

## РАДИОФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С АПРЕЛЯ 1958 г.

Том 33, № 1

Горький

январь 1990

## СОДЕРЖАНИЕ

Розенберг А. Д. Измерение модуляционной передаточной функции «морская поверхность — радиолокационный сигнал» на волне 3 см . . . . .	3
Николаенко А. П. Учет ближних полей в задаче о локальной неоднородности высоты промежутка Земля — ионосфера . . . . .	12
Козина О. Г., Макаров Г. И. Влияние рельефа местности на низкочастотное электромагнитное поле . . . . .	17
Павлов В. А. О гофрировочной неустойчивости МГД ударных волн . . . . .	22
Белокопытов Г. В., Семененко В. Н., Чистяев В. А. Характеристики отраженной мощности при резонансном стрикционном параметрическом возбуждении . . . . .	27
Чечкин А. В. К теории аномальной проводимости и диффузии слабоионизированной плазмы в магнитном поле . . . . .	35
Музычук О. В. Энергетические характеристики и устойчивость гармонического осциллятора с сильными небелыми флуктуациями параметров . . . . .	43
Самсон А. М., Логвин Ю. А., Туровец С. И. Роль симметрии и формы потенциала нелинейного осциллятора в иерархии бифуркаций при гармоническом воздействии . . . . .	49
Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. Квазистационарные состояния в открытых неупорядоченных системах . . . . .	61
Нечаев А. Г., Хилько А. И. Диагностика неоднородностей волновода по огибающей интенсивности импульсного сигнала . . . . .	65
Антонец М. А., Шерешевский И. А., Шерстнева Л. В. Тонкая структура дисперсионных кривых для волн в слоистой среде . . . . .	72
Бойко С. Н., Яцук К. П. Плоская логарифмическая спираль с периферийным возбуждением . . . . .	78
Самохин А. Б., Цветков С. В. Об асимптотических дифференциальных условиях излучения для трехмерных задач дифракции . . . . .	85
Маненков А. Б. Сравнение приближенных методов расчета диэлектрических прямоугольных волноводов . . . . .	93
Мануилов Б. Д., Чернышев К. И., Яковенко В. А. Сравнение интегральных характеристик конечных решеток плоских волноводов с диэлектрическими вставками при Е- и Н-возбуждении . . . . .	98
Ефимов С. П., Коренев И. Л., Юдин Л. А. Резонансы в пучке при фокусировке спиральным квадрупольным магнитным полем . . . . .	102
Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И., Мицкевич Н. В. Модуляционная неустойчивость непрерывного сигнала в оптическом волокне при учете дисперсии третьего порядка . . . . .	111
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Заборонкова Т. М., Кудрин А. В. О влиянии искусственных плазменных неоднородностей на возбуждение вистлеров в магнитоактивной плазме . . . . .	118
Дворников А. А., Огурцов В. И. О взаимной синхронизации ансамбля пространственно разнесенных автогенераторов, связанных между собой по типу «каждый с каждым» . . . . .	120
Сироткин О. Л. Спектральный анализ интегродифференциального уравнения Вольтерра с функцией последействия . . . . .	123
Никанорова Е. А., Парыгин В. Н. Дифракция гауссова светового пучка на акустическом импульсе . . . . .	126
Аркадакский С. С., Колотырин А. А. Анализ возбуждения импедансной волноведущей системы в случае кратных корней дисперсионного уравнения	129

Онуфриенко Л. М., Чумаченко В. П. Численный анализ  $H$ -плоскостного моделированного делителя мощности на прямоугольных волноводах . . .

131

Аннотации депонированных статей

Легков В. М. Слабозатухающие электромагнитные квазиверхностные волны, направляемые произвольной гладкой выпуклой импедансной поверхностью . . . . .

16

Егорова Н. П., Колчигин Н. Н. Моделирование измерения коэффициента отражения в свободном пространстве . . . . .

34

Информация

Всесоюзное агентство по авторским правам (ВААП) . . . . . 60, 110, 117

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. А. АХМАНОВ, С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. И. ГАПОНОВ,  
[Б. Н. ГЕРШМАН], В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам.  
главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ,  
А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ,  
В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, А. С. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. Мурашкина

Сдано в набор 30.10.89. Подписано к печати 18.01.90. МЦ 00625.  
Формат 70×108/16. Бумага типографская № 2. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 11,55. Усл. кр.-отт. 13,80, Уч.-изд. л. 13,9. Тираж 1230.  
Заказ 8738. Цена 1 р. 80 к.

---

Адрес редакции: 603600, Горький, ул. Лядова, 25, Научно-исследовательский  
радиофизический институт, редакция журнала «Известия вузов. Радиофизика».  
Телефон 36-01-71.

---

Горьковская областная типография управления издательств, полиграфии и книжной  
торговли, 603116, г. Горький, ул. Гордеевская, 7.

УДК 551.466.1

## ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯЦИОННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ «МОРСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ СИГНАЛ» НА ВОЛНЕ 3 СМ

*A. D. Розенберг*

Приводятся данные по измерению модуляционной передаточной функции, полученные в прибрежной зоне Черного моря на волне 3 см для двух поляризаций излучения при малых углах скольжения для слабого волнения. Флуктуационные характеристики мощности рассеянного сигнала и поле орбитальных скоростей длиной волны получены из записей амплитуды и частоты импульсно-когерентной станции, расположенной на берегу. Осуждается отличие приведенных данных от результатов, полученных при больших углах скольжения и сильном волнении.

Длинные поверхностные волны модулируют рябь — короткие гравитационно-капиллярные волны. Источниками модуляции являются как изменение наклонов и сдвиговых напряжений за счет геометрии длинных волн, так и изменение локальных особенностей поля ветра, возбуждающего рябь и обусловленного влиянием длинных волн.

Интерес к этому явлению вызван двумя причинами. Во-первых, развитие неконтактных методов определения параметров морской поверхности требует знания тонкой пространственно-временной структуры ряби, ответственной за обратное рассеяние радиоволн сантиметрового диапазона. Амплитудно-частотная модуляция рассеянного сигнала за счет длинных волн позволяет определить ряд их параметров; естественно, что точность такого определения зависит от степени адекватности модели морской поверхности. Во-вторых, наличие модуляции ряби длинными волнами свидетельствует о передаче энергии ветра длинным волнам через короткие волны; знание энергетического вклада за счет такого взаимодействия необходимо для построения единой теории волнообразования. Измерение модуляционной передаточной функции (МПФ) наиболее естественным образом отвечает выяснению поставленных задач. Основанная на изучении амплитудно-частотных характеристик радиолокационного сигнала МПФ не только позволяет исследовать механизм рассеяния применительно к решению задач дистанционного зондирования морской поверхности, но и является единственным, по существу, инструментом изучения перемежаемости ряби, обусловленной длинными волнами. Определение МПФ было введено в [1]; оно основано на представлении о модуляции обратнорассеянного сигнала длинными волнами как о линейном процессе, когда входной функцией является длинная волна, а выходной — рассеянный сигнал.

В 1972 г. с применением 3-сантиметрового импульсно-когерентного радиолокатора была проведена серия измерений по проверке метода определения параметров морского волнения по частотным характеристикам рассеянного морем сигнала [2]. В основе метода лежало использование эффекта доплеровского смещения частоты обратнорассеянного сигнала на орбитальной скорости волнового движения длинных волн. С учетом возможности получения из измерений [2] данных для расчета модуляционной передаточной функции представляется целесообразным использование материалов 16-летней давности для исследования перемежаемости ряби на длинных волнах. Все имеющиеся

данные по измерению МПФ в 3-сантиметровом диапазоне радиоволн проведены с непрерывными доплеровскими локаторами, размещенными на молу [3] или свайных основаниях в прибрежной зоне [1, 4, 5]. При этом угол облучения в вертикальной плоскости (угол скольжения  $\psi$ ) составлял  $40-50^\circ$ . Основным отличием наших данных является облучение морской поверхности под скользящими ( $\psi = 1-4,5^\circ$ ) углами.

**1. Аппаратура и методика измерений.** Измерения проводились в июне—сентябре 1972 г. на Черном море с помощью установленной на мысу типовой навигационной радиолокационной станции (РЛС) 3-сантиметрового диапазона. Функциональная схема измерительной установки приведена на рис. 1.

Для обеспечения когерентного приема в схему РЛС были внесены изменения: запоминание фазы излученного сигнала производилось при помощи эхорезонатора 3, придаваемого к РЛС. С выхода фазового детектора 10 сигнал

$$A(t) = a(t) \exp j\phi_c(t)$$

( $a$  — амплитуда рассеянного сигнала,  $\phi_c(t) = d\phi_c/dt$  — частота сигнала, отсчитываемая от частоты излучения) через схему управляемого пик-детектора 11 поступал на магнитный регистратор 14. Для однозначного измерения  $f_c(t)$  можно было дополнительно смещать частоту принятого сигнала относительно излученного с помощью высокочастотного фазовращателя 9. Размер рассеивающего участка поверхности составлял 15 м вдоль луча. В качестве антенны использовался параболический рефлектор 15 с облучателем, позволяющим изменять поляризацию излучения; ширина диаграммы составляла  $1,5^\circ$  в обеих плоскостях по половинной мощности. Антenna была установлена на мачте в 50 м от уреза воды на высоте 12 м над уровнем моря. Таким образом, при изменении дистанции от 150 до 750 м можно было изменять угол скольжения  $\psi$  от  $4,5^\circ$  до  $1^\circ$ , что соответствовало изменению поперечного размера пятна от 4 до 20 м.

Для измерения волнения во время опытов использовался струнный волнограф 16, запитываемый от источника постоянного тока 17; он был установлен на притопленном буе в 400 м от берега (глубина места 60 м). В ходе каждого опыта проводилось, как правило, измерение на вертикальной (ВП) и горизонтальной (ГП) поляризациях излучения на трех дистанциях (200, 400 и 600 м) и нескольких азимутальных направлениях; длительность каждой записи составляла 1,5—2 мин. В начале и конце опыта проводилась 5-минутная запись сигнала волнографа.

С выхода магнитного регистратора все записи сигнала  $A(t)$  вводились в ЭВМ с частотой квантования 300 Гц; записи разбивались на последовательные участки длительностью 0,25 с с шагом 0,1 с. Для каждого участка рассчитывались «мгновенные» энергетические спектры  $S_i(F, t)$ . Они, в свою очередь, использовались для формирования синхронных рядов мощности  $P(t)$  и частоты  $f_c(t)$ , при этом для каждого  $S_i(F, t)$  значения  $P_i$  и  $f_{ci}$  вычислялись как

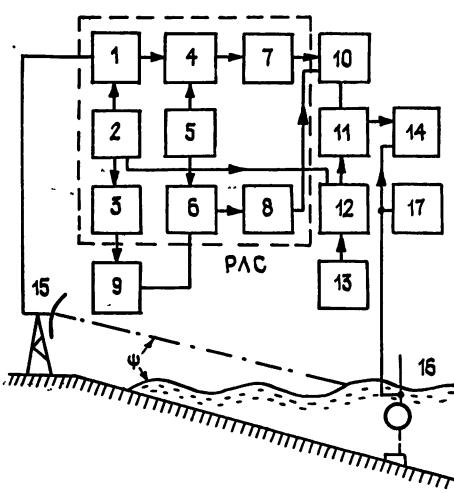


Рис. 1. Схема опыта:

1 — антенный переключатель, 2 — передатчик, 3 — эхорезонатор, 4 — смеситель I, 5 — гетеродин, 6 — смеситель II, 7 — УПЧ-I, 8 — УПЧ-II, 9 — высокочастотный фазовращатель, 10 — фазовый детектор, 11 — пик-детектор, 12 — стробирующий каскад, 13 — схема выбора дальности, 14 — регистрирующий магнитофон, 15 — антenna, 16 — волнограф, 17 — блок питания волнографа.

$$P_i^2 = \int_0^{F_b} S_i(F, t) dF, \quad f_{c_i} = \frac{F_1 + F_2}{2}, \quad (1a)$$

где  $F_b$  — верхняя частота, для которой еще рассчитывалось значение спектральной плотности  $S_i(F, t)$ ,  $F_b=100$  Гц,  $F_1$  и  $F_2$  — граничные частоты, для которых

$$S_i(F_1, t) = S_i(F_2, t) = 0,5 S_{i_{\max}}(F, t), \quad (16)$$

где  $S_{i_{\max}}(F, t)$  — значения  $S_i$  в максимуме спектра. МПФ является взаимной спектральной характеристикой двух процессов, один из которых связан с сигналом, другой — с рассеивающей поверхностью. Для частотных спектров в соответствии с [1, 3–5]

$$M(F) = \frac{C(F) S_{pv}(F)}{P_0 S_v(F)}, \quad S_{pv}(F) = |S_{pv}(F)| \exp[-j\varphi_{pv}(F)],$$

$$|M(F)| = \frac{C(F) G_{pv}(F)}{P_0} \left[ \frac{S_p(F)}{S_v(F)} \right]^{1/2}, \quad G_{pv}^2(F) = \frac{|S_{pv}(F)|^2}{S_p(F) S_v(F)}, \quad (2)$$

где  $S_{pv}$ ,  $S_p(F)$ ,  $S_v(F)$  — соответствующие взаимный и автоспектры мощности и орбитальной скорости, которые могут быть получены из обработки синхронных рядов  $P(t)$  и  $V_0(t)$ ,  $G_{pv}^2(F)$  — функция когерентности,  $\varphi_{pv}(t)$  — фазовый угол сдвига между рядами,  $C(F)$  — фазовая скорость волн, а  $P_0$  — средняя мощность рассеянного сигнала ( $P_0=P(\bar{t})$ ). Как видно из (2), для расчета  $M$  необходимо знание орбитальной скорости длинных волн (ее горизонтальной составляющей); она может быть восстановлена из записи частоты смещения рассеянного сигнала  $f_c(t)$ . Действительно, при малых углах скольжения и в пре-небрежении влиянием дна при обратном рассеянии сигнала от плоской длинной волны  $\xi = H \cos 2\pi F t$ , покрытой рябью, модуляция  $f_c(t)$  определяется горизонтальной составляющей орбитальной скорости как

$$f_c(t) = \frac{2V_0(t)}{\lambda_p} \cos(\theta - \theta_0) = \frac{4\pi FH}{\lambda_p} \cos(\theta - \theta_0) \cos 2\pi F t, \quad (3)$$

где  $\theta_0$  — направление облучения,  $\theta$  — направление распространения длинной волны,  $\lambda_p$  — длина радиоволны.

Учитывая, что в общем случае трехмерного волнения в рамках линейной спектральной теории выражение (3) справедливо для любой спектральной компоненты длинных волн, частотный спектр функции  $f_c(t)$  с точностью до постоянного множителя равен проекции частотно-углового спектра  $S_v(F, \theta)_{\theta_0}$  на направление облучения  $\theta_0$ :

$$S_f(F) = \frac{4}{\lambda_p^2} \int_{-\pi}^{\pi} S_v(F, \theta) \cos^2(\theta - \theta_0) d\theta \equiv \frac{4}{\lambda_p^2} S_v(F, \theta)_{\theta_0}. \quad (4)$$

В [2] для описываемых ниже опытов было проведено сопоставление частотных спектров возвышений поверхности, полученных из прямых волнографических измерений  $S_H(F)$  и рассчитанных из записей частот смещений  $f_c(t)$  сигнала  $\tilde{S}_H(F)$ , рассеянного поверхностью моря для разных направлений облучения  $\theta_0$ . При этом, как следует из (3) и (4),

$$\tilde{S}_H(F) = \left( \frac{\lambda_p}{4\pi F} \right)^2 S_f(F) = \int_{-\pi}^{\pi} S_H(F, \theta) \cos^2(\theta - \theta_0) d\theta. \quad (5)$$

Было показано, что величина  $S_H(F)/\tilde{S}_H(F) = \beta^2 > 1$ . Она зависит от

углового спектра волнения, размера освещаемого пятна и ширины «мгновенного» спектра радиосигнала  $S_i(F, t)$ , используемого для определения  $f_c(t)$ . Найденное эмпирическое значение коэффициента  $\beta$  для приводимых здесь опытов составляет 2,2. Таким образом, с учетом коэффициента  $\beta$  для перехода от спектров частот смещения к спектрам орбитальной скорости из (4) получим

$$S_v(F, \theta_0) = \frac{\lambda_p^2 \beta^2}{4} S_f(F). \quad (6)$$

Подставляя для расчета МПФ (6) в (2), находим

$$|M(F)| = \frac{2C(F)G_{pf}(F)}{P_0\lambda_p\beta} \left[ \frac{S_p(F)}{S_f(F)} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

$$G_{pf}^2(F) = \frac{|S_{pf}|^2}{S_p(F)S_f(F)} = G_{pv}^2(F) \equiv G^2,$$

где  $S_{pf} = |S_{pf}| \exp(-j\varphi_{pf})$  — взаимный спектр мощности и частоты смещения сигнала. Следует помнить, что все значения  $|M|$ ,  $S_p$  и  $S_f$  в (7) являются проекциями этих величин на направление облучения  $\theta_0$  (значок  $\theta_0$  для простоты опущен). На рис. 2 в качестве иллюстрации расчетов по (7) приведены частотные спектры мощности и частоты смещения сигналов  $S_p(F)$  (крестики) и  $S_f(F)$  (точки) (а) и частотные спектры возвышений поверхности для непосредственных измерений  $S_H(F)$  (точки) и восстановленного из записи  $f_c(t)$  в соответствии с (5)  $\tilde{S}_H(F)\beta^2$  (крестики) (б) для одного из опытов на вертикальной поляризации при облучении «против» волн ( $\theta_0 = 180^\circ$ ) и ветре 1 м/с. Для спектров  $S_p(F)$  и  $S_f(F)$  характерно наличие пиков на частотах, равных или кратных частоте энергонесущего максимума морского волнения  $F_m = 0,15$  Гц. Сравнение измеренного  $S_H$  и восстановленного  $\tilde{S}_H(F)\beta^2$  спектров возвышений поверхности свидетельствует об их хорошем совпадении в области низких энергонесущих частот; расхождение в области частот, больших 0,25 Гц, объясняется влиянием конечных размеров рассеивающего пятна при вычислении  $\tilde{S}_H(F)$ .

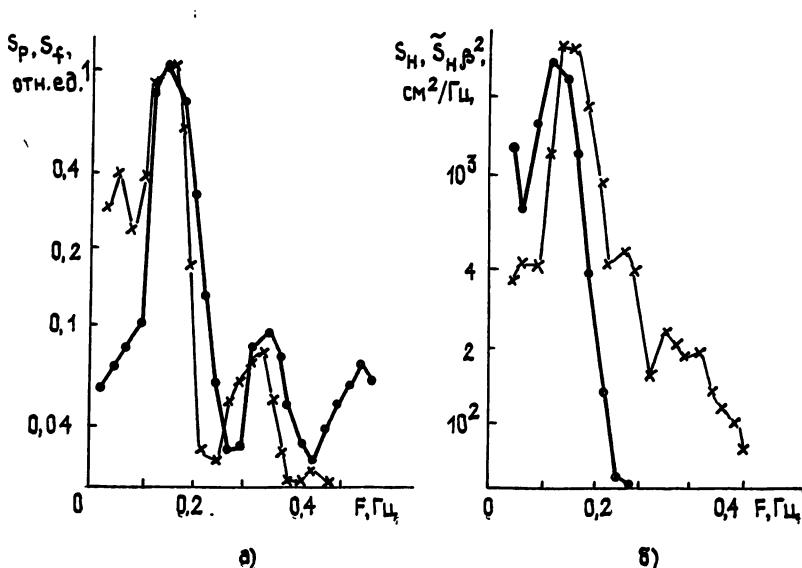


Рис. 2.

