шаг сетки в среде  $\sqrt{\epsilon} kh=1,2$  достаточен для получения точности решения в диаграмме  $\sim 3\%$ , а шаг в среде  $\sim 0,6$  (т. е. 10 узлов на длине волны) обеспечивает, как правило, графическую (менее  $1\%$ ) точность в диаграмме.

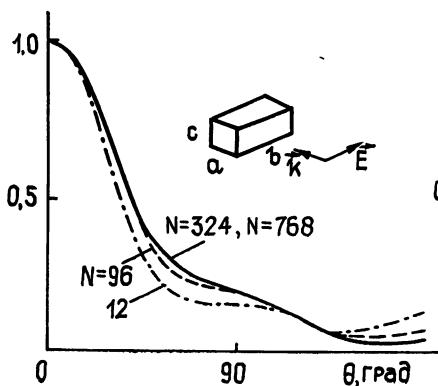


Рис. 7.

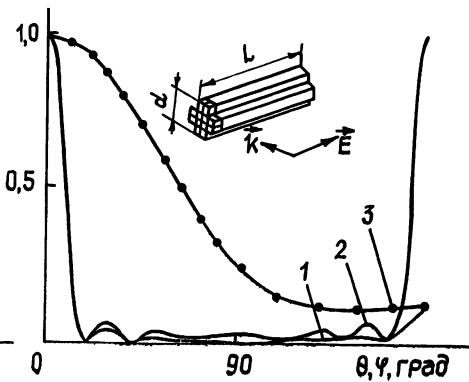


Рис. 8.

Проводились расчеты диаграмм рассеяния на длинных, но конечных диэлектрических цилиндрах. В случае однородного цилиндра и поляризации падающей волны вдоль оси цилиндра диаграмму рассеяния в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, можно сравнить с двумерной диаграммой в случае  $E$ -поляризации [12]. На рис. 8 представлен расчет задачи дифракции на цилиндре с  $\epsilon=4$ , длиной  $kL=20$  и диаметром  $kd=2$ . В поперечном сечении узлы декартовой сетки образуют «крест» из 12 точек, общее количество точек  $N=480$ . Шаг сетки в среде  $\sim 1$ , что обеспечивает достаточную «физическую» точность аппроксимации задачи. Диаграмма в перпендикулярной плоскости к цилиндру графически совпадает с диаграммой двумерного рассеяния, представленной здесь же точками. Горизонтальная диаграмма (1) имеет один хорошо различимый боковой лепесток в сторону обратного рассеяния. Диаграмма в плоскости, перпендикулярной вектору  $k$  (2), имеет два боковых лепестка и симметрична.

Метод применим для решения задач рассеяния на неоднородных телях, диэлектрическая проницаемость которых задается в узлах сетки. Рассматривалась задача дифракции на плазменном теле, близком к эллипсоиду с осями  $ka=kb=3$ ,  $kc=5$ . Послойное распределение диэлектрической проницаемости для тела представлено на рис. 9. Шаг сетки  $kh=0,5$  в свободном пространстве. Количество слоев по оси  $z=10$ . Диэлектрическая проницаемость на большей оси эллипсоида меняется от значения  $\epsilon=0$  на одном конце до  $\epsilon=0,8$  на другом. По направлениям вдоль осей  $x$  и  $y$  меняется симметрично — возрастает от значения при  $x=0$  или  $y=0$  до максимального ( $\leq 1$ ) на периферии.

ном узле. Рассматриваются горизонтальная и вертикальная диаграммы при распространении падающей волны вдоль оси  $z=1$  и в обратном направлении — 2. Заметно отличие в величине максимума обратного лепестка для диаграммы 1 и 2. При обратном направлении распространения падающей волны уровень обратного отражения ниже, что можно объяснить большей рефракцией волны при распространении в направлении от более разреженных слоев плазмы к более плотным по сравнению с обратным направлением распространения, когда основное отражение назад идет от плотных слоев плазмы ( $\epsilon \sim 0$ ) — рис. 10.

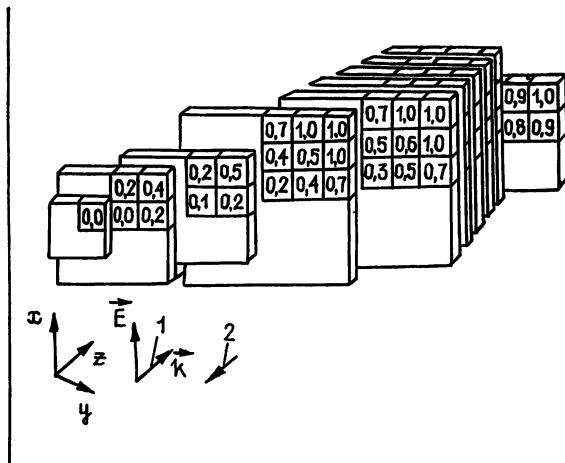


Рис. 9.

Для плазменных задач с  $0 < \epsilon < 1$  характерна быстрая сходимость итерационного процесса. Решение с относительной точностью по невязке в 0,2% получено за четыре итерации.

На рис. 11 представлена задача дифракции на неоднородном диэлектрическом цилиндре квадратного поперечного сечения длиной  $kL = 8$  и поперечными размерами  $ka = kb = 2,4$ . Диэлектрическая проницаемость изменяется равномерно вдоль оси цилиндра от значения  $\epsilon = 6$  на одном конце до  $\epsilon = 1,1$  на другом. Шаг сетки  $kh = 0,4$  в свободном пространстве. Диаграмма  $xz$  полностью несимметрична, заметен

лепесток вдоль оси  $z$ , чего не наблюдается для однородного цилиндра. Главный лепесток диаграммы смещен в сторону более плотного диэлектрика на  $5^\circ$ , что свидетельствует о проявлении геометрооптических законов распространения волны.

Для плотного диэлектрика  $\epsilon > 2$  итерационный процесс не всегда сходится быстро. Это, возможно, связано с наличием внутренних резонансов волн в диэлектрике. В данном случае решение с относительной невязкой 0,2% получено за 30 итераций при количестве узлов в рассеивающей области  $N = 6 \times 6 \times 20 = 720$ . Общее время решения на ЭВМ ЕС-1045 — 30 мин, включая расчет трех диаграмм по 72 точки каждая.

В квазистатическом диапазоне длин волн величины  $|\epsilon|$  могут достигать значений  $|\epsilon| \leq 100 \div 200$ . Так, исследовалась задача дифракции на прямоугольной пластине с  $\epsilon = 70 + 60i$  и электрическими длинами

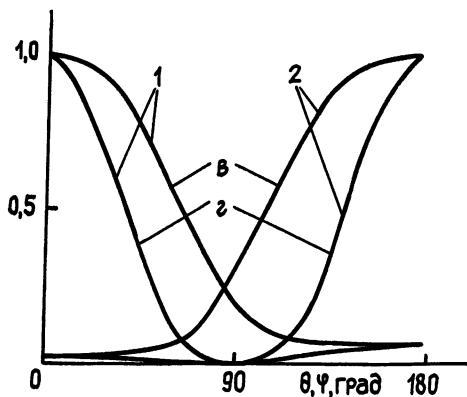


Рис. 10.

ребер  $a:b:c=12:18:1$ ,  $k_c=\pi/100$ . Численные результаты для этой задачи, полученные прямым методом при  $N=48$ , представлены в работе [4]. Решение, полученное итерационным методом данной работы с относительной невязкой в 0,1%, отличается в узлах сетки от приведенного в [4] не более чем на 0,1% для поляризации волны перпендикулярно ребру пластины и не более чем на 1% для поляризации падающей волны параллельно ребру пластины.

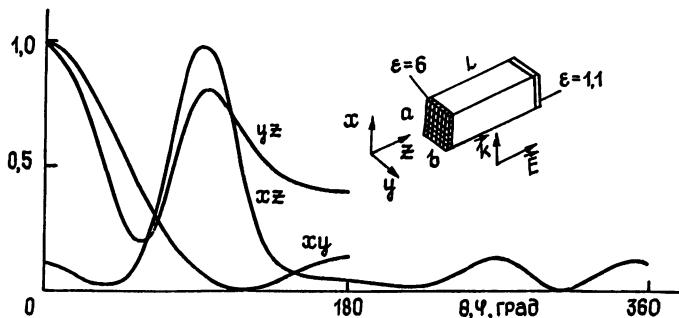


Рис. 11.

Количество узловых точек  $N$  области  $Q$  в рассмотренных задачах изменялось от 12 до 1000. При этом объем требуемой памяти не превышал 500 Кбайт. Время вычисления одной итерации при  $N=720$  составляло ~1 мин на ЭВМ ЕС-1045. Поэтому в связи с квадратичным увеличением времени счета от  $N$  количество узловых точек  $N>1000$  нецелесообразно рассматривать на ЭВМ такого класса при работе в режиме диалогового времени. Однако при переходе к большим ЭВМ с быстродействием в несколько миллионов опер./с количество узловых точек может быть увеличено до 10 000, при этом объем требуемой оперативной памяти, который увеличивается линейно с  $N$ , составит не более 5 Мбайт. Для сравнения укажем, что при решении уравнения (12) прямыми методами [4, 13–15] время счета растет  $\sim N^3$ , а объем памяти  $\sim N^2$ . Поэтому в немногочисленных зарубежных работах, в которых рассматривалось численное решение данных уравнений прямыми методами, количество узловых точек не превышало  $N=180$  [15] даже при использовании высокопроизводительных ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987.
2. Математические модели прикладной электродинамики / Под ред. В. И. Дмитриева, А. С. Ильинского. — М.: Гос. ун-т, 1984.
3. Численные методы теории дифракции: Сб. статей. — М.: Мир, 1982.
- 4 Livesay D. E., Chen K. M // IEEE Trans. 1974. MTT-22. P. 1273.
5. Самохин А. Б. Дифракция и распространение волн в неоднородных средах: Междунед. сб. — М.: МФТИ, 1984. С. 5.
6. Самохин А. Б. Дифракция и распространение волн в неоднородных средах: Междунед. сб. — М.: МФТИ, 1985. С. 37.
7. Куликов С. П., Самохин А. Б. // Труды МЭИ. — М.: Энерг. ин-т, 1981. Вып. 553. С. 24.
8. Куликов С. П., Самохин А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 99.
9. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
10. Федоров Н. Н. Основы электродинамики — М.: Высшая школа, 1980.
11. Дейрменджян Д. Рассеяние электромагнитного излучения полидисперсными сферическими частицами. — М.: Мир, 1971.
12. Куликов С. П. Совершенствование методов и средств приема, передачи и обработки информации: Сб. статей. — М.: МИРЭА, 1985. С. 57. Деп. № 1409-85.
13. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. — М.: Мир, 1977.

14 Richmond J. H // IEEE Trans. 1965. AP-13 № 3 P. 334

15 Hagmann M. J., Gandhi O. P., Durney C. H // IEEE Trans 1979  
MTT-27 № 9 P. 804

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
17 апреля 1989 г.

## ITERATION METHOD USED FOR THE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS OF HETEROGENEOUS MEDIA OF ELECTRODYNAMICS

A. B. Samokhin, S. P. Kulikov

Consideration is given to the solution of diffraction by three-dimensional locally heterogeneous objects. This method is based on iteration multistep process of minimum discrepancies in the solution of three-dimensional singular integral equation. Convergence of the method is proved. Efficiency of the algorithm for the computational solution of the diffraction problem is under investigation. The insight into the far field convenient for calculations is gained. Specific three-dimensional electrodynamic problems with homogeneous and inhomogeneous dielectric and plasma are under investigation. Much consideration is given to verification of packets of accompanying programmes based upon the pertinent calculations

---

### Аннотации депонированных статей

УДК 537.86 + 621.372.41.

## МНОГОЦЕЛЕВАЯ ДЕМОНСТРАЦИОННАЯ УСТАНОВКА ПО КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССАМ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ И ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Г. С. Егоров, П. В. Казарин, Н. С. Степанов

При излучении колебательно-волновых явлений в вузовских курсах весьма желательно иметь установки, позволяющие в условиях лекции продемонстрировать не только качественные, но и количественные закономерности. В заметке описывается одна из таких установок, разработанных в демонстрационном кабинете НГУ, которая при минимальном числе коммутаций дает возможность показать спиралограммы собственных колебаний в колебательном контуре при различном затухании и из фазовые портреты, биения, обусловленные перекачкой энергии в связанных системах в зависимости от степени связи, и фазовые соотношения между нормальными колебаниями, процесс установления вынужденных колебаний при различных добротностях контура и частотах вынуждающей силы, вид амплитудно-частотных характеристик одиночного и связанных контуров и их трансформацию при изменении как добротности, так и величины коэффициента связи и т. д.

Основными узлами схемы являются два индуктивно связанных колебательных контура и электрический коммутатор. Для большей наглядности при индикации удобно использовать двухканальный осциллограф С1-83, который позволяет одновременно наблюдать две величины, например, два нормальных колебания и т. д.

Статья депонирована в ВИНТИ,  
регистр. № 5975-В90. Деп. от 28 ноября 1990 г.

УДК 621.985.6 (088.8)

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА

*Г. С. Воробьев, А. Я. Кириченко, А. И. Цвык, Л. И. Цвык*

Описана новая методика измерения динамических характеристик электронного потока в приборах СВЧ *O*-типа, основанная на использовании механизма преобразования энергии электронов в энергию дифракционного излучения. Приводятся результаты измерений коэффициента редукции электронного потока по предложенной методике, которые сравниваются с аналогичными измерениями, основанными на использовании переходного излучения электронного логотипа

Информация о статических и динамических характеристиках электронного потока (ЭП) в приборах СВЧ является основополагающей при их конструировании и оптимизации выходных параметров. В этом плане существует большое количество теоретических и экспериментальных работ, которые достаточно полно обобщены в ряде монографий и обзоров [<sup>1-3</sup>]. Из экспериментальных следует выделить методы, использующие диафрагмы, зонды и объемные резонаторы. Эти методы нашли широкое применение в длинноволновой области СВЧ диапазона, однако их эффективность уменьшается по мере укорочения длины волны. За последние годы успешно развиваются фотометоды измерения структуры ЭП, основанные на использовании свечения оптического диапазона, возникающего при падении электронов на металлическую поверхность [<sup>4</sup>]. В работе [<sup>5</sup>] показана возможность применения явления переходного излучения для изучения динамических характеристик модулированного ЭП. Этот способ обладает тем преимуществом, что позволяет измерять в электровакуумных приборах коротковолновой области СВЧ диапазона динамические характеристики потока в дальней зоне, т. е. не внося в него возмущений. Однако такой способ обладает сравнительно низкой точностью и малой разрешающей способностью, что обусловлено широкой диаграммой, слабой когерентностью и низкой интенсивностью переходного излучения. В работах [<sup>6, 7</sup>] показано, что обширную информацию об электронно-волновых процессах, протекающих в модулированном ЭП, несет в себе дифракционное излучение (ДИ), возбуждаемое этим ЭП при пропускании его вблизи периодической структуры.

В данной работе описана новая методика [<sup>8</sup>] измерения динамических характеристик ЭП, которая основана на анализе ДИ, возбуждаемого волнами пространственного заряда модулированного потока, пропускаемого вблизи периодической структуры. Проводятся результаты измерений редуцированной плазменной частоты в зависимости от плотности тока и ускоряющего напряжения, которые были получены в сантиметровом диапазоне для двух типов периодических структур: гребенки и пластины с кольцами. Поскольку для ДИ характерны большая интенсивность, высокая когерентность и малая ширина диаграмм излучения, то описанная методика, по сравнению с известными неконтактными способами, позволяет значительно повысить точность и разрешающую способность измерений.

**1. Методика измерений.** Известно, что при модуляции электронного потока СВЧ полем в нем возбуждается пространственно-временной

Спектр электронных волн, распространяющихся с различными фазовыми скоростями [2]. Если такой ЭП пропустить вблизи периодической структуры, то можно возбудить ДИ в направлениях, связанных с фазовыми скоростями распространения волн пространственного заряда (ВПЗ) и параметрами структуры. Эта связь определяется из условий возбуждения ДИ [6]. Так, в частности, для волн низшего порядка — медленной (МВПЗ) и быстрой (БВПЗ), имеющих максимальную амплитуду конвекционного тока, получим

$$\cos \Gamma_n^{\pm} = c/v - 2\pi c|n|/\omega l \pm R\omega_p c/\omega v, \quad (1)$$

где  $\Gamma_n^+$ ,  $\Gamma_n^-$  — углы максимальной интенсивности диаграмм направленности ДИ;  $R$  — коэффициент редукции или фактор уменьшения плазменной частоты [2];  $l$  — период структуры;  $\omega = 2\pi f$  — частота модуляции ЭП;  $\omega_p = 1,83 \cdot 10^{10} i_0^{1/2} U_0^{-1/4}$  — плазменная частота неограниченного потока;  $i_0$ ,  $U_0$  — плотность тока и ускоряющее напряжение;  $v = \sqrt{2eU_0}/m$  — скорость электронов на выходе модулятора;  $c$ ,  $e$ ,  $m$  — скорость света, заряд и масса электрона соответственно;  $n = -1, -2, -3, \dots$  — номер пространственной дифракционной гармоники.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведены различные варианты возбуждения диаграмм направленности ДИ при пропускании модулированного ЭП 1 вблизи периодической структуры 2.

Из анализа соотношения (1) следует, что при малых значениях плотности тока

$$i_0 \leq 0,46 \cdot 10^{-24} f^2 U_0^{3/2} \sin^2 \delta \quad (2)$$

влияние ВПЗ на направление ДИ незначительно и ЭП возбуждает однолепестковую диаграмму направленности излучения (рис. 1а):

$$\Gamma_n^+ \approx \Gamma_n^- \approx \Gamma_n^0 = \gamma_n \pm \delta,$$

где

$$\gamma_n = \arccos (c/v - 2\pi c|n|/\omega l), \quad \delta \approx (0,5 \div 2) \cdot 10^{-2}\pi.$$

Следовательно, устанавливая плотность тока (2), мы имеем начальный (базовый) угол излучения  $\Gamma_n^0$ , относительно которого необходимо проводить все последующие измерения.

Увеличивая плотность тока относительно значения (2), получают двухлепестковую диаграмму 4, 5 направленности излучения (рис. 1б), возбуждаемого медленной и быстрой ВПЗ. Измеряют углы  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  отклонений максимальной интенсивности полученных диаграмм относительно начального угла  $\Gamma_n^0$  и находят углы  $\Gamma_n^+ = \Gamma_n^0 - \alpha^+$ ,  $\Gamma_n^- = \Gamma_n^0 + \alpha^-$ . Зная углы  $\Gamma_n^+$ ,  $\Gamma_n^-$ , из соотношения (1) определяют коэффициент редукции плазменной частоты:

$$R = 3,4 \cdot 10^{-13} f U_0^{3/4} i_0^{-1/2} (\cos \Gamma_n^+ - \cos \Gamma_n^-), \quad (3)$$

где частота  $f$  измеряется в герцах,  $U_0$  — в вольтах,  $i_0$  — в  $A/\text{см}^2$ .

Из соотношений (1), (3) следует, что коэффициент редукции плазменной частоты можно также определить, измеряя один из углов  $\Gamma_n^+$  или  $\Gamma_n^-$ . В этом случае формула (3) преобразуется к следующему виду для углов  $\Gamma_n^+$  и  $\Gamma_n^-$  соответственно:

$$R = 6,8 \cdot 10^{-13} f U_0^{3/4} i_0^{-1/2} (\cos \Gamma_n^+ - \cos \Gamma_n^0); \quad (4a)$$

$$R = 6,8 \cdot 10^{-13} f U_0^{3/4} i_0^{-1/2} (\cos \Gamma_n^0 - \cos \Gamma_n^-), \quad (4b)$$

где для углов излучения выполняется равенство  $\cos \Gamma_n^+ + \cos \Gamma_n^- = 2 \cos \Gamma_n^0$ . Формулами (4) удобно пользоваться, если одна из диаграмм 4 или 5

близко прилегает к поверхности периодической структуры (рис. 1в, г;  $\alpha^\pm \geq \Gamma_n^0 - \theta^0$ , где  $2\theta^0$  — ширина направленности ДИ).

Следует отметить, что если один из углов  $\alpha^\pm$  (рис. 1 в, г) или оба эти угла одновременно (рис. 1д, е — пунктирные диаграммы 4, 5) близко прилегают к поверхности дифракционной решетки, то путем уменьшения ускоряющего напряжения от величины  $U_0$  до значения  $U_1$  или увеличения  $U_0$  до значения  $U_2$  поворачивают диаграммы 4, 5 по направлению к углу  $\Gamma_n^0$ , измеряют углы поворота  $\beta^\pm$  и определяют коэффициент редукции по формулам, следующим из общего соотношения (3) или из частных соотношений (4):

$$R = 6,8 \cdot 10^{-13} f U_1^{3/4} i_0^{-1/2} [\cos(\Gamma_n^0 - \beta^-) - \cos(\Gamma_n^- - \beta^-)]; \quad (5a)$$

$$R = 6,8 \cdot 10^{-13} f U_2^{3/4} i_0^{-1/2} [\cos(\Gamma_n^+ + \beta^+) - \cos(\Gamma_n^0 + \beta^+)]. \quad (5b)$$

Точность измерения углов  $\Gamma_n^+$ ,  $\Gamma_n^0$ ,  $\beta^\pm$  и разрешающая способность (минимальное расстояние между двумя первыми измеряемыми максимумами интенсивности диаграмм направленности ДИ) метода преимущественно зависят от ширины  $2\theta^0$  диаграммы излучения, которая на уровне половинной мощности оценивается по формуле [9]

$$2\theta^0 = 65c/fNl,$$

где  $N$  — количество периодов структуры. Следовательно, всегда можно выбрать такую длину периодической структуры, при которой диаграмма излучения будет иметь незначительную ширину, что указывает на практическую возможность измерения углов  $\Gamma_n^+$ ,  $\Gamma_n^0$ ,  $\beta^\pm$  с высокой точностью и разрешающей способностью. Так, если эти углы измерять с точностью до  $1^\circ$ , то в предложенном методе относительная погрешность определения коэффициента редукции плазменной частоты не превышает 3 %. Это более, чем в два раза точнее метода измерения коэффициента  $R$  по переходному излучению [5].