**2. Результаты измерений.** В соответствии с описанной методикой было проведено 12 опытов, соответствующих скорости ветра от нуля до 6 м/с и волнению моря до 5 баллов (высота волн до 1,5 м). Общие сведения, характеризующие условия проведения опытов, приведены в табл. 1. Здесь представлены скорость ветра, «видимая» высота волн, угол между ними, частота энергонесущего максимума спектра волн по данным прямых измерений, вид поляризации излучения, расстояние до рассеивающего участка, а также угол облучения  $\theta_0$  относительно направления движения волн («против» волн —  $\theta_0 = 180^\circ$ , «по» волнам —  $0^\circ$ , «вдоль» волн —  $90^\circ$ ). Как видно из таблицы, подавляющее число опытов проведено при слабом волнении ( $V \leq 3$  м/с,  $H \leq 1$  м), на вертикальной поляризации и при облучении «против» волн. Сопоставим данные, относящиеся к этой группе, с результатами других работ. На рис. 3 сплошные линии изображают зависимость МПФ от скорости ветра по данным [1, 3–5] на частоте 0,25 Гц; все данные относятся к 3-сантиметровому диапазону волн, вертикальной поляризации излучения, большим углам скольжения ( $\Psi = 45\text{--}50^\circ$ ) и облучению «против» волн. Видно, что за исключением данных [3], где наблюдается подъем функции  $|M(V)|$  в области  $V=4\text{--}6$  м/с,  $|M(V)|$  уменьшается с увеличением скорости ветра. На рис. 3 значками, соответствующими трем дистанциям (углы скольжения  $\psi = 1,1$  (крестики), 1,7 (темные точки) и  $3,4^\circ$  (светлые точки)), нанесены наши данные  $|M(V)|$  также для частоты 0,25 Гц, вертикальной поляризации и облучения «против» волн, полученные по 27 записям. Из рисунка видно, что  $|M|$  меняется в пределах от двух до восьми (среднее значение пять) и мало зависит от скорости ветра. Обращает на себя внимание резкое отличие  $|M|$  от данных [1, 4, 5]. Хотя они относятся к разным диапазонам изменения скорости ветра, значения  $|M|$  на границе этих диапазонов ( $V=4$  м/с) для наших измерений в 1,5–2 раза меньше.

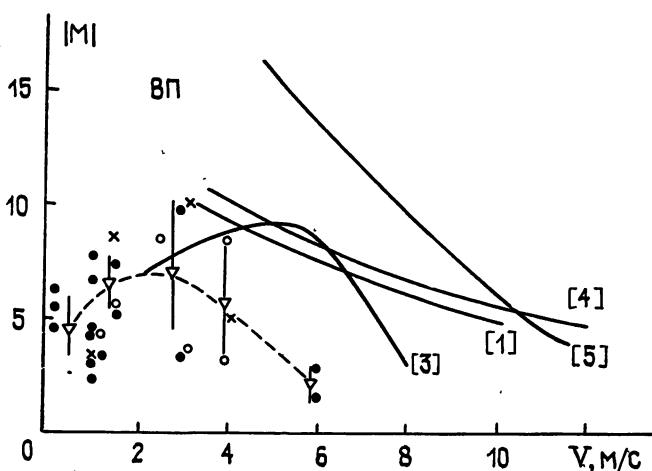


Рис. 3.

Была рассмотрена зависимость  $|M|$  от таких интегральных величин, характеризующих поверхность, как дисперсия высот  $\sigma_H^2$ , орбитальных скоростей  $\sigma_v^2$  и углов наклона  $\sigma_\gamma^2$ , полученных по данным  $S_f(F)$ . В условиях наших экспериментов параметры  $\sigma_H$ ,  $\sigma_v$ ,  $\sigma_\gamma$ , описывающие поверхность, были малы по величине и отличались сравнительно малым диапазоном изменения (в 2–3 раза). Существенный разброс значений  $|M| = f(\sigma_H, \sigma_v, \sigma_\gamma)$  и отсутствие какой-либо заметной закономерности в характере зависимости  $|M|$  от этих величин обусловлены, по-видимому, указанными обстоятельствами.

Для выяснения зависимости от вида поляризаций из всего массива данных (см. табл. 1) были выбраны все опыты со сменой поляризации

Таблица 1

## Сводка условий проведения экспериментов

№	Дата	Кол-во записей	Скорость ветра $V$ , м/с	Высота волн, м	Частота энергонесущ. максимума, Гц	Угол между ветром и волнами $\theta_{вн}$ , град	Поляризация излучения	Дистанция $r$ , м	Угол облучения относительно волн $\theta_0$ , град	
									ВП	150, 400, 750 ВП, ГП ВП
1	21.06.72	5	0,5	0,6	0,2	90	ВП	400	135, 180	90, 180
2	22.06. № 1	13	1,5	0,5	0,2	45	ВП, ГП	150, 400, 750	90, 180	180
3	22.06. № 2	3	0	1,5	0,15	—	ВП	400	400	90, 180
4	23.06	4	1,0	1,0	0,15	180	ВП	400	400	90, 180
5	24.06	13	1,0	1,5	0,17	90	ВП, ГП	200, 400, 600	90, 180	90, 180
6	25.06	7	4,0	0,4	—	—	ВП, ГП	200, 400, 600	90, 180	90, 180
7	20.09	4	3,0	1,0	0,15	90	ВП, ГП	400	90, 180	180
8	25.09	2	1,0	1,0	0,15	150	ВП	400	400	90, 135, 180
9	26.09	7	3,0	1,2	0,17	0	ВП, ГП	200, 400, 600	90, 135, 180	90, 180
10	29.09	2	1,0	0,5	0,23	45	ВП	400	400	90, 180
11	30.09	10	6,0	1,5	0,15	0	ВП, ГП	400	90, 135, 180	180
12	25.10	1	2,5	0,8	0,15	0	ВП	200	200	180

излучения (смена поляризации производилась практически мгновенно); их оказалось восемь при облучении «против» волны и шесть при облучении «вдоль» волны. Следует отметить, что приведенные данные соответствуют различным дистанциям до рассеивающего участка (200, 400 и 600 м); подробное сопоставление одновременных измерений для этих дистанций не обнаружило заметного дистанционного хода кривых  $|M(r)|$ ,  $G^2(r)$  и  $\varphi_{pf}(r)$ , что позволило объединить их в рассматриваемые группы. Попарное сравнение (на разных поляризациях) для каждого из таких 14 опытов показало, что значения  $|M(F)|$  на всех частотах для горизонтальной (ГП) поляризации выше, как правило, в 1,5—2 раза, чем для вертикальной (ВП), а значения функции когерентности  $G^2(F)$  и фазы  $\varphi_{pf}(F)$  практически не отличаются.

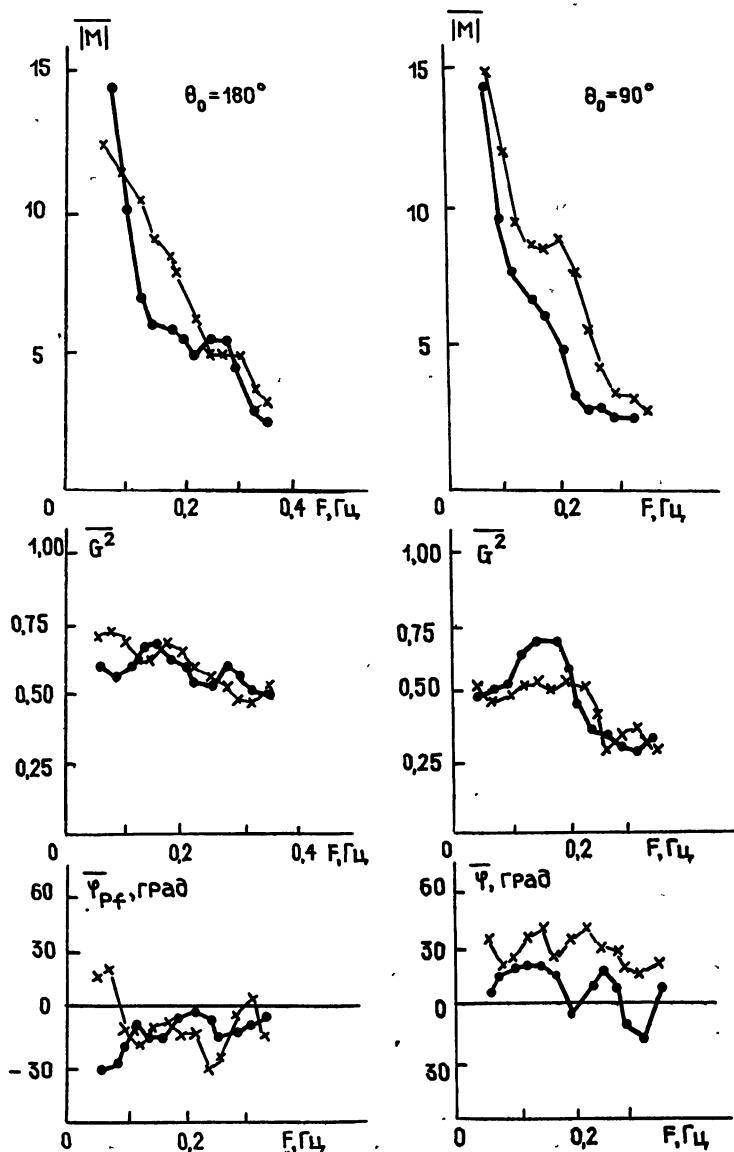


Рис. 4.

На рис. 4 приведены усредненные данные по обеим группам опытов; здесь показаны средние значения  $|\bar{M}|$ ,  $\bar{G}^2$  и  $\bar{\varphi}_{pf}$  для ГП (крестики) и ВП (точки) при облучении под углом  $\theta_0 = 180^\circ$  (слева) и  $90^\circ$  (справа); среднеквадратичное отклонение для всех данных в середине частотного диапазона не превышает  $\pm 25\%$ . Обращают на себя внимание

высокие значения функции когерентности (0,7—0,5) для всего исследуемого диапазона (особенно для ВП,  $\theta_0 = 180^\circ$ ); на усредненных кривых отчетливо проявляется отмечавшееся ранее превышение значений  $|M|$  в случае ГП для обеих групп опытов.

При изменении угла  $\theta_0$   $|M|$  на обеих поляризациях существенно не изменяется, однако нарушается монотонный характер изменения  $G^2(F)$ , особенно на ВП. Если при облучении «против» волны максимальные значения рассеянной мощности сигнала располагаются в пределах изменения угла  $\varphi_{pf}$  от 0 до  $30^\circ$  от гребня по ходу волны для обеих поляризаций, то при облучении под углом к волне угол смещается в сторону заднего склона волны (см. рис. 4).

**3. Обсуждение результатов.** Рассмотрим специфику проведения эксперимента и особенности полученных результатов, подчеркнув следующее:

- опыты проводились при слабом волнении,
- опыты соответствуют облучению под очень малыми углами ( $\psi < 4^\circ$ ) скольжения,
- полученные данные для  $|M|$  в 1,5—2 раза меньше приводимых для измерений с платформой,
- данные для  $G^2$  соответствуют приводимым для измерений с платформой,
- поляризационная зависимость выражена четко.

Обсудим вначале несоответствие данных для  $|M(F)|$ , оценив возможные причины уменьшения  $|M|$  в наших опытах. Отметим прежде всего, что облучение под скользящими углами  $\psi$  может вызвать только увеличение модуляции за счет изменения локальных углов скольжения  $\tilde{\psi}(t)$ . Действительно, учитывая, что зависимость мощности рассеянного сигнала от угла скольжения определяется как [6]

$$\begin{aligned} P_{\text{ВП}}(\psi) &\sim (1 + \cos^2 \psi)^2 S_H(2k_p \cos \psi), \\ P_{\text{ГП}}(\psi) &\sim \sin^4 \psi S_H(2k_p \cos \psi), \\ \tilde{\psi}(t) &= \psi_0 \pm \tilde{\psi}(t), \quad k_p = 2\pi/\lambda_p, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $S_H(2k_p \cos \psi)$  — спектральная плотность брэгговской компоненты спектра возвышений, ответственной за рассеяние, а  $\psi_0$  — угол скольжения, отсчитываемый от невозмущенной поверхности, нетрудно показать, что уменьшение угла  $\psi$  приводит к увеличению модуляции на обеих поляризациях за счет изменения  $\tilde{\psi}(t)$ . Остается добавить, что затенения и рассеяния на гребнях волн — эффекты, с которыми необходимо считаться при малых  $\psi$ , — только усугубляют модуляцию.

Малые значения  $|M|$  для очень слабого волнения ( $V < 1$ — $2$  м/с,  $H < 0,5$  м, см. рис. 3) могут быть объяснены естественным отсутствием длинных волн — источника модуляции, или, другими словами, зависимость  $|M(V)|$  должна иметь максимум, как это было замечено в [3] и частично в [5]. Действительно, если усреднить наши данные, кривая  $|M(V)|$ , несмотря на значительный разброс исходных значений, имеет максимум в области  $V = 2$ — $3$  м/с (пунктир на рис. 3). Отмеченный ход кривой не может, однако, объяснить несоответствие наших данных полученным в [1, 3—5] на скоростях ветра 3—6 м/с. Основной причиной наблюдаемого отличия является, на наш взгляд, разная методика перехода от  $S_f(F)$  к  $S_v(F)$ , используемого для расчета  $|M|$  (см. (7)). Выше отмечалось, что конечные размеры ширины углового спектра  $S_v(\theta)$ , некогерентность ряби [7], аппаратурный шум и влияние размеров облучаемого участка приводят к необходимости введения поправочного коэффициента  $\beta^2$  при переходе от  $S_f(F)$  к  $S_v(F)$ . В [1, 3—5] такой корректировки не производилось, что должно привести к занижению оценок  $S_v(F)$  и, соответственно, к завышению  $|M(F)|$ . С этим обстоятельст-

вом связаны также, по-видимому, отмечаемые в [1, 3-5] отличия от результатов лабораторных измерений.

Перейдем к анализу влияния углов облучения в вертикальной и горизонтальной плоскостях. В [4, 8] на основе поляризационных различий оценивался вклад модуляции за счет изменения локального угла облучения. Сравнивая величины  $|\bar{M}|$  на горизонтальной и вертикальной поляризациях ( $\psi = 40^\circ$ ,  $\theta_0 = 180^\circ$ ,  $\lambda_p = 3$  см в [4] и  $\lambda_p = 7$  см в [8]) и проводя расчеты в рамках простой модели модуляции  $P(\psi)$ , авторы [4, 8] приходят к выводу о малости вклада (20—30%) этого вида модуляции. В наших опытах разница в значениях  $|M|$ , измеренная на разных поляризациях при облучении «против» волн, оказалась большей—естественный результат, обусловленный рассеянием под скользящими углами  $\psi$ . Достаточно важным представляется результат, связанный с малым отличием  $|M|$  на разных  $\theta_0$  (с сохранением поляризационной разницы для каждого  $\theta_0$ ) — сходный характер изменения угловых спектров рассеянной мощности  $S_p(\theta)$  и орбитальной скорости  $S_v(\theta)$  может служить объяснением наблюдаемому эффекту.

В заключение отметим, что особенности рассеяния при малых углах скольжения — затенения, дифракция на гребнях волн, наличие пен и брызг — затрудняют проведение адекватных расчетов. Совершенствование прямых измерений пространственных характеристик морской поверхности в сочетании с измерениями МПФ должны быть посвящены, на наш взгляд, дальнейшие работы по созданию радиофизической модели морской поверхности.

Автор благодарит И. А. Лейкина за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wright J. W., Plant W. J., Keller W. C. // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. № C9. P. 4957.
2. Розенберг А. Д., Островский И. Е., Зельдис В. И. и др. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1973. Т. 9. № 12. С. 1323.
3. Plant W. J., Keller W. C., Wright J. W. // J. Geophys. Res. 1978. V. 83, № C3. P. 1347.
4. Plant W. J., Keller W. C., Cross A. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. № C14. P. 9747.
5. Keller W. C., Plant W. J., Weissman D. E. // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. № C1: P. 1019.
6. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.—М.: Наука, 1972.
7. Заславский М. М., Лейкин И. А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1971. Т. 7. № 2. С. 200.
8. Schröter J., Feindt F., Alpers W., Keller W. C. // J. Geophys. Res. 1986. V. 91. № C1. P. 923.

Институт океанологии  
АН СССР

Поступила в редакцию  
10 июня 1988 г.

#### MEASUREMENTS OF MODULATION TRANSFER FUNCTION «SEA-SURFACE—BACKSCATTERED SIGNAL» AT 3 cm WAVELENGTH

A. D. Rosenberg

Modulation transfer functions at 3 cm wavelength are measured in the coastal area of the Black Sea for low seas using coast-mounted pulse Doppler radar operated with both vertical and horizontal polarization at grazing angles. Backscattered power fluctuations and long-waves orbital velocity field are analysed using radiosignal magnitude and frequency records. The discrepancy between the presented data and the data obtained earlier for high seas and at the larger depression angles is discussed.

УДК 621.396

**УЧЕТ БЛИЖНИХ ПОЛЕЙ В ЗАДАЧЕ  
О ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ВЫСОТЫ  
ПРОМЕЖУТКА ЗЕМЛЯ — ИОНОСФЕРА**

*A. P. Николаенко*

Рассмотрена дифракция СНЧ радиоволн на локальной неоднородности полости Земля—ионосфера. Использовано борновское приближение для интегрального уравнения Стрэттона—Чу в случае расположенного над вертикальным электрическим диполем локального возмущения высоты. Показано, что главный вклад в результирующее поле обеспечивается электростатической компонентой поля источника. Результаты расчетов хорошо согласуются с опубликованными данными.

В работе [1] решена задача дифракции СНЧ электромагнитного поля на локальной неоднородности полости Земля—ионосфера. Задача решалась с помощью уравнения Стрэттона—Чу в рамках борновского приближения теории возмущений. Неоднородность нижней ионосферы при этом моделировалась с помощью возмущения постоянной распространения СНЧ радиоволн, а ближние поля (электростатическая и индукционная составляющие) не учитывались. В то же время для неоднородностей, расположенных над источником поля или пунктом приема, ближние поля играют главную роль. Таким образом, результаты [1], относящиеся к случаю расположения неоднородности над одним из концов радиотрассы, должны быть пересмотрены.