**2. Экспериментальная установка.** Экспериментальные исследования проводились в сантиметровом диапазоне волн, что позволило сравнить результаты измерений по предложенному способу с измерениями по переходному излучению [5]. Общий вид экспериментальной установки приведен на рис. 2. Электронный поток 1, создаваемый пушкой 2, модулировался торoidalным резонатором 3, пропускался вдоль периодической структуры 4 и рассеивался на коллекторе 5. При эксперименте использовались периодические структуры двух видов: гребенка и пластина с кольцами (на рис. 2 показана вторая периодическая структура). Периоды структур выбирались из соотношения  $l(\text{мм}) = 5,94 \cdot 10^8 \sqrt{U_0(B)/f(\text{Гц})}$  для основной пространственной дифракционной гармоники ( $n=-1$ ), что соответствует условию возбуждения монохроматическим потоком ДИ по нормали к поверхности структуры. Основные параметры этих структур и ЭП приведены в табл. 1

Таблица 1

Структура	Длина, мм	Период, мм	Ширина щели, мм	Прямоугольный размер, мм	Поток	Сечение потока, мм <sup>2</sup> ; радиус, мм
Гребенка	65	2,6	1	5	Ленточный	$3 \times 0,4$
Пластина с кольцами	60	3,0	1,5	3×6	Цилиндрический	2,6

Резонаторы 3 отличались только формой и размерами отверстия, через которые проходил ЭП. Механическая настройка резонаторов 3

Позволяла изменять их собственную частоту в диапазоне  $f=8,7 \div 10$  ГГц. Периодическая структура 4, электронная пушка 2, резонатор 3, коллектор 5 размещались в вакуумной оболочке 6. Источником опорного сигнала резонатора 3 служил отражательный клистрон 7 трехсанитметрового диапазона, перестраиваемый в процессе измерений в соответствии с изменением собственной частоты модулирующего резонатора 3. Дифракционное излучение принималось рупорной антенной 8 ( $80 \times 100$  мм) с детекторной секцией, расположенной на расстоянии 900 мм от структуры. Сигнал излучения после детектора через усилитель 9 поступал на осциллограф или микроамперметр 10. Макет-анализатор располагается в зазоре между полюсными наконечниками электромагнита 11. Полюсные наконечники электромагнита ограничивали возможность проведения измерений при углах излучения  $150^\circ \leq \Gamma_{-1}^0 \leq 30^\circ$ . Для уменьшения влияния диаграммы ДИ отраженных СВЧ сигналов полюсные наконечники и часть стеклянной колбы покрывались поглотителем 12. Ускоряющее напряжение, создаваемое источником питания 13, менялось в интервале 0–3500 В, плотность тока  $i_0$  составляла  $(0,05 \div 4)$  А/см<sup>2</sup>.

Таким образом, осуществляя управление скоростью электронов при постоянной плотности тока и частоте модуляции или же при постоянном напряжении и частоте модуляции плотностью тока, можно плавно вводить волны пространственного заряда в синхронизм с гармониками периодической структуры и изменять направление диаграмм ДИ.

**3. Результаты измерений.** Экспериментально установлено, что при плотностях тока  $i_0 \approx (0,05 \div 0,1)$  А/см<sup>2</sup> формируется однолепестковая диаграмма 3 (рис. 1а) со значением  $20^\circ \approx 30^\circ$ , что удовлетворительно согласуется с теоретическими расчетами по соотношениям (1), (6). Максимальная интенсивность излучения этой диаграммы наблюдалась под углом  $\Gamma_{-1}^0 = \pi/2 \pm \delta$  ( $\delta \approx 1 \div 2^\circ$ ) при следующих параметрах: 1 —  $f = 9,74$  ГГц,  $U_0 = 1820$  В — для гребенки; 2 —  $f = 8,9$  ГГц,  $U_0 = 2000$  В — для пластины с кольцами.

При увеличении плотности тока (путем увеличения накала электронной пушки) наблюдалось смещение максимальной интенсивности диаграмм излучения. На рис. 3а, б показаны результаты экспериментальных измерений углов излучения  $\Gamma_{-1}^\pm$  и редуцированной плазменной частоты  $f_R = \omega_R/2\pi$  от плотности тока  $i_0$  для гребенки (крестики) и для пластины с кольцами (точки). Здесь же на рис. 3б для сравнения приводятся теоретические графики 1, 2 нередуцированной плазменной частоты  $f_p$ , рассчитанные при двух напряжениях  $U_0 = 1820$  В (гребенка) и  $U_0 = 2000$  В (пластина с кольцами). Измерения показывают, что в данном случае при изменении плотности тока в пределах  $i_0 = 0,5 \div 1$  А/см<sup>2</sup> коэффициент редукции  $R = 0,79 \pm 0,02$ , а абсолютная погрешность определения эффективной плазменной частоты примерно составляет  $\pm 12$  МГц (доверительный интервал в точках измерения показан вертикальными отрезками). Отметим, что для плотности тока  $i_0 > 1$  А/см<sup>2</sup>, вследствие относительно широких диаграмм излучения, одновременное измерение углов  $\Gamma_{-1}^\pm$  затруднялось. Поэтому измерения проводились путем уменьшения или увеличения ускоряющего напряжения. При токах  $i_0 = (1,5 \div 2)$  А/см<sup>2</sup> получены диаграммы направленности, соответствующие возбуждению излучения только медленной (рис. 1е) или быстрой (рис. 1д) волнами пространственного заряда. Коэффициент редукции в этом случае вычислялся по формулам (5а), (5б). Из теоретических и измеренных графиков следует, что эффективная плазменная частота  $f_R$  существенно отличается от значения  $f_p$  неограниченного ЭП. При этом рассматриваемые ленточный электронный поток над гребенкой и цилиндрический поток в канале с кольцевой электродинамической системой, возбуждающие ДИ под углом  $\Gamma_{-1}^0 \approx 90^\circ$ , имеют близкие плазменные частоты. Для других ускоряющих напряжений или частот модуляции (ДИ направлено под углами  $\Gamma_{-1}^0 < 90^\circ$  или  $\Gamma_{-1}^0 > 90^\circ$ ) коэффи-

циенты редукции и плазменные частоты этих потоков могут заметно отличаться.

На рис. 4 показано, как изменяется интенсивность ДИ и коэффициент редукции от ускоряющего напряжения для цилиндрического модулированного потока, движущегося в канале периодической структуры «пластина с кольцами». Здесь вверху приведены экспериментальные зависимости распределения в дальней зоне интенсивности ДИ от ускоряющего напряжения при малой и большой плотностях тока ( $\Gamma_{-1}^0 = 90^\circ$ ,  $f = 8,9$  ГГц; кривые 1 —  $i_0 = 0,1$  А/см<sup>2</sup>; 2 —  $i_0 = 1,2$  А/см<sup>2</sup>); пунктирные вертикальные линии разделяют области возбуждения поверхностных электромагнитных волн периодической структуры (заштрихованная область) и отрывающихся волн ДИ, а линия сдвига фаз на периоде структуры  $\varphi = 2\pi$  соответствует ускоряющему напряжению пучка  $U_0 = 2000$  В, при котором наблюдается излучение под углом  $\Gamma_{-1}^0 = 90^\circ$  (особенности возбуждения поверхностных и отрывающихся волн в открытой электродинамической системе (рис. 2) достаточно подробно изучены в работе [10]). Внизу на рис. 4 приводятся измеренные предложенным методом значения коэффициентов редукции при различных ускоряющих напряжениях и теоретическая зависимость  $R$  от  $U$  (кривая 3), рассчитанная по данным работы [2] (с. 29, рис. 1. 5) для цилиндрического потока, помещенного в трубку дрейфа. Из графиков 1, 2 следует, что для плотности тока  $i_0 = 0,1$  А/см<sup>2</sup> при  $U_0 = 2000$  В формируется однолепестковая диаграмма с максимальной интенсивностью ДИ в направлении  $\Gamma_{-1}^0 = 90^\circ$ . При  $i_0 > 0,1$  А/см<sup>2</sup> наблюдается эффект расщепления диаграммы на отдельные лепестки, соответствующие излучению медленной и быстрой электронными волнами пространственного заряда. В частности, при  $i_0 = 1,2$  А/см<sup>2</sup> максимальная интенсивность в диаграмме ДИ регистрируется под углами  $\Gamma_{-1}^+ = 62^\circ$  и  $\Gamma_{-1}^- = 118^\circ$ , что по формуле (3) соответствует коэффициенту редукции  $R = 0,78 \pm 0,02$ . Отметим, что для рассматриваемых параметров системы измеренные значения коэффициентов редукции цилиндрического потока в периодической структуре «пластина с кольцами» достоверно близки к теоретическим значениям фактора уменьшения плазменной частоты ЭП, движущегося в трубке дрейфа, т. е. в плане вычисления коэффициента редукции приведенная в работе [2] теоретическая модель цилиндрического потока в трубке дрейфа неплохо моделирует реальный поток электронов в электродинамической системе типа «пластина с кольцами».

Таким образом, проведенные исследования указывают на высокую эффективность использования дифракционного излучения для определения коэффициента редукции, плазменной частоты и других динамических параметров ЭП, которые необходимы при решении задач оптимизации электровакумных приборов О-типа.

1) Описанный способ по сравнению с известными неконтактными способами позволяет примерно в два раза повысить точность и разрешающую способность измерений. При этом с увеличением частоты модуляции точность и разрешающая способность измерений возрастают, что связано с уменьшением ширины диаграмм направленности излучения.

2) Предложенная в [6] экспериментальная установка позволяет эффективно реализовать данный способ и для измерений динамических характеристик ЭП приборов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн, в частности генераторов дифракционного излучения [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Евтифеева Е. С., Кабардина Х. А. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Электроника. 1961. Вып. 8. С. 54.
2. Шевчик В. Н., Шведов Г. Н., Соболева А. В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах.—Саратов: Гос. ун-т, 1962.—335 с.

3. Александров Г. И., Заморозков Б. М., Калинина Ю. А. и др. // Обзоры по электронной технике. Сер. Электроника СВЧ. 1973. Вып. 8 (108). —206 с.
4. Балаклицкий И. М., Белоусов Е. В., Корж В. Г. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1982. Т. 25. № 5. С. 38.
5. Еремка В. Д., Кориченко А. Я., Лысова Л. А. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. № 1. С. 153.
6. Вертий А. А., Цвых А. И., Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 10. С. 343.
7. Вертий А. А., Иванченко И. В., Нестеренко А. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 11. С. 1443.
8. А. С. № 1077501 СССР. Воробьев Г. С., Кириченко А. Я., Цвых А. И. и др.—Опубл. в Б. И. 1985. № 31. С. 248.
9. Шестопалов В. П. Дифракционная электроника.—Харьков: Вища школа, 1976.—231 с.
10. Кириченко А. Я. Препринт ИРЭ АН УССР, № 1113. Харьков, 1979.

Сумской филиал Харьковского  
политехнического института

Поступила в редакцию  
6 января 1989 г.,  
после доработки  
3 апреля 1990 г.

## EXPERIMENTAL DEFINITION OF THE REDUCED PLASMA FREQUENCY OF THE ELECTRON FLOW

G. S. Vorob'ev, A. Ya. Kirichenko, A. I. Tsvyk, L. I. Tsvyk

A new method of measurement of dynamic characteristics of the electron flow which is based on the analysis of diffraction radiation excited by waves of the space charge of the modulated electron flow transmitting near the periodic structure has been described. The results are given of measurements of the ratio of plasma frequency reduction depending on the current density nad accelerating voltage which have been obtained in the centimetre range for two types of periodic structures, i. e. a comb and a plate with rings. The results obtained are compared with the measurements of the ratio of reduction based on the using the transition radiation of the electron flow.

### Аннотации депонированных статей

УДК 551. 46.

## О ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В ИЗОБРАЖЕНИИ НА ТРАССЕ С ОТРАЖЕНИЕМ ОТ СЛУЧАЙНО-НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

M. Л. Белов, В. М. Орлов

В статье исследуется пространственное распределение интенсивности за приемной линзой на трассе с отражением от случайно-неровной поверхности. С использованием метода Кирхгофа получено выражение для средней интенсивности в изображении, когда влиянием затенений одних элементов поверхности другими можно пренебречь, а падающее на поверхность и принимаемое излучение проходят по разным неоднородностям среды. Показано, что случайно-неровный характер отражающей поверхности может проводить к уменьшению размера изображения (по сравнению с плоской ламбертовской поверхностью).

Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 6348-В90. Деп. от 20 декабря 1990 г.

УДК 533.951.7/8

## О ВНЕШНИХ ВИНТОВЫХ МОДАХ УЕДИНЕННОГО ТОКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

*A. M. Уралов*

В рамках магнитогидродинамического приближения рассмотрена модельная задача об устойчивости внешних винтовых мод экранированного тока, окруженного горячей плазмой. Показано, что частичная экранизация тока при наличии стороннего магнитного поля приводит к стабилизации всех внешних мод — без ограничений на длину цилиндра.

Вопрос о характере внешних винтовых мод уединенного тока в неограниченной, почти однородной плазме возникает в связи с присутствием в короне Солнца резко очерченных тонких петельных структур, вдоль которых протекает электрический ток. При этом петлю можно моделировать либо полностью экранированным магнитным жгутом, вне которого ( $r > a$ ) азимутальное магнитное поле  $H_{\phi e} = 0$ , либо цилиндрической струей тока одного направления (неэкранированный ток). В силу больших масштабов и высокой проводимости солнечной плазмы диффузионное размывание границы жгута весьма невелико, и эту границу можно считать достаточно узкой в течение времени существования (дни, недели) этих образований. Поэтому, если речь идет об экранированном жгуте, обратный ток можно считать поверхностным. Поскольку в приближении длинных волн ( $ak \ll 1$  или  $H_\phi \ll H_z$ ), идеальные гидромагнитные возмущения типа  $\xi = \xi(r) \exp(i\omega t + im\varphi + ikz)$  допускают условное разделение на внутренние и внешние (аналогично делению винтовых возмущений лабораторного плазменного шнуря на желобковые и типа поверхности волны [1]), постольку работы, содержащие анализ этих моделей, могут быть условно разделены таким же образом.

Первой является, по-видимому, работа [2], где исследуется устойчивость внешней моды  $m=1$  бесконечного однородного цилиндрического тока, экранированного обратным поверхностным. Магнитное поле во внешней плазме отсутствует. Результатом [2] явился вывод (на самом деле ошибочный и повторенный в [3]) о том, что неустойчивость наступает лишь при достаточно большой закрутке силовых линий в жгуте. В более позднем рассмотрении неустойчивость моды  $m=1$  не обнаружена ( $\omega^2=0$  при  $k=0$ ), [4]. Такой же результат следует из выкладок [5], где уже энергетическим способом изучается устойчивость этой моды лабораторного шнуря с током, когда на границе плазма—вакуум азимутальное поле  $H_\phi$  обращается в нуль ( $H_i=H_e=H_z=\text{const}$ ). Следует, однако, заметить, что последние выводы получены при сохранении лишь главных членов соответствующих разложений.

Неустойчивость однородного тока в однородном продольном магнитном поле относительно внутренних винтовых мод доказана в [6]. Для случая неоднородного распределения тока такое рассмотрение сделано в [1] энергетическим способом. Там же, в частности, указано достаточно условие устойчивости почти для любых винтовых (как внутренних, так и внешних) возмущений конфигураций магнитного поля типа солнечных пятен, погруженных в безграничную плазму. Это условие использовалось при анализе причин, приводящих к формированию внутренней структуры выходящих из недр Солнца магнитных трубок

[7,8]. Указанное в [1] условие устойчивости  $\kappa = \frac{4\pi r}{H_0^2} (dp_{\text{газ}}/dr) > \frac{2}{3}$  является достаточным, если оно выполняется везде. Однако такое требование является слишком сильным и невыполнимо для обсуждаемых солнечных структур, особенно при анализе их внешних мод. Давление окружающей жгут корональной плазмы ни в коей мере не нарастает при удалении от границы. При этом, скорее всего,  $(dp_{\text{газ}}/dr)_e = 0$ .

Цель настоящей работы состоит в уточнении ранее полученных выводов, касающихся устойчивости полностью экранированного тока и определении характера внешних мод бесконечного цилиндрического тока, в общем случае экранированного частично, окруженного при этом неограниченной однородной плазмой. Внутренние моды не обсуждаются, поскольку соответствующий анализ практически ничем не отличается от такового для Токамака. Тем не менее поведение внешних мод изучается на примере однородного тока внутри цилиндра. Последнее позволяет получить методом колебаний некоторые конкретные результаты, справедливые в качественном отношении, по крайней мере для моды  $m=1$ , и при некоторых других распределениях внутреннего тока. Скиновый ток обратного направления полагается поверхностным. При этом из рассмотрения, конечно же, выпадают внутренние моды, присущие самому «поверхностному» току при конечной ширине его локализации. Однако их вклад в неустойчивость жгута относительно крупномасштабных внешних мод падает с ростом отношения радиуса жгута к ширине скин-слоя. Используемое приближение несжимаемости оправдано рассмотрением длинных, низкочастотных волн. Важным фактором, влияющим на устойчивость, является также учет возможного неравенства продольных магнитных полей внутри цилиндра с током и во внешней плазме.

В работе показано, что бесконечный экранированный магнитный цилиндр, окруженный горячей плазмой без магнитного поля, слабонестойчив относительно винтового изгиба при сколь угодно малой скрутке. Присутствие во внешней плазме магнитного поля, пусть даже малого, резко изменяет картину. При этом характерной чертой поверхностных волн, распространяющихся вдоль частично экранированного тока, является наличие во внешней плазме двух особых точек, одна из которых — точка альфеновского резонанса. В ее окрестности решение (в приближении идеальной магнитной гидродинамики) носит характер мелкомасштабных пульсаций. В пределе  $r\omega^2 \rightarrow 0$  обе точки сливаются в одну, удовлетворяющую условию  $(kH_0)_e = 0$ . Если это условие выполняется на границе цилиндра с током, то можно оценить инкременты наиболее неустойчивых внешних мод. Основным результатом при этом явилось доказательство возможности стабилизации (в рамках модели) всех внешних мод без ограничения на длину цилиндра (в условиях, когда нарушено достаточное условие устойчивости  $\kappa > 2/3$ ). В частном случае равенства продольных магнитных полей внутри и вне цилиндра последнее имеет место, когда внутренний ток частично экранирован поверхностным током обратного направления. Как известно, достижение устойчивости неэкранированного тока при наличии границы плазма—вакуум возможно лишь при ограничении на его длину, что при  $H_i = H_e$  сводится к критерию Шафранова—Крускала [1] для границы плазмы. В обсуждаемом случае такой границы нет.

**1. Основные соотношения.** Магнитный жгут моделируем бесконечным вдоль оси  $z$  цилиндром радиуса  $r=a$ . Внутри (*i*) цилиндра протекает однородный продольный электрический ток. По поверхности  $r=a$  течет продольный поверхностный ток того же или обратного направления. Вне (*e*) цилиндра в состоянии равновесия токов нет. Значения продольного  $H_z$  и азимутального  $H_\phi$  магнитных полей, плотности плазмы  $\rho$  в случае статического равновесия таковы:

$$H_{z0} = H_i = \text{const}, \quad H_{\phi0} = H_{\phi i} = r H_{ai}/a, \quad \rho_0 = \rho_i = \text{const} \quad (r < a),$$

(1)

$$H_{z0} = H_e = \text{const}, \quad H_{\varphi 0} = H_{\varphi e} = a H_{ae}/r, \quad \rho_0 = \rho_e = \text{const} \quad (r > a).$$

Исходными для анализа являются линеаризованные уравнения идеальной магнитной гидродинамики [9] в отсутствие силы тяжести. Для смещений плазмы вида  $\xi = \xi(r) \exp(i\omega t + im\varphi + ikz)$  уравнение движения внутри и снаружи цилиндра приводится к виду

$$\begin{aligned} d_{i,e}\xi = -\text{grad}p' + \frac{1}{4\pi} \left\{ e_r \left[ \frac{2H_{\varphi 0}^2}{r} \text{div}\xi - \frac{2i(\mathbf{k}H_0)H_{\varphi 0}}{r} \xi_\varphi - \delta \frac{4H_{\varphi 0}^2}{r^2} \xi_r \right] + \right. \\ \left. + e_\varphi \left[ \frac{2i(\mathbf{k}H_0)H_{\varphi 0}}{r} \xi_r - iH_{\varphi 0}(\mathbf{k}H_0) \text{div}\xi \right] - e_z [iH_{z0}(\mathbf{k}H_0) \text{div}\xi] \right\}_{i,e}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$H_0 = H_{z0} + H_{\varphi 0}, \quad \delta_i = 0, \quad \delta_e = 1,$$

$$\mathbf{k} = k e_z + \frac{m}{r} e_\varphi, \quad d_{i,e} = [-\omega^2 \rho_0 + (\mathbf{k}H_0)^2/4\pi]_{i,e}.$$

Величина  $p'$  есть вариация полного давления  $p = p_{\text{газ}} + H^2/8\pi$ . Для получения из (2) искомых уравнений необходимо выразить  $p'$  через смещение  $\xi$ . При этом есть два решаемых до конца варианта. Первый из них,  $H_{\varphi 0} = 0$ ,  $\text{div}\xi \neq 0$ , подробно разобран в астрофизической литературе (см. [10] и ссылки там). Нас интересует второй случай:  $H_{\varphi 0} \neq 0$ ,  $\text{div}\xi = 0$ . Тогда из (2) для компонент смещения плазмы следует:

— внутри цилиндра (см. также [8, 11])

$$\begin{aligned} -d_i(1-\beta_i^2)\xi_r = \partial p'/\partial r + \beta_i m p'/r, \\ (3a) \end{aligned}$$

$$-d_i(1-\beta_i^2)\xi_\varphi = i m p'/r + i \beta_i \partial p'/\partial r, \quad -d_i\xi_z = i k p';$$

— вне цилиндра

$$\begin{aligned} -g\xi_r = d_e \partial p'/\partial r + m f_e p'/r, \\ (3b) \end{aligned}$$

$$-d_e\xi_\varphi = i m p'/r - i f_e \xi_r, \quad -d_e\xi_z = i k p',$$

где

$$2\pi r f_{i,e} = [(\mathbf{k}H_0)H_{\varphi 0}]_{i,e}, \quad \beta_i = f_i/d_i,$$

$$g = d_e^2 + D, \quad D = -\omega^2 \rho_e A, \quad A = H_{\varphi e}^2/\pi r^2.$$

Подстановка (3а), (3б) в соотношение  $\text{div}\xi = 0$  даст следующие волновые уравнения:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial p'}{\partial y} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{y^2} \right) p' = 0, \quad y = kr \sqrt{\beta_i^2 - 1}; \quad (4a)$$

$$r^2 \Delta p' - r \frac{\partial p'}{\partial r} \left( \frac{Q}{g} + \frac{2m f_e}{d_e} \right) - p' \left[ \frac{m f_e Q}{g d_e} + \frac{2m(mA + f_e)}{d_e} + \frac{k^2 r^2 D}{d_e^2} \right] = 0, \quad (4b)$$

где

$$Q = -4m f_e d_e - 4D, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right).$$

Уравнение (4а) соответствует известному [11] решению внутри цилиндра  $p'_i = \text{const} J_m(y)$ , что вместе с (3а) означает

$$p'_i = -\xi_r d_i (1 - \beta_i^2) \left/ \left[ \frac{y}{r} \frac{J'_m(y)}{J_m(y)} + \frac{m \beta_i}{r} \right] \right., \quad (5)$$

$J_m, J'_m$  — функция Бесселя первого рода и ее производная по аргументу. Решения уравнения (4б) обсуждаются ниже. Условие сшивки решений внутри (5) и вне цилиндра определяется равенством полных давлений на смещенной границе:  $p_i(r=a+\xi_{ri})=p_e(r=a+\xi_{re})$ . Взяв полную производную  $d/dt$  от этого равенства, линеаризуя и интегрируя по  $t$ , запишем его в виде

$$(p' + \xi_r \partial p_0 / \partial r)_i = (p' + \xi_r \partial p_0 / \partial r)_e, \quad \xi_{ri} = \xi_{re} \quad (r=a). \quad (6)$$

В нашем примере  $(\partial p_0 / \partial r)_{i,e} = -H_{ai,e}^2 / 4\pi r$ .