В настоящей работе мы рассмотрим влияние ближних полей источника на результат решения задачи дифракции. Будем предполагать, что промежуток Земля—ионосфера возбуждается вертикальным электрическим диполем, расположенным на поверхности Земли  $r=a$  на оси  $\theta=0$ . Локальная неоднородность нижней ионосферы расположена над источником поля и представляет собой круг диаметром  $d \ll \lambda$ . Таким образом, задача оказывается осесимметричной. В удаленной точке наблюдения  $r=a$  и  $\theta_n=\theta$  регистрируется вертикальная компонента электрического поля, для которой справедливо интегральное уравнение Стрэттона—Чу:

$$4\pi E_r(\mathbf{R}) = -i\omega\mu_0 \int_V j_\omega(\mathbf{R}') G(\mathbf{R} - \mathbf{R}') d\mathbf{R}' - \\ - \oint_S [E_r(\mathbf{R}' - \mathbf{r}) \operatorname{grad}_r G(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - E_\theta(\mathbf{R}' - \mathbf{r}) \operatorname{grad}_\theta G(\mathbf{R} - \mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Здесь  $E_r(\mathbf{R})$  — поле в точке наблюдения  $\mathbf{R}$  ( $a, \theta_n, \phi_n$ ),  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума,  $j_\omega(\mathbf{R}')$  — спектральная компонента объемной плотности тока источника,  $G$  — функция Грина,  $\mathbf{R}'$  — радиус-вектор источника,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки на границе резонатора  $S$ .

Далее, как и в работе [1], представим искомое поле в виде

$$E_r = E_1 + E_2, \quad (2)$$

где

$$E_1 = \frac{iv(v+1)}{4a^2h\omega_0} Jds \frac{P_v[\cos(\pi - \theta_h)]}{\sin \pi v} \quad (3)$$

— поле, приходящее в точку наблюдения в однородном промежутке,

$$E_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{\text{возм}}} ds (E_r \text{grad}_r G - E_\theta \text{grad}_\theta G) \quad (4)$$

— рассеянное на неоднородности поле.

В используемом нами борновском приближении теории возмущений в интеграл (4) подставляются поля и функция Грина однородной задачи.

При описании неоднородности можно использовать один из трех следующих подходов. Во-первых, неоднородность можно описывать с помощью возмущения постоянной распространения, как это было сделано в [¹] и широко практикуется в зарубежной литературе. Во-вторых, можно задать возмущение высоты промежутка Земля—ионосфера, как это сделано в [²]. В-третьих, неоднородность можно задать с помощью возмущения эффективного поверхностного импеданса з нижней ионосферы, как это делалось в [³, ⁴]. Неследний подход оказывается единственным возможным при рассмотрении влияния гиротропии нижней ионосферы.

Строго говоря, реально существующие неоднородности приводят к изменению всех параметров волновода, и применять ни один из перечисленных выше подходов в чистом виде нельзя. Однако для некоторых возмущений это оказывается возможным. Так, например, если неоднородность связана с высыпанием частиц из магнитосферы, то изменяется главным образом высота зазора между Землей и ионосферой, а остальные параметры волновода сохраняются.

В случае, когда распространение радиоволн в неоднородном промежутке описывается с помощью одной нулевой нормальной волны, можно пересчитать возмущение одних параметров в другие, воспользовавшись известным дисперсионным соотношением

$$v(v+1) = (ka)^2(1 - iz/kh). \quad (5)$$

Ниже мы рассмотрим возмущение эффективной высоты промежутка, размещенное над одним из концов радиотрассы, что позволит сопоставить результаты с данными работы [²], полученными другим методом. Тогда добавка к полю составит

$$E_2 = -\frac{a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \Delta h \frac{\partial}{\partial h} (E_r \text{grad}_r G). \quad (6)$$

Из-за цилиндрической симметрии задачи член  $E_\theta \text{grad}_\theta G$  в (4) можно опустить. Отметим, что возмущение постоянной распространения для неоднородности, расположенной над источником, не имеет физического смысла, так как в этой области поле описывается бесконечным набором нормальных волн, каждая из которых имеет свою постоянную распространения [⁴].

В соотношение (6) необходимо подставить функцию Грина

$$G = -\frac{\pi v(v+1)}{k^2 a^2 h} \frac{P_v[\cos(\pi - \gamma)]}{\sin \pi v}, \quad (7)$$

где  $\gamma$  — угловое расстояние от наблюдателя до текущей точки. Кроме того, в интеграл (6) надо подставить падающее поле. Мы не будем использовать разложение падающего на неоднородность поля в ряд нормальных волн, а подставим сумму полей реальных и фиктивных диполь-

ных источников, отраженных в Земле и ионосфере. При этом благодаря малости размеров возмущения  $d \ll \lambda \sim a$  кривизной Земли можно пренебречь и на нижней границе ионосферы получить (ср. с [5])

$$E_r = \frac{iJds}{\pi \omega a^3 \epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ k^2 a^2 \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \mu_n^2)^{3/2}} + ika \frac{\theta^2 - 2\mu_n^2}{(\theta^2 + \mu_n^2)^2} - \frac{\theta^2 - 2\mu_n^2}{(\theta^2 + \mu_n^2)^{5/2}} \right\}, \quad (8)$$

где  $\theta$  — текущая координата возмущения,  $\mu_n = \mu(2n+1)$ ,  $\mu = h/a$ .

Первое слагаемое в фигурных скобках (8) описывает радиационную составляющую поля, второе — индукционную и третье — электростатическую.

Подставим (8) и (7) в (6), получим относительное возмущение поля

$$B = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2\Delta h}{h} \mu \left[ 1 - \frac{v(v+1)}{k^2 a^2} \right] (B^e + ika B^u + k^2 a^2 B^p), \quad (9)$$

где

$$B^e = \frac{1}{p\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n^3 (4 + q_n^2)}{(1 + q_n^2)^{5/2}} \quad (10)$$

— электростатический член,

$$B^u = b_1 - b_2 \quad (11)$$

— индукционный член,

$$b_1 = -\frac{p\pi}{2} \operatorname{th} \frac{p\pi}{2} + 3p^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[p^2 + (2n+1)^2]^2}; \quad (12)$$

$$b_2 = p^2 \frac{\pi^2}{8} - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \ln(1 + q_n^2) - q_n^2 \right] - \frac{3}{2} \frac{q_n^4}{1 + q_n^2} \right\}; \quad (13)$$

$$B^p = b_3 - b_4 \quad (14)$$

— радиационный член,

$$b_3 = p\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{1 + q_n^2} \left[ 1 + \frac{2}{q_n^2} (1 - \sqrt{1 + q_n^2}) \right]; \quad (15)$$

$$b_4 = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(1+q_n^2)^{3/2}} \{ [1 - (1 + q_n^2)^{3/2}] 2 + 3q_n^2 \}, \quad (16)$$

$$q_n = \frac{p}{2n+1}, \quad \mu = \frac{h}{a}, \quad \theta_1 = p \frac{h}{a}, \quad d = 2ph.$$

На рис. 1 изображены зависимости отдельных составляющих относительного возмущения поля от размера неоднородности  $p$  при  $\mu = 10^{-2}$ . Видно, что главный вклад в возмущение поля обусловлен влиянием электростатического члена. Сравнение с результатами [1] позволяет заключить, что в случае расположения возмущения над концом радиотрассы учет ближнего поля обязателен, а результаты [1] для этой ситуации неточны.

Сохраняя главный член, формулу (9) можно переписать в виде

$$B \approx \frac{2\Delta h}{h} \left[ 1 - \frac{v(v+1)}{k^2 a^2} \right] p^3 \times \quad (17)$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(2n+1)^2 + p^2}{[(2n+1)^2 + p^2]^{5/2}},$$

$$p = d/2h.$$

Регистрируемое в точке наблюдения вертикальное электрическое поле составит

$$E_x = E_1(1 + B). \quad (18)$$

Формулами (17) и (18) воспользуемся при расчетах возмущений поля неоднородностями различных размеров  $p$ . При этом в сумме по  $n$  (общий член суммы убывает, как  $n^{-3}$ ) будем удерживать десять членов, что обеспечивает погрешность вычисления суммы не хуже 3%.

Используем следующую модель  $h=64$  км,  $a=6,4 \cdot 10^3$  км,  $f=62$  Гц,  $\operatorname{Re} v=(1/6)(f-2)$ ,  $\operatorname{Im} v=-10^{-2}f$ ,  $\Delta h/h=\pm 0,1$ . Результаты расчетов представлены в табл. 1.

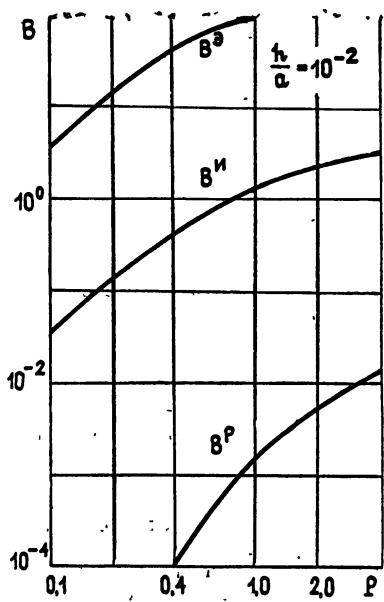


Рис. 1.

Таблица 1

$p$	$d$ , км	Модуль		
		$ B $	$ 1+B $ , $\Delta h/h = -0,1$	$ 1+B $ , $\Delta h/h = +0,1$
0,1	12,8	0,004	1,004	0,996
0,2	25,6	0,018	1,017	0,982
0,4	51,2	0,058	1,050	0,943
0,8	100,6	0,116	1,104	0,883
1,0	128,0	0,125	1,110	0,873
1,5	192,0	0,125	1,110	0,873
2,0	256,0	0,125	1,108	0,879
3,0	384,0	0,120	1,105	0,882
4,0	512,0	0,115	1,104	0,884

Как видно, с высокой точностью добавка к полю оказывается равной  $1 \mp \Delta h/h$ . При этом имеет место отмеченный в [2] эффект «насыщения», когда при  $p \geq 1$  дальнейшее увеличение размеров неоднородности не изменяет наблюдаемого поля.

Полученные результаты позволяют сделать следующий физический вывод. Изменение высоты промежутка Земля — ионосфера эквивалентно изменению токового момента источника. Область ионосферы, формирующая поле, оказывается равной примерно высоте промежутка.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Г. И. Макарова, В. В. Кириллова и Ю. П. Галюка за полезное обсуждение и конструктивную критику, способствовавшие появлению настоящей работы.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Николаенко А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 10. С. 1227.
2. Галюк Ю. П., Кириллов В. В., Макаров Г. И. В кн.: Распространение радиоволн километрового диапазона. Апатиты: Кольский филиал АН СССР, 1987. С. 45.
3. Блиох П. В., Николаенко А. П., Филиппов Ю. Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля — ионосфера. — Киев: Наукова думка, 1977. — 200 с.
4. Соловьев О. В. В кн.: Распространение радиоволн километрового диапазона. Апатиты: Кольский филиал АН СССР, 1987. С. 52.
5. Galejs J. Terrestrial propagation of long electromagnetic waves. — Pergamon Press, 1972. — 362 p.

Радиоастрономический институт  
АН УССР

Поступила в редакцию  
6 мая 1988 г.

### THE NEAR FIELD EFFECT IN THE PROBLEM OF LOCAL INHOMOGENEITY OF THE HEIGHT IN THE EARTH — IONOSPHERE CAVITY

A. P. Nikolaenko

ELF radiowave diffraction on the local inhomogeneity of the Earth — ionosphere cavity is considered. The Born approximation in the framework of Stratton—Chu integral equation for the local height disturbance situated upon vertical electric dipole is used. It is shown that the main contribution is provided by the electrostatic component of the source field. The results obtained are in good agreement with the published data.

---

### Аннотации депонированных статей

УДК 622.371.222

### СЛАБОЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КВАЗИПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОЙ ВЫПУКЛОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

B. M. Легков

Построено асимптотическое решение уравнений Максвелла в пограничном слое вблизи произвольной гладкой выпуклой поверхности с постоянным изотропным реактивным импедансом, соответствующее распространению слабозатухающей квазиповерхностной волны (КПВ). Получены выражения для компонент поля излучения КПВ. В случае дифракции на импедансной поверхности электромагнитных полей электрических и магнитных диполей, расположенных вдали от поверхности, вычислены коэффициенты возбуждения КПВ.

Статья депонирована в ВИНИТИ,  
регистр. № 6323-В89. Деп. от 18 октября 1989 г.

УДК 538.566

## ВЛИЯНИЕ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ НА НИЗКОЧАСТОТНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

О. Г. Козина, Г. И. Макаров

Исследуется влияние рельефа местности в виде выпуклых и вогнутых цилиндрических неоднородностей на эффективность стекающихся электрических антенн. Рассматриваются неоднородности, малые по сравнению с длиной волны в вакууме. Показано, что их влияние может быть значительным и приводит как к повышению, так и понижению эффективности.

В последнее время появился ряд как экспериментальных [1, 2], так и теоретических работ [3, 4], исследующих влияние геометрических неоднородностей в виде рельефа на эффективность низкочастотных антенн. Так, в [1] показано, что размещение приземных антенн на рельефных возвышенностях приводит к повышению их действующих высот в два-семь раз. В [3, 4] теоретически исследовано влияние неоднородностей в виде полусферы, полуцилиндра и полуэллипсоида, расположенных на бесконечно проводящей плоскости. В случае полусферы эффективность вертикальной антенны может возрастать в три, а горизонтальной — в полтора раза по сравнению с плоской границей раздела при той же проводимости. Если неоднородность имеет вид полуцилиндра, то эффективность увеличивается в два раза для вертикальной и горизонтальной антенны, а для полуэллипсоида это увеличение может достигать значительной величины в зависимости от соотношения полуосей. Для вертикальной антенны наибольший выигрыш достигается для тел типа иглы, а для горизонтальной — в случае неоднородности, близкой к клину, и антенны, параллельной его ребру.

В данной работе продолжаются эти исследования, причем рассматриваются как выпуклые (рис. 1), так и вогнутые (рис. 2) цилиндрические неоднородности, размер которых мал по сравнению с длиной волны в вакууме. Эти неоднородности могут пересекать плоскую границу раздела под произвольным углом  $\beta$ .

Угол  $\beta$  может меняться от  $\pi/2$  до  $(3/2)\pi$ , значение  $\beta = \pi/2 \div \pi$  соответствует выпуклой (типа холма), а  $\beta = \pi \div (3/2)\pi$  — вогнутой неоднородности (типа ямы). Величина  $a$  характеризует их размер. Считается, что зависимость поля от перпендикулярной к рисунку координаты отсутствует. Свойства нижней среды описываются приведенным поверхностным импедансом  $\delta$ , удовлетворяющим условию

$$|\delta| \ll 1, \quad (1)$$

где  $\delta$  — импеданс для плоской границы раздела.

В случае криволинейной границы  $S$  с главными радиусами кривизны  $\rho_1$  и  $\rho_2$  касательные составляющие  $E_t$  и  $H_t$  связаны условиями Леонтовича [5]:

$$E_t|_S = z_0 \delta H_t \left[ 1 + \frac{1}{2ik} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right], \quad (2)$$

$z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  — характеристический импеданс вакуума,  $k$  — волновое число нижней среды, и предполагается, что  $|k\rho_1| > 1$  и  $|k\rho_2| > 1$ . Для

рассматриваемой нами цилиндрической неоднородности  $\rho_1 = \infty$ . Неравенство  $|k\rho_2| > 1$ , так же как и импедансное приближение, не выполняется вблизи линии пересечения плоской границы раздела с цилиндром. Как показано в [6], импедансное приближение справедливо на расстоянии порядка скин-слоя от указанной линии. Кроме того, из [3] следует, что при выполнении условия (1) тангенциальная составляющая  $H_t$  на поверхности цилиндрической области близка к ее значению для бесконечной проводимости:

$$H_t = H_t|_{\sigma=\infty} [1 + V(1/|ka|)], \quad (3)$$

где  $\bar{a}$  — радиус цилиндра.

Как уже указывалось, считаем  $|ka| > 1$ . Приведенные соображения позволяют упростить решение задачи: найти значение  $H_t$  для идеальных граничных условий ( $\sigma = \infty$ ), а затем с помощью (2) определить  $E_t$ . Поскольку предполагаем, что размер цилиндрической области много меньше длины волн в вакууме ( $k_0 a < 1$ ), то для нахождения поля  $H$  можно использовать статическое приближение

$$\nabla^2 \Phi = m_0, \quad H = \nabla \Phi \quad (4)$$

с граничными условиями  $\partial \Phi / \partial n|_{\partial S} = 0$ , соответствующими бесконечной проводимости поверхности, где  $m_0$  — плотность магнитного заряда.

Для решения задачи воспользуемся инвариантностью оператора Лапласа относительно конформных преобразований и попытаемся преобразовать исходную область рис. 1, 2 в некоторую другую, для которой функцию  $\Phi$  удается легко построить.

Введем прямоугольную систему координат  $u, v$  рис. 1, 2 и будем считать, что магнитные заряды  $m_0$  расположены в точке  $u = u^0, v = v^0 = 0$ .

Рассмотрим комплексную плоскость  $w = u + iv$  и от нее перейдем к плоскости  $z = x + iy$  [7] по формуле

$$w = 2ax_0/(z^* - x_0). \quad (5)$$

Смысл величины  $a$  ясен из рис. 1, 2, а  $x_0$  — произвольное вещественное положительное число,  $z^* = x - iy$ .

Выражение (5) описывает преобразование области рис. 1, 2 во внутренность косоугольного клина с бесконечно проводящими гранями и углом раствора  $\beta$  [7]. Связь между старыми переменными  $u, v$  и новыми  $x, y$  может быть легко получена из (5) и имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{2ax_0(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y^2}, & v &= \frac{2ax_0y}{(x - x_0)^2 + y^2}, \\ x &= x_0 \left[ 1 + \frac{2au}{u^2 + v^2} \right], & y &= \frac{2ax_0v}{u^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ввиду того, что грани клина обладают бесконечной проводимостью, можно воспользоваться еще одним конформным преобразованием и перейти от плоскости  $z$  к плоскости  $\xi$  по формуле

$$\xi = \xi + i\eta = z^{\pi/\beta}. \quad (7)$$

Преобразование (7) переводит внутренность клиновидной области в верхнюю полуплоскость  $\xi$ . Это преобразование автоматически учитывает также условие Мейкснера на ребре [8], и оказывается, что достаточно решить уравнение Лапласа для полуплоскости с граничными условиями Неймана. Такое решение хорошо известно [9]:

$$\Phi = \frac{m_0}{2\pi} [\ln \sqrt{(\xi - \xi^0)^2 + (\eta - \eta^0)^2} + \ln \sqrt{(\xi - \xi^0)^2 + (\eta + \eta^0)^2}], \quad (8)$$

где  $\xi^0, \eta^0$  — координаты источника на плоскости  $\xi$ .