**2. Экранированный ток.** В этом случае по поверхности цилиндра протекает ток, противоположный по направлению и равный по величине току внутри:  $H_{qe}=0$ . От уравнения (4б) тогда остается  $\Delta p'=0$ ,  $p'=\text{const } K_m(kr)$ , где  $K_m$  — модифицированная функция Ханкеля. Используя (3б), (5), (6), получим дисперсионное соотношение

$$\frac{d_i(1-\beta_i^2)}{m\beta_i + yJ'_m(y)/J_m(y)} + \frac{H_{ai}^2}{4\pi a^2} = \frac{d_e K_m(ak)}{(ak)K'_m(ak)} \quad (r=a). \quad (7)$$

В приближении длинных волн  $ak \ll 1$  и при условии  $y \ll 1$  (при этом условии волна становится поверхностной) для моды  $m=0$  из (7) следует

$$4\pi(\rho_i + \epsilon_0\rho_e) \frac{\omega^2}{k^2} = H_i^2 + \epsilon_0 H_e^2 + \frac{H_{ai}^2}{2}, \quad \epsilon_0 = -\frac{(ak)^2}{2} \left[ \ln\left(\frac{ak}{2}\right) + 0,58 \right] \ll 1. \quad (8)$$

Относительно возмущений типа перетяжек полностью скомпенсированный ток в плазме, как и следовало ожидать, устойчив.

В том же приближении для мод  $m \neq 0$  справедливо соотношение

$$d_i(1-\beta_i)(1+\epsilon_i) + mH_{ai}^2/4\pi a^2 + d_e(1-\epsilon_e) = 0 \quad (r=a), \quad (9)$$

$$\epsilon_i(\omega^2) = \frac{(ak)^2(\beta_i - 1)}{(2m^2 + 2m)} \ll 1, \quad \epsilon_e = \frac{(ak)}{m} \frac{K_{m-1}(ak)}{K_m(ak)} \ll 1.$$

Учет малых членов в (9) проведем последовательным приближением, полагая  $\omega^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega^2$ ,  $\Delta\omega^2 \ll \omega_0^2$ , где  $\omega_0^2$  — решение (9) при  $\epsilon_i = \epsilon_e = 0$ :

$$4\pi a^2 (\rho_i + \rho_e) \omega_0^2 = \\ = (H_i^2 + H_e^2) (ak)^2 + 2(m-1)(ak) H_i H_{ai} + H_{ai}^2 (m^2 - m). \quad (10)$$

Отсюда находим

$$4\pi a^2 (\rho_i + \rho_e) \omega_{0\min}^2 = (m-1) H_{ai}^2 (H_i^2 + mH_e^2) / (H_i^2 + H_e^2), \\ ak(\omega_0^2 - \omega_{0\min}^2) = -(m-1) H_i H_{ai} / (H_i^2 + H_e^2) \ll 1. \quad (11)$$

Как видно, мода  $m=1$  нейтрально устойчива, что соответствует результатам [4, 5]. Однако учет последующих малых членов в разложении функции Бесселя, мало изменяя результат (11) для мод  $m \geq 2$ , приводит к слабой неустойчивости моды  $m=1$ . Замена в (9) величины  $\epsilon_i(\omega^2)$  величиной  $\epsilon_i(\omega_0^2)$  даст поправку к частоте. Из условия  $\partial(\omega_0^2 + \Delta\omega^2) / \partial k = 0$  определяется наибольший инкремент кинк-моды. В приближении  $\rho_e \rightarrow 0$ ,  $H_e < H_{ai}$  его оценка такова:

$$4\pi a^2 \rho_i \omega_{0\min}^2 \approx -(H_{ai}/H_i)^4 H_{ai}^2 / 64,$$

$$ak(\omega^2 = \omega_{\min}^2) \approx + \frac{1}{8} \left( \frac{H_{ai}}{H_i} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{H_e}{H_i} \right)^2 \right] \ll 1.$$

Поскольку инкремент (12), мал, постольку важным может оказаться последующий учет стабилизирующих тороидальных поправок, если цилиндр искривлен.

Результаты этого пункта получены в предположении  $ak \ll 1$ . В силу (11), (12) это также означает  $H_{ai} \ll H_i$ . Смысл используемого приближения  $y \ll 1$  виден на примере  $\rho_e = \infty$ . Как следует из (10), в этой ситуации  $\omega^2 = 0$  и решения в указанном приближении отсутствуют. При этом, однако, существует другой класс решений  $\omega^2 \neq 0$ , когда в первом слагаемом полного соотношения (7) имеет место обращение в нуль знаменателя ( $d_e = \infty$ ). Последнее, в силу (5), эквивалентно условию неподвижной границы  $\xi_{ri}(a) = 0$ :  $yJ'_m(y) + m\beta_i J_m(y) = 0$ , и предполагает отказ от условия  $y \ll 1$ . При  $\beta_i \gg 1$ ,  $ak \ll 1$ ,  $m \neq 0$ , отсюда следует  $J_m(y) = 0$ , где  $y \approx ak$ ,  $\beta_i = z_m$  — нули функции Бесселя ( $y > 1$ ). Возмущения, удовлетворяющие этому соотношению, носят характер объемных волн внутри однородного цилиндра. Условие  $y \ll 1$  соответствует поэтому приближению поверхностных волн в случае подвижной границы цилиндра.

**3. Частично экранированный ток.** Теперь по поверхности цилиндра может протекать однородный скиновый ток произвольного направления и величины, но такой, что внешнее азимутальное и магнитное поле  $H_{\varphi e} \neq 0$ . При этом для моды  $m=0$  решение уравнения (4) в области  $a \leq r \leq \infty$  близко к решению  $K_0(kr)$ , если выполнено неравенство  $(\alpha - \mu)^2/4\alpha \gg 1$ , где  $\alpha = 4\rho_e a^2 \omega^2 / H_{ae}^2$ ,  $\mu = (ak)^2 (H_e / H_{ae})^2$ . Дисперсионное соотношение в этом случае такое же, как и (7) при  $m=0$ , но с заменой  $H_{ai}^2 \rightarrow H_{ai}^2 - H_{ae}^2$ . В приближении  $ak \ll 1$ ,  $y \ll 1$  ему соответствует (8) с той же заменой. Аксиально-симметрическая мода устойчива, если  $H_{ae}^2 < H_{ai}^2 + 2H_i^2 + 2\varepsilon_0 H_e^2$ , что при  $H_{ai} = H_e = 0$  совпадает с критерием устойчивости лабораторного скринированного пинча с внутренним продольным магнитным полем [9].

Для возмущений с  $m \neq 0$  решение уравнения (4б) в значительной мере зависит от того, существует ли в области  $a \leq r \leq \infty$  резонансная поверхность  $r = r_s$ , на которой  $d_e = 0$ . Если рассматривать волны, для которых такая поверхность отсутствует и, кроме того, везде имеет место выполнение неравенств  $d_e \gg m f_e$ ,  $d_e \gg m^2 A$ , то ограниченное решение (4б) имеет вид  $p' \sim K_m(kr)$ . Если резонансная поверхность присутствует, то решение такого типа имеет место лишь при  $r \gg r_s$ . На поведение же решения в интервале  $a \leq r \leq r_s$  теперь существенное влияние оказывает резонансная область. Обсуждение этого вопроса проведем поэтапно.

а)  $\rho_e = 0$ ,  $d_e \rightarrow 0$ . Вначале рассмотрим предельный случай плазмы очень малой плотности  $\rho_e \rightarrow 0$ . Заметим, что такое упрощение еще не соответствует переходу к вакуумному приближению. Переход возможен при дополнительном условии отсутствия электрических токов, чего мы не требуем.

Введем переменную  $x = r/r_{s0}$ , где  $r_{s0}^2 = -amH_{ae}/kH_e$  определяет положение резонансной поверхности ( $k/m < 0$ ) при  $\rho_e = 0$ . Тогда уравнение (4б) примет вид

$$x^2 \frac{d^2 p'}{dx^2} + \left[ x + \frac{4x}{(1-x^2)} \right] \frac{dp'}{dx} - (m^2 + k^2 x^2 r_{s0}^2) p' + \frac{4(1+x^2)}{(1-x^2)^2} p' = 0. \quad (13)$$

При  $|1-x^2| \gg 2$  от (13) останется  $\Delta p' \approx 0$ . Соблюдение обратного неравенства  $|1-x| \ll 1$  всегда имеет место в некоторой окрестности точки  $x=1$ . Решением (13) в этой окрестности будет  $p'_{s0} = c_1(1-x) +$

$+c_2(1-x)^2$ ;  $c_{1,2}$  — постоянные. Вариация полного давления в точке  $r=r_s$  обращается в нуль. Подстановка  $p'_{s0}$  в (3б) дает для радиального смещения плазмы в резонансной области  $\xi_r \sim 1/(1-x)$ . Это обстоятельство указывает на необходимость учета инерции среды ( $\rho_e \neq 0$ ).

б)  $\rho_e \neq 0$ ,  $d_e \rightarrow 0$ . Альфеновский резонанс. С учетом инерции среды особенность в уравнении (4б), обусловленная обращением в нуль величины  $d_e$ , имеет место лишь для устойчивых колебаний  $\omega^2 > 0$ . При этом равенство  $d_e=0$  есть локальное дисперсионное соотношение альфеновских волн. Поведение решения вблизи точки  $r_s$  ( $d_e=0$ ) можно изучить, ограничившись малой ее окрестностью, когда возможно выполнение неравенств  $D \gg d_e^2$ ,  $D \gg m_f e d_e$ . Оставляя далее в (4б) наиболее быстрорастущие при  $d_e \rightarrow 0$  члены, приходим к уравнению, справедливому при  $r \approx r_s$ :

$$(1-x')^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial(x')^2} - (1-x') \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{k^2 r_s^2}{4m^2} p' = 0, \quad (14)$$

где  $x' = r/r_s$ . Здесь использовано разложение величины  $d_e$  в ряд вблизи  $x' = 1$  и учтено, что  $(D/f_e^2)_{x'=1} = -1$ . Общим решением (14) будет

$$p' = c_1 \cos\left(\frac{kr_s}{2m} \ln|1-x'|\right) + c_2 \sin\left(\frac{kr_s}{2m} \ln|1-x'|\right). \quad (15)$$

Решение описывает постоянные по амплитуде осцилляции полного давления, пространственный масштаб которых обращается в нуль в резонансной точке. Последнее указывает на несправедливость используемого приближения идеальной одножидкостной гидродинамики в ее окрестности и необходимости учета, по крайней мере, диссипации. Амплитуда пульсаций в резонансном слое будет падать. Тенденция к выравниванию решений внутри и вне слоя проявится при этом в возникновении радиальных волн, переносящих энергию волнового поля в область поглощения до тех пор, пока во всем пространстве не исчезнут движения с заданными  $\omega$ ,  $k$ ,  $m$ . Затухание аналогично эффекту резонансного поглощения альфеновских волн в однородном магнитном поле с попечным градиентом плотности [12], когда темп поглощения определяется, помимо вязкости и проводимости плазмы, масштабом, на котором изменяется ее плотность. В данном случае роль последнего играет масштаб, на котором изменяется азимутальное поле:  $H_\varphi \propto a/r$ .

в)  $\rho_e \neq 0$ ,  $g \rightarrow 0$ . Область «избегания». Уравнение (4б) имеет еще одну особенность при  $\omega^2 > 0$ , связанную с обращением в нуль величины  $g$  в точке  $r=R$ . В пределе  $\eta=r/R \rightarrow 1$  уравнение (4б) представимо в виде

$$(\eta-1) \frac{\partial^2 p'}{\partial \eta^2} - \frac{\partial p'}{\partial \eta} - \left( \frac{m f_e}{d_e} \right)_{\eta=1} p' = 0, \quad (16)$$

где использовано разложение для  $g$  в окрестности точки  $\eta=1$ . Полным решением (16) будет функция ([13], с. 401)

$$p'(\eta) = (\eta-1) Z_2(2\sqrt{(1-\eta)m f_e/d_e}),$$

где  $Z_2 = c_1 J_2 + c_2 N_2$  — сумма независимых функций Бесселя первого и второго рода. При переходе через точку  $\eta=1$  решение изменяет свой характер, однако в пределе  $\eta \rightarrow 1$  эта перемена неощутима и для  $p'(\eta)$  справедливо представление  $p'(\eta) \approx c'_1(\eta-1)^2 + c'_2$ . Подставив последнее в (16), заключаем:  $c'_2 = 0$ . Из выражений (3б) для смещений плазмы при этом следует отсутствие особенности в точке  $\eta=1$ . Поэтому мы вправе потребовать выполнения исходного условия  $\operatorname{div} \xi = 0$ . В итоге имеем:  $c'_1 = 0$ . Это означает наличие малой застойной зоны в окрестности точки  $r=R$ :  $p' \approx 0$ ,  $\xi \approx 0$ .

При рассмотрении нестационарной задачи об установлении волнового поля, когда в начальный момент движение  $(\omega, k, m)$  задано во всем пространстве, малую окрестность точки  $r=R$  правильнее было бы назвать областью «избегания». Асимптотическое прекращение движений здесь не имеет ничего общего с диссипацией (нагревом).

г) *Устойчивость уединенного тока ( $m \neq 0$ )*. В отсутствие резонансной поверхности во внешней плазме значение  $\omega^2$  поверхностных волн всегда положительно. Если такая поверхность присутствует, то помимо возмущений, для которых  $\omega^2 > 0$  (особенности этого случая обсуждались в пунктах б), в)), возможны неустойчивые моды,  $\omega^2 < 0$ . Для определения границы устойчивости необходимо знать хотя бы решение вблизи границы цилиндра при малых величинах  $\omega^2$ . Воспользуемся тем обстоятельством, что при  $\omega^2 \rightarrow 0$  уравнение (46) переходит в уравнение (13) точно так же, как это имеет место, когда  $\rho_e \rightarrow 0$ . Рассмотрим возмущения, резонансная поверхность которых расположена достаточно близко к поверхности токового цилиндра. Подстановка найденного в пункте а) значения  $p_{s0}' = c_1(1-x) + c_2(1-x)^2$  в равенства (36) даст компоненты смещения плазмы в окрестности резонансной точки. Последующее требование отсутствия сингулярности в выражении для  $\operatorname{div} \xi$  показывает, что  $c_1 = 0$ . В соответствии с этим дисперсионное соотношение (6) примет вид

$$\frac{d_i(1 - \beta_i^2)}{m\beta_i + yJ'_m(y)/J_m(y)} = \frac{H_{\text{eff}}^2 - H_{al}^2}{4\pi a^2} \quad (r=a), \quad (17)$$

где

$$H_{\text{eff}}^2 \approx H_{ae}^2 [1 - 4m^2(1-x)^3], \quad x = a/r_{s0} \leq 1.$$

В приближении  $ak \ll 1$ ,  $y \ll 1$  найдем

$$4\pi\rho_i a^2 \omega^2 / m H_{\text{eff}}^2 = [mz^2 + m - 1] \varphi^2 - 2(m-1)\varphi z - 1. \quad (18)$$

При этом  $\omega^2 < 0$ , если  $\varphi = H_{ai}/H_{\text{eff}} < \varphi_0$ , где

$$\varphi_0 = [(m-1)z + \sqrt{(mz^2+1)(m-1)+z^2}] / (mz^2+m-1), \quad z = H_i/H_e.$$

Последнее неравенство означает рост положительной поправки к квадрату частоты по мере удаления резонансной поверхности от границы цилиндра (эффект пропорционален  $m^2$ ). Поэтому наиболее неустойчивы те возмущения, если такие имеются, для которых  $r_{s0}=a$ . Например, внешняя мода  $m=1$  всегда неустойчива при соблюдении неравенства

$$H_{ai}H_i < H_{ae}H_e. \quad (19)$$

Внешнее поле ухудшает устойчивость, внутреннее — наоборот.

В практически интересном случае равенства  $H_i = H_e$  продольных магнитных полей вне и внутри цилиндра с током величина  $\varphi_0 = 1$  для всех  $m$ . Это, в частности, означает, что бесконечный неэкранированный ( $H_{ai} = H_{ae}$ ) цилиндр с однородным током внутри, погруженный в неограниченную идеальную плазму, нейтрально устойчив в отношении всех внешних мод с  $m \neq 0$ . Однако, если внутренний ток хотя бы частично экранирован обратным поверхностным ( $H_{ae} < H_{ai}$ ), система становится устойчивой. Как известно, бесконечный плазменный шнур с неэкранированным током в вакууме неустойчив всегда. И если в этом случае устойчивость относительно внешних мод  $m \geq 2$  может быть достигнута пикированием тока к центру шнура [1, 5], то мода  $m=1$  остается неустойчивой. Ее максимальный инкремент при этом  $\gamma_1' \approx H_{ae}^2(a_1)(1-a_1^2/b^2)/8\pi\rho a_1^2$ . Подчеркнем, следя [1], что  $a_1$  — это радиус высокопроводящей плазмы, а не радиус токового канала ( $b$  — радиус кожуха). Формальный переход к обсуждаемой ситуации токово-

го канала в неограниченной плазме соответствует пределу  $a_1 \rightarrow b \rightarrow \infty$ ,  $H_\Phi(a_1) = aH_{ae}/a_1 \rightarrow 0$ ,  $\gamma_1 \rightarrow 0$ . Последнее означает переход к состоянию безразличного равновесия, что согласуется с (18). Следующий шаг — достижение устойчивости в условиях бесконечной электропроводности — возможен при осуществлении неравенства, обратного неравенству (19).

Необходимо отметить, что учет высокой, но не бесконечной электропроводности внешней плазмы, видимо, расширит область неустойчивости благодаря появлению внешних медленных резистивных мод, выпадающих из приближения идеальной магнитной гидродинамики.

Автор признателен С. И. Проценко, указавшему на ошибку в вычислениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. // ЖТФ. 1970. Т. 40 № 2. С. 241.
2. Dungey J. W., Loughhead R. E. // Australian J. Phys. 1954. V. 7. P. 5.
3. Альфвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967. С. 136.
4. Slatyer N. F., Donnelly I. J. // Solar Phys. 1985. V. 99. P. 119.
5. Соловьев А. С. // В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтovichа. — М.: Атомиздат, 1972. № 6
6. Roberts P. H. // Astrophys. J. 1956 V 124 P. 430.
7. Уралов А. М. // Письма в Астрон. журн. 1977. Т 3 № 12. С. 554.
8. Соловьев А. А., Уралов А. М. // Письма в Астрон. журн. 1979. Т. 5. № 9. С. 465.
9. Кадомцев Б. Б // В сб. Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтovichа. — М.: Атомиздат, 1963. № 2.
10. Edwin P. M., Roberts B. // Solar Phys. 1983. V. 88. P. 179
11. Шафранов В. Д. // В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М. А. Леонтовича. — М: АН СССР, 1958. Т. 4. С. 61.
12. Тимофеев А. В. // В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтovichа. — М.: Атомиздат, № 9. С. 205.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.

Сибирский институт земного магнетизма,  
ионосферы и распространения радиоволн  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
12 июня 1989 г.

## ON THE EXTERNAL HELICAL MODE OF A LONE CURRENT IN BOUNDLESS PLASMA

A. M. Uralov

The problem of stabilisation of shielded current with respect to external helical modes is considered in a frame of magnetohydrodynamic approach. It is shown that in presence of external magnetic field partial shielding of the current results in the stabilisation of all modes for arbitrary cylinder length.

УДК 621.372.412.621.317.084.2

## СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ АНГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ n 15, n 33, n 51 ЛИНЗОВЫХ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ

*И. И. Постников*

Проведено исследование зависимостей собственных функций ангармонических колебаний n 15, n 33, n 51 линзового пьезоэлемента от его геометрических размеров. Получены простые аналитические выражения для расчета этих зависимостей. Результаты расчета сопоставляются с данными моделирования на ЭВМ.

В последние годы разработчиками устройств стабилизации и управления генерируемой частоты большое внимание уделяется многочастотным свойствам кварцевых резонаторов [1] и многоэлектродным резонаторам [2]. Поэтому задача проектирования резонаторов, имеющих несколько рабочих частот, а также многоэлектродных резонаторов и резонаторов со сложной геометрией электрода, весьма актуальна. Если для основной частоты резонаторов или ее гармоник, которые, как правило, являлись рабочими на протяжении всего периода существования кварцевых резонаторов, разработаны методы определения эквивалентных динамических характеристик резонаторов, то при колебаниях на ангармониках подобные методы анализа и расчета разработаны пока в недостаточной степени. В работе [3] отмечалась важность определения распределения смещений в пьезоэлементе (ПЭ), так как через эту функцию можно определить такие электрические характеристики резонатора как емкостное отношение, эквивалентные динамические индуктивности и емкости [4, 5], а также можно управлять спектральными характеристиками резонаторов [6], что при производстве многочастотных резонаторов является особенно важным обстоятельством. Поэтому в данной работе продолжены исследования, начатые в работе [3], где рассматривались ближайшие к основному ангармонические колебания 113, 131 линзовых пьезоэлементов (ЛПЭ), и рассмотрена следующая группа ангармонических колебаний — 115, 133, 151 (обозначенные на рис. 1 работы [3] соответственно цифрами 4, 5, 6), топограммы которых приведены на рис. 1 (см. на вклейке).

**Зависимость собственных функций от геометрических размеров ЛПЭ и их расчет.** Распределения смещений ( $U_{imp}$ ) на поверхности ЛПЭ для ангармонических колебаний 115, 133, рассчитанные на ЭВМ по алгоритму работы [7], приведены на рис. 2. Так же как и собственные функции колебаний ЛПЭ 111, 113, 131, собственные функции колебаний ЛПЭ 115, 133, 151 зависят в основном от радиуса сферы ЛПЭ. В то же время изменения диаметра ПЭ от максимально возможного при заданном радиусе сферы до некоторого минимального практически не изменяют поле смещений в ЛПЭ [8]. Поэтому для данных колебаний можно считать в указанных пределах [8], что собственные функции зависят только от радиуса сферы ПЭ. Будем искать аналитические выражения для собственных функций, как и в [3], в следующем виде:

$$U_{imp}(r, \varphi) = Q_0^{1mp}(r) + \sum_{i=1}^T Q_i^{1mp}(r) \cos(2\tau\varphi). \quad (1)$$

Для определения значений функций  $Q_i(r)$ , входящих в (1), достаточ-

Но знать значения  $\bar{U}(r, \varphi)$  искомой моды при четырех значениях угла  $\varphi$ , например,

$$U_1 = U(r, 0), \quad U_2 = U(r, \pi/2), \quad U_3 = U(r, \pi/3), \quad U_4 = U(r, \pi/6). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) и решив систему четырех алгебраических уравнений относительно  $Q_i$ , получим

$$Q_{0,6} = (1/6)(U_1 \pm U_2 + 2U_3 \pm 2U_4), \quad Q_{2,4} = (1/3)(U_1 \mp U_2 - U_3 \pm U_4). \quad (3)$$

Зависимости функций  $Q_i$  от относительного радиуса ПЭ ( $\bar{r}'$ ) при фиксированном радиусе сферы  $R^0/h_0 = 10$  ( $R^0$  — приведенный радиус сферы ЛПЭ [3],  $h_0$  — толщина ЛПЭ в его центре) для мод 115, 133, вычисленные по формулам (3) после определения  $U_i$  по алгоритму работы [7], приведены на рис. 3. Малые абсолютные значения функций  $Q_6$  (см. рис. 3) подтверждают результаты численных экспериментов [8] в том, что для резонансных колебаний 115, 133, 151 достаточно хорошее приближение при определении собственных функций дают первые четыре члена ряда (1).

При определении значений собственных функций, как отмечалось ранее [3], целесообразно пользоваться нормированным радиусом ПЭ ( $\rho$ ), связанным с относительным радиусом ПЭ ( $\bar{r}'$ ) и приведенным радиусом сферы следующим выражением:

$$\rho = \bar{r}' (R^0/h_0)^{\mu_{1mp}}, \quad (4)$$

в котором показатель степени  $\mu_{1mp}$  зависит от приведенного радиуса сферы ЛПЭ и вычисляется по формуле

$$\mu_{1mp} = v^{1mp} + v_3^{1mp} g(R^0/h_0). \quad (5)$$

Подставив (5) и значения  $\bar{r}'$ , найденные при  $U_{1mp}=0$ , для ЛПЭ с  $R^0/h_0 = 10; 100; 1000$  в (4) получим систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными ( $\rho, v_1, v_2$ ) для каждой моды колебаний, решив которые находим для ЛПЭ АТ-среза:

$$v_1^{115} = 0,11055, \quad v_1^{133} = 0,0925, \quad v_1^{151} = 0,0761, \quad (6)$$

$$v_2^{115} = 0,02105, \quad v_2^{133} = 0,0238, \quad v_2^{151} = 0,0268.$$

При найденных значениях  $v_i$  нормированные зависимости  $\bar{Q}_i^{1mp}$  (см. рис. 4) имеют хорошее совпадение между собой при различных радиусах сферы ЛПЭ ( $R^0/h_0 = 10 \div 1000$ ), однако их абсолютные максимальные значения для некоторых  $Q_i$  существенно зависят от радиуса сферы ЛПЭ (см. рис. 5, где  $A_i = Q_{i\max}$ , крестики — расчет по [7]). При линейной аппроксимации данных зависимостей

$$A_i^{1mp} = k_i^{1mp} \lg(R^0/h_0) + b_i^{1mp}, \quad (7)$$

коэффициенты  $k_i$  и  $b_i$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$k_i, b_i$	Типы ангармонических колебаний		
	115	133	151
$k_0$	0,1210	-0,0106	-0,0235
$b_0$	0,4326	0,7762	0,8697
$k_2$	0,0685	-0,1305	-0,0185
$b_2$	0,4843	0,4830	-0,5750
$k_4$	-0,0595	-0,0315	0,0335
$b_4$	0,5140	-0,7213	0,1640
$k_6$	-0,0229	0,0235	-0,0011
$b_6$	0,1123	-0,1863	0,0434

При представлении аналитических зависимостей нормированных значений  $\bar{Q}_i^{1mp}$  в виде

$$\bar{Q}_0^{1mp} = a_1(1 - a_2\rho^2 + a_3\rho^4) \exp(-\alpha_1\rho^2); \quad (8)$$

$$\bar{Q}_2^{1mp} = a_4\rho^2(1 - a_5\rho^2) \exp(-\alpha_2\rho^2); \quad (9)$$

$$\bar{Q}_4^{1mp} = a_6\rho^4 \exp(-\alpha_3\rho^2); \quad (10)$$

$$\bar{Q}_6^{1mp} = a_7\rho^6 \exp(-\alpha_4\rho^2) \quad (11)$$

коэффициенты  $a_i$  и  $\alpha_i$ , найденные для рассматриваемых мод, имеют значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

$a_i, \alpha_i$	Типы ангармонических колебаний		
	115	133	151
$a_1$	1,00	1,00	1,00
$a_2$	17,13	18,10	18,10
$a_3$	37,29	41,82	41,82
$a_4$	21,34	22,90	22,57
$a_5$	2,91	2,54	3,05
$a_6$	40,14	37,78	25,32
$a_7$	60,33	68,54	56,16
$\alpha_1$	4,17	4,50	4,60
$\alpha_2$	4,26	5,43	4,56
$\alpha_3$	4,66	4,52	3,70
$\alpha_4$	4,33	4,52	4,23

На рис. 4 сплошными линиями обозначены зависимости  $\bar{Q}_i^{1mp}$ , вычисленные по (8) — (11) с учетом значений коэффициентов, представленных в табл. 2. Следует отметить хорошее соответствие аналитических зависимостей  $\bar{Q}_i$  с аналогичными зависимостями, полученными при численном решении на ЭВМ краевой задачи по [7]. Тогда с учетом (7) — (11) зависимости для вычисления  $Q_i^{1mp}$  будут иметь вид

$$Q_i^{1mp} = A_i^{1mp} \bar{Q}_i^{1mp}. \quad (12)$$

Значения собственных функций  $U_{1mp}(r', \varphi)$  для резонансных колебаний 115, 133, 151 при различных относительных радиусах  $r'$  и углах  $\varphi$ , рассчитанные по алгоритму [7] и по приближенному выражению (1) с учетом (2) — (12), приведенные в табл. 3, подтверждают их хорошее соответствие.

**Расчет собственных функций вблизи высших гармоник ЛПЭ.** При исследовании распределений смещений на поверхности одного и того же ЛПЭ при гармонических и сопутствующих им ангармонических колебаниях было установлено, что отношение значений радиусов, соответствующих одинаковым относительным значениям уровням смещений, постоянно как для гармоник, так и для соответствующих ангармоник и равно [3]

$$r^{nmp}/r^{kmp} \Big|_{U_{nmp}=U_{kmp}} = \sqrt{k/n}, \quad (13)$$

т. е. при возбуждении резонатора на механических гармониках и ангармониках радиусы ЛПЭ, соответствующие одинаковым уровням сме-

щения на его поверхности, уменьшаются в  $\sqrt{n}$  раз по сравнению со значениями радиусов для подобных колебаний в районе основной гармоники. Тогда нормированный радиус ( $\rho$ ) с учетом (13) будет определяться следующим образом:

$$\rho = \bar{r} \sqrt{n} (R^0/h_0)^{\mu_{1mp}} . \quad (14)$$

Таким образом, аналитические зависимости (1) — (12) с учетом (14) можно использовать для определения собственных функций ЛПЭ АТ-среза при ангармонических колебаниях  $n=15$ ,  $n=33$ ,  $n=51$ .

Таблица 3

$\bar{r}'$	Значение функции $U_{1mp}(\bar{r}', \varphi)$ для ЛПЭ ( $R^0/h_0 = 100$ ) при соответствующих углах $\varphi$ , град								
	0		30°		60°		90°		
	$U$	$U^*$	$U$	$U^*$	$U$	$U^*$	$U$	$U^*$	
$U_{115}(\bar{r}', \varphi)$									
0	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68
0,07	0,65	0,65	0,53	0,53	0,30	0,29	0,20	0,19	
0,15	0,55	0,57	0,18	0,13	-0,47	-0,47	-0,65	-0,65	
0,23	0,42	0,44	-0,20	-0,21	-0,60	-0,59	-0,44	-0,41	
0,31	0,28	0,29	-0,30	-0,31	-0,05	-0,06	0,53	0,52	
0,39	0,15	0,17	-0,21	-0,22	0,39	0,38	1,00	0,99	
0,48	0,06	0,08	-0,09	-0,11	0,39	0,41	0,72	0,78	
0,56	0,01	0,03	-0,03	-0,04	0,18	0,24	0,28	0,38	
0,64	0,00	0,01	-0,01	-0,01	0,05	0,09	0,06	0,13	
$U_{133}(\bar{r}', \varphi)$									
0	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
0,07	0,54	0,55	0,51	0,52	0,44	0,44	0,39	0,39	
0,15	-0,05	-0,05	0,05	0,07	-0,16	-0,15	-0,45	-0,46	
0,23	-0,60	-0,62	0,03	0,06	-0,19	-0,18	-0,90	-0,91	
0,31	-0,83	-0,83	0,44	0,45	0,26	0,26	-0,72	-0,71	
0,39	-0,69	-0,68	0,72	0,72	0,52	0,51	-0,32	-0,30	
0,48	-0,40	-0,40	0,60	0,62	0,39	0,41	0,07	-0,04	
0,56	-0,16	-0,18	0,30	0,35	0,16	0,21	0,04	0,04	
0,64	-0,05	-0,06	0,10	0,14	0,04	0,07	0,01	0,03	
$U_{151}(\bar{r}', \varphi)$									
0	0,83	0,82	0,83	0,82	0,83	0,82	0,83	0,82	0,82
0,07	0,35	0,34	0,45	0,44	0,64	0,64	0,74	0,75	
0,15	-0,64	-0,62	-0,38	-0,37	0,19	0,20	0,50	0,52	
0,23	-0,77	-0,72	-0,64	-0,63	-0,17	-0,12	0,25	0,26	
0,31	0,08	0,10	-0,20	-0,21	-0,15	-0,15	0,08	0,09	
0,39	0,86	0,86	0,27	0,25	-0,06	-0,06	0,01	0,02	
0,48	0,95	0,97	0,36	0,36	0,00	0,01	0,00	0,01	
0,56	0,56	0,65	0,21	0,24	0,01	0,02	0,00	0,02	
0,64	0,21	0,31	0,08	0,10	0,01	0,01	0,00	0,02	

$U$  — вычисление по [7],  $U^*$  — вычисление по (11) — (12)

**Заключение.** Полученные аналитические выражения для расчета собственных функций ангармонических колебаний  $n=15$ ,  $n=33$ ,  $n=51$  ЛПЭ совместно с полученными ранее подобными выражениями для расчета собственных функций колебаний  $n=11$ ,  $n=13$ ,  $n=31$  [3] позволяют вести более целенаправленный поиск оптимальных геометрий пьезоэлементов и электродов как для моночастотных, так и для многочастотных резонаторов.

Нато́ров, а также при разработке различного рода пьезодатчиков. Дан-  
ные зависимости позволяют определять эквивалентные динамические  
параметры резонаторов при сложных формах возбуждающих электро-  
дов для любого из шести рассмотренных резонансных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Семиглазов А. М. Кварцевые генераторы.— М.: Радио и связь, 1982.— 87 с.
2. Крутофалов Э. Б., Христофоров В. Н., Кондратьев А. В. Тезисы  
докл. I межотраслевого научно-технического семинара.— Харьков: ХВВАУРЭ,  
1988.— С. 32.
3. Постников И. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 29. № 6. С. 740.
4. Постников И. И., Самойлов В. С., Моргаловский В. П. // Радиотех-  
ника и электроника. 1984. Т. 29. № 4. С. 643.
5. Постников И. И. // Электросвязь. 1985. № 2. С. 54.
6. Постников И. И. // Радиотехника. 1983. № 10. С. 83.
7. Веселов Г. И., Постников И. И., Самойлов В. С. // Изв. вузов. Радио-  
электроника. 1983. Т. 26. № 6. С. 27.
8. Постников И. И. Книга депонирована в ЦНТИ Информсвязь, рег. № 1509-св.  
Деп. от 3 апреля 1989 г.

Поступила в редакцию  
30 мая 1989 г.

## FUNDAMENTAL FUNCTIONS OF LENS PIEZOELEMENTS ANHARMONIC VIBRATIONS n15, n33, n51

I. I. Postnikov

The dependence of fundamental functions of lens piezoelement anharmonic vibrations  $n_{15}$ ,  $n_{33}$ ,  $n_{51}$  on its geometric dimensions is studied. Simple analytical expressions for calculation of these dependences are given. The results of calculation are compared with those of digital computer modelling.

---

УДК 621.391.822.3:539.234:546.76

**ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНЫХ ФАКТОРОВ  
НА ФЛИККЕРНЫЙ ШУМ В  
МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ПЛЕНКАХ ХРОМА**

*Г. П. Жигальский, А. В. Каев, И. Ш. Сиранашвили,  
А. Ф. Андрушко, В. Д. Ковалев*

Исследовано влияние микроструктуры (размер зерна, степень кристалличности), материала подложки и температуры на уровень  $1/f$  шума в мелкодисперсных пленках хрома. С увеличением размера зерен и с повышением степени кристалличности наблюдается уменьшение уровня  $1/f$  шума. Температурная зависимость шума является активационной с энергией активации, зависящей от размера зерен и степени кристалличности. Пленки, осажденные на подложки из ситалла и окисленного кремния в идентичных технологических условиях, имеют одинаковый уровень  $1/f$  шума. Выяснено, что наблюдаемый  $1/f$  шум связан с флуктуациями концентрации микродефектов в пленке.

Исследованию шума вида  $1/f$  в тонких металлических пленках посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ (см., например, обзоры [1–4] и библиографию к ним). Однако физический механизм возникновения  $1/f$  шума в металлических пленках в настоящее время не выяснен до конца. Для решения этого вопроса требуются дополнительные экспериментальные исследования.

Целью настоящей работы является исследование влияния микроструктуры (размера зерен, степени кристалличности), материала подложки и температуры окружающей среды на уровень фликкерного шума тонких пленок хрома.

Пленки хрома получали методом термического испарения в атмосфере аргона [5]. Хром высшей очистки (марка МРТУ-1455-65) испаряли извольфрамового испарителя типа «лодочка» и осаждали на подложки из ситалла СТ 50-1 и окисленного кремния (толщина слоя  $\text{SiO}_2$  0,6 мкм). Степень структурной неравновесности конденсаторов изменяли путем варьирования технологических режимов осаждения (аргона в вакуумной камере и температуры конденсации). Пленки для измерения  $1/f$  шума и проведения структурных исследований осаждали в едином технологическом цикле на подложки из различных материалов. Толщина пленок составляла 80–150 нм. Структуру пленок исследовали методами рентгеноструктурного анализа, электронографии и электронной микроскопии. Рентгеноструктурный анализ проводился на установке УРС-60 с фотoreегистрацией дифракционных спектров. Использовалось нефильтрованное излучение от трубок с медным и железным анодами. Съемку образцов осуществляли в камере типа РКД методами порошка и шлифа. При съемке методом порошка пленку хрома соскабливали скальпелем с подложки и наносили с помощью вакуумной смазки на тонкую стеклянную нить, помещаемую в рентгеновскую камеру.

Электронограммы пленок снимали методом «на отражение» на электронографе ЭГ-100А при ускоряющем напряжении 60 кВ. Электрономикроскопические исследования структуры проводили по методу реплик на электронном микроскопе ЯМ-6А при увеличениях 10000–30000. В качестве реплик использовали угольные пленки. Для повышения контраста изображения исследуемая поверхность предва-

рительно оттенялась хромом. Присматривали обычно несколько реплик, снятых с различных мест одной пленки.

Спектральную плотность мощности (СПМ) шума измеряли по четырехзондовой методике в диапазоне частот 10 Гц—10 кГц на анализаторе спектра СКЧ-72. СПМ фликкерного шума в указанном диапазоне частот подчиняется закону  $g(f) \sim f^{-\gamma}$ , где показатель формы спектра принимает значения  $\gamma \approx 1,0 \div 1,5$  для различных пленочных образцов.

Рентгеноструктурный анализ пленок хрома, осажденных при  $T_k = 300$  К, показывает наличие в объеме этих пленок только аморфной фазы. Эти образцы обладают очень высоким уровнем фликкерного шума. Последующие экспериментальные результаты приведены для пленок, осажденных на подогретые подложки при  $T_k = 400 \div 420$  К.

Пленки хрома, осажденные при  $T_k = 400$  К, имеют мелкокристаллическую структуру с ОЦК решеткой с присутствием в микрокристаллитах большого числа точечных дефектов типа вакансий. Как известно, дефекты типа вакансий вызывают небольшие отклонения параметра кристаллической решетки от значения  $a_0$  совершенных по структуре кристаллов, обусловливая появление микронапряжений в пленке. Концентрацию вакансий или дефектных ячеек  $C_{\text{деф.яч}}$  по отношению к общему числу элементарных ячеек в кристалле можно оценить приблизенно по величине сокращения параметра решетки хрома  $\Delta a^{\text{Cr}} = a_0^{\text{Cr}} - a_{\text{пп}}^{\text{Cr}}$ . При этом, используя линейную интерполяцию между значениями  $C_{\text{деф.яч}} = 0$  при  $a_0^{\text{Cr}} = 2,885$  Å и  $C_{\text{деф.яч}} = 100\%$  при  $a_{\text{пп}}^{\text{Cr}} = 2,498$  Å, получим

$$C_{\text{деф.яч}} = 100 \frac{\Delta a^{\text{Cr}}}{a_0^{\text{Cr}} - a_{\text{пп}}^{\text{Cr}}} \%,$$

Значение  $a_{\text{пп}}^{\text{Cr}}$  соответствует предельному гипотетическому случаю, когда из каждой ОЦК ячейки хрома изъято по одному (центральному) атому. Решетка переходит при этом в кубическую примитивную с параметром  $a = 2r_{\text{Cr}} = 2,498$  Å.

Значения  $\Delta a^{\text{Cr}}$  составляют, по нашей оценке, 0,015—0,020 Å, что соответствует величинам  $C_{\text{деф.яч}} = 3,9 \div 5,2\%$ , т. е. относительное число дефектных элементарных ячеек приблизительно составляет 4—5% от общего числа их в кристалле.

На рис. 1 (см. на вклейке) приведены зависимости СПМ  $1/f$  шума частоты для пленочных образцов с различной степенью кристалличности (1—низкая степень кристалличности, 2—промежуточная, 3—средняя). Изменение степени кристалличности достигали путем вариации давления аргона в вакуумной камере при конденсации пленок [5]. Размер зерен в этих пленках составляет  $l = 30 \div 40$  нм, т. е. по размеру зерен образцы различаются мало, а структурные различия в основном связаны со степенью кристалличности в объеме (с распределением атомов внутри зерен). Степень кристалличности пленок оценивали качественно по степени размытия и погасания интерференционных линий на рентгенограммах и электронограммах. Условно принята следующая градация степени кристалличности по указанным ниже признакам:

— низкая, при которой на рентгенограмме и электронограмме различаются только слабые размытые дифракционные максимумы (ореолы), отвечающие аморфному хрому;

— средняя, при которой отчетливо различается основная интерференционная линия 110 кристаллического хрома, отвечающая межплоскостному расстоянию  $d \approx 2,05$  Å, и имеются следы других ближайших линий (200, 211);

— промежуточная, при которой на рентгенограмме и электроног-

рамме различается лишь основная интерференционная линия 110.

В пленках с низкой степенью кристалличности наблюдается высокий уровень шума (рис. 1, кривая 1). С повышением степени кристалличности в объеме уровень шума снижается (кривые 2, 3).

Наряду с этим, наблюдается снижение уровня фликкерного шума с ростом среднего размера зерен. Так, для пленок хрома со средним размером зерен  $l \geq 50$  нм уровень  $1/f$  шума меньше на два-три порядка величины, чем для пленок, имеющих  $l=30-40$  нм. Зависимость  $1/f$  шума от размера зерен наблюдали ранее в пленках алюминия [6]. Установлено также, что пленки хрома с неоднородной кристаллической структурой, т. е. имеющие наряду с крупными зернами мелкодисперсную фазу, обладают высоким уровнем фликкерного шума. Заметим, что повышенному количеству мелких кристаллитов соответствует также высокий уровень  $1/f$  шума и в пленках алюминия [7].

Для различных пленочных образцов, осажденных в идентичных технологических режимах или даже в едином технологическом цикле на одной подложке, иногда наблюдается различный уровень  $1/f$  шума. На различие в уровне  $1/f$  шума металлических пленок, изготовленных по одной и той же технологии, указывалось также в работе [8], причем эта разница превышала один порядок величины. Проведенные нами микроструктурные исследования пленок с различным уровнем  $1/f$  шума, изготовленных в едином технологическом цикле, показали, что в пленках с повышенным уровнем шума имеются различного типа поверхностные дефекты, привнесенные подложкой, и примесные частицы на поверхности пленки. Указанные типы дефектов и загрязнений увеличивают уровень СПМ  $1/f$  шума в пять-десять раз (рис. 2,  $h=80$  нм,  $T_k=420$  К; 1—на поверхности пленки наблюдались примесные частицы, 2—примесные частицы не обнаружены). Полученный результат объясняется, по-видимому, повышением интенсивности процесса поверхностной миграции в таких образцах. Кроме этого, в пленках с поверхностными дефектами наиболее сильно будет проявляться адсорбционный механизм флюктуаций сопротивления [9].