Если воспользоваться формулами (6) и (7), получим

$$\xi^0 = x_0^{\pi/\beta} (1 + 2a/u^0)^{\pi/\beta}, \quad \eta^0 = 0. \quad (9)$$

В дальнейшем будем интересоваться касательными составляющими магнитного поля на границе раздела областей рис. 1, 2, что соответствует  $\eta=0$  на плоскости  $\xi$ . В качестве источника поля выберем нить магнитных диполей, расположенных при  $u=u^0$ ,  $v=0$  и параллельных оси  $u$ . Потенциал  $Q$  такой нити окажется равным

$$Q \Big|_{\substack{\eta=0 \\ \eta^0=0}} = \frac{M_0}{\pi} \frac{d\xi}{du^0} \frac{1}{(\xi^0 - \xi)},$$

где  $M_0$  — дипольный момент,  $M_0 = \lim_{du^0 \rightarrow 0} m_0 du^0$ . Искомая магнитная компонента  $H_u$  окажется равной

$$H_u = \frac{M_0}{\pi} \frac{1}{(\xi - \xi^0)^2} \frac{d\xi^0}{du^0} \frac{d\xi}{du}. \quad (10)$$

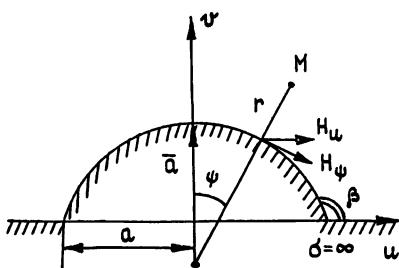


Рис. 1.

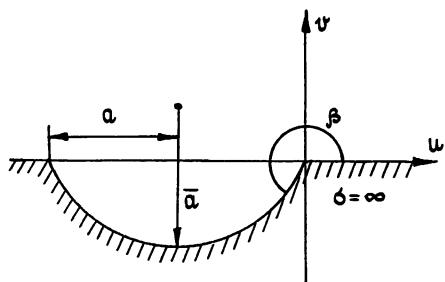


Рис. 2.

Наряду с декартовой системой  $u, v$  введем полярную  $r, \psi$  (см. рис. 1, 2). Тогда тангенциальная составляющая  $H_\psi = H_u / \cos \psi$ , и для нахождения  $H_\psi$  достаточно воспользоваться формулами (6), (7), (10), далее после элементарных, но громоздких вычислений получаем

$$H_\psi = \frac{M_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{(u^0)^2} \left[ \cos \left( \frac{\beta - \psi}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \right]^{\pi/\beta - 1} \times \\ \times \left[ \left| \cos \left( \frac{\beta - \psi}{2} \right) \right|^{\pi/\beta} + \left| \cos \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \right|^{\pi/\beta} \right]^{-2}. \quad (11)$$

При этом предполагается, что  $u^0 \gg a$  и  $|\pi - \beta| > |\psi|$ .

Нетрудно также найти компоненту магнитного поля для плоской границы раздела  $H_u^{\text{плоск}}$  (неоднородность отсутствует)

$$H_u^{\text{плоск}} = \frac{M_0}{\pi} \frac{1}{(u - u^0)^2} \approx \frac{M_0}{\pi (u^0)^2}, \quad (12)$$

считая по-прежнему, что  $u^0 \gg u$ .

Влияние неоднородности будем характеризовать отношением касательных составляющих из (11) и (12):

$$K(\psi, \beta) = \frac{H_\psi}{H_u^{\text{плоск}}} = \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \sin^2 \beta \left[ \cos \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta - \psi}{2} \right) \right]^{\pi/\beta - 1} \times$$

$$\times \left[ \left| \cos\left(\frac{\beta + \psi}{2}\right) \right|^{\pi/\beta} + \left| \cos\left(\frac{\beta - \psi}{2}\right) \right|^{\pi/\beta} \right]^{-2};$$

$$K(0, \beta) = (\pi/\beta)^2 \sin^2 \beta/2. \quad (14)$$

Если учесть соотношение (2), то окажется, что этот же коэффициент характеризует влияние неоднородности на эффективность касательной электрической антенны, направленной вдоль оси цилиндра (перпендикулярно плоскости рис. 1, 2). Формула (14) соответствует случаю, когда антenna расположена на вершине холма ( $\beta < \pi$ ) и  $K = K_{\max}$  или в нижней точке впадины ( $\beta > \pi$ ), когда  $K = K_{\min}$ . В случае  $\beta = \pi/2$  (полуцилиндр) формула (13) принимает вид  $K(\psi) = -2\cos \psi$  — результат, хорошо известный из задачи о полуцилиндре [3].

Если же  $\beta = (3/2)\pi$  (яма), то поле в нижней точке ямы ослабляется в  $2/9$  раза.

Полагая  $\psi = |\pi - \beta| - \varepsilon$ , при  $\varepsilon \ll |\pi - \beta|$  выражение (13) примет вид

$$K = (\pi/\beta)^2 (\sin \beta)^{1-\pi/\beta} (\sin \varepsilon/2)^{\pi/\beta-1} \quad (15)$$

и описывает поведение поля в окрестности линии пересечения плоскости цилиндром (угловая область). Здесь  $\pi/\beta - 1$  соответствует известному показателю Мейкснера [8]. Для выпуклой неоднородности ( $\pi/\beta > 1$ )  $K|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow 0$ . В случае же вогнутой неоднородности ( $\pi/\beta < 1$ ) коэффициент  $K$  имеет особенность. Однако, как уже указывалось выше, эти результаты являются строгими для магнитной компоненты, а в случае электрической антенны ими можно пользоваться, только если линейное расстояние от угловой области превышает скин-слой [6].

На рис. 3 представлена функция  $K(\psi, \beta)$  для выпуклой и вогнутой неоднородности.

В случае выпуклой неоднородности наибольшее значение  $K$ , равное двум, достигается на вершине ( $\psi = 0$ ,  $\beta = \pi/2$ , холм типа полуцилиндра).

Эта величина монотонно убывает с ростом  $\beta$  (когда холм становится все более «плоским»). При  $\beta = \pi$  холм отсутствует, имеем плоскую границу раздела и  $K = 1$ . Если антенну перемещать от вершины к основанию холма, то  $K$  монотонно убывает, стремясь к нулю.

В случае полуцилиндра область углов  $0 < \psi < \pi/3$  соответствует  $K > 1$ .

Для вогнутой неоднородности  $K$  монотонно нарастает по мере приближения антены к границе ямы. Здесь также существует область углов  $\psi$ , для которых  $K > 1$ . Так, например, для  $\beta = -(3/2)\pi$  угол  $\psi \geq 85^\circ$ . Однако при этом следует учитывать ранее сделанное за-

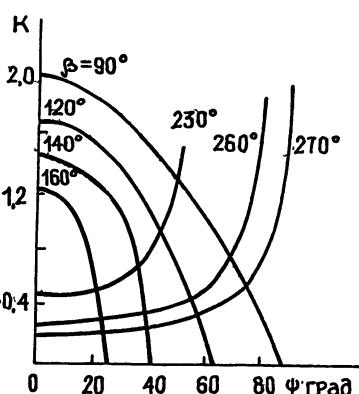


Рис. 3.

мечание о том, что линейное расстояние антены от плоской границы раздела должно превышать скин-слой.

Представляет также интерес случай, когда горизонтальная антenna расположена на плоской границе раздела на некотором расстоянии от неоднородности. Воспользовавшись формулами (6), (7), (10) и (12), путем простых, но громоздких вычислений получаем

$$K = (\pi/\beta)^2 (1/t^2) [1 + 1/t]^{\pi/\beta-1} [(1+t/\beta)(\pi/\beta) - 1]^{-2}. \quad (16)$$

где  $t = u/2a$  — безразмерное расстояние от неоднородности.

На рис. 4 представлена зависимость  $K(t)$  для разных углов  $\beta$ .

В ближней зоне ( $t < 1$ )  $K(t)$  принимает вид

$$K \approx (\pi/\beta)^{2/\beta-1} [1 - (\pi/\beta - 1)t + (\pi/\beta - 1)(\pi/\beta - 4)(t^2/2)]. \quad (17)$$

Выражение (17) представляет собою первые члены ряда Мейкснера. В случае  $\pi/\beta > 1$   $K(t)|_{t \rightarrow 0} \rightarrow 0$ .

Для вогнутой неоднородности ( $\pi/\beta < 1$ ) имеем особенность, как и в ранее рассматриваемом случае.

В дальней зоне ( $t > 1$ ) имеем

$$K \approx 1 + (1/12t^2)[1 - (\pi/\beta)^2]. \quad (18)$$

Таким образом, оказывается, что неоднородность типа холма ( $\pi/\beta > 1$ ) уменьшает эффективность антенны, расположенной на плоскости, а неоднородность типа ямы ее повышает.

С помощью формулы (18) можно оценить расстояния, для которых с влиянием неоднородности можно не считаться. Заметим, что масштабом изменения поля является ширина неоднородности  $2a$ .

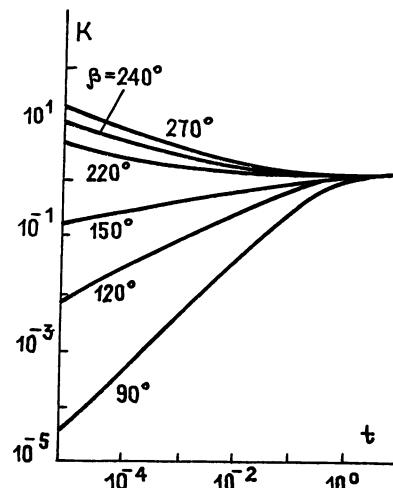


Рис. 4.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Корчагин Ю. А., Размансов И. П. // Радиотехника. 1986. № 3. С. 15.
- Корчагин Ю. А., Размансов И. П., Царегородцев М. Е. // Тезисы докл. XII Межведомственного семинара по распространению радиоволн. — Красноярск, 1986.
- Козина О. Г. В кн.: Распространение радиоволн километрового диапазона. — Апатиты: Кольский филиал АН СССР, 1987. С. 91.
- Козина О. Г. // Тезисы докл. XII Межведомственного семинара по распространению радиоволн. — Красноярск, 1986.
- Леонтович М. А. Исследование распространения радиоволн. — М.: АН СССР, 1948. С. 5.
- Макаров Г. И., Сазонов А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 4. С. 461.
- Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.—Л.: АН СССР, 1948. С. 347.
- Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974. С. 20.
- Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
18 марта 1988 г.

#### THE INFLUENCE OF RELIEF ON THE LOW-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC FIELD

O. G. Kozina, G. I. Makarov

The article deals with the problem of influence of the relief with convex and concave cylindrical inhomogeneities on the effectivity of horizontal electric antennas. The article states that the inhomogeneities are small in comparison with the wavelength in vacuum. It is also shown that the above-mentioned influence, being rather large, increases or decreases the effectivity of antennas.

УДК 553.951:537.84

## О ГОФРИРОВОЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МГД УДАРНЫХ ВОЛН

*B. A. Павлов*

Получены условия гофрировочной неустойчивости МГД ударных волн. Уравнение состояния плазмы и ориентация магнитного поля произвольные.

Выполнение условий эволюционности одномерного процесса — необходимо, но не достаточное требование неодномерной устойчивости формы (гофрировочной устойчивости) ударного фронта [1]. Условия неустойчивости акустической ударной волны при произвольном уравнении состояния нейтрального газа изучались различными методами [2–7]. Исследования [4–6] и [7] (гл. 91) основаны на приближенном методе — «правиле характеристик» [8]: поле на фронте описывается как течение в тонких лучевых трубках с медленно изменяющимися поперечными сечениями. Задача сводится к решению уравнения на  $C_+$ -характеристике совместно с соотношениями на разрыве. Гофрировочная устойчивость выявляется [5, 6] и [1] (гл. 91) в результате анализа вариации полей на фронте под действием локального слабого возмущения скорости ударного фронта. Неустойчивость соответствует увеличению площади поперечного сечения лучевой трубы при увеличении скорости ударного фронта. В отличие от способов [2, 3, 7] методика [5, 6] имеет недостаток — она не позволяет описать спонтанное излучение волн ударным фронтом в ситуации, когда форма фронта остается устойчивой [2, 7]. Однако методика [5, 6] имеет преимущество по сравнению с [2, 3, 7] — менее громоздок путь получения условий неустойчивости.

Десять лет спустя после [2] началось исследование гофрировочной неустойчивости быстрых МГД ударных волн [9] в двух предельных ситуациях: магнитное поле либо перпендикулярно, либо параллельно фронту.

В настоящей работе условия гофрировочной неустойчивости МГД ударных волн (быстрая и медленная магнитозвуковые) получаются для случая произвольной ориентации магнитного поля и для произвольного уравнения состояния плазмы при пренебрежении диссипацией. Делается это на основе методики [5, 6].

МГД-волны описываем системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \mathbf{v} + \nabla P - \mu [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) s &= 0, \quad P = P(\rho, s), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $s$ ,  $P$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{H}$  — плотность, энтропия, давление, скорость плазмы и магнитное поле,  $\mu$  — магнитная проницаемость вакуума.

Введем криволинейные ортогональные координаты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  так, что орт  $e_\alpha$  ориентирован вдоль оси тонкой лучевой трубы. В общем случае имеется локальный поворот

$$\left( \begin{array}{c} d\alpha \\ \Sigma d\beta \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} dz \\ dx \end{array} \right), \quad (2)$$

где  $\varphi$  — угол поворота,  $\Sigma$  — безразмерная площадь поперечного сечения лучевой трубы. С учетом (2) двумерные МГД-поля, описываемые системой (1), характеризуются следующими операциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Sigma F_\alpha) + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \beta} (F_\beta), \\ \nabla P &= \frac{\partial P}{\partial \alpha} e_\alpha + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial \beta} e_\beta, \\ \operatorname{rot} F &= -\frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} e_\beta + \frac{1}{\Sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Sigma F_\beta) - \frac{\partial}{\partial \beta} (F_\alpha) \right] e_\gamma + \frac{1}{\Sigma^2} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \beta} e_\alpha, \\ \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} &= \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Приближение тонких лучевых трубок с медленным изменением поперечного сечения соответствует пренебрежению в (3) производными по поперечной координате  $\beta$ . При этом магнитозвуковые волны (быстрая и медленная) описываются системой

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \hat{T}(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial z} \approx \Phi, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \begin{vmatrix} v_z & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v_z & 0 & -\mu H_z \\ 0 & 0 & v_z & \mu H_x \\ 0 & -H_z & H_x & v_z \end{vmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_z \\ H_x \end{pmatrix}, \\ A_x^2 &= \frac{\mu H_x^2}{\rho}, \quad A_z^2 = \frac{\mu H_z^2}{\rho}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} -\rho v_z \\ -v_x v_z + A_x A_z \\ v_x^2 - A_x^2 \\ -v_x H_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Описание (4) — это частный случай совпадения координат  $\alpha$  и  $z$ ; именно эта ситуация представляет интерес для данной задачи. Известная процедура [10] позволяет получить характеристическую форму записи системы (4) для  $C_+$ -характеристики магнитозвуковых волн:

$$\frac{1}{\rho V} \frac{dP}{d\rho} - \frac{A_x A_z}{V^2 - A_x^2} \frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_z}{dt} + \frac{\mu V}{2\rho(V^2 - A_z^2)} \frac{dH_x^2}{dt} = D \frac{d \ln \Sigma}{dz}, \quad (5)$$

где  $V$  — собственные числа матрицы  $\hat{T}$ :

$$V^2 = \frac{1}{2} (a^2 + A^2 \pm \sqrt{(a^2 + A^2)^2 - 4a^2 A_z^2}), \quad A^2 = A_x^2 + A_z^2.$$

Здесь знаками плюс и минус отмечены быстрая и медленная волны. На  $C_+$ -характеристике имеем

$$\frac{dz}{dt} = v_z + V, \quad D = -\frac{a^2 v_z}{V} - \frac{A_x A_z}{V^2 - A_z^2} (A_x A_z - v_x v_z) + v_x^2 - A_x^2.$$

Уравнение (5) будем решать совместно с соотношениями на разрыве в ударной волне [10], перейдя к системе координат, перемещающейся со скоростью фронта:

$$\begin{aligned} \rho_2 v_{z_2} = \rho_1 v_{z_1} &= I, \quad P_2 + \rho^2 v_{z_2}^2 + \frac{\mu}{2} H_{x_2}^2 = P_1 + \rho_1 v_{z_1}^2 + \frac{\mu}{2} H_{x_1}^2, \\ \rho_2 v_{z_2} v_{x_2} - \mu H_{z_1} H_{x_2} &= \rho_1 v_{z_1} v_{x_1} - \mu H_{z_1} H_{x_1}, \\ v_{z_2} H_{x_2} - H_{z_1} v_{x_2} &= v_{z_1} H_{x_1} - H_{z_1} v_{x_1}, \\ e_2 - e_1 + \frac{1}{2} (P_2 + P_1) \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \frac{\mu}{4} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (H_{x_2}^2 - H_{x_1}^2) &= 0, \\ P = P(\rho_1 s), \quad e = e(\rho_1 s), \quad H_{z_2} &= H_{z_1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $e$  — внутренняя энергия, индексы 1 и 2 относятся к полям перед ударным фронтом и позади него. С помощью системы (5), (6) опишем вариацию полей на фронте ударной волны в результате возмущения нормальной компоненты скорости  $\delta v_{z_1}$  при постоянстве остальных полей  $v_{x_1}$ ,  $\rho_1$ ,  $P_1$ ,  $H_{x_1}$ ,  $e_1$  перед фронтом. Вариацию давления  $\delta P_2$  в магнитозвуковых волнах представим в виде

$$\delta P_2 = \left( \frac{\partial P_2(\rho_2, s_2)}{\partial \rho_2} \right)_* \delta \rho_2 + \left( \frac{\partial P_2(\rho_2, s_2)}{\partial s_2} \right)_* \delta s_2,$$

где  $\delta s_2 = 0$  и индекс звездочки характеризует производную вдоль ударной адиабаты, которая следует из (6).