Исследование влияния материала подложки на уровень и характер  $1/f$  шума показало, что пленки, осажденные на подложке из ситалла и окисленного кремния в идентичных технологических режимах и не имеющие привнесенных дефектов подложки или загрязнений, обладают одинаковым уровнем и характером  $1/f$  шума (рис. 3,  $h=150$  нм,  $T_k=400$  К; 1—пленки осаждены на окисленном кремнии, 2—пленки осаждены на ситалле). Наиболее вероятным механизмом возникновения фликкерного шума в исследуемых пленках является модуляция проводимости из-за хаотического движения дефектов (в частности, вакансий) [6, 10, 11]. Хаотическое движение дефектов является термически активируемым процессом, приводящим к флюктуациям их числа и к случайной модуляции сопротивления пленки. Подтверждением того, что наблюдаемый шум обусловлен дефектами микроструктуры пленок, наряду со структурными исследованиями, служат результаты исследования зависимости  $1/f$  шума от температуры. Зависимости шума от температуры имеют активационный характер и в диапазоне температур 300—450 К аппроксимируются выражением  $g(f) \sim \exp(-E_a/kT)$ , где  $E_a$  — энергия активации,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Энергия активации зависит от степени кристалличности и размера зерен: для пленок с более крупными зернами наблюдаются большие значения  $E_a$ . Так, для пленки с низкой степенью кристалличности получено значение  $E_a=0,14 \pm 0,02$  эВ (кривая 1 на рис. 4, кривая 2 — промежуточная) и увеличивается до значения  $E_a=0,33 \pm 0,05$  эВ для пленки с высокой степенью кристалличности (кривая 3). Энергия активации  $E_a$  увеличивается также с ростом размера зерен. Для закристаллизованной пленки со средним размером зерен  $l \geq 50$  нм наблюдали значение  $E_a=0,41 \pm 0,06$  эВ.

Следует отметить, что увеличение энергии активации электромигра-

ций по границам зерен в пленках алюминий с ростом размеров зерен наблюдалось ранее [12].

Полученные результаты свидетельствуют в пользу механизма возникновения  $1/f$  шума в исследованных пленках из-за флуктуаций концентрации микродефектов, в частности вакансий и их миграции по границам зерен и по поверхности пленки.

Авторы благодарны Е. К. Янушенко за помощь в измерении шумов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hooge F. N., Kleinpenning T. G. M., Vandamm L. K. J. // Rep. Prog. Phys. 1981. V. 44. № 5. P. 479.
2. Dutta P., Hogen P. M. // Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. № 3. P. 497.
3. Коган Ш. М. // УФН. 1985. Т. 145. Вып. 2. С. 283.
4. Weissman M. B. // Rev. Modern Phys. 1988. V. 60. № 2. P. 537.
5. Жигальский Г. П., Куроев Г. А., Сирашвили И. Ш. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 2. С. 207.
6. Потемкин В. В., Бакши И. С., Жигальский Г. П. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 11. С. 2211.
7. Андрушкин А. Ф., Бакши И. С., Жигальский Г. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 4. С. 498.
8. Fleetwood D. M., Giordano N. // Phys. Rev. B. 1983. V. 27. № 2. P. 667.
9. Якимов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 3. С. 308.
10. Robinson F. N. H. // Phys. Letters. 1983. V. 97A. № 4. P. 162.
11. Eberhard J. W., Hogen P. M. // Phys. Rev. B. 1978. V. 18. № 12. P. 6681.
12. Д'Эрль Ф., Розенберг Р. В. жн.: Физика тонких пленок / Под ред. Дж. Хасса. М.-Х. Франкомба и Р. У. Гофмана. — М.: Мир, 1977. Гл. 7.

Московский институт  
электронной техники

Поступила в редакцию  
26 июня 1989 г.

## AN EFFECT OF STRUCTURE FACTORS ON $1/f$ NOISE OF SMALL GRAIN CHROMIUM FILMS

G. P. Zhigal'skij, A. V. Karev, I. Sh. Siranashvili,  
A. F. Andrushko, V. D. Kovalev

An effect of microstructure (grain diameter, degree of crystallinity), substrate material and temperature on the magnitude of  $1/f$  noise in small grain chromium films has been studied. As the grain diameter and degree of crystallinity increase, the magnitude of  $1/f$  noise decreases. Temperature noise dependence is exponential, with activation energy depending on grain diameter and crystallinity degree. Films deposited on cital substrates and oxidized Si in identical conditions have the same noise magnitude. It is concluded that  $1/f$  noise is related to fluctuation of microdefect concentration in the film.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.164:621.391

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХ ВАРИАНТОВ АЛГОРИТМА CLEAN ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПРОЕКЦИЙ В РАДИОАСТРОНОМИИ И ТОМОГРАФИИ

M. I. Агафонов, O. A. Подвойская

В настоящее время целесообразно отметить несколько моментов, связанных с восстановлением изображений модификациями алгоритма CLEAN. Кроме того, полезно также подчеркнуть единство подхода к решению ряда типичных задач радиоастрономии и томографии.

Для экстраполяции решения в задаче обращения свертки

$$g(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x_0, y-y_0) f(x, y) dx dy + n(x_0, y_0) \quad (1)$$

в случае неполного покрытия синтезированной диаграммой  $h(x, y)$  UV-плоскости требуется применять нелинейные методы обработки [1]. При этом итерационные алгоритмы с нелинейными ограничениями бесспорно привлекают простотой. Используя их, можно проводить восстановление двумерного распределения яркости по одномерным профилям стрип-распределений (проекциям)  $g_{\theta_i}(R)$ . При этом вначале строится некорректная карта (суммарное изображение) [2]

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^N g_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i), \quad (2)$$

из сканирующих ножевых лучей  $h_{\theta_i}(R)$  — синтезированная диаграмма

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^N h_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i), \quad (3)$$

где  $\theta_i$  — позиционный угол,  $R$  — текущее расстояние до линии скана. Далее проводится итерационная процедура, называемая чисткой. Существенными отличиями друг от друга, на наш взгляд, обладают только два из известных в радиоастрономии итерационных алгоритма. Один из них — это широко используемый алгоритм стандартной чистки (ST-CLEAN) [3], который имеет, однако, негативные качества при восстановлении протяженных структур. Другой — более современный алгоритм чистки по приспособленному контуру (TC-CLEAN) [4]. Необходимость изучения его поведения в различных практических ситуациях подчеркивалась Корнвеллом в работе [5]. Применение метода для случая сканирования ножевыми лучами (задача, аналогичная восстановлению при обратном проецировании в томографии) исследовалось недавно в [6].

Как показано в [6], выбор решения  $f_{\text{опт}}(x, y)$  при использовании как первого [3], так и второго [4] алгоритмов должен проводиться при оптимизации параметров, управляющих итерационными процессами, на основании соответствия контрольных профилей

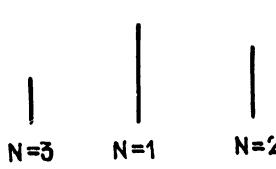
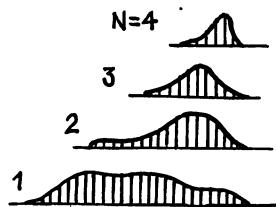
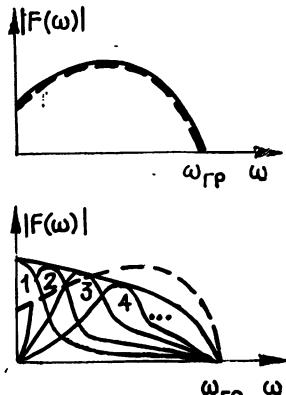
$$\hat{g}_{\theta_i}(R) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a f(x, y) h_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - R) dx dy \quad (4)$$

исходным  $g_{\theta_i}(R)$ . Совпадение профилей служит наиболее существенным критерием. Вопросы улучшения качества реконструкции при ограниченном числе проекций являются в настоящее время областью активных научных изысканий как в радиоастрономии, так и в томографии [7, 8]. В связи с этим появление метода TC-CLEAN [4], эффективность которого для восстановления изображений по проекциям продемонстрирована в [6], имеет важное значение. Целесообразно между тем отметить ряд моментов, с которыми могут столкнуться пользователи при интерпретации результатов.

Как известно, решение при использовании метода ST-CLEAN суммируется из пиков: оно объясняет стремление результата к наиболее «острому» (допустимому в рамках заданных ограничений) варианту. Алгоритм TC-CLEAN, напротив, накапливает результат, втягивая в область заданных ограничений целые области, начиная, как правило, с наиболее протяженных компонентов, присутствующих на грязных

карте. Естественно, что при этом следует ожидать более сглаженный, «ступой» вариант решения. Следует подчеркнуть, что говорить об одинаковом угловом разрешении полученных изображений правомерно лишь при сохранении неизменной верхней граничной частоты  $\omega_{\text{гр}}$ . Характерные особенности алгоритмов приведены в таблице. Там же изображен процесс накопления составляющих решения методом TC-CLEAN, а также типичные особенности спектров решений в каждом случае.

Таблица

Метод восстановления	ST-CLEAN	TC-CLEAN
Компоненты решения для $N$ -й итерации	Отдельные пики 	Гладкие функции 
Устойчивость решения $\hat{f}(x, y)$	1. Устойчиво 2. При неустойчивости необходимо усреднение $\langle \hat{f}_i(x, y) \rangle$ или более сложная обработка набора реализаций $\hat{f}_i(x, y)$	Устойчиво
Исследование области допустимых решений: 1. В простых случаях 2. В сложных случаях	$\hat{f}(\text{ST-CLEAN}) = \hat{f}(\text{TC-CLEAN})$ $\hat{f}(\text{ST-CLEAN}) \neq \hat{f}(\text{TC-CLEAN})$ «острое» «тупое»	

При получении устойчивых решений любым из алгоритмов (для стандартной чистки в отдельных случаях необходима дополнительная вычислительная процедура [9], при которой используется набор лучших реализаций и выполняется либо усреднение, либо более сложная обработка, подобная обработке набора спектр-масок в оптике) и равноценных ошибках контрольных тестов  $\sigma(g_0, g_\theta)$  следует отдать предпочтение результату, отвечающему физическим особенностям объекта, либо допустить существование целого класса возможных решений от «тупого» (TC-CLEAN) до «острого» (ST-CLEAN) вариантов.

Таким образом, с помощью двух методов предлагается исследование границ существования решения для сложных случаев и недостаточной априорной информации. Для простых объектов наблюдаются сужение области неопределенности решения, результаты, полученные обоими алгоритмами, сходятся.

На рис. 1. (см. на вклейке) дано несколько примеров типичных изображений. Тривиальный объект, состоящий из пиков (а), может быть с успехом восстановлен по проекциям, в свою очередь также состоящим из пиков, методом ST-CLEAN. Для простого объекта, составленного из обособленных компонентов конечного размера (б), результаты, полученные двумя методами, практически полностью сходятся. При

этом, однако, более эффективным в вычислительном отношении уже оказывается TC-CLEAN. Для структуры объекта более сложного типа (в) при наличии сильных компонентов на фоне протяженной области уже наблюдается заметное отличие результатов. При этом изображение, восстановленное методом ST-CLEAN, характеризуется «оврагами» на протяженной области. Для профилей гладкого вида лишь с не-большими «холмиками» (г) оказалось возможным получить решение как из пиков (ST-CLEAN при достижении устойчивости), так и из более гладких компонентов (TC-CLEAN). Предпочтение не было отдано какому-либо варианту вследствие оди-

наковой величины ошибок исходных и контрольных профилей  $\sigma(g_0, g_0)$ . В этом случае при стандартной чистке контрастнее проявился мелкие компоненты, однако существенно ослабился протяженный фон из-за наличия «оврагов» [8]. Таким образом, полученная в сложном случае двумя методами пара решений позволяет оценить пределы возможных изменений структуры, в результате чего могут быть сделаны необходимые выводы о компонентах. Вместе с тем при наличии априорной информации о спектре решения, например его низкочастотной части, может быть сделан соответствующий выбор.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 304 с.
2. Bracewell R. N., Riddle A. C. // Astrophys. J. 1967. V. 150. P. 427.
3. Hogbom J. A. // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1974. V. 15. № 3. P. 417.
4. Stęger D. G., Dewdney P. E., Ito M. R. // Astron. Astrophys. 1984. V. 137. № 2. P. 159.
5. Cornwell T. J. In: Synthesis imaging. NRAO Summer School. — Socorro: New Mexico, 1985. P. 109.
6. Агафонов М. И., Подвойская О. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 6. С. 742.
7. Вишняков Г. Н., Гильман Г. А., Левин Г. Г. // Опт. и спектр. 1985. Т. 58. Вып. 2. С. 406.
8. Даджин Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. — М.: Мир, 1988. — 488 с.
9. Агафонов М. И., Асланян А. М., Гулян А. Г. и др. // Письма в Астрон. журн. 1986. Т. 12. № 4. С. 275.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
24 апреля 1989 г.,  
после переработки  
10 января 1990 г.

УДК 537.52:537.862

## РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПРОБОЕМ ВОЗДУХА

C. B. Божокин

Известно, что если приложить высоковольтное напряжение к системе двух электродов, из которых один представляет собой острие, а другой является плоскостью, то вдоль такой поверхности будет развиваться скользящий разряд, известный под названием «фигуры Лихтенберга» [1, 2]. В работах [3–5] экспериментально изучались характеристики таких скользящих разрядов в воздухе и было показано, что данный разряд характеризуется резким изменением тока за времена порядка 10 нс, причем структура токов распространяется со скоростью порядка  $v_0 \sim 10^8$  см/с. Целью данной работы является получение аналитического выражения для профиля радиоимпульса, излучаемого такой системой токов, и сравнение его с экспериментально наблюдаемым радиоимпульсом [3, 5].

В качестве модели поверхностных токов, протекающих в воздухе во время разряда, рассмотрим вначале одиночный линейный ток  $J$ , распространяющийся из центра разряда параллельно оси  $x$  так, что его высота над бесконечной проводящей поверхностью равна  $H$ . Данный ток  $J(r, t)$ , где  $r = (x, 0, H)$ , представляет собой движущийся со скоростью  $v_0$  импульс амплитуды  $J_0$ :

$$J(r, t) = J_0 e_x \exp\left(-\frac{x}{l_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{x - v_0 t}{x_0}\right)^2\right], \quad (1)$$

причем зависимость от первого аргумента  $x > 0$  описывает затухание импульса с расстоянием,  $l_0$  — характерный масштаб затухания тока, а зависимость от второго аргу-

мента  $x - v_0 t$  описывает гауссову форму импульса, имеющего ширину  $x_0$ . Наличие бесконечно проводящей поверхности, расположенной на расстоянии  $z=H$  от текущего тока, приводит к необходимости учета линейного тока изображения, который течет на расстоянии  $z=-H$  в противоположную сторону.

Вычислим электрическое поле излучения  $E(r, t)$ , создаваемое такой системой токов (одиночный линейный рукав разрядного тока, текущий из центра вместе с током изображения). Во многих экспериментах величина  $\varepsilon \sim v_0 H / cx_0 \ll 1$ , где  $c$  — скорость света, поэтому мы выпишем предельное выражение для амплитуды радиоимпульса  $E(r, t)$ , справедливое с точностью до членов второго порядка малости по этому параметру:

$$E(r, t) = E_0 \exp(-w^2) \left\{ \frac{\sin 2w\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(\frac{1}{2a} - w\right)^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2a} - w\right) \right] \right\}; \quad (2)$$

$$E_0 = \frac{2e_x J_0 v_0 \varepsilon}{c^2 r (1 - (v_0/c) \sin \theta \cos \varphi)}, \quad w = \frac{v_0}{x_0} \left( t - \frac{r}{c} \right); \quad (3)$$

$$a = \frac{l_0}{x_0} \left( 1 - \frac{v_0}{c} \sin \theta \cos \varphi \right), \quad \varepsilon = \frac{v_0 H \cos \theta}{cx_0}. \quad (4)$$

В выражениях (2)–(4)  $r = (r, \theta, \varphi)$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $t$  — время наблюдения,  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  — дополнительный интеграл вероятностей [6]. Подставляя характерные величины  $v_0 \sim 10^8$  см/с,  $c \sim 3 \cdot 10^{10}$  см/с,  $H \sim 0,3$  см,  $l_0 \sim 5$  см,  $x_0 \sim 1$  см, мы видим, что параметр  $\varepsilon \sim 0,001$ , а величина  $a \sim 5$ . Если взять достаточно широкий профиль тока, при котором  $l_0 \sim x_0$ , то параметр  $a$  будет равным  $a \sim 1$ . Зависимость формы радиоимпульса (2) от величины  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \ll 1$  очень слабая. Кроме того, при изменении параметра  $a$  в пределах  $1 < a < 5$  форма радиоимпульса изменяется незначительно. На рис. 1 (см. на вклейке), представлена теоретическая форма радиоимпульса (2), образующегося при стримерном разряде в воздухе, в зависимости от безразмерного времени  $w = v_0(t - r/c)/x_0$ . Теоретическая кривая построена для  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 0,001$ . Сравнивая теоретический профиль радиоимпульса (2) (кривая 1) с экспериментально наблюдаемым радиосигналом (кривая 2) [3, 5], мы видим хорошее совпадение этих зависимостей.

Проанализируем, как изменится радиоимпульс, образуемый при стримерном разряде в воздухе, если данную систему токов (одиночный линейный рукав разрядного тока, текущего из центра вместе с токами изображения) заменить на систему двух рукавов, токи в которых текут в противоположных направлениях. Отметим, что для данной системы двух рукавов мы также будем учитывать токи изображения. Переход к такой системе двух противофазных квадрупольей приводит к тому, что для данной «симметричной» системы двух рукавов амплитуда радиоизлучения будет уменьшена в  $v_0/c$  раз по сравнению с амплитудой радиоизлучения от одиночного рукава.

Применим данный метод изучения формы радиоимпульса, создаваемого в результате стримерного пробоя воздуха, для диагностики такого пробоя. В работе [7] была предложена диагностика возраста биологических объектов по разветвленности стримерных фигур газоразрядного свечения воздуха (фигур Лихтенберга), образующихся при воздействии высокого напряжения на жидкокофазный биологический объект. В зависимости от возраста биологической культуры, помещаемой в верхний электрод-острие, характер разряда на воздухе будет различным и будет характеризоваться различным числом рукавов разряда. Если использовать предложенную в настоящей работе методику определения радиосигнала, образующегося при таком разряде, то можно, не анализируя изображение фигур Лихтенберга, по амплитуде радиоимпульса определить количество рукавов в данном разряде.

## ЛИТЕРАТУРА

- Мик Дж., Крэгс Дж. Электрический пробой в газах. — М.: ИЛ, 1960.
- Бањковский Н. Г., Коротков К. Г., Петров Н. Н. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 4. С. 625.
- Larigalde S. // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. № 1. P. 90.
- Larigalde S. // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. № 1. P. 102.
- Bondiou A., Labaune G., Marque J. P. // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. № 2. P. 503.
- Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
- Гудакова Г. З., Галынкин В. А., Коротков К. Г. // ЖПС. 1988. Т. 49. № 3. С. 412.

Ленинградский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
16 января 1990 г.

# ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ НА ПРОВОДЯЩЕЙ ПОДЛОЖКЕ

Н. П. Жук, С. Н. Шульга, А. Г. Яровой

Анализ рассеяния электромагнитных волн статистически шероховатой поверхностью — одна из ключевых теоретических проблем, возникающих в дистанционных методах исследования земных покровов [1, 2], оптике поверхностей [3]. Известные к настоящему времени результаты относятся к ситуации, когда среду, ограниченную шероховатой поверхностью, можно считать однородной или хорошо проводящей [4, 5]. В данной работе в рамках указанной в заголовке модели изучено влияние неоднородности среды по глубине на рассеивающие свойства ее неровной поверхности. Такая модель применяется, в частности, для описания водонасыщенных слоев под толщей песка [6].

Отнесем трехмерное пространство к прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ ; ось  $Oz$  направим вертикально вверх. Полупространство  $z>0$  является свободным; однородный слой толщиной  $b$  заполняет область  $-b<z<0$ ; подложка  $-\infty < z < -b$  является идеально проводящей; в горизонтальных направлениях структура бесгранична. Комплексная диэлектрическая проницаемость слоя равна  $\epsilon=\epsilon'(1+i\delta)$ , где  $\epsilon'$  — вещественная часть диэлектрической проницаемости,  $\delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь; магнитная проницаемость равна единице.

При наличии статистически изотропных шероховатостей наружная граница считается заданной уравнением  $z=\zeta(r)$ , где  $r=(x, y, 0)$ ,  $\zeta(r)$  — случайная функция с нулевым средним значением и функцией корреляции  $\langle \zeta(r)\zeta(r') \rangle = B(|r-r'|)$ . К неровностям предъявляются требования малости и пологости  $\sigma/\lambda_0 \ll 1$ ,  $\sigma/l \ll 1$ . Здесь  $\sigma$  — среднеквадратичная высота шероховатостей:  $\sigma=\sqrt{\langle \zeta^2 \rangle}$ ,  $l$  — их характерный горизонтальный размер,  $\lambda_0$  — длина волн в свободном пространстве.

Радиолокационное сечение (обратного) рассеяния  $\sigma_j(\alpha)$  на вертикальной ( $i=s$ ) или горизонтальной ( $j=p$ ) поляризации определим как  $\sigma_j(\alpha)=\lim_{L \rightarrow \infty} L P_r(L, \alpha) / (P_i \Sigma)$ .

Здесь  $\Sigma$  — площадь шероховатого участка,  $90^\circ - \alpha$  и  $L$  — угол места и радиус сферической системы координат с полюсом в некоторой центральной точке шероховатого участка,  $P_i$  — плотность потока энергии плоской волны, приходящей из свободного пространства под углом падения  $\alpha$ ,  $P_r(L, \alpha)$  — плотность потока энергии флукуционной компоненты отраженного поля в точке наблюдения с координатами  $L, \alpha$ . В силу статистической изотропности шероховатостей величины  $P_r$ ,  $\sigma_j$  от азимута точки наблюдения не зависят.

Выражения для  $\sigma_{p,s}(\alpha)$ , найденные в борновском приближении [7, 8], таковы:

$$\sigma_p(\alpha) = |\epsilon - 1|^2 k_0^2 \tilde{B}(q) |1 + R_p(\alpha)|^4 / 4, \quad (1)$$

$$\sigma_s(\alpha) = |\epsilon - 1|^2 k_0^2 \tilde{B}(q) |(1 + R_s(\alpha))^2 \sin^2 \alpha / \epsilon + (1 - R_s(\alpha))^2 \cos^2 \alpha|^2 / 4.$$

В этих формулах  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $q = 2k_0 \sin \alpha$ ,  $R_s$  и  $R_p$  — френелевские коэффициенты отражения плоской волны  $s$ - или  $p$ -поляризации от ровной границы ( $z=0$ ) структуры,  $\tilde{B}$  — пространственный спектр шероховатостей;

$$R_s(\alpha) = (\epsilon \cos \alpha \cos \beta + i h \sin \beta) / (\epsilon \cos \alpha \cos \beta - i h \sin \beta), \quad (2)$$

$$R_p(\alpha) = (\cos \alpha \sin \beta - i h \cos \beta) / (\cos \alpha \sin \beta + i h \cos \beta);$$

$$\tilde{B}(q) = \int_0^\infty dr I_0(qr) B(r) r / (2\pi),$$

$$\beta = k_0 b h, \quad h = \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha} \quad (\operatorname{Im} h > 0);$$

$I_0$  — функция Бесселя.

Анализу подвергается величина  $\sigma_j(\alpha)$ , нормированная на сечение обратного рассеяния  $\sigma_j^\infty(\alpha)$  на той же поляризации в случае  $b=\infty$  (т. е. когда диэлектрическая среда заполняет все нижнее полупространство):

$$G_j(\alpha) = \sigma_j(\alpha) / (\sigma_j^\infty(\alpha)). \quad (3)$$

При  $G_j \geq 1$  имеет место усиление (ослабление) рассеяния по сравнению со случаем однородного полупространства. В результате численных исследований, в ходе которых предполагалось, что  $\delta < 0, 1$ ,  $\epsilon' = 2-8$ , установлены следующие закономерности.

На горизонтальной поляризации тонкие слои ( $k_0 b \sqrt{\epsilon'} \leq 0,5$ ) и слои толщиной  $3,0 \leq k_0 b \sqrt{\epsilon'} \leq 3,6$  ослабляют рассеяние во всех направлениях ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ); слои про-

межуточной толщины ( $1,0 \leq k_0 b \sqrt{\epsilon'} \leq 2,4$ ) усиливают рассеяние в области  $0 < \alpha \leq 80^\circ$ . Толстые слой ( $b(\sqrt{\epsilon'} - \sqrt{\epsilon'} - 1) \geq \lambda_0$ ) усиливают рассеяние в направлениях, для которых фазовый набег волны на толщине слоя  $\beta' = k_0 b h'(\alpha)$  равен  $\pi(n-1/2)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $h'(\alpha) = \sqrt{\epsilon'} - \sin^2 \alpha$ . При любой толщине слоя рассеяние исчезает в направлениях, для которых упомянутый набег фазы равен  $n\pi$ . Для такого набора параметров невозмущенное электрическое поле, возникающее при падении плоской волны обращается на ровной границе  $z=0$  слоя в нуль; в рамках борновского приближения это приводит к следствию  $\sigma_p=0$ .

На вертикальной поляризации при  $k_0 b \sqrt{\epsilon'} < 0,5$  (тонкий слой) для углов  $0 < \alpha \leq 30^\circ$  ( $70^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ) рассеяние усиливается (ослабляется); при  $1,0 \leq k_0 b \sqrt{\epsilon'} \leq 2,4$  или  $2,6 \leq k_0 b \sqrt{\epsilon'} \leq 3,6$  и углов  $0 < \alpha \leq 30^\circ$  рассеяние соответственно усиливается или ослабляется. Толстые (в прежнем понимании) слои в пределах  $0^\circ < \alpha \leq 20^\circ$  ослабляют (усиливают) рассеяние в направлениях, для которых  $\beta' = n\pi$  ( $\beta' = \pi(n-1/2)$ ). Для слоев любой толщины рассеяние слоем минимально и  $G_s \ll 1$  в направлениях, обеспечивающих выполнение условия  $\sin^2 \alpha \approx \epsilon' \sin^2 \beta' / (1 + (\epsilon' - 1) \times \cos^2 \beta')$ .

На горизонтальной (вертикальной) поляризации с приближением угла падения к скользящему ( $\alpha \rightarrow 90^\circ$ ) происходит резкое (на несколько порядков) усиление обратного рассеяния, если выполнено приближенное условие  $2b\sqrt{\epsilon'} - 1 = (n-1/2)\lambda_0$  ( $= n\lambda_0$  для вертикальной поляризации). Такое соотношение параметров отвечает критическому режиму, когда в слое возникает новая поверхностная волна (мода). При этом продольные (вдоль слоя) волновые числа падающего излучения и указанной моды оказываются близкими по величине.

Характерные угловые зависимости величин  $G_{p,s}(\alpha)$  приведены на рис. 1, 2 (см. на вклейке), где принято  $\epsilon'=2+0,02i$ ,  $k_0 b=0,3$  (кривые 1),  $k_0 b=1,0; 2,4; 20,0$  (кривые 2, 3, 4 соответственно). Пунктиром представлены функции  $G_p(\alpha)$  при  $k_0 b=1,57078$  (рис. 1) и  $G_s(\alpha)$  при  $k_0 b=3,14157$  (рис. 2), причем ось ординат для этих функций изображена справа.

При фиксированных  $\alpha$  и прочих параметрах задачи величины  $G_{s,p}$  осциллирующим образом зависят от переменных  $b$  и  $\epsilon'$ , что объясняется интерференционными эффектами при формировании невозмущенного и флуктуационного полей в слое. На горизонтальной поляризации при  $\alpha > 0$  каждая из упомянутых зависимостей имеет экстремум в точках, для которых  $\beta' = n\pi/2$ : четным  $n$  отвечают минимумы (в них  $G_p \ll 1$ ), а нечетным — максимумы (при этом  $G_s > 1$ ). В случае вертикальной поляризации для  $\alpha > 20^\circ$  минимумы и максимумы  $G_s$  как функции  $b$  (или  $\epsilon'$ ) определены соответственно приближенными условиями  $\cos^2 \beta' \approx (\epsilon' - \sin^2 \alpha) / (\epsilon' + (\epsilon' - 1) \sin^2 \alpha)$  и  $\beta' \approx n\pi/2$ . Увеличение диссипативных потерь ( $\delta$ ) уменьшает размах осцилляций, приводит к скорейшему их затуханию с ростом  $b$  (или  $\epsilon'$ ) и сдвигает экстремумы в сторону меньших значений аргумента. Зависимости  $G_p$  (пунктир) и  $G_s$  (сплошная линия) от  $b$  изображены на рис. 3, где принято  $\alpha=40^\circ$ ,  $\epsilon'=2,0$ ,  $\delta=0,01$  (кривые 1) или  $\delta=0,1$  (кривые 2).

Обнаруженные закономерности рассеяния могут оказаться полезными при интерпретации данных дистанционного зондирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Г. А., Куковкин А. Г., Черная Л. Ф. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 7. С. 1352.
2. Радиолокационные методы исследования Земли / Под ред. Ю. А. Мельника. — М.: Сов. радио, 1980.
3. Nee S.-M. F. // Applied Optics. 1988. V. 27. № 14. P. 2819.
4. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волны на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
- 5 Schiffer R. // Applied Optics. 1987. V. 26. № 4. P. 704.
- 6 Elachi Ch., Roth L. E., Schaber G. G. // IEEE Trans. Geoscience and Remote Sens. 1984. V. GE-22. № 4. P. 383.
7. Яровой А. Г. // Сб. Радиотехника. — Харьков: Выща школа, 1986. Вып. 79. С. 73.
8. Жук Н. П. В кн.: Электроника миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. — Киев: Наукова думка, 1988. С. 226.

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
17 марта 1989 г.,  
после доработки  
16 марта 1990 г.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ УСИЛЕНИЕ В СПЕКТРЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЛАЗЕРОВ,  
ОБУСЛОВЛЕННОЕ ЭФФЕКТОМ НАСЫЩЕНИЯ  
ВО ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОЙ СРЕДЕ**

C. A. Коваленко, C. P. Семин

В настоящее время большой интерес вызывают особенности спектра генерации широкополосных лазеров, возникающие в окрестности линий поглощения различных веществ, помещенных внутрь резонатора лазера (асимметрия линии поглощения, наличие усиления наряду с поглощением, захват частоты или конденсация спектра) [1—6]. Для исследования этих явлений важны механизмы, приводящие к дополнительному усилению лазерных мод [7, 8]. В настоящей работе рассмотрен один из них, связанный с насыщением поглощения внутрирезонаторной среды.

Запишем выражение для коэффициента усиления  $\beta_q$  в лазерной моде  $q$  [9]:

$$\beta_q = C \int |\psi_q|^2 n_a(r) dv, \quad (1)$$

где  $C$  — константа,  $\psi_q$  — ортонормированная собственная функция резонатора,  $n_a(r)$  — плотность активных атомов,  $r$  — расстояние от оси резонатора. Примем  $n(r) \sim \sim \exp(-2r^2/a^2)$ , что соответствует гауссовой накачке при малом превышении над порогом.

Собственные моды резонатора удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta \psi_q + k_q^2 \epsilon \psi_q = 0, \quad (2)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $k_q = \omega_q/c$  — волновое число в вакууме,  $\omega_q$  — частота моды. В пустом резонаторе ( $\epsilon=1$ ) решение имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \psi_{pmq} = & \frac{2}{p! \sqrt{\pi L_p(z)}} L_p^m \left( 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \exp(i m \varphi - r^2/\rho^2) \times \\ & \times \sin[k_{pmq} z - (1+2p+m) \Phi(z) + kr^2/2R(z)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты,  $p, m, q$  — радиальный, азимутальный и аксиальный индексы моды,  $L$  — длина резонатора,  $\rho(z)$  — радиус моды,  $R(z)$  — радиус кривизны волнового фронта,  $\Phi(z)$  — дополнительный набег фазы,  $L_p^m$  — полиномы Лагерра, которые при  $m=0$  имеют вид  $L_p^0(x) = e^{x/d^2} (e^{-x} - x)/dx^2$ . Запишем также выражение для спектра резонатора, показанного на рис. 1 [10] (см. на вклейке):

$$\begin{aligned} k_{pmq} L = & \pi q + (1+2p+m) \Phi(L), \\ \Phi(L) = & \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{\delta_0/\delta - \delta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\delta = (d-R-f)$  — параметр настройки резонатора,  $R$  — радиус кривизны крайнего зеркала,  $f$  — фокусное расстояние среднего зеркала,  $d$  — расстояние между сферическими зеркалами ( $d \ll L$ ),  $\delta_0 = f^2/L$ .

Помещение внутрь резонатора слоя с проницаемостью  $\epsilon=1+\chi$  приводит к изменению собственных мод резонатора. Поправки к ним при  $\chi \ll 1$  будем искать с помощью теории возмущений. В первом порядке имеем

$$\delta \psi_q = - \sum_{q' \neq q} \frac{k_q^2}{k_q^2 - k_{q'}^2} \psi_{q'}^0 \left( \int dv \psi_{q'}^0 \chi \psi_{q'}^0 \right), \quad (5)$$

где  $\psi_q^0$  — невозмущенные моды. Используя (1), (3)–(5), найдем изменение коэффициента усиления  $\delta \beta_q$  для основной моды ( $p, m=0$ ). При этом будем считать, что 1) имеется аксиальная симметрия, так что при суммировании в (5) входят лишь моды с  $m=0$ ; 2) длины  $l_a$  и  $l_b$  активной и поглощающей среды малы, так что можно пренебречь изменением  $\rho(z)$ ; 3)  $\chi$  слабо меняется на расстояниях порядка длины волны. После суммирования получим

$$\alpha'_q = \frac{\delta \beta_q}{\beta_q} = - k l_a \sum_{p>0} (-1)^p \left( \frac{\mu_a}{\mu_a + 1} \right)^p \chi_{pq} \frac{\cos 2p[\Phi(L_b) - \Phi(L)]}{\sin[2p\Phi(L)]}; \quad (6)$$

$$\chi_{pq} = \frac{1}{p!} \int dx \chi_q(x) L_p^0(x) \exp(-x), \quad (7)$$

где  $\mu_a = \rho_a^2/a^2$ ,  $x=2r^2/\rho_b^2$ ,  $\rho_a$ ,  $\rho_b$  — радиус моды в активной и поглощающей среде.

Предположим, что плотность частиц в поглощающей среде имеет вид  $n_b(r) = n_b(0)(1-2r^2/b^2)$ . При этом восприимчивость также имеет вид  $\chi(r) = \chi(0)(1-2r^2/b^2)$ , что соответствует линзе с фокусным расстоянием  $F=b^2/2\chi(0)\delta_0$ . В сумме (6) в силу ортогональности полиномов Лагерра от нуля отличен лишь первый член. В этом случае эффективное усиление (с учетом поглощения  $\alpha_q''$  и усиления  $\alpha_q'$ ) имеет вид

$$\alpha_q = \alpha_q' - \alpha_q'' = -\alpha_q'' \left[ \frac{1}{1 + \Delta_q^2} - A \frac{\Delta_q}{1 + \Delta_q^2} \right], \quad (8)$$

где  $\Delta_q = (\omega_q - \omega_b)/\Gamma$ ,  $\omega_b$  — центр линии поглощения,  $\Gamma$  — полуширина линии,

$$A = -\frac{\mu_a}{2(\mu_a + 1)} g \frac{\rho^2}{b^2} \frac{(z_0^2/\delta^2 - L_b^2/L^2) \delta_0}{(z_0^2/\delta^2 + L_b^2/L^2) z_0}. \quad (9)$$

Здесь  $g = L/dT$  — относительные потери на проход,  $T$  — время жизни фотона в резонаторе,  $z_0 = \sqrt{\delta(\delta_0 - \delta)}$  — конфокальный параметр. Выражение (8) совпадает с полученным в работе [7] другим методом (отличие в два раза связано с заниженным вдвое выражением для фокусного расстояния, использованного в этой работе).

Предположим теперь, что поглощающая среда состоит из двухуровневых атомов. В этом случае восприимчивость  $\chi$  с учетом насыщения поглощения имеет вид

$$\chi(r) = \frac{\chi(0)}{1 + H \exp(-2r^2/\rho^2)}, \quad (10)$$

где фактор насыщения  $H = \sum_q \sigma_q \tau_b \left( M_q \frac{c}{v_b} \right)$ , в котором  $\sigma_q = \frac{\sigma_b}{1 + \Delta_q^2}$  — сечение поглощения на частоте  $\omega_q$ ,  $\sigma_b = \lambda_b^2/4\pi\Gamma\tau_b$ ,  $\lambda_b = 2\pi c/\omega_b$ ,  $\tau_b$  — продольное время релаксации поглощающей среды,  $M_q$  — число фотонов в моде,  $v_{a,b} = \frac{\pi}{4} \rho_{a,b}^0 L$  — эффективный объем моды.

Интегрирование в (7) дает

$$\chi_p = \begin{cases} -(H/2^{p+1})\chi(0), & H \ll 1 \\ [(-1)^p (\ln^{p+1} H)/(p+1)! H] \chi(0), & H \gg 1 \end{cases}. \quad (11)$$

Воспользуемся известным выражением для числа фотонов в моде [7]

$$M_q(t) = I_0 \frac{v}{p_a} \sqrt{t/T} \exp\left(-\alpha_q'' \frac{t}{T}\right) \exp\left(-\frac{\nu^2 q^2}{p_a^2} \frac{t}{T}\right),$$

где  $I_0$  — полное число фотонов,  $v$  — межмодовый интервал,  $p_a$  — полуширина линии активной среды. Предполагая, что ширина провала в линии поглощения много больше межмодового расстояния, и переходя в выражении для  $H$  к интегрированию, получим

$$H(t) = \frac{2\sqrt{\pi}(\eta-1)(\delta_0-\delta)}{L(1+z_0^2 L^2/\delta^2 L_b^2)} \begin{cases} \sqrt{t/T}, & t/T \ll 1/\alpha'' \\ \sqrt{1/\pi\alpha''}, & t/T \gg 1/\alpha'' \end{cases}. \quad (12)$$

Здесь использовано соотношение  $I_0 = \frac{(\eta-1)}{\sigma_a \tau_a c / 2v_a}$  для числа фотонов [7] ( $\eta$  — превышение накачки над порогом) и выражение  $\frac{v_a}{v_b} = \frac{z_0^2}{\delta L(1+z_0^2 L^2/\delta^2 L_b^2)}$ , справедливое для трехзеркального резонатора.

При типичных значениях  $L = 100$  см,  $f=5$  см имеем  $\delta_0=2.5 \cdot 10^{-1}$  см и, соответственно,  $H < 1$ . Выражение для дополнительного усиления при учете первого члена разложения по полиномам Лагерра по-прежнему имеет вид (8), где максимальное значение  $\alpha_{\max}$  реализуется при  $t \gg T/\alpha''$ .

$$\sqrt{\alpha_{\max}} \simeq \sqrt{\alpha''} \frac{A}{2} = g \frac{(\eta-1)\delta_0 L}{2L_b^2} \sqrt{\frac{\delta_0 - \delta}{\delta}} \frac{(z_0^2 L^2/\delta^2 L_b^2 - 1)}{(z_0^2 L^2/\delta^2 L_b^2 + 1)}. \quad (13)$$

При  $g=3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\eta=2$ ,  $\delta=\delta_0/2$  и характерном значении  $z_0^2 L^2/\delta^2 L_b^2 \sim 1$  получим оценку

$\alpha_{\max} \sim 10^{-8}$ , что соответствует коэффициенту усиления  $K = a/aT = 10^{-13}$  см<sup>-1</sup>. Этот коэффициент усиления слишком мал и не может быть зарегистрирован экспериментально.

До сих пор мы учитывали лишь первый член в разложении (6). Как видно из выражения (6), следующие члены ряда имеют особенность при значениях параметра настройки  $\delta \approx \delta_0$ , при котором  $\sin[2p\Phi(L)] = 0$ . Условие применимости теории возмущения при учете влияния активной среды накладывает, однако, ограничение  $\sin[2p\Phi(L)] > g$ . Это ограничение приводит к максимальной величине коэффициента усиления, обусловленного  $p$ -м членом,

$$\alpha_{p \max} = \frac{(\eta - 1)^2}{2^{2p}} \left( \frac{\delta_0}{L} \right)^2 < 10^{-6} .$$

Это усиление по-прежнему меньше экспериментально обнаруживаемой величины  $\alpha_{\text{эксп}} \sim 10^{-5}$  [1].

Таким образом, рассмотренный механизм не может отвечать за особенности спектра усиления, наблюдаемые в эксперименте [1-6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shank C. V., Klein M. B. // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. P. 156.
2. Meyer Y. H. // Opt. Commun. 1979. V. 30. P. 75.
3. Nenchev M. N., Stefanov V. I., Gizbrekht, Bokhoven A. F. Byulg. J. Phys. 1980. V. 7. P. 521.
4. Brink G. O., Lakkagaju H. S. // Opt. Commun. 1979. V. 29. P. 95, Кумаг Р., Brink G. O., Spence S., Lakkagaju H. S. // Opt. Commun. 1980. V. 32. P. 129.
5. Khanip Ya. I., Kagan A. G., Novikov V. P. et al. // Opt. Commun. 1980 V. 32. P. 456.
6. Баев В. М., Беликова Т. П., Варнавский О. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 416.
7. Коваленко С. А., Семин С. П. // Квантовая электроника. 1988. Т. 5. С. 1010.
8. Данилевик М. В., Негрийко А. М., Яценко А. П. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. С. 1660.
9. Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975.
10. Kogelnik H. I. // Appl. Opt. 1969. V. 5. P. 1550; // ТИИЭР. 1966. Т. 54. С. 95; Справочник по лазерам. — М.: Сов. радио, 1978. Т. 2.
11. Баев В. М., Беликова Т. А., Свириденков Э. А., Сучков А. Ф. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 43.

Научно-производственное объединение  
Всесоюзный научно-исследовательский  
институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
22 августа 1988 г.,  
после доработки  
25 августа 1989 г.

УДК 621.385.518.61

## КАТОДНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В МОЩНЫХ ГИРОТРОНАХ

В. Е. Запевалов, С. А. Малыгин, В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг

Одним из нежелательных эффектов, препятствующих увеличению выходной мощности МЦР, в которых используются винтовые электронные пучки, особенно при непрерывном режиме работы, является неустойчивость эмиссионного тока. Когда последний превышает некоторое пороговое значение, возникает неуправляемое нарастание эмиссии, которое заканчивается срывом колебаний или пробоем. Имеющиеся экспериментальные данные показывают, что при неустойчивых режимах катод подвергается интенсивной бомбардировке электронами, энергия которых сравнима с энергией электронов основного пучка. Причиной неустойчивости (см. например, [1]) является отражение от магнитной пробки в области нарастающего магнитного поля части электронов, осцилляторные скорости которых превосходят среднюю величину. Эти электроны оказываются запертными в адиабатической ловушке. Неустойчивость такого состояния и связанное с ней возникновение интенсивных переменных полей образуют один из возможных механизмов, которые восстанавливают баланс заряженных частиц.

Ниже описываются эксперименты и результаты численного моделирования, которые указывают на существование неустойчивых режимов несколько иного типа. Эксперименты проводились с гиротроном, работавшим на второй гармонике циклотронной частоты. При некоторых режимах (типовидные параметры: потенциал резона тора  $U_p = 50$  кВ, анода  $U_a = 35$  кВ, ток пучка  $I > 10$  А) наблюдался срыв регулярных высокочастотных колебаний и резкое нарастание тока эмиссии при длительности импульса  $\sim 50$  мкс. На рис. 1 (см. на вклейке), приведены зависимости от тока пучка выходной мощности гиротрона, работающего на моде  $H_{00}$  и оптимального (по кнд) тока вспомогательного соленоида, корректирующего распределение магнитного поля в прикатодной

области (соответственно кривые 1 и 2), при наличии неустойчивости ( $U_p=50$  кВ,  $U_a=35$  кВ,  $\phi=7^\circ$ ). При превышении порогового тока выходная мощность резко уменьшается, а генерация носит в основном шумовой характер. (На рис. 1 приведена также форма импульса катодного тока.)

Указанная неустойчивость, хотя и имеет некоторое сходство с предыдущей (нарастание тока эмиссии, интенсивные шумовые колебания), имеет некоторые характерные отличия.

Известно, что устранению неустойчивостей 1-го типа способствует помещение дополнительных электродов [1], перехватывающих отраженные электроны в области нарастающего магнитного поля. В описываемых экспериментах дополнительные электроды ни в качественном, ни в количественном отношении на наблюдаемые эффекты не влияли. Неустойчивость 1-го типа ослабляется при снижении анодного напряжения (за счет уменьшения осцилляторных скоростей электронов), тогда как неустойчивость 2-го типа имеет, наоборот, тенденцию к усилению. Наконец, в некотором диапазоне параметров неустойчивость 1-го типа сравнительно слабо влияет на эффективность взаимодействия (если с помощью специальных мер стабилизировать возросшую эмиссию), в то время как при неустойчивости 2-го типа колебания срываются немедленно.

Совокупность приведенных фактов указывает на то, что механизм неустойчивости 2-го типа не связан с отражением электронов от магнитной пробки, а определяется процессами, происходящими в непосредственной близости от эмиттера. Существенно что использованная в экспериментах электронная пушка отличалась сравнительно малым углом  $\phi$  наклона магнитного поля к поверхности эмиттера ( $\phi \approx 7^\circ$ ). При таких значениях  $\phi$  пушка формирует пучок с перемешанными электронными траекториями (рис. 2), 1 — катод, 2 — анод, 3 — эмиттирующий поясок; траектории при  $I = (2/3)I_s$ ,  $t_i = 0,14$  [2].