Введем вспомогательную функцию

$$h \equiv I^* \left( \frac{\partial(1/\rho)}{\partial P} \right)_*,$$

где

$$I^* = \rho_1^2 v_{z_1}^2 = \rho_2^2 v_{z_2}^2 = \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} \left[ P_2 - P_1 + \frac{\mu}{2} (H_{x_2}^2 - H_{x_1}^2) \right].$$

С целью упрощения анализа перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью  $v_{x_2}$  параллельно фронту. Это можно сделать, так как условия устойчивости не зависят от системы координат. При этом в лучевых трубках позади фронта движение плазмы будет происходить только по направлению нормали к фронту. Уравнения (5) и (6) для вариаций полей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_2}{\rho_2 V_2} - \frac{A_{x_2} A_{z_2}}{V_2^2 - A_{z_2}^2} \delta v_{x_2} + (\delta v_1 - \delta v_{z_2}) + \frac{\mu H_{x_2} V_2 \delta H_{x_2}}{\rho_2 (V_2^2 - A_{z_2}^2)} &= \frac{D_2 \delta \ln \sum}{v_1 - v_{z_2} + V_2}, \\ v_1 \equiv v_{z_1}, \quad D_2 = - \frac{V_2^2 A_{x_2}^2}{V_2^2 - A_{z_2}^2} - \frac{a_2^2 (v_1 - v_{z_2})}{V_2} &= (a_2^2 - V_2^2) - \frac{a_2^2 (v_1 - v_{z_2})}{V_2}, \\ \delta v_{z_2} = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(0)}} \delta v_1, \quad \delta H_{x_2} = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta^{(0)}} \delta v_1, \quad \delta v_{x_2} = \frac{\Delta^{(3)}}{\Delta^{(0)}} \delta v_1, \quad \delta P_2 = \frac{\Delta^{(4)}}{\Delta^{(0)}} \delta v_1, \\ \Delta^{(0)} = \rho_2 [(1+h)(v_{z_2}^2 - A_{z_2}^2) - h A_{x_2}^2] &, \\ \Delta^{(1)} = \rho_2 \left\{ \left[ 2h + (1-h) \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] (v_{z_2}^2 - A_{z_2}^2) - h \frac{\rho_1}{\rho_2} A_{x_2}^2 + 2h \mu \frac{H_{x_2}}{\rho_2} \left( H_{x_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} H_{x_2} \right) \right\}, \\ \Delta^{(2)} = 2 \left[ h \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) H_{x_1} + (1+h) \left( H_{x_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} H_{x_2} \right) \right], \quad \Delta^{(3)} = \frac{v_{x_1}}{v_{z_1}} \Delta^{(0)} - \frac{\mu H_{z_1}}{f} \Delta^{(2)}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Delta^{(4)} = 2I \left[ (\rho_2 - \rho_1)(v_{z_2}^2 - A_{z_2}^2) - \mu H_{x_2} \left( H_{x_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} H_{x_2} \right) \right].$$

Уравнение (7) представим в виде, позволяющем сделать вывод об условиях гоффрировочной неустойчивости ударных МГД-волн:

$$\frac{\delta \ln \Sigma}{\Sigma} = \frac{(v_1 - v_{z_2} + V_2)(\rho_2 - \rho_1)v_{z_2}^2}{D_2 \Delta^{(0)}} \left[ \left( 1 + 2 \frac{v_{z_2}}{V_2} - Q \right) - h(1 - R + S) \right], \quad (8)$$

где

$$Q = \frac{A_{z_2}^2}{v_{z_2}^2} \left( 1 + 2 \frac{v_{z_2}}{V_2} \right) + \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{v_{x_1}}{v_{z_1}} \frac{A_{x_1} A_{z_2}}{v_{z_2}^2} \left[ 1 + 2 \frac{A_{z_2}^2(V_2 - v_{z_2})}{V_2(V_2^2 - A_{z_2}^2)} \right],$$

$$R = \frac{A_{z_2}^2}{v_{z_2}^2} + \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{v_{x_1}}{v_{z_1}} \frac{A_{x_1} A_{z_2}}{v_{z_2}} \frac{2(V^2 - A_{z_2}^2) + (V_2 v_{z_2} - A_{z_2}^2) + v_{z_2}(V_2 - v_{z_2})}{V^2 - A_{z_2}^2},$$

$$S = \frac{A_{x_2}^2}{v_{z_2}^2} \left( 1 + 2 \frac{V_2 v_{z_2} - A_{z_2}^2}{V_2^2 - A_{z_2}^2} \right).$$

Условия эволюционности плоских ударных волн имеют вид [10]

$$A_{z_2} < v_{z_2} < V_{2+}, \quad v_{z_2} < V_2 < A_{z_2},$$

Индексы (+) и (-) относятся к быстрой и медленной магнитозвуковым волнам. Для быстрой волны функция  $D_{2+}$  отрицательна, а для медленной волны  $D_{2-}$  может иметь любой знак. Гоффрировочная неустойчивость возникает при  $\delta \Sigma / \delta v_1 > 0$ . Если интересоваться волной сжатия  $\rho_2 > \rho_1$ , то условия неустойчивости можно представить в виде

$$h < - \frac{1 - A_{z_2}^2/v_{z_2}^2}{1 - A_2^2/v_{z_2}^2} \operatorname{sgn}(-D_2) \quad (9)$$

или

$$h > \frac{1 + (2v_{z_2}/V_2) - Q}{1 - R + S} \operatorname{sgn}(-D_2), \quad (10)$$

В различных предельных ситуациях условия неустойчивости (9), (10) упрощаются.

1) Акустическая волна в нейтральном газе;

$$A = R = S = Q = 0, \quad h < -1, \quad \text{или} \quad h > 1 + 2v_{z_2}/a_2, \quad (11)$$

что соответствует известному результату [2].

2) Быстрая волна «включения». В системе координат, движущейся вдоль фронта со скоростью  $v_{x_2}$ , она имеет нулевую касательную компоненту магнитного поля позади фронта:  $H_{x_2} = 0$ ,  $V_{2+} = a_2$ . При этом

$$Q = \frac{A_2^2}{v_{z_2}^2} \left( 1 + 2 \frac{v_{z_2}}{a_2} \right), \quad R = \frac{A_2^2}{v_{z_2}^2}, \quad S = 0, \quad A_2^2 = A_{z_2}^2$$

и условия (9), (10) принимают вид (11), что соответствует [9].

3) Медленная волна «выключения»,  $H_{x_1} = 0$ . Условие (10) принимает вид

$$h > \frac{2\rho_1 A_{z_2}^2 \operatorname{sgn}(-D_{2-})}{V_2 - [( \rho_1 + \rho_2 ) ( V_2 + A_{z_2} ) + 2\rho_2 A_{z_2}]}.$$

4) «Поперечная» быстрая волна,  $H_z = 0$ ,  $V_{2+} = \sqrt{a_2^2 + A_{z_2}^2}$ . При этом

$$\rho_2 H_{x_1} - \rho_1 H_{x_2} = 0, \quad Q = R = 0, \quad S = \frac{A_2^2}{v_{z_2}^2} \left( 1 + \frac{2v_{z_2}}{\sqrt{a_2^2 + A_2^2}} \right)$$

и условия (9), (10) принимают вид

$$h < -(1 - A_2^2/v_{z_2}^2)^{-1}$$

или

$$h > \left( 1 + \frac{2v_{z_2}}{\sqrt{a_2^2 + A_2^2}} \right) \left[ 1 + \frac{A_2^2}{v_{z_2}^2} \left( 1 + \frac{2v_{z_2}}{\sqrt{a_2^2 + A_2^2}} \right) \right]^{-1}.$$

5) Медленная «поперечная» волна,  $H_z \rightarrow 0, V_z \rightarrow 0$ . Описание волнового процесса системой (1) становится некорректным, однако (9), (10) могут служить для оценки условий неустойчивости

$$h < -(1 - A_2^2/v_{z_2}^2)^{-1} \operatorname{sgn}(-D_{2-})$$

или

$$h > (v_{z_2}^2/A_2^2) \operatorname{sgn}(-D_{2-}).$$

6) Слабое наклонное магнитное поле,  $|S - R| \ll 1$ . При этом условие (10) для быстрой волны упрощается к виду

$$h > \left( 1 + 2\frac{v_{z_2}}{V_2} - Q \right) (1 + R - S) = \left( 1 + 2\frac{v_{z_2}}{V_2} \right) (1 - S) + \Psi, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{\rho_2 v_{x_1} A_{x_2} A_{z_2}}{(\rho_2 - \rho_1) v_{z_1} v_{z_2}^2 (V_2^2 - A_{z_2}^2)} \left[ \left( 1 + 4\frac{v_{z_2}}{V_2} \right) (V_2^2 - A_{z_2}^2) + (V_2^2 - v_{z_2}^2) + \right. \\ & \left. + 2(v_{z_2}^2 - A_{z_2}^2) + (V_2 v_{z_2} - A_{z_2}^2) + v_{z_2} (V_2 - v_{z_2}) \left( 1 + 2\frac{v_{z_2}}{V_2} \right) \right] > 0. \end{aligned}$$

При переходе от акустической волны к быстрой магнитозвуковой волне магнитное поле приводит к стабилизации неустойчивости в области (9), а при слабых магнитных полях (случай 5) в области (10) (см. приближение (12)) происходит усиление неустойчивости.

Условия (9), (10) выполняются для специального вида ударной адиабаты. Наличие этих условий возможно в многокомпонентной плазме и при возникновении диссоциации в случае увеличения температуры. Наличие гофрированной неустойчивости — это косвенный признак нестационарности волнового процесса.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.—736 с.
- Дьяков С. П. // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. Вып. 3. С. 288.
- Егренбек J. J. // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 10. P. 1181.
- Вахрамеев Ю. С. // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 774.
- Румянцев А. А. // ЖПМТФ. 1977. № 3. С. 48.
- Fowles G. R. // Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 8. P. 1982.
- Кузнецов Н. М. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. Вып. 2. С. 470.
- Whitham G. B. // J. Fluid. Mech. 1958. V. 4. № 4. P. 337
- Gardner C. S., Kruskal M. D. // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 5. P. 700.
- Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.—719 с.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
17 мая 1988 г.

#### CORRUGATION INSTABILITY OF MAGNETOHYDRODYNAMIC SHOCKS

V. A. Pavlov

The conditions of corrugation instability of magnetohydrodynamic shocks is obtained. The plasma's equation of state and the magnetic field direction are arbitrary.

УДК 621.372.413

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕННОЙ МОЩНОСТИ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ СТРИКЦИОННОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

*Г. В. Белокопытов, В. Н. Семененко, В. А. Чистяев*

Теоретически и экспериментально исследованы частотные характеристики отраженной мощности СВЧ сигнала при стрикционном параметрическом возбуждении акустических колебаний в диэлектрических резонаторах (ДР). Рассмотрено влияние факторов, приводящих к неоднозначности частотных характеристик: жесткого характера параметрического возбуждения, тепловых расстроек и нелинейного резонанса. Разработана методика наблюдения частотных характеристик, позволяющая получать информацию о структуре области электроакустического возбуждения. Результаты эксперимента с ДР из КТаO<sub>3</sub> и расчета, проведенного с учетом тепловых расстроек, находятся в хорошем согласии.

Воздействие электромагнитного СВЧ сигнала (частота  $\omega_n$ ) на диэлектрический резонатор может при определенных условиях приводить к параметрическому возбуждению акустических колебаний на одной из упругих мод ДР (частота  $\Omega_a$ ) и образованию гребенки электромагнитных комбинационных частот, удовлетворяющих условию  $\omega_k = \omega_n + k\Omega_a$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) [1]. В СВЧ эксперименте стрикционное параметрическое возбуждение проявляется двояким образом. Спектр отраженного от ДР СВЧ сигнала при возникновении параметрической генерации становится немонохроматичным, так как содержит компоненты  $\omega_k$ . Кроме того, при наблюдении зависимости отраженной мощности от частоты накачки на резонансных кривых ДР становятся заметными характерные искажения. Во втором случае возможно снятие частотных характеристик в динамическом режиме, что не только существенно ускоряет обзор области стрикционного параметрического возбуждения, но и позволяет резко ослабить неблагоприятное влияние на точность частотных измерений из-за процессов дрейфа диэлектрической проницаемости, вызванных релаксацией заряда в поверхностном слое сегнетоэлектриков [2]. Вместе с тем для анализа частотных характеристик, получаемых в эксперименте, необходимо знать, какова связь между наблюдаемыми картинами и различными особенностями процесса параметрической генерации.

С этой целью в первом разделе настоящей работы проведен расчет частотных характеристик отраженной мощности при резонансном стрикционном параметрическом возбуждении. При этом существенное внимание уделено учету влияния нелинейных расстроек в ДР. Во втором разделе изложены методика и результаты экспериментального исследования частотных характеристик при реализации стрикционного параметрического возбуждения в резонаторах из танталата калия.

**1. Расчет частотных характеристик.** Как показано в [3], все характеристики параметрической генерации, в том числе мощность накачки  $E^2$  и амплитуды комбинационных частот  $Y_k$ , при надлежащей нормировке однозначно определяются заданием лишь трех параметров: нормированной амплитуды ультразвука  $z$ , расстройки  $\xi = Q_f(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)$  и величины  $\Delta = 2\Omega_a Q_f/\omega_f$ , где  $\omega_f$ ,  $Q_f$  — собственная частота и добротность той моды ДР, на которой происходят колебания накачки. Предложенный в [3] метод численного решения системы уравнений для

амплитуд и фаз компонент параметрической генерации можно с успехом применить для нахождения мощности, поглощаемой в ДР. С точностью до нормировки, энергия колебаний  $k$ -й комбинационной частоты, запасенная в ДР, равна  $Y_k^2$ . Соответственно рассеиваемая мощность  $k$ -й компоненты равна  $(\omega_k/Q_f)Y_k^2$ , а общая поглощаемая мощность есть  $Q_f^{-1} \sum_k \omega_k Y_k^2$ . Даже при высоком уровне накачки, когда число комбинационных частот составляет несолько десятков, отличие  $\omega_k$  от  $\omega_n$  не превышает 1% [4]. Поэтому с точностью, достаточной для сравнения с экспериментом, можно считать, что определение частотной характеристики поглощаемой мощности сводится к нахождению сумм:

$$E_d(\zeta) = \sum_k Y_k^2(\zeta), \quad (1)$$

при постоянных  $E^2$  и  $\Delta$  и варьируемой расстройке  $\zeta$ .

Значительные искажения в частотные зависимости при резонансном параметрическом возбуждении вносят нелинейные расстройки [3–5]. Анализ показал (см. ч. 2), что господствующим механизмом нелинейных расстроек в типичных экспериментальных ситуациях является тепловой, т. е. обусловленный нагревом резонатора теплом диэлектрических потерь. Отличительной чертой теплового механизма является то, что нагрев ДР приводит к одинаковому изменению расстройки и для частоты накачки и для всех комбинационных частот. Вид уравнений [3] для  $Y_k$  останется при этом неизменным, если вместо расстройки  $\zeta$  задавать значение  $\zeta_{\text{эфф}}$ , учитывающее нагрев. Найдя  $E_d(\zeta_{\text{эфф}})$ , нетрудно произвести переход от  $\zeta_{\text{эфф}}$  к  $\zeta$ :

$$\zeta = \zeta_{\text{эфф}} + \Gamma_T E_d(\zeta_{\text{эфф}}), \quad (2)$$

где  $\Gamma_T = -\frac{1}{\epsilon dT} \frac{\omega_a R_T}{8\pi K_{\text{эфф}}^2 Q_f Q_a}$  — коэффициент тепловой расстройки,

пропорциональный температурной чувствительности диэлектрической проницаемости,  $Q_a$  — добротность акустической моды,  $K_{\text{эфф}}^2$  — интегральный коэффициент стрикционной связи [5],  $R_T$  — тепловое сопротивление ДР [6]. Для сегнетоэлектрических кристаллов, находящихся в неполярной фазе, в том числе для КТАО<sub>3</sub>,  $\Gamma_T > 0$ .

Расчет частотных характеристик  $E_d(\zeta)$ , выполненный для различных значений мощности накачки  $E^2$ , а также параметров  $\Gamma_T$  и  $\Delta$ , позволил установить ряд общих закономерностей. В допороговом режиме зависимости  $E_d(\zeta)$  представляют обычные кривые линейного или нелинейного резонанса. Выше порога параметрического возбуждения на частотных характеристиках появляются специфические искажения, вид которых существенно зависит от величины  $\Delta$ . При  $\Delta \leq 1$  искажения носят монотонный характер (рис. 1а, б), а при больших  $\Delta$  они имеют вид осцилляций или зубцов (рис. 1в, г). При  $\Delta > 1$  расстояние между соседними комбинационными частотами больше, чем ширина полосы резонанса, соответственно приближение одной из компонент  $\omega_k$  к резонансу сопровождается ростом эффективности параметрического преобразования энергии, чему отвечают локальные максимумы в зависимости от  $E_d(\zeta)$ . Число максимумов зависит от ширины частотного интервала, где выполняются условия стрикционного возбуждения, и с ростом мощности накачки увеличивается.

При повышенных уровнях накачки функции  $E_d(\zeta)$  становятся неоднозначными. Такое гистерезисное поведение обусловлено тремя причинами. Прежде всего, независимо от наличия нелинейных расстроек, частотная характеристика неоднозначна в области жесткого возбуждения. Примеры такого поведения дают кривые 2, 3 на рис. 1а, б, в.

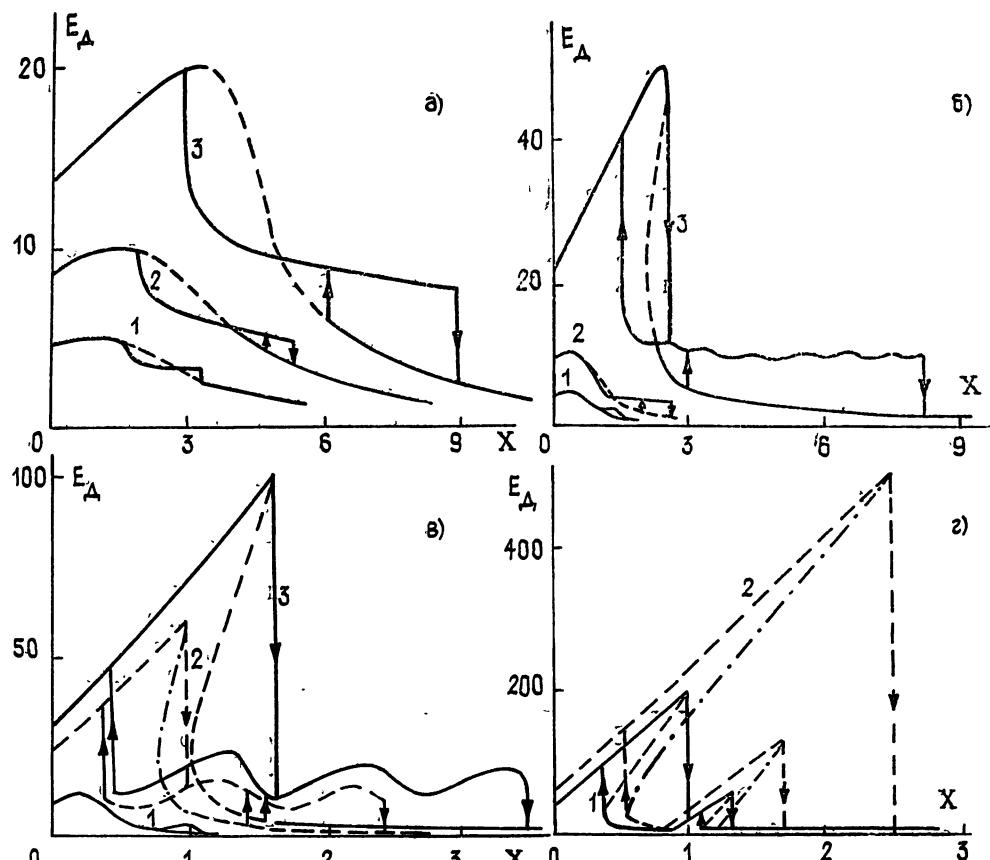


Рис. 1. Частотные характеристики поглощенной мощности при стрикционном параметрическом возбуждении (расчет),  $X = \zeta/\Delta$ ,  $\Gamma_T = 0,05$ :

а)  $\Delta = 0,3$ : 1 —  $E^2 = 5$ , 2 —  $E^2 = 10$ , 3 —  $E^2 = 20$  ( $E_{\min}^2 = 3,7$ ); б)  $\Delta = 1$ : 1 —  $E^2 = 5$ , 2 —  $E^2 = 10$ , 3 —  $E^2 = 50$  ( $E_{\min}^2 = 2$ ); в)  $\Delta = 3$ : 1 —  $E^2 = 13$ , 2 —  $E^2 = 60$ , 3 —  $E^2 = 100$  ( $E_{\min}^2 = 9$ ); г)  $\Delta = 10$ : 1 —  $E^2 = 200$ , 2 —  $E^2 = 500$  ( $E_{\min}^2 = 100$ ).