Траекторный анализ этой пушки, проведенный по программе ЭПОС [3], показал что по мере увеличения тока в рассматриваемой системе падает, а затем меняет знак продольная по отношению к магнитному полю компонента электрического поля  $E_{||}$ , определяющая инжекцию электронов из прикатодной области. В результате при некотором пороговом токе пучка  $I_s$  электроны, стартующие с левого края эмиттера, оказываются не в состоянии преодолеть потенциальный барьер, создаваемый облаком объемного заряда. Такие электроны совершают несколько колебаний над поверхностью эмиттера, а затем медленно дрейфуют в область более слабого магнитного поля и попадают на анод (рис. 2, пунктир). Для системы рис. 2 подобный режим реализуется при  $t_i = I/I_s \geq 0,2$  ( $I_s$  — ток, соответствующий режиму ограничения тока объемным зарядом). С увеличением ширины эмиттера  $I_s$  несколько возрастает. Так, для исследуемой пушки с вдвое большей шириной эмиттера отражение возникает, когда ток возрастает на 20%.

Траекторный анализ, модифицированный на случай отражений, показал, что при  $I > I_s$  итерационный процесс становится неустойчивым (отсутствует сходимость как по траекториям, так и по скоростям). Появление отраженных электронов по мере увеличения числа итераций носит периодический характер, причем на отдельных итерациях отражается до половины электронов пучка. Указанная вычислительная неустойчивость, по-видимому, соответствует зарегистрированной экспериментально неустойчивости таких режимов. Обусловленное этими эффектами ухудшение качества пучка приводит к срыву колебаний рабочей моды.

Увеличение угла наклона  $\phi$  магнитного поля к поверхности катода способствует возрастанию компоненты электрического поля  $E_{||}$ , ответственной за дрейф электронов в рабочее пространство, а следовательно, устранению указанной неустойчивости. Изменение углов наклона магнитного поля в описываемом макете гиротрона легко достигается путем перемещения основного соленоида относительно ЭОС и соответствующего изменения магнитного поля корректирующей катушки. По экспериментальным данным для устранения неустойчивостей в ряде случаев оказался достаточным сдвиг соленоида всего на 1 см.

Наличие катодной неустойчивости препятствует увеличению выходной мощности МЦР, использующих магнетронно-инжекторные пушки. Кривые 3, 4 на рис. 1 иллюстрируют зависимость выходной мощности гиротрона, а также тока корректирующего катодного соленоида (см. выше) после устранения неустойчивости ( $U_p=50$  кВ,  $U_a=31$  кВ,  $\phi=15^\circ$ ). Максимальная выходная мощность превысила 400 кВт (кпд 23%) при токе 36 А ( $t_i \approx 0,33$ ) и была ограничена эмиссионной способностью катода и электрической прочностью промежутка катод—анод.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цимминг Ш. Е. В кн.: Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар для инженеров). — Саратов: Гос. ун-т, 1974. Кн. 4. С. 3.
2. Мануилов В. Н., Цимминг Ш. Е. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1977. Вып. 4. С. 67.
3. Лыгин В. К., Мануилов В. Н., Цимминг Ш. Е. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1987. Вып. 7. С. 36.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
5 мая 1989 г.

\* Ниже для краткости она называется неустойчивостью 1-го типа, а описываемая неустойчивость — 2-го типа.

# НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ШУМЫ В КРЕМНИИ С ПРИМЕСЬЮ СЕЛЕНА

В. М. Арутюнян, З. О. Мхитарян

Селен образует в запрещенной зоне кремния донорные уровни, причем разные авторы указывают данные об энергетическом положении уровней, несколько отличающиеся друг от друга [1]. Шумы в таких структурах не исследованы вообще, хотя их исследование интересно как для выяснения природы низкочастотного шума в Si<sub>x</sub>Se, так и для уточнения положения уровней селена и определения их параметров с помощью шумовой спектроскопии.

Для исследований использовались образцы из кремния с примесью селена *n*-типа изготовленные путем диффузии селена в кремний. Технология изготовления приведена в работе [2]. Конфигурация образцов и их размеры в миллиметрах приведены на рис. 1 (см. на вклейке). Шумы исследовались в диапазоне частот 20 Гц—20 кГц и в интервале температур 77—300 К. Температура поддерживалась с помощью криостата с точностью  $\pm 1$  К. Поскольку при понижении температуры сопротивление образцов менялось на несколько порядков (от десятков и сотен Ом при 300 К до десятков и сотен кОм при 77 К), то в эксперименте были использованы два предварительных предусилителя (ПУ). Один, описанный в работе [3], для низкотемпературных измерений (высокое сопротивление образца); второй — для высокотемпературных измерений (образец — низкоомен). Схема второго ПУ приведена на рис. 2. ПУ собран на малошумящей микросхеме K538УН3 (на короткозамкнутом входе усилителя при  $f=1$  кГц значение шума 1,8 нВ/Гц<sup>1/2</sup>). Шумовые свойства микросхемы оптимизированы для работы с низкоомными источниками сигналов, имеющими сопротивление от сотни Ом до единиц кОм. Коэффициент усиления регулируется сопротивлением  $R_1$ . Конденсатор  $C_1$  введен в схему для подавления высокочастотной составляющей, которая появляется из-за самовозбуждения микросхемы. Питание усилителя и образцов осуществлялось последовательно соединенными батарейками. Контакты к образцам наносились при  $T=550^{\circ}\text{C}$  осаждением в вакууме сплава Au+0,1% Sb в течение 5 мин. Площадь контакта  $\approx 1 \text{ mm}^2$ . В образцах имело место условие  $N_D \gg N_A$ , где  $N_D$  — концентрация доноров (селена),  $N_A \approx 10^{12} \text{ см}^{-3}$  — концентрация мелких акцепторов. Вольт-амперные характеристики исследуемых структур были линейными во всем диапазоне используемых температур и напряжений. Концентрация свободных носителей  $n$  оценивалась по температурной зависимости удельного сопротивления образцов. Значения подвижности были получены из выражения [4]

$$\mu = A \cdot T^{-\gamma}, \quad (1)$$

где  $A = 1,43 \cdot 10^9 \text{ см}^2 \cdot \text{K}^{\gamma} / \text{В} \cdot \text{с}$ ,  $\gamma = 2,42$ .

Температурные зависимости  $n$  и  $E_F$  (положения уровня Ферми) приведены на рис. 3. Поскольку (1) справедливо для температур выше 100 К (см. [4]), то оценка энергии активации легирующей примеси и ее концентрации проводилась по высокотемпературному участку зависимости  $n(T)$ . Получено, что  $E_D = E_C = 0,28$  эВ,  $N_D \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , где  $E_C$  — энергия дна зоны проводимости. При расчетах принималось, что фактор вырождения  $g_D=2$ .

На рис. 4а, б приведены шумовые спектры. С целью анализа результатов они были разложены на фликкерную и генерационно-рекомбинационную ( $\Gamma$ -Р) составляющие. Высокочастотные плато в спектрах, снятых при  $T = 300, 280, 230, 219, 203, 191, 120$  К, как показал расчет, обусловлены тепловым шумом. На рис. 4а кривая 1 при  $T=300$  К и токе через образец  $J=2$  мА; 2—280 К, 1 мА; 3—230 К, 0,9 мА; 4—203 К, 0,8 мА; 5—191 К, 0,8 мА; 6—174 К, 0,8 мА; 7—120 К, 0,8 мА; 8—77 К, 0,59 мА; на рис. 4б кривая 1— $T=271$  К,  $J=1$  мА; 2—256 К, 1 мА; 3—219 К, 0,9 мА. Токовые зависимости  $\Gamma$ -Р и  $1/f$  шумовых составляющих имеют квадратичный или близкий к нему вид.

Как показали проведенные на основе экспериментальных данных оценки, параметр  $\alpha$ , определяющий уровень  $1/f$  шума, в области низких температур намного меньше, чем постоянная Хоухе  $\alpha_H$ , равная  $2 \cdot 10^{-3}$ . С повышением температуры  $\alpha$  растет меняясь в широких пределах и принимая при комнатной или близких к ней температурах значения, превышающие  $\alpha_H$ . Температурный ход  $\alpha$  приведен на рис. 5. Данные для оценок брались для  $f=20$  Гц. Большие значения  $\alpha$ , по всей вероятности обусловлены тем, что сопротивление металл—полупроводник, оставаясь омическим (о чем свидетельствует линейность ВАХ), становится сравнимым с сопротивлением образца, который при комнатных температурах низкоомен. Поэтому значительную часть низкочастотного шума, снимаемого с выводов прибора, при этих температурах составляет контактный шум.

Действительно, если оценить контактное сопротивление металл—полупроводник по формуле

$$R_K = (kT/A_1e) \exp(e\varphi_K/kT), \quad (2)$$

где  $e\varphi_K = 0,81$  эВ [5] — значение барьера на контакте золото—кремний при 300 К;  $A_1 = BST^2 \exp(E_F/T)$ ;  $B$  — эффективная постоянная Ричардсона для термоэлектронной эмиссии, то получим, что  $R_K = 25$  Ом.

В области низких температур уровень  $1/f$  шума уменьшается. Причем, если

сравнивать уровни  $1/f$  шума в образцах из  $\text{Si}\langle\text{Se}\rangle$  (рис. 5) и в компенсированных структурах в области низких температур (ниже 150 К) [6], то видно, что шум  $1/f$  в  $\text{Si}\langle\text{Se}\rangle$  по меньшей мере на порядок меньше.

Запишем высоту Г-Р плато для глубокой примеси как [7]

$$\frac{S_I}{J^2} = \frac{2\tau N_D}{n^2 V} \left[ \frac{g_D N_C}{n} \exp\left(-\frac{E_D}{kT}\right) \right] \left[ 1 + \frac{g_D N_C}{n} \exp\left(-\frac{E_D}{kT}\right) \right]^{-2} = \frac{2\pi N_D}{n^2 V} \frac{\exp(\theta)}{(1 + \exp(\theta))^2}, \quad (3)$$

где

$$\theta = \ln g_D + \ln \frac{N_C}{n} - \frac{E_D}{kT}. \quad (4)$$

Здесь  $J$  — ток через образец,  $\tau$  — время релаксации,  $V$  — объем прибора,  $N_C$  — эффективная плотность состояний в зоне проводимости. Выражение (3) можно представить в виде

$$F = \frac{S_I}{J^2} \cdot \frac{n^2}{\tau} = \frac{2N_D}{V} \frac{\exp(\theta)}{(1 + \exp(\theta))^2}. \quad (5)$$

На рис. 6 приведена температурная зависимость  $F$ . Как видно из рисунка, при  $T = 271$  К имеет место максимум функции  $F$ , что соответствует значению  $\theta = 0$ . Там же показана температурная зависимость времени релаксации  $\tau$ , определяемая по характерной частоте среза Г-Р шума. Из формул (4) и (5) в точке максимума  $F$  определялись энергетическое положение уровня и концентрация примеси, обуславливающей Г-Р шум. Получено  $E_D = E_C = 0,26$  эВ;  $N_D = 8 \cdot 10^{16}$  см $^{-3}$ . Таким образом, Г-Р шум в рассмотренных спектрах обусловлен верхним уровнем селена. Эффективное сечение захвата электрона на уровень  $\sigma_n \approx 1,8 \cdot 10^{-18}$  см $^2$ . Аналогичным путем выявлен уровень, дающий максимум при  $T = 174$  К. Получено  $E_x = E_C = 0,21$  эВ;  $N_x = 1,9 \cdot 10^{12}$  см $^{-3}$ ;  $\sigma_x = 3,9 \cdot 10^{-17}$  см $^2$ . Поскольку исследуемые образцы после диффузационного отжига не подвергались закалке [2], то естественно предположить, что уровень ( $E_C = 0,21$  эВ) — это уровень, упоминающийся в работе [1] и присыпываемый обычно комплексам селена либо с бором, либо со структурными дефектами.

Авторы благодарны Р. С. Барсегяну и Г. Е. Григоряну за предоставленные образцы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жданович Н. С. // ФТП. 1981. Т. 15. № 8. С. 1614.
2. Арутюнян В. М., Барсегян Р. С. и др. // Изв. АН АрмССР. Физика. 1988. Т. 23. № 2. С. 99.
3. Мхитарян З. О., Барсегян Р. С., Арутюнян В. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 9. С. 1218.
4. Jacobovici C., Capaldi C. et al. // Solid-State Electr. 1977. V. 20. № 2. P. 77.
5. Милнес А., Фойхт Д. Гетеропереходы и переходы металл—полупроводник. — М.: Мир, 1975. С. 187.
6. Арутюнян В. М., Мхитарян З. О. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 12. С. 1541.
7. Copeland J. A. // IEEE Trans. Electron Devices. 1971. V. ED-18. № 1. P. 50.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11 апреля 1989 г.

К ст. В. Е. Запевалова и др.

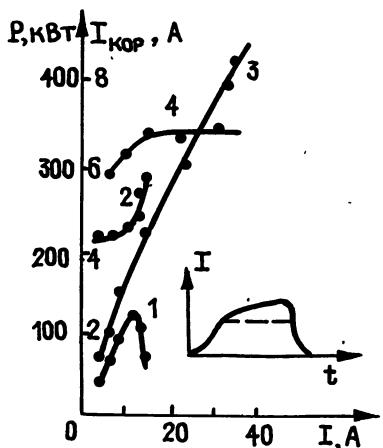


рис.1

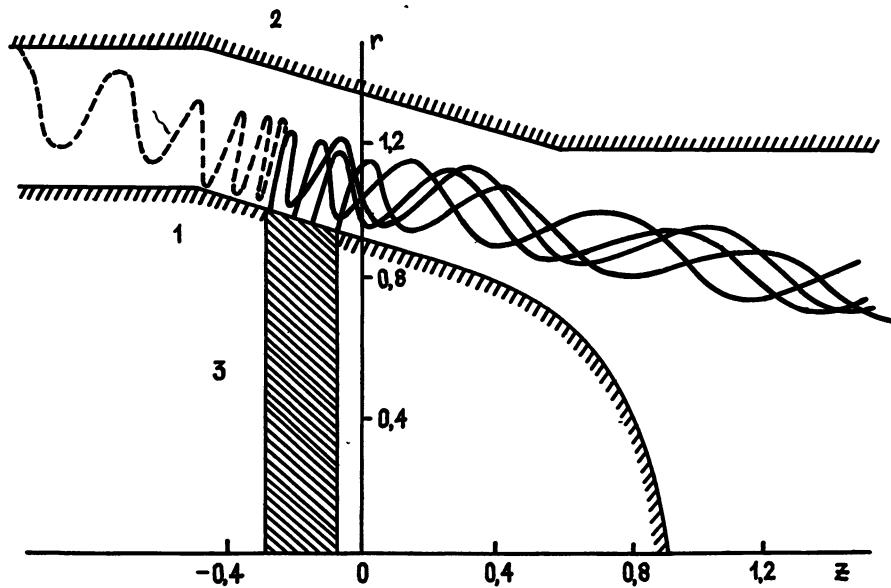


рис. 2

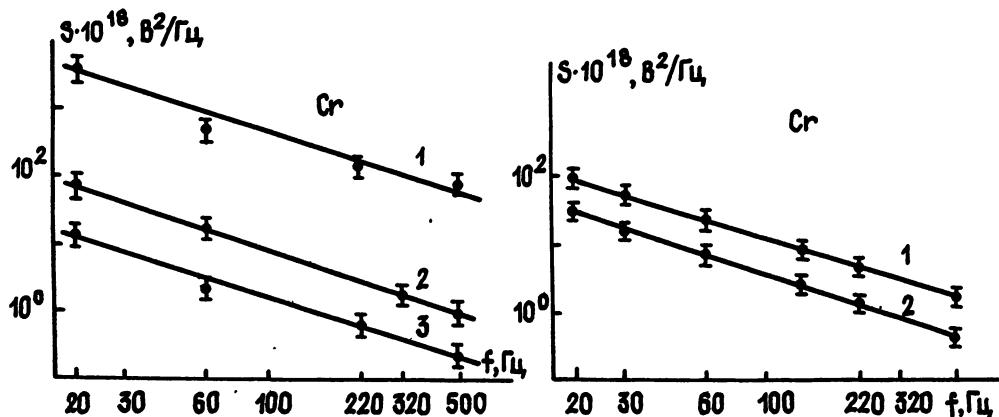


рис. 1,2

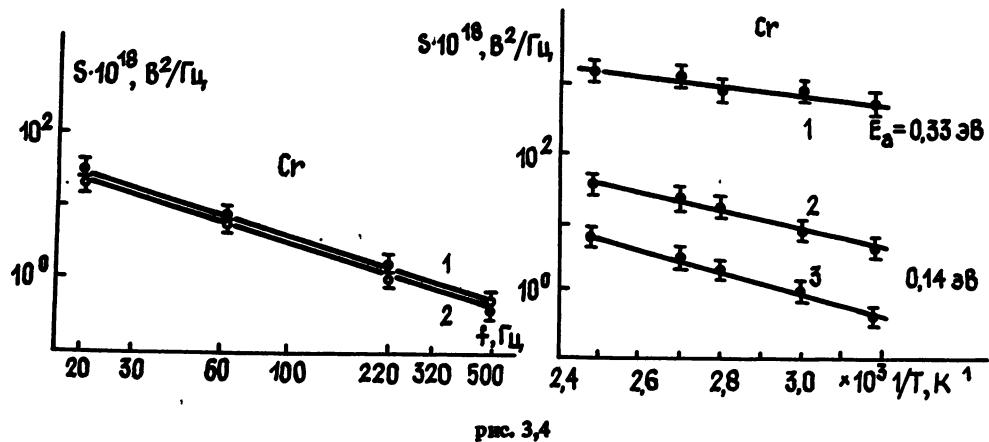


рис. 3,4

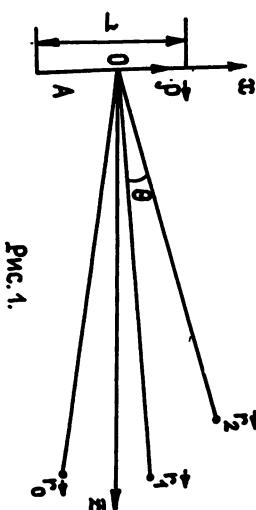


Рис. 1.

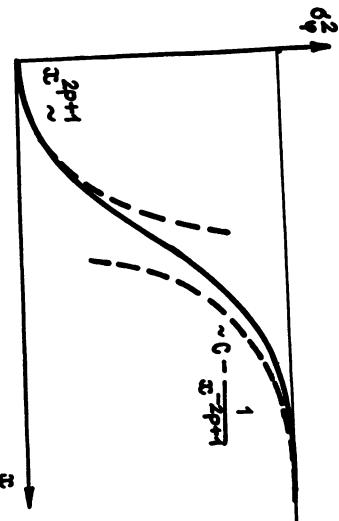


Рис. 4.

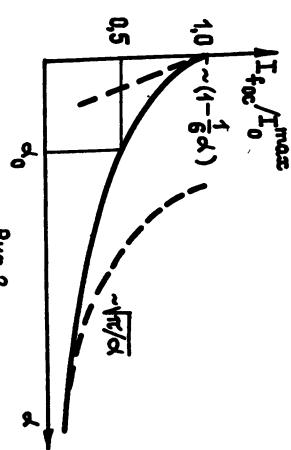


Рис. 2.

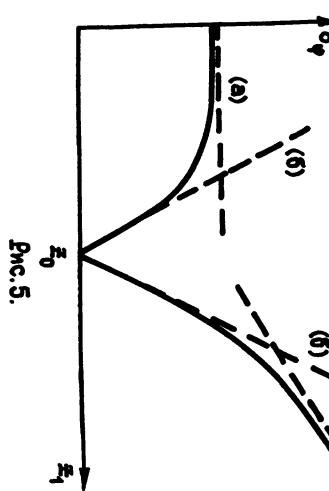


Рис. 5.

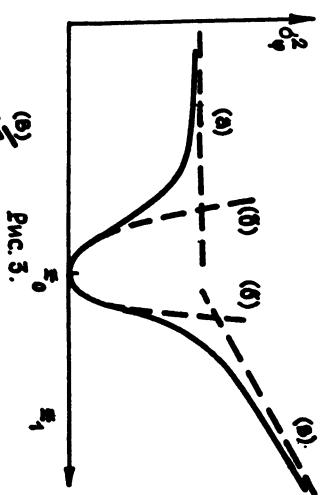


Рис. 3.