Как изображено на последних двух рисунках, жесткое возбуждение ведет к неоднозначности частотных характеристик при больших  $\zeta$  (в правых областях). Что же касается левых областей гистерезиса, то их причиной является нелинейный резонанс, вызванный тепловыми расстройками [6]. Если уровень мощности накачки достаточно велик, то резонансная кривая приобретает клювообразную форму. Пусть первоначальная настройка частоты накачки соответствует левому склону резонансной кривой. Пока  $\zeta_{\text{эфф}} < 0$ , самопроизвольное стрикционное параметрическое возбуждение невозможно [5]. При повышении частоты накачки перескок на правую ветвь резонансной кривой ( $\zeta_{\text{эфф}} > 0$ ) происходит при расстройке  $\zeta$ , определяемой из уравнения

$$E^2 = \frac{R}{3} \left\{ \left[ \zeta - \frac{2}{3} \left( \zeta + \frac{1}{2} \sqrt{\zeta^2 - 3} \right) \right]^2 + 1 \right\} \left( \zeta + \frac{1}{2} \sqrt{\zeta^2 - 3} \right), \quad (3)$$

где  $R = (3\sqrt{3}/16)(8\pi K_{\text{эфф}}^2 Q_a^2 Q_f / \omega_f) P_{\text{кр}}$ , а  $P_{\text{кр}}$  — минимальная рассеиваемая в ДР мощность, при которой резонансная кривая становится неоднозначной. При больших  $\zeta$  из (3) имеем

$$E^2 \approx (R/2)\zeta. \quad (4)$$

Расстройка колебательной системы после скачка окажется либо

в области возбуждения (рис. 1б (кривая 3), рис. 1в (2), рис. 1г (1)), либо за ее пределами (рис. 1в (3) и 1г (2)). При высоком уровне накачки последняя ситуация становится неизбежной. Действительно, при больших расстройках пороговая мощность стрикционного возбуждения растет как  $\zeta_{\text{эфф}}^5$  [5]. В то же время из (2) и (4) с учетом того, что  $E_d(\zeta_{\text{эфф}}) \ll E^2$ , имеем

$$E^2 \leq \frac{R}{2} \zeta_{\text{эфф}} \left( 1 - \frac{1}{2} R \Gamma_T \right), \quad (5)$$

т. е. линейную зависимость. Таким образом, всегда существует «потолок» накачки, превысив который нельзя добиться параметрической генерации, осуществляя перестройку  $\omega_n$  от отрицательных расстроек к положительным. Реализация же параметрического возбуждения при перестройке частоты накачки в противоположном направлении не запрещена и при мощности, превышающей «потолок».

Еще один механизм образования неоднозначности на частотных характеристиках также обусловлен нелинейными расстройками, но присущ несопутствующему явлению — нелинейному резонансу, а самому стрикционному возбуждению. Появление неоднозначности возникает при этом как результат «опрокидывания» осцилляций  $E_d(\zeta)$ ; «опрокидывание» выражено тем сильнее, чем больше нелинейные расстройки (рис. 2). Естественно, такого рода неоднозначности можно наблюдать лишь при  $\Delta > 1$ , и на частотных характеристиках в режиме генерации имеются локальные максимумы. Эффект «опрокидывания» развивается на уровне мощности, когда кривая нелинейного резонанса уже неоднозначна и оба гистерезисных явления наблюдаются совместно (рис. 1г).

**2. Методика и результаты эксперимента.** Исследование стрикционного параметрического возбуждения под действием СВЧ накачки производилось при 4,2 К на кристаллах танталата калия. Приведенные ниже типичные результаты получены на образце, который имел форму, близкую к прямоугольной, с размерами

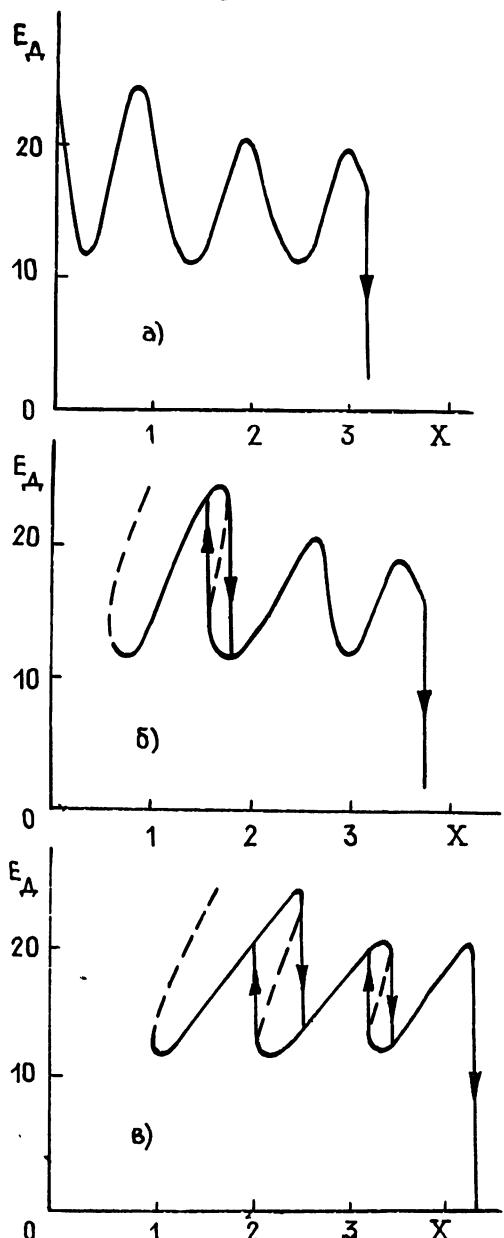


Рис. 2. Фрагменты частотных характеристик при различных величинах тепловых расстроек,  $E^2=100$ ,  $\Delta=3$ :  
а)  $\Gamma_T = 0$ ; б)  $\Gamma_T = 0,1$ ; в)  $\Gamma_T = 0,2$ .

в рабочей использовалась мода ДР с собственной частотой  $\omega_0/2\pi = 8,4$  ГГц. Воздействие СВЧ накачки приводило к параметрическому возбуждению упругих колебаний с частотой  $\Omega_a/2\pi = 3,18$  МГц (основная квазипродольная мода — на длине кристалла укладывается половина продольной волны ультразвука).

Исследуемый образец закреплялся в специальном держателе на конце тонкой керамической трубы и помещался в охлаждаемую измерительную ячейку в транспортном сосуде Дьюара. Возбуждение электромагнитных колебаний в ДР происходило в короткозамкнутой петле на конце коаксиального кабеля, причем, перемещая образец относительно петли, можно было легко менять уровень связи резонатора с трактом и нагруженную добротность. Приводимые здесь данные соответствуют добротности  $Q_f = 4 \cdot 10^3$  (т. е.  $\Delta = 2Q_f\Omega_a/\omega_f = 3$ ). При этом минимальный порог параметрического возбуждения в жидком гелии составлял около 0,7 мВт, что соответствует нормированному уровню  $E^2 \approx 9$ .

В качестве перестраиваемого генератора накачки использовался клистронный генератор Г4-56, частотная модуляция которого производилась путем подачи модулирующего напряжения пилообразной или треугольной формы на отражатель клистрона.

Отраженный от измерительной ячейки сигнал складывался на входе системы индикации с дополнительным сигналом от генератора накачки, уровень и фаза которого устанавливались таким образом, чтобы в отсутствие ДР результирующий сигнал на входе системы индикации отсутствовал. После такой настройки образец помещался в измерительную ячейку, при этом сигнал на квадратичном детекторе был пропорционален СВЧ мощности, переизлученной диэлектрическим резонатором. Такой режим измерений позволял скомпенсировать влияние паразитных искажений в тракте. Облегчалось и сопоставление экспериментальных результатов с расчетом, поскольку переизлученная мощность, так же как и поглощенная, пропорциональна запасу энергии в ДР (1).

Период качания частоты был выбран равным  $T_c \sim 40$  мс. При этом заведомо выполнялись условия

$$T_c \gg \tau_{\text{эл}}, \quad T_c \gg \tau_{\text{ак}}, \quad (6)$$

где  $\tau_{\text{эл}} = Q_f/\omega_f$ ,  $\tau_{\text{ак}} = Q_a/\Omega_a$  — времена установления электромагнитных и акустических колебаний в ДР (в эксперименте было  $\tau_{\text{эл}} \approx 0,5$  мкс,  $\tau_{\text{ак}} \gtrsim 0,3$  мс). Если в условиях наблюдений существенны тепловые расстройки, то для корректного сопоставления с расчетом помимо (6) требуется также, чтобы  $T_c$  было велико по сравнению с временем тепловой релаксации  $\tau_T = R_T C_T$ . Теплоемкость  $C_T$  образца можно определить, используя данные [1];  $C_T \approx 6 \cdot 10^{-7}$  Дж/К. В случае идеального теплового контакта кристалла с окружающей средой  $R_T \approx h^2/24kV$ , где  $h$  — толщина,  $V$  — объем ДР [6]. Поскольку  $k \approx 10^{-2}$  Вт/см·К [8],  $h = 5 \cdot 10^{-2}$  см,  $V = 0,64 \cdot 10^{-3}$  см<sup>3</sup>, получим  $R_T \approx 18$  К/Вт. Используя соотношения [6], можно также произвести сравнительные оценки тепловых и электрических нелинейных расстроек. При указанном значении  $R_T$  тепловые расстройки не менее чем в 20 раз превышают электрические.

При неидеальном тепловом контакте величина  $R_T$  и соответственно тепловые расстройки могут существенно превышать расчетные оценки. Величину теплового сопротивления можно легко определить по сдвигу резонансной частоты  $\Delta\omega/\omega_f$  при рассеянии в ДР мощности диэлектрических потерь  $P_{\text{д.п.}}$ , поскольку

$$\Delta\omega/\omega_f = (1/2)(1/\epsilon)(d\epsilon/dT)P_{\text{д.п.}}R_T. \quad (7)$$

Измерения показали, что  $R_T \approx 36$  К/Вт — вдвое выше расчетного. Таким образом,  $\tau_T = R_T C_T \approx 2 \cdot 10^{-5}$  с и условие  $T_c \gg \tau_T$  также было выполнено.

На рис. 3 представлены частотные характеристики отраженной мощности, снятые для разных уровней накачки. Сопоставляя их с расчетными (рис. 1в), можно убедиться в хорошем согласии теории и

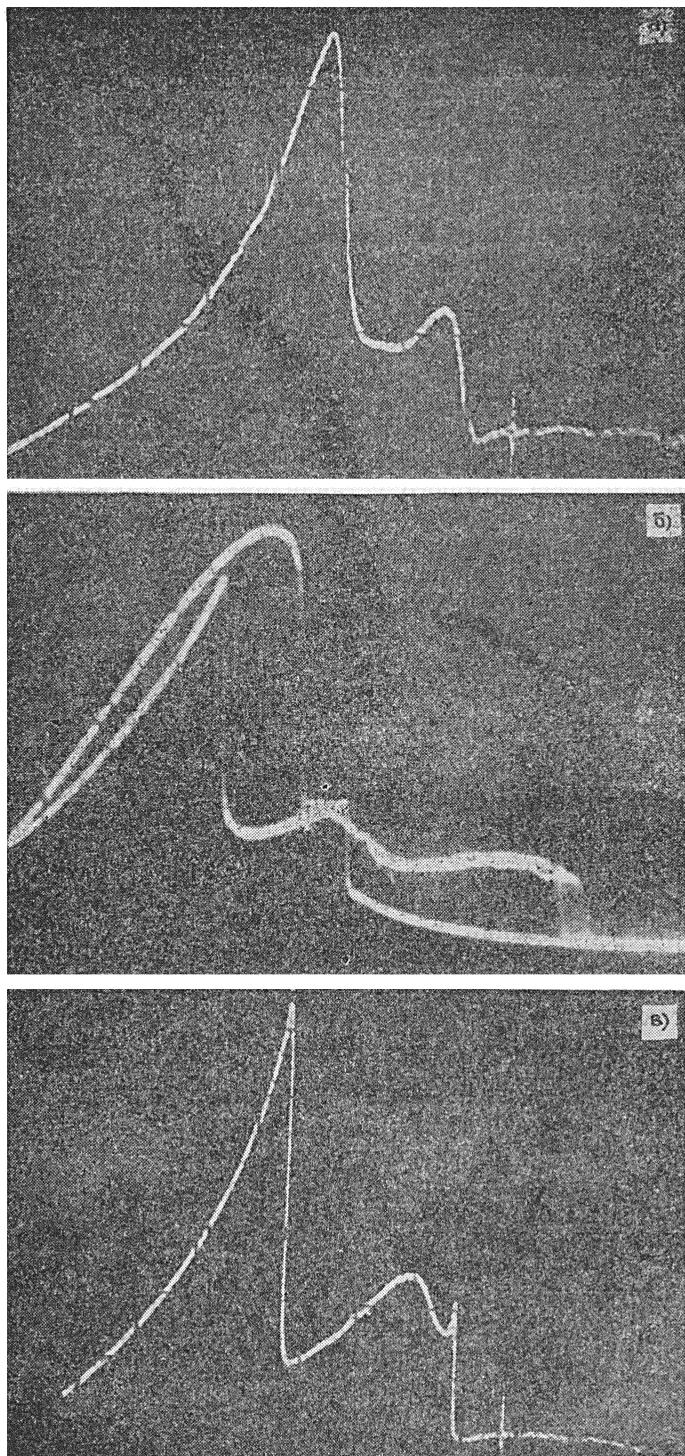


Рис. 3. Частотные характеристики отраженной мощности (эксперимент):  
 $\Delta=3$ : а)  $E^2=13$ ; б)  $E^2=60$ , качание частоты в обе стороны; в)  $E^2=100$ , качание частоты вниз.

Эксперимента при  $\Gamma_t = 0,05$ . Некоторое несбывшееся характеристики при прямом и обратном ходе частотной развертки вызвано влиянием переходной емкости в цепи подачи модулирующего напряжения.

В эксперименте наблюдались гистерезисные явления всех, описанных выше типов, обусловленные жестким возбуждением и тепловыми расстройками. Отличительной чертой частотных характеристик, снятых в жестком режиме при качании частоты вниз, были аномальные пички при включении генерации. Причина их появления — процессы установления амплитуды акустических колебаний. Поскольку при жестком возбуждении ее стационарное значение меняется скачком, то в течение времени порядка  $\tau_{\text{ак}}$  состояние колебательной системы существенно отличается от установленвшегося, а поглощаемая в ДР мощность превышает стационарную.

На рис. 4 приведен фрагмент неоднозначной частотной характеристики при «опрокидывании» осцилляций. Наблюдения за спектром комбинационных частот показали, что гистерезисное переключение величины отраженной мощности сопровождается скачкообразным изменением амплитуд, как правило, двух-трех спектральных компонент  $\omega_k$  с  $k < 0$ .

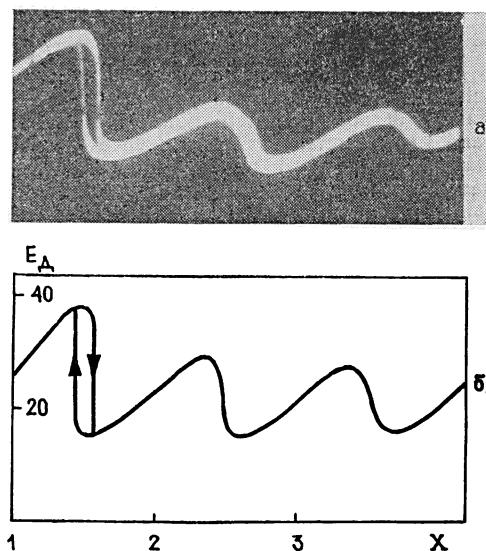


Рис. 4. Неоднозначная частотная характеристика при «опрокидывании»:  
а) эксперимент; б) расчет,  $E^2 = 200$ ,  
 $\Delta = 3$ ,  $\Gamma_t = 0,05$ .

Результаты настоящей работы демонстрируют возможность эффективного использования динамического режима для определения границ и структуры области возбуждения в параметрических электроакустических системах. В частности, установлено, что действие тепловых расстроек, наряду с возможной неоднозначностью зависимости  $z(E^2)$  [9], приводит к множественности режимов при стрикционном параметрическом возбуждении колебаний в ДР. Согласие результатов эксперимента и расчетов свидетельствует об адекватности теоретической модели. Теоретическому анализу благоприятствовала сравнительная простота учета влияния тепловых расстроек; если бы требовалось учитывать нелинейные расстройки электрического происхождения, то резко усложнились бы вычисления.

Авторы выражают глубокую благодарность И. В. Иванову за плодотворные дискуссии и П. П. Сырникову за предоставление кристаллов танталата калия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Решетников М. Е., Чистяев В. А. // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. № 19. С. 1210.
2. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Решетников М. Е., Усачев А. Б. // ЖТФ. 1985. Т. 55. № 10. С. 2085.
3. Белокопытов Г. В., Чистяев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 161.
4. Чистяев В. А., Белокопытов Г. В. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 7525-В86. Деп. от 3 ноября 1986 г.
5. Белокопытов Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С. 1121.
6. Белокопытов Г. В., Гуськов В. П. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984. Т. 27. № 5. С. 14.
7. Lawless W. N. // Ferroelectrics. 1980. V. 24. P. 327.
8. Steigmeier E. F. // Phys. Rev. 1968. V. 168. № 2. P. 523.
9. Белокопытов Г. В., Семененко В. Н., Чистяев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 8. С. 957.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
17 мая 1988 г.

## CHARACTERISTICS OF REFLECTED POWER AT RESONANCE STRICTION PARAMETRIC EXCITATION

G. V. Belokopytov, V. N. Semenenko, V. A. Chistyayev

Frequency characteristics of the reflected power of the microwave signal at striction parametric excitation of acoustic oscillations in dielectric resonators have been studied theoretically and experimentally. The influence of factors causing the ambiguity of frequency characteristics: hard parametric excitation, thermal detuning and nonlinear resonance has been considered. The procedure of observation of the frequency characteristics that makes it possible to get information on the structure of the region of electroacoustic excitation has been presented. There is a good agreement between the results of the experiment with  $\text{KTaO}_3$  dielectric resonators and the estimates including the thermal detuning.