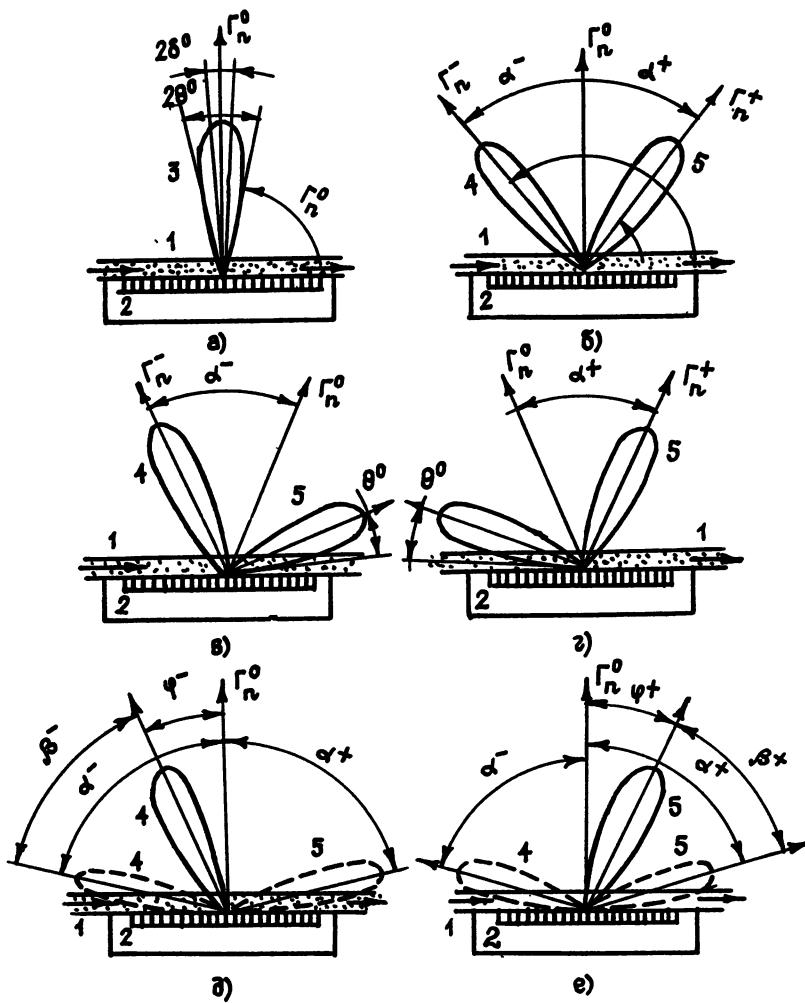


Рис. 1

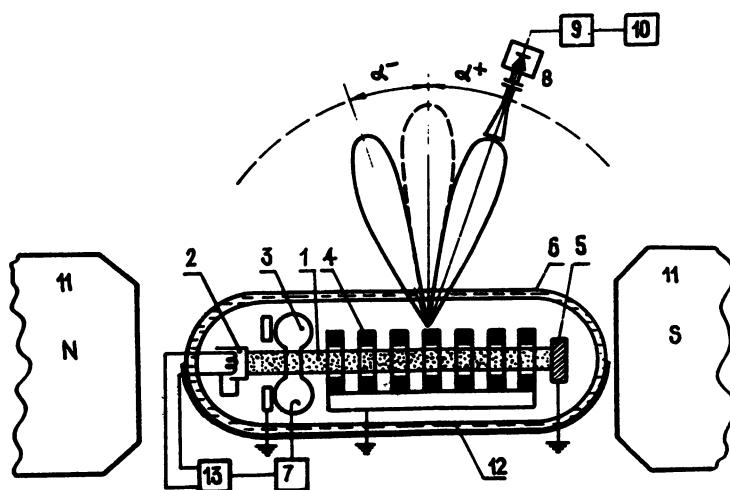


Рис. 2

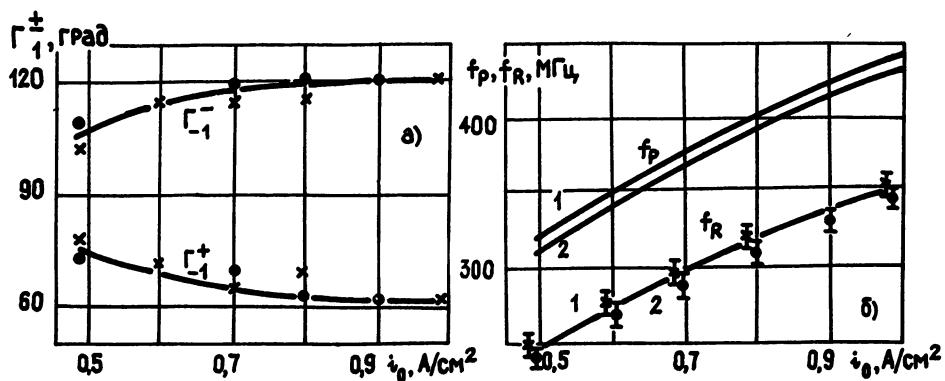


Рис. 3

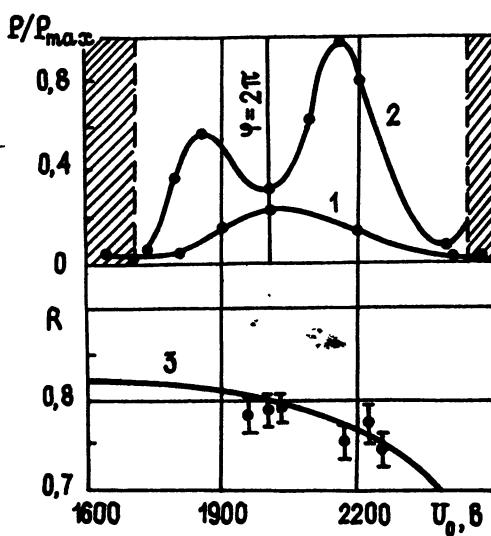


Рис. 4

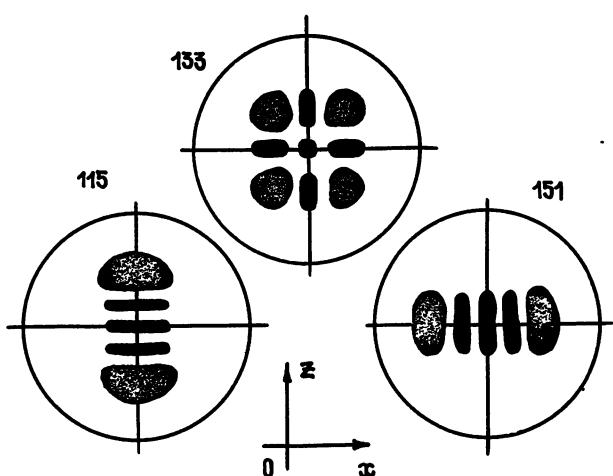


рис. 1

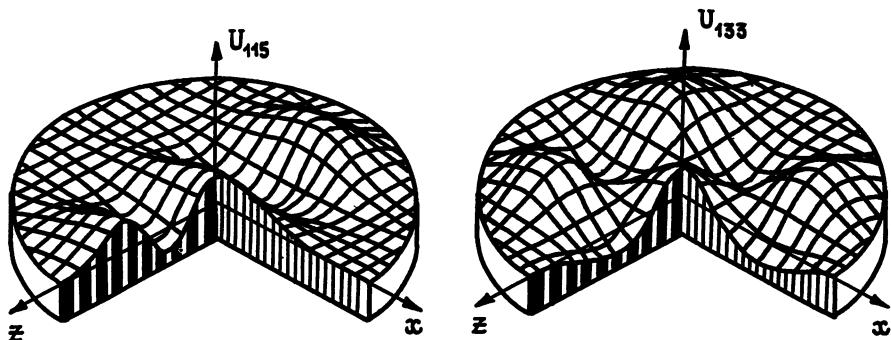


рис. 2

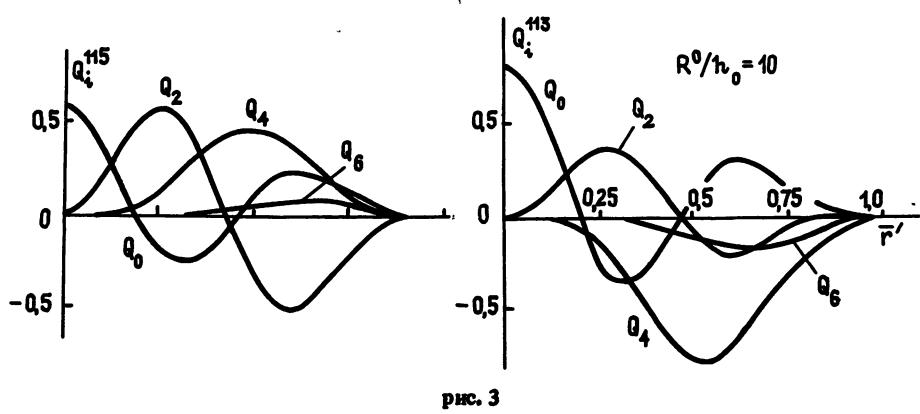


рис. 3

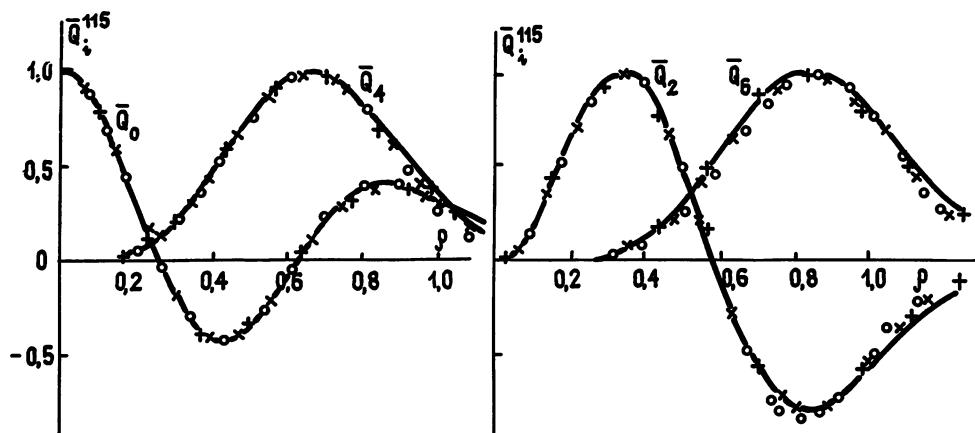


рис. 4

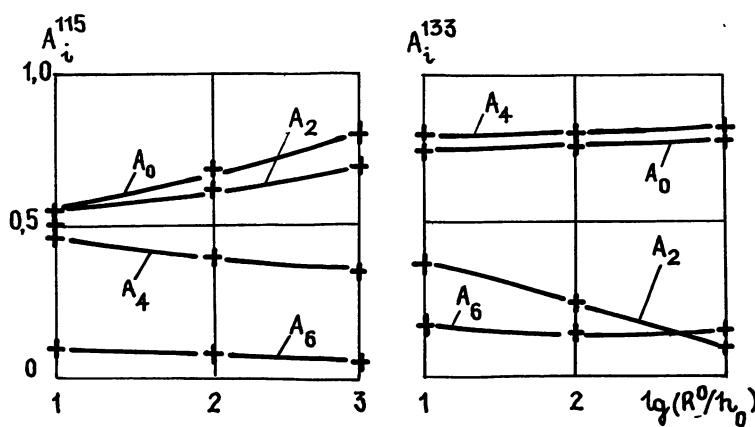


рис. 5

К ст. Н. П. Жука и др.

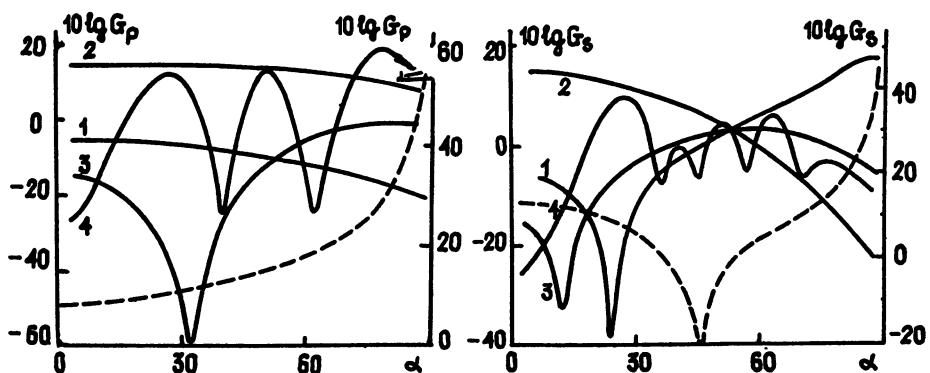


рис. 1,2

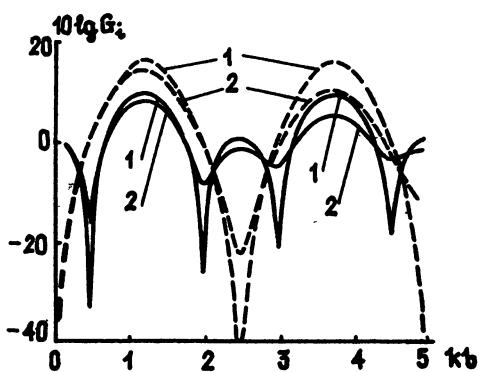


рис. 3

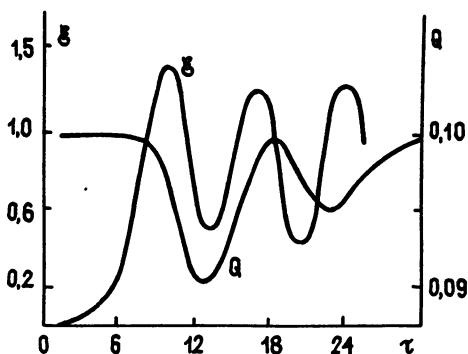


рис. 1

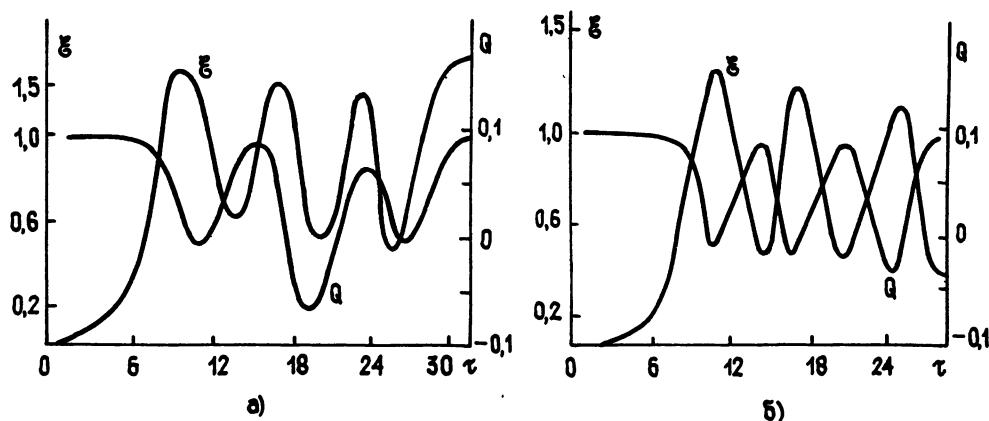


рис. 2

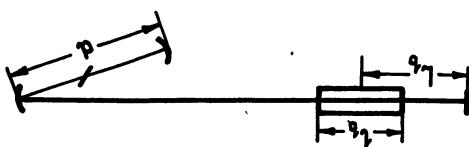


рис. 1

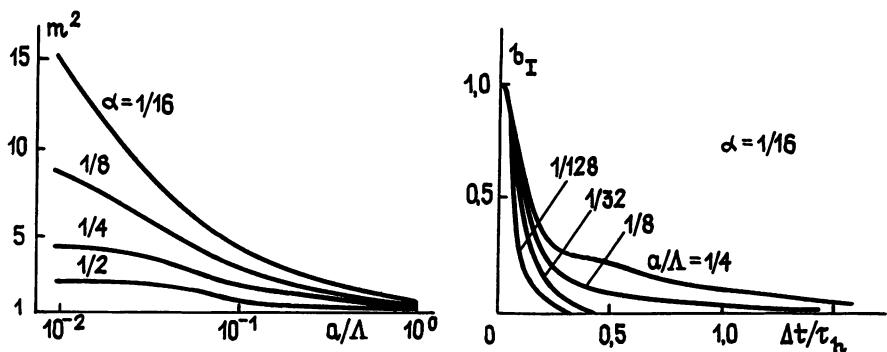


рис. 1,2

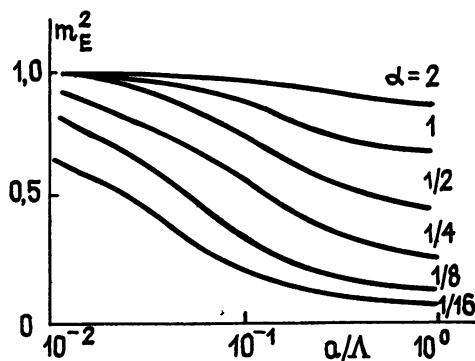


рис. 3

К ст. С. В. Божокина

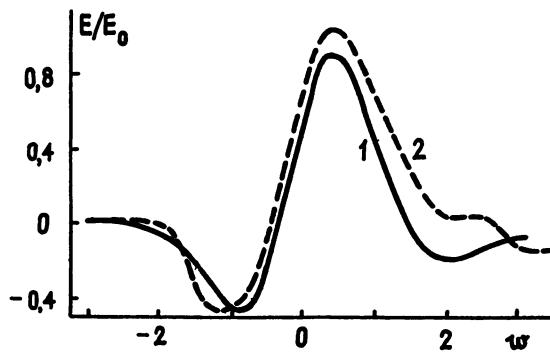


рис. 1

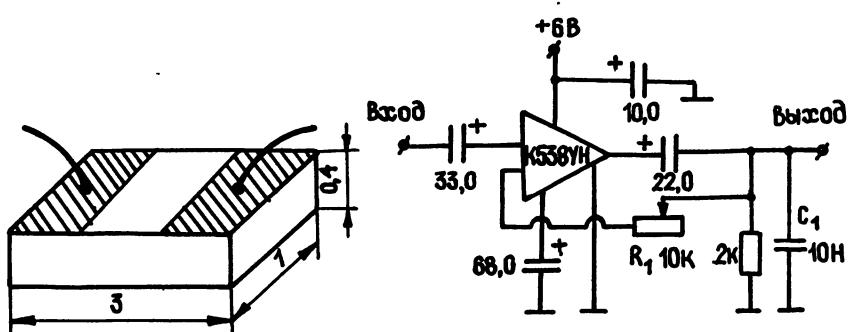


рис. 1,2

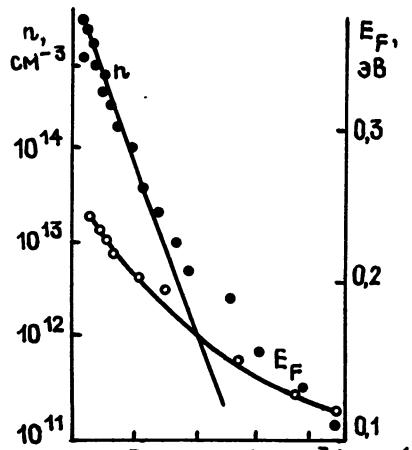


рис. 3

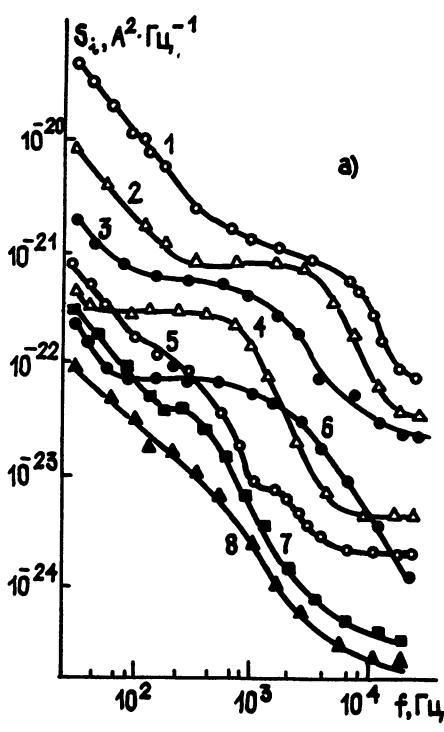
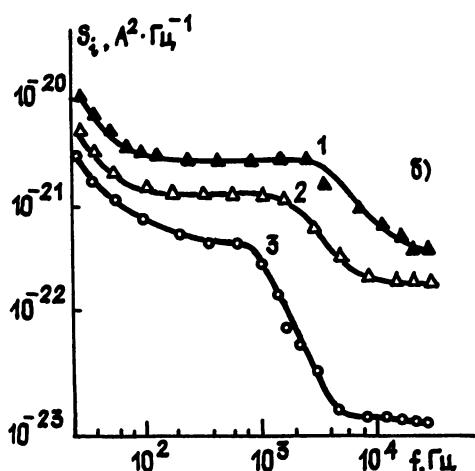


рис. 4



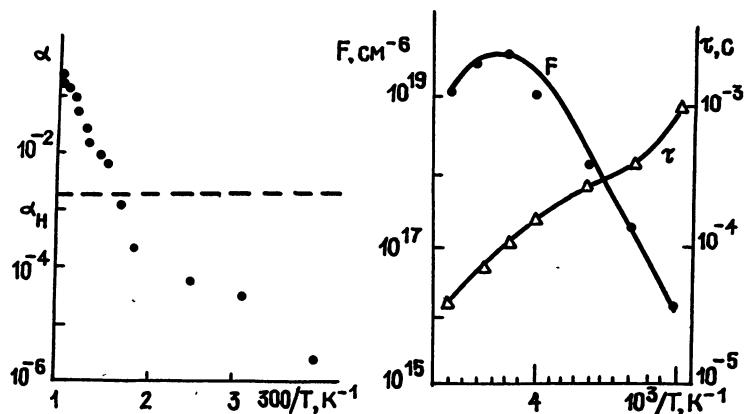


рис. 5,6

К ст. М. И. Агафонова и др.

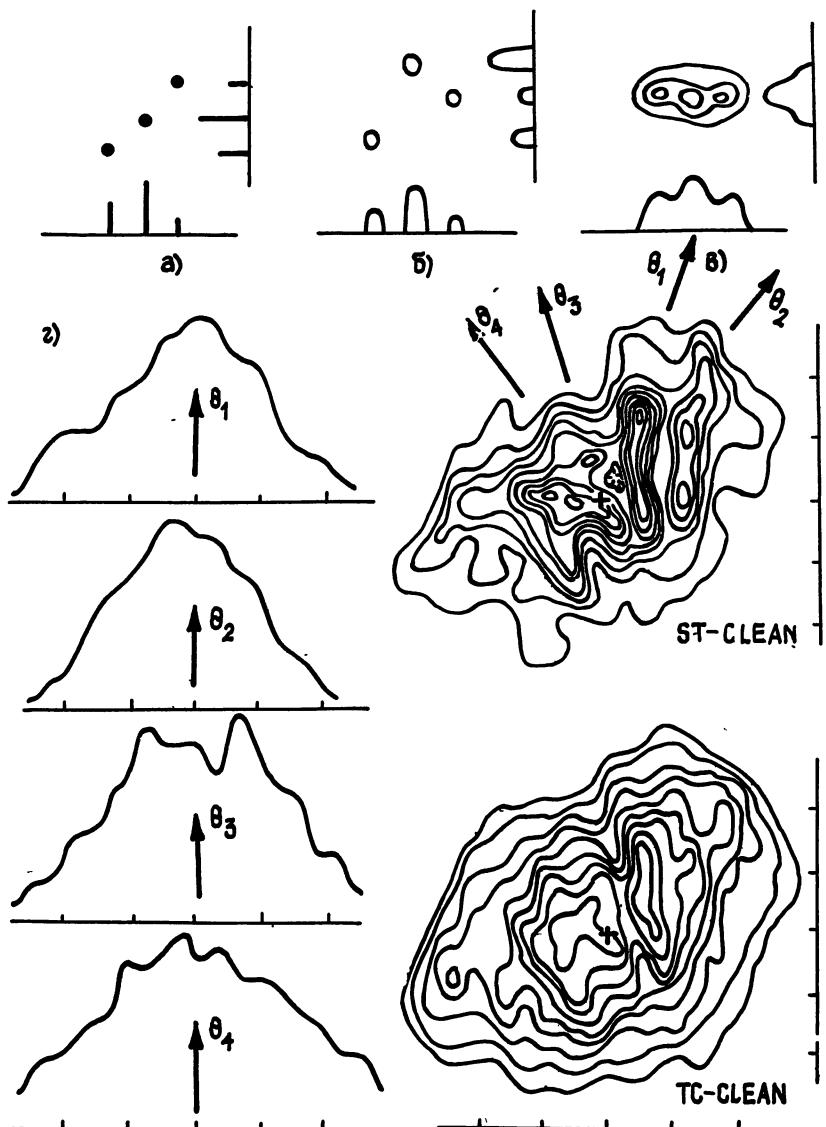


рис. 1