---

### Аннотации депонированных статей

УДК 537.874.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

H. P. Егорова, H. H. Колчигин

Проведено математическое моделирование измерения коэффициента отражения для однопозиционной и двухпозиционной установок на основе решения задачи дифракции волнового пучка диэлектрической поверхностью методом функции Грина краевой задачи.

Получены зависимости погрешности от угла падения и диэлектрической проницаемости для поляризаций первичного поля в  $E$ - и  $H$ -плоскостях.

Сравнение с экспериментом указывает на правомерность моделирования измерения с использованием разработанного алгоритма.

Статья депонирована в ВИНИТИ,  
рег. № 6320-В89, Деп. от 18 октября 1989 г.

УДК 533.951.8

## К ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ И ДИФФУЗИИ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*A. B. Чечкин*

Получены выражения для аномальной проводимости и диффузии слабоионизованной плазмы в магнитном поле. Аномальные по сравнению с классическими значения кинетических коэффициентов обусловлены влиянием крупномасштабных надтепловых флюктуаций на кинетические процессы. Спектр флюктуаций при расчетах считался заданным. Показана возможность бомбовской зависимости коэффициента диффузии от магнитного поля в равновесной плазме.

Информация о кинетических коэффициентах слабоионизированной плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле, представляет интерес для целого круга задач физики лабораторной плазмы [1–4] и физики ионосферы [5]. Упругие столкновения заряженных частиц с неионизированными описываются интегралом Больцмана, теория явлений переноса, описываемых кинетическим уравнением Больцмана, хорошо разработана, см., например, [6]. В плазме легко возбуждаются колективные степени свободы — волны и шумы. Флюктуации с временем корреляции  $\tau_k$ , меньшим времени свободного пробега  $1/v_a$ , учитываются в кинетическом уравнении интегралом Балеску—Ленарда, в плазме с достаточно высоким уровнем флюктуаций достаточно учесть индуцированную часть этого интеграла (квазилинейный интеграл столкновений). При этом подразумевается, что время и длина свободного пробега  $l_a$  определяются интегралом, в котором учтены лишь флюктуации с  $\tau_k < 1/v_a$ ,  $r_k < l_a$ . В монографии [1] построены кинетические уравнения с учетом долгоживущих крупномасштабных флюктуаций ( $\tau_k > 1/v_a$ ,  $r_k > l_a$ ). В работе [4] исследовалось влияние крупномасштабных флюктуаций на кинетические процессы в столкновительной турбулентной плазме без магнитного поля. Целью данной работы является:

1) вывод интеграла крупномасштабных флюктуаций для слабонеоднородной плазмы в магнитном поле;

2) расчет вклада крупномасштабного интеграла в уравнение переноса импульса для слабоионизированной плазмы в предположении заданного спектра надтепловых флюктуаций; получение выражений для эффективной частоты столкновений, коэффициентов проводимости и диффузии для двух наиболее интересных с экспериментальной точки зрения областей спектров флюктуаций в пространстве  $(\omega, \mathbf{k})$ ; сравнение результатов с существующими теориями аномальных коэффициентов, которое позволяет продемонстрировать особенности принятого в работе подхода;

3) оценка коэффициента диффузии с помощью известных экспериментальных данных об уровнях флюктуаций; расчет коэффициента диффузии в равновесной плазме.

1. Интеграл крупномасштабных флюктуаций для слабонеоднородной плазмы в магнитном поле. Теория крупномасштабных флюктуаций в однородной кулоновской плазме без магнитного поля развита в гл. 11 монографии [7]. Мы полагаем, что  $\beta = 8\pi r_e T_e / B^2 \ll 1$ , что позволяет ограничиться учетом только флюктуаций продольного электрического

поля. Приведенное ниже выражение для интеграла крупномасштабных флуктуаций  $\tilde{I}_a$  является обобщением выражений (64.2), (63.11), (63.9) из [7] на случай слабонеоднородной кулоновской плазмы в магнитном поле. При этом пренебрегаем неоднородностью и нестационарностью флуктуационного процесса, но учитываем неоднородность функции распределения  $F_a(r, p, t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a = & \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \int d\omega dk \frac{k}{k^3} (\delta\tilde{E}\delta\tilde{E})_{\omega, k} \operatorname{Re} \int_0^\infty dr \times \\ & \times \exp[i\omega r - ik\delta r + \delta\hat{I}_a(\tau)] \left\{ \left( 1 - \delta r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( k \frac{\partial F_a}{\partial p} \right)_{r, p, t} + \frac{8\pi \operatorname{Im} \tilde{\epsilon}}{|\tilde{\epsilon}|^2} F_a \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $(\delta\tilde{E}\delta\tilde{E})_{\omega, k}$  — пространственно-временная спектральная корреляционная функция крупномасштабных флуктуаций,  $\delta\hat{I}_a$  — линеаризованный интеграл мелкомасштабных флуктуаций,  $\delta r(-\tau) = r - R(-\tau)$ ,  $R(-\tau)$ ,  $P(-\tau)$  — значения координаты и импульса в момент времени  $t - \tau$ , связанные со значениями  $r, p$  в момент  $t$  уравнениями характеристик, см. § 49 в [7],  $\tilde{\epsilon}(\omega, k)$  — диэлектрическая проницаемость плазмы.

**2. Общие выражения для вклада  $\tilde{I}_a$  в уравнение переноса импульса:** Рассчитаем первый момент интеграла крупномасштабных флуктуаций для слабоионизованной плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле  $B = Be_z$ . Функцию распределения зададим в виде

$$F_a = \rho_a [2\pi m_a T_a]^{-3/2} (1 + u_a v m_a / T_a) \exp(-p^2 / 2m_a T_a), \quad (2)$$

где  $\rho_a(r, t)$ ,  $u_a(r, t)$ ,  $T_a(r, t)$  — соответственно концентрация, гидродинамическая скорость и температура компонента  $a$ , удовлетворяющие уравнениям гидродинамики, содержащим моменты интегралов  $I_a$  и  $\tilde{I}_a$ . При расчете моментов  $\tilde{I}_a$  в качестве  $\delta\hat{I}_a$  используем модельный интеграл БГК:

$$\delta\hat{I}_a \{ \delta\tilde{N}_a \} = -v_a (\delta\tilde{N}_a - f_a^M \int dp \delta\tilde{N}_a),$$

$v_a$  — частота столкновений заряженных частиц с нейтральными,  $f_a^M$  — функция распределения Максвелла. Из (1), (2) следует, что вклад крупномасштабного интеграла в уравнение переноса импульса в условиях, когда возбужден надтепловой спектр флукутаций, может быть представлен в виде суммы двух частей: диссипативной, пропорциональной  $u_a$ , и недиссипативной, дающей добавку к градиенту давления и член, описывающий эффект «увлечения» частиц волнами [9, 3]:

$$\int dp p_j \tilde{I}_a = [\int dp p_j \tilde{I}_a]_{\text{дис}} + [\int dp p_j \tilde{I}_a]_{\text{недис}},$$

$$[\int dp p_j \tilde{I}_a]_{\text{дис}} = -\frac{e_a^2 \rho_a}{(2\pi)^4 T_a} \int d\omega dk \frac{k_j}{k^3} (\delta\tilde{E}\delta\tilde{E})_{\omega, k} \operatorname{Im} \frac{\chi_a u_a}{1 - \psi},$$

$$\psi = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{i\nu_a}{\omega - s\Omega_a + i\nu_a} J_s A_s,$$

$$\chi_{ax} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega + iv_a}{\omega - s\Omega_a + iv_a} J_s \left[ \frac{k_x}{\omega + iv_a (k_{\perp}^2 r_{La}^2)} \left( \frac{s}{\omega + iv_a} \frac{\omega + iv_a}{\Omega_a} A_s - \right. \right.$$

$$\left. \left. - A_s - A'_s \right) - \frac{ik_y}{\Omega_a} \left( A'_s - \frac{s}{k_{\perp}^2 r_{La}^2} \frac{\Omega_a}{\omega + iv_a} A_s \right) \right],$$

$$\chi_{ay} = \chi_{ax}(k_x \rightarrow k_y, k_y \rightarrow -k_x),$$

$$\chi_{az} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_{Ta}} A_s \left\{ (-1 + J_s) \frac{\omega + iv_a}{k_z v_{Ta}} - \frac{k_z v_{Ta}}{\omega - s\Omega_a + iv_a} J_s \right\},$$

$$\left[ \int dpp_j \tilde{I}_a \right]_{\text{недис}} = \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \int d\omega dk \frac{k_j}{k^2} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \psi} \times$$

$$\times \left\{ \frac{i\rho_a}{T_a} \left[ -1 + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega + iv_a}{\omega - s\Omega_a + iv_a} J_s A_s \right] - \frac{\partial}{\partial r} \zeta_a \right\},$$

$$\zeta_{ax} = \frac{\rho_a}{m_a \Omega_a} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{2k_x}{\Omega_a} J_s A'_s + \frac{1}{\omega - s\Omega_a + iv_a} J_s \times \right.$$

$$\left. \times \left[ -ik_y A'_s - 2sk_x A'_s + \frac{sk_x}{k_{\perp}^2 r_{La}^2} A_s \right] \right\},$$

$$\zeta_{ay} = \zeta_{ax}(k_x \rightarrow k_y, k_y \rightarrow -k_x),$$

$$\zeta_{az} = \frac{\rho_a}{|k_z| T_a} \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s \left\{ 1 + \left( \sqrt{2} + \frac{s\Omega_a}{|k_z| v_{Ta}} \right) \left[ -\frac{1}{z_s} J_s + z_s (-1 + J_s) \right] \right\},$$

$$J_s = -i\sqrt{\pi/2} z_s W(z_s/\sqrt{2}),$$

$$W(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\tau^2}}{x - \tau}, \quad A_s(\lambda) = I_s(\lambda) e^{-\lambda},$$

$$\lambda = k_{\perp}^2 r_{La}^2, \quad z_s = (\omega - s\Omega_a + iv_a) / |k_z| v_{Ta},$$

$$\Omega_a = e_a B / m_a c, \quad v_{Ta} = (T_a / m_a)^{1/2}, \quad r_{La} = v_{Ta} / |\Omega_a|.$$

С помощью полученных выражений можно рассчитать коэффициенты проводимости, диффузии и термодиффузии слабонеоднородной плазмы в магнитном поле,  $r_{La}/L_{\perp}, v_{Ta}/v_a L_{\parallel} \ll 1$ ,  $L_{\perp}, L_{\parallel}$  — поперечный и продольный размеры неоднородности плотности и температуры.

**3. Кинетические коэффициенты для слабо- и сильностолкновительной плазмы.** Пусть плазма неоднородна в направлении поперек внешнего магнитного поля,  $\nabla p, \nabla T \parallel e_x$ , и находится во внешнем электрическом поле  $E = \{E_x, 0, E_z\}$ . Рассмотрим влияние на электронные кинетические коэффициенты флуктуаций, характерные частоты  $\omega$  и волновые векторы  $\mathbf{k}$  которых удовлетворяют следующим условиям, типичным для широкого круга экспериментов:

$$\omega \ll \Omega_e, \quad \omega/k_z v_{Te} \ll 1, \quad k_{\perp}^2 r_{Le}^2 \ll 1, \quad (3)$$

Что касается характерных продольных длин волн, то мы рассмотрим две возможности:  $v_e \ll k_z v_{Te}$  («слабостолкновительная» плазма) и  $v_e \gg k_z v_{Te}$  («сильностолкновительная» плазма).

а) «Слабостолкновительная» плазма. Удобно ввести матрицу турбулентных частот столкновений по формуле

$$\left[ \int dpp_j \tilde{I}_e \right]_{\text{дис}} = -\rho_e m_e \tilde{v}_j u_l.$$

Приведем выражение для  $\tilde{v}_{jl}$  в случае изотропного в азимутальной плоскости пространственного спектра флюктуаций  $(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{k_\perp, k_z}$ :

$$\tilde{v}_{jl} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{e\perp} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{e\parallel} \\ 0 & \tilde{v}_{e\parallel} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{e\perp} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2}{B^2} \int \frac{dk_\perp k_\perp dk_z}{16\pi^2} \frac{k_\perp^4}{k^2} \frac{(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{k_\perp, k_z}}{|k_z| v_{Te}} \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{v_e}{|k_z| v_{Te}} \right), \\ \tilde{v}_{e\parallel} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{V m_e T_e^3} \int \frac{dk_\perp k_\perp dk_z}{4\pi^2} \frac{|k_z|}{k^2} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{k_\perp, k_z} \times \\ &\quad \times \left( 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \frac{v_e}{|k_z| v_{Te}} \right). \end{aligned}$$

Аномальные частоты столкновений  $\tilde{v}_{e\perp}$ ,  $\tilde{v}_{e\parallel}$  в плазме с квазилинейным интегралом при выполнении условий (3) вычислялись несколько иным способом Баймбетовым [10]. Значение  $\tilde{v}_{e\parallel}$  при  $v_e = 0$  совпадает с вычисленным в его работе; выражение для  $\tilde{v}_{e\perp}$  отличается от полученного в [10] малым множителем  $k_\perp^2 r_{Le}^2 / 2$ ; это различие возникло из-за неточности, допущенной им при расчете величин, аналогичных  $\chi_e$ . Для недиссипативного вклада получаем

$$\begin{aligned} \left[ \int dpp_j \tilde{I}_e \right]_{\text{недис}} &= \frac{e^2 \rho_e}{(2\pi)^4 T_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int d\omega dk \frac{k_j}{k^2 |k_z| v_{Te}} \times \\ &\quad \times (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k} \left\{ \omega \left[ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \frac{v_e}{|k_z| v_{Te}} \right] - \right. \\ &\quad - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \frac{d \ln \rho_e}{dx} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{v_e}{|k_z| v_{Te}} \right] + \\ &\quad \left. + \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \frac{d \ln T_e}{dx} \left[ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{v_e}{|k_z| v_{Te}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы проследить связь с расчетами, выполненными другими способами, пренебрежем диссипативным вкладом от  $\tilde{I}_e$  и малыми столкновительными поправками в (5). Тогда аномальная часть потока импульса вдоль оси  $x$  совпадает с выражениями (17), (18) в работе Хортон [11]. Предположим, что спектр изотропный в азимутальной

плоскости, и учтем диссипативный вклад и слагаемое, пропорциональное градиенту плотности. Тогда

$$\rho_e u_{ex} = -D_e \nabla \rho_e - (\sigma_{e\perp}/e) E_x; \quad (6)$$

$$\rho_e u_{ez} = -(\sigma_{e\parallel}/e) E_z; \quad (7)$$

$$D_e = \frac{T_e v_{\text{eff}}^1}{m_e \Omega_e^2} + \frac{c^2}{B^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int \frac{dk_\perp dk_z}{8\pi^2} \frac{k_\perp^3}{k^2} \frac{(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k_\perp, k_z}}{|k_z| v_{Te}}; \quad (8)$$

$$\sigma_{e\perp} = \frac{\rho_e e^2}{m_e \Omega_e^2} v_{\text{eff}}^1, \quad \sigma_{e\parallel} = \frac{\rho_e e^2}{m_e v_{\text{eff}}^1}; \quad (9)$$

$$v_{\text{eff}}^1 = v_e + \tilde{v}_{e\perp}, \quad v_{\text{eff}}^\parallel = v_e + \tilde{v}_{e\parallel}, \quad (10)$$

$D_e$  — электронный коэффициент диффузии,  $\sigma_{e\perp}, \sigma_{e\parallel}$  — соответственно электронные коэффициенты поперечной и продольной электропроводности. Первое слагаемое в  $D_e$  обусловлено диссипативными вкладами классического и крупномасштабного интегралов; второе слагаемое в  $D_e$  обусловлено недиссипативным вкладом  $\tilde{I}_e$ . Легко убедиться, что это слагаемое превышает вклад в диффузию от диссипативной части  $\tilde{I}_e$ , определяемой  $\tilde{v}_{e\perp}$ , для условий (3). Таким образом, соотношение Эйнштейна  $D_e/b_e = T_e/e$  между диффузией  $D_e$  и подвижностью  $b_e = \sigma_e/\rho_e$ , которое справедливо для классических кинетических коэффициентов, не выполняется для аномальных кинетических коэффициентов из-за учета недиссипативного вклада от  $\tilde{I}_e$ .

б) «Сильностолкновительная» плазма. Матрица турбулентных частот столкновений для изотропного в азимутальной плоскости спектра  $(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k_\perp, k_z}$  имеет вид (4), где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{e\perp} &= \frac{c^2}{B^2} \int \frac{d\omega dk_\perp dk_z}{32\pi^3} \frac{k_\perp^5}{k^2} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k_\perp, k_z} \frac{k^2 \hat{D}_e}{\omega^2 + k^4 \hat{D}_e^2}, \\ \tilde{v}_{e\parallel} &= \frac{e^2}{m_e T_e v_e} \int \frac{d\omega dk_\perp dk_z}{4\pi^3} \frac{k_z^2}{k^2} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k_\perp, k_z} \frac{k^2 \hat{D}_e k_z^2 D_{e\parallel}}{\omega^2 + k^4 \hat{D}_e^2}, \end{aligned}$$

$$k^2 \hat{D}_e \equiv k_\perp^2 D_{e\perp} + k_z^2 D_{e\parallel}, \quad D_{e\perp} = T_e v_e / m_e \Omega_e^2, \quad D_{e\parallel} = T_e / m_e v_e,$$

$$\begin{aligned} \left[ \int dpp_j \tilde{I}_e \right]_{\text{недис}} &= \frac{e^2 \rho_e}{T_e} \int \frac{d\omega dk}{(2\pi)^4} \frac{k_j}{k^2} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k} \times \\ &\times \frac{k^2 \hat{D}_e}{\omega^2 + k^4 \hat{D}_e^2} \left\{ \omega - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \left[ \frac{d \ln \rho_e}{dx} - \frac{d \ln T_e}{dx} \left( \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{v_e^2} + k_\perp^2 r_{Te}^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если пренебречь диссипативным вкладом, то выражение для аномальной части потока вдоль градиента плотности при  $\nabla T = 0$  соответствует полученному в работе [3]. Если учесть диссипативный вклад и слагаемое, пропорциональное градиенту плотности, то для потоков вдоль осей  $x$  и  $z$  получим выражения (6), (7), (9), (10), где

$$D_e = \frac{T_e v_{\text{eff}}^1}{m_e \Omega_e^2} + \frac{c^2}{B^2} \int \frac{d\omega dk_\perp dk_z}{16\pi^4} \frac{k_\perp^3}{k^2} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k_\perp, k_z} \frac{k^2 \hat{D}_e}{\omega^2 + k^4 \hat{D}_e^2}. \quad (11)$$

**4. Диффузия поперек магнитного поля.** Оценим коэффициенты диффузии электронов в слабоионизованной плазме поперек магнитного поля, основываясь на экспериментальных данных об уровнях флуктуаций, полученных в [4, 5].

а) «Слабостолкновительная» плазма. Представим спектр в виде  $(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k} = \pi [\delta(k_z - k_{z0}) + \delta(k_z + k_{z0})] (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k \perp}$ ,  $k_{z0}$  — характерное продольное волновое число. Из (8) получаем выражение для коэффициента диффузии  $D_e = D_{e\perp} + \tilde{D}_e$ ,  $\tilde{D}_e$  — вклад в диффузию, обусловленный крупномасштабными флуктуациями:

$$D_e = D_{e\perp} \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{l_e e^2 \langle (\delta \tilde{E})^2 \rangle}{k_{z0} T_e^2} \right), \quad (12)$$

где  $l_e = v_{Te}/v_e$ ,  $\langle (\delta \tilde{E})^2 \rangle = (2\pi)^{-4} \int d\omega d\mathbf{k} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k}$ . В эксперименте [4] исследовались низкочастотные ( $\omega < 10^6$  Гц) флуктуации плотности плазмы  $\langle (\delta \rho)^2 \rangle$ , уровень флуктуаций  $\langle (\delta \rho)^2 \rangle / \rho^2 \approx 0,1$  при достаточно высокой мощности ЭЦР нагрева. Параметры плазмы:  $\rho_e = 10^{16} \div 10^{17}$  см<sup>-3</sup>,  $T_e = 1,5 \div 5$  эВ,  $|\Omega_e| = 7,6 \cdot 10^9$  Гц,  $v_e = (2 \div 4) \cdot 10^5$  Гц. Характерные размеры флуктуаций:  $k_{z0} = 1 \cdot 10^{-2}$  см<sup>-1</sup>,  $k_{\perp} \approx 1$  см<sup>-1</sup>. Предполагая примерное равенство относительных флуктуаций плотности и потенциала плазмы,  $\delta \rho / \rho \approx e \delta \phi / T_e$ , с помощью формулы (12) получим, что добавка к классическому коэффициенту диффузии может достигать  $10^3 D_{e1}$ , т. е. более чем на порядок превышать неоклассический коэффициент диффузии для данного эксперимента (режим Пфирша—Шлютера).

б) «Сильностолкновительная» плазма. Для расчета используем формулу (11). Приведем выражение для коэффициента диффузии в случае, когда обратное время корреляции флуктуаций, которое меньше или порядка частоты колебаний, намного меньше «диффузионной» частоты:  $\tau_k^{-1}(k) = \Delta \omega_k \leq \omega_k \ll k^2 \tilde{D}_e$ . Тогда

$$\tilde{D}_e = \frac{c^2}{B^2} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{8\pi^2} \frac{k_{\perp}^3}{k^2} \frac{(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{k_{\perp}, k_z}}{k^2 \hat{D}_e}. \quad (13)$$

Этот результат интересно сравнить с часто используемой для расчета коэффициента диффузии частиц в двумерной плазме формулой Тейлора—Макнамары [12, 13]:

$$\tilde{D}_e = \frac{c^2}{B^2} \int \frac{dk_{\perp}}{4\pi^2} \frac{(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{k_{\perp}}}{k_{\perp}^2 \tilde{D}_e}. \quad (14)$$

Не вдаваясь в анализ эвристической процедуры, позволившей получить формулу (14), заметим, что применимость ее для трехмерных флуктуаций электрического поля, по-видимому, должна быть ограничена неравенством  $k_{\perp}^2 \tilde{D}_e > k^2 \hat{D}_e$ . В условиях экспериментов, описанных в обзоре [5],  $k_z^2 D_{e\parallel} / k_{\perp}^2 \hat{D}_e \approx 10$  даже для аномально большого значения  $\tilde{D}_e$ , полученного в [5] с помощью формулы (14). Таким образом, для расчета коэффициента диффузии по экспериментальным данным [5] целесообразно пользоваться формулой (13). Для спектра с характерной продольной длиной волны  $\lambda_{z0}$

$$D_e = D_{e\perp} \left( 1 + \frac{1}{8\pi^2} \frac{\lambda_{z0}^2 e^2 \langle (\delta \tilde{E})^2 \rangle}{T_e^2} \right).$$

При  $\lambda_{z0} \approx 10$  км,  $T_e \approx 0,1$  эВ,  $\delta E \approx 0,1$  мВ/м добавка к классическому значению коэффициента диффузии составляет примерно  $10^2 D_{e\perp}$ . Чтобы привести более надежные оценки и определить зависимость коэффициента аномальной диффузии от магнитного поля и температуры, необходимо знать функцию  $(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k}$ , которая определяется из уравнений, описывающих турбулентность плазмы. Однако даже в квазиравновесной плазме зависимость  $D_e(B, T_e)$  может отличаться от классической. Чтобы показать это, рассчитаем коэффициент диффузии, вызванной длинноволновыми гидродинамическими флюктуациями. Подставим в (11) равновесный спектр флюктуаций электрического поля в области низких частот:

$$(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k} = \frac{8\pi T_e k^2 r_{De}^2}{(k^2 r_{De}^2 + k_\perp^2 r_s^2)^2} \times \\ \times \frac{k^2 \hat{D}_e}{\omega^2 + k^2 \hat{D}_e^2 (1 + 1/(k^2 r_{De}^2 + k_\perp^2 r_s^2))^2},$$

где  $r_{De}^2 = T_e / 4\pi e^2 \rho_e$ ,  $r_s^2 = T_e / m_i \Omega_i^2$ . Этот спектр может быть получен, например, из уравнений гидродинамики с ланжевеновским источником, описывающим структуру среды, в электронном уравнении переноса импульса. В сильных магнитных полях, когда  $r_{De} \gg r_s$ ,

$$D_e = D_{e\perp} \left( 1 + \frac{\pi}{8} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{|\Omega_e|}{v_e} \frac{e^2}{r_{De} T_e} \right).$$

Это выражение совпадает с формулой (22.21) в [14], полученной другим способом. Несмотря на малую величину  $e^2/r_{De} T_e$  из-за большого отношения  $|\Omega_e|/v_e$  дополнительный вклад в диффузию, пропорциональный  $1/B$ , может оказаться существенным.

В заключение сделаем следующее замечание: сумма моментов крупномасштабных интегралов в электронном и ионном уравнениях переноса импульса равна нулю для стационарных и однородных флюктуаций поля, см. (28.17) в [7]. Из этого следует равенство аномальных электронного и ионного потоков в замагниченной плазме,  $\Omega_e \gg v_{eff}$ . Пространственная неоднородность приводит к появлению в интегrale дополнительного слагаемого, пропорционального пространственной производной от спектральной плотности флюктуаций; соответствующий вклад будет содержать и сумму моментов  $\tilde{I}_e, \tilde{I}_i$ . Вопросы, связанные с различием электронного и ионного потоков и с возникающим амби-полярным электрическим полем, требуют отдельного рассмотрения.

Таким образом, в данной работе исследуется влияние крупномасштабных флюктуаций на кинетические процессы в слабоионизованной плазме во внешнем магнитном поле. Учет крупномасштабных флюктуаций приводит к дополнительным диссипативному и недиссипативному вкладам в уравнение переноса импульса частиц и, как следствие, к изменению кинетических коэффициентов. Получены выражения для эффективной частоты столкновений и аномальных потоков частиц. Спектр крупномасштабных флюктуаций считался при этом заданным. Приведены выражения для коэффициента диффузии электронов и оценки диффузии для двух экспериментов в лабораторной и ионосферной плазме, где исследовались надтепловые крупномасштабные флюктуации. Рассчитан коэффициент диффузии поперек магнитного поля, обусловленный гидродинамическими флюктуациями в равновесной плазме. Показано, что в сильном магнитном поле он может превышать классический и зависит от магнитного поля как  $1/B$ .

Автор выражает глубокую признательность Ю. Л. Климонтовичу, а также А. А. Рухадзе и участникам руководимого им семинара за обсуждение работы и ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гурин А. А., Пасечник Л. Л., Попович А. С. Диффузия плазмы в магнитном поле. — Киев: Наукова думка, 1979. — 267 с.
2. Тимофеев А. В., Швилкин Б. Н. // УФН. 1976. Т. 118. № 2. С. 273.
3. Белавин М. И., Тимофеев А. В., Швилкин Б. Н. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. № 3. С. 705.
4. Schmitz L. et al. // Plasma Phys. Contr. Fusion. 1985. V. 27. № 8. Р. 891.
5. La Belle J., Kelley M. C., Seyler C. E. // Geophys. Res. 1986. V. 91. A5. Р. 5513.
6. Жданов В. М. Явления переноса в многокомпонентной плазме. — М.: Энергоиздат, 1982. — 167 с.
7. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. — М.: Наука, 1975. — 352 с.
8. Наливайко В. П. Диссертация. — М.: Гос. ун-т, 1983.
9. Кадомцев Б. Б. // В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонто-вича — М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 187.
10. Баймбетов Ф. Диссертация. — Алма-Ата: Гос. ун-т, 1986.
11. Хортон В. В кн.: Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана — М.: Энергоатомиздат, 1984, Т. 2. С. 362.
12. Taylor J. B., Mc Namara B. // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 7. Р. 1492.
13. Кроммес Д. А. В кн.: Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана — М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2. С. 174.
14. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. — М.: Гос. ун-т, 1964. — 316 с.

Харьковский физико-технический институт  
АН УССР

Поступила в редакцию  
4 апреля 1988 г.,  
после доработки  
26 января 1989 г.

## TO THE THEORY OF ANOMALOUS RESISTIVITY AND DIFFUSION OF A WEAKLY IONIZED PLASMA IN A MAGNETIC FIELD

A. V. Chechkin

The formulas for the coefficients of anomalous resistivity and diffusion of a weakly ionized plasma in a magnetic field are obtained. Anomalous values of kinetic coefficients in comparing with classical ones are due to the influence of a large-scale overthermal fluctuations on the kinetic processes. Fluctuation spectrum is assumed to be known. The possibility of the Bohm dependence of the diffusion coefficient on the magnetic field in equilibrium plasma is demonstrated.

---

УДК 538.56:519.25

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С СИЛЬНЫМИ НЕБЕЛЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

O. B. Музычук

Методом матричных цепных дробей получены стационарные значения вторых моментов выходного шума гармонического осциллятора с гауссовыми марковскими флуктуациями параметров. Интенсивности и времена корреляции последних могут быть в сущности произвольными. Численным образом исследована сходимость используемой процедуры, найдена область среднеквадратичной устойчивости системы.

1. Как показано в работе [1] (см. также библиографию в [1]), среднее значение выходного шума стохастической линейной системы, описываемой дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с гауссовыми марковскими флуктуациями какого-либо параметра, представимо цепной дробью\*. Если таких параметров несколько или если интересоваться не только средним значением, но и высшими моментами, то метод анализа, использованный в [1], приводит к матричным цепным дробям. При использовании ЭВМ метод матричных цепных дробей позволяет исследовать статистические характеристики как линейных систем с сильными флуктуациями, так и нелинейных [4].

В настоящей работе этим методом исследовались энергетические характеристики и среднеквадратичная устойчивость резонансной системы. Интенсивность и время корреляции параметрических воздействий могут быть произвольными (разумеется, определенные ограничения накладывают условия устойчивости системы и сходимости используемой процедуры, см. ниже). Полученные результаты представляют интерес в ряде прикладных задач статистической радиофизики, механики, акустики [5].

2. Рассмотрим гармонический осциллятор с флуктуациями собственной частоты и потерь:

$$\ddot{y} + 2\delta(1+\beta(t))\dot{y} + \Omega^2(1+\alpha(t))y = \Omega^2x(t). \quad (1)$$

Параметрические воздействия определим вспомогательными стохастическими уравнениями

$$\dot{\alpha} + \Pi_1\alpha = \eta_1(t), \quad \dot{\beta} + \Pi_2\beta = \eta_2(t), \quad (2)$$

где  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  — гауссовые  $\delta$ -коррелированные шумы,  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — полосы флуктуаций параметров,  $x(t)$  — аддитивный шум, для простоты, белый.

Введя безразмерное время  $\theta = \Omega t$ , запишем (1), (2) в виде системы

$$\begin{aligned} y' &= z, \quad z' = -\delta(1+\beta)z - (1+\alpha)y + x, \\ \alpha' &= -v_1\alpha + \tilde{\eta}_1, \quad \beta' = -v_2\beta + \tilde{\eta}_2, \end{aligned} \quad (3)$$

\* Метод анализа, приводящий к цепным дробям, заключается в получении цепочки уравнений для совместных кумулянтов флуктуаций параметров системы и выходного шума. Ограничение несколькими членами таких цепочек для получения замкнутых уравнений (для моментов в работе [2] названо «бескумулянтным» методом. Некоторые достаточные условия сходимости процедуры получены в работе [3].

где штрих — производная по  $\theta$ , безразмерные параметры  $\delta = Q^{-1} = 2h/\Omega$ ,  $v_{1,2} = \Pi_{1,2}/\Omega$  есть относительное затухание ( $Q$  — добротность) и нормированные полосы флуктуаций. Будем интересоваться стационарными значениями среднеквадратичных характеристик выходного шума

$$\langle u \rangle = \langle y^2 \rangle, \quad \langle v \rangle = \langle z^2 \rangle, \quad \langle w \rangle = \langle yz \rangle.$$

Усредняя, для стационарных значений получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= 0, \quad \delta \langle v \rangle + \langle \alpha w \rangle + \delta \langle \beta v \rangle = D_x, \\ \langle u \rangle - \langle v \rangle + \langle \alpha u \rangle + \delta \langle \beta w \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

( $D_x$  — спектральная плотность шума  $x(t)$ ). Легко видеть, что

$$\langle \alpha w \rangle = \frac{v_1}{2} \langle \alpha u \rangle, \quad \langle \beta w \rangle = \frac{v_2}{2} \langle \beta u \rangle,$$

поэтому переменную  $w$  и связанные с ней совместные кумулянты можно исключить, записав (4) в виде

$$\delta \langle v \rangle + \frac{v_1}{2} \langle \alpha u \rangle + \delta \langle \beta v \rangle = D_x, \quad \langle u \rangle - \langle v \rangle + \langle \alpha u \rangle + \frac{1}{2} \delta v_2 \langle \beta u \rangle = 0. \quad (5)$$

На основании (3) можно получить уравнения для совместных кумулянтов, входящих в (5); они «зацепятся» за высшие, причем зацепление имеет характер трехчленного взаимодействия. Используя формализм кумулянтных скобок [6], в частности полезную формулу размыкания смешанных «моменто-кумулянтов»

$$\begin{aligned} \langle \alpha^{[m]}, \beta^{[n]}, \alpha Z \rangle &= \langle \alpha^{[m+1]}, \beta^{[n]}, Z \rangle + \\ &+ m \langle \alpha^2 \rangle \langle \alpha^{[m-1]}, \beta^{[n]}, Z \rangle + n \langle \alpha \beta \rangle \langle \alpha^{[m]}, \beta^{[n-1]}, Z \rangle, \quad m, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

( $\alpha, \beta$  — гауссовые процессы,  $Z$  — произвольный функционал от них), можно записать цепочку уравнений для совместных кумулянтов. Обозначив для краткости

$$\langle \alpha^{[m]}, \beta^{[n]}, u \rangle = \langle u_{m,n} \rangle, \quad \langle \alpha^{[m]}, \beta^{[n]}, v \rangle = \langle v_{m,n} \rangle, \quad m v_1 + n v_2 = v_{m,n}$$

и исключив совместные кумулянты, содержащие переменную  $w$  (из соотношения  $\langle \alpha^{[m]}, \beta^{[n]}, w \rangle = (1/2) v_{m,n} \langle \alpha^{[m]}, \beta^{[n]}, u \rangle$ ), получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} v_{m,n} \langle u_{m,n} \rangle + (v_{m,n} + 2\delta) \langle v_{m,n} \rangle + v_{m+1,n} \langle u_{m+1,n} \rangle + 2\delta \langle v_{m,n+1} \rangle + \\ + m (v_{m-1,n} \langle \alpha^2 \rangle \langle u_{m-1,n} \rangle + 2\delta \langle \alpha \beta \rangle \langle v_{m-1,n} \rangle) + n (v_{m,n-1} \langle \alpha \beta \rangle \langle u_{m,n-1} \rangle + \\ + 2\delta \langle \beta^2 \rangle \langle v_{m,n-1} \rangle) &= 2\delta \delta_{m,0} \delta_{0,n} \langle u \rangle_0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{v_{m,n}}{2} (\delta_{m,n} + \delta) \right) \langle u_{m,n} \rangle - \langle v_{m,n} \rangle + \langle u_{m+1,n} \rangle + \frac{1}{2} \delta v_{m,n+1} \langle u_{m,n+1} \rangle + \\ + m (\langle \alpha^2 \rangle + \delta v_{m-1,n} \langle \alpha \beta \rangle) \langle u_{m-1,n} \rangle + n (\delta v_{m,n-1} \langle \beta^2 \rangle + \langle \alpha \beta \rangle) \langle u_{m,n-1} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера,  $\langle u \rangle_0 = D_x / \delta$  — «невозмущенное» значение средней энергии,  $m, n = 0, 1, \dots$ , причем

$$\langle u_{0,0} \rangle \equiv \langle u \rangle, \quad \langle v_{0,0} \rangle \equiv \langle v \rangle.$$

Если в исходной системе отсутствуют флуктуации потерь ( $\beta \equiv 0$ ), то следует положить  $n=0$ , а при  $\alpha \equiv 0$  —  $m=0$ . В отсутствие взаимной корреляции, очевидно,  $\langle \alpha \beta \rangle = 0$ ,

3. Введем кумулянтные векторы со следующими компонентами:

$$X_1 = (\langle u \rangle, \langle v \rangle), \quad X_2 = (\langle u_{1,0} \rangle, \langle v_{1,0} \rangle, \langle u_{0,1} \rangle, \langle v_{0,1} \rangle), \dots, \\ X_k = (\langle u_{k,0} \rangle, \langle v_{k,0} \rangle, \langle u_{k-1,1} \rangle, \langle v_{k-1,1} \rangle, \dots, \langle u_{0,k} \rangle, \langle v_{0,k} \rangle). \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что исходная система (5) плюс рекуррентные соотношения (6) и обозначения (7) позволяют сформулировать задачу в матричной форме:

$$\begin{aligned} A_1 X_1 + B_1 X_2 &= C_1 X_0, \\ A_2 X_2 + B_2 X_3 &= C_2 X_1, \\ &\dots \\ A_k X_k + B_k X_{k+1} &= C_k X_{k-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь максимальные размерности матриц  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  соответственно равны  $2k \times 2k$ ,  $2k \times (2k+2)$ ,  $2k \times (2k-2)$ ; вектор  $\lambda_0 = (2D_x, 0)$ ; элементы матриц  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  легко найти, расписывая соотношения (6).

Решение системы (8) можно записать с помощью матричной цепной дроби (см. также [4])

$$X_1 = \frac{C_1 X_0}{A_1 + \frac{B_1 C_2}{A_2 + \frac{B_2 C_3}{A_3 + \dots}}}, \quad (9)$$

которая фактически определяет следующую процедуру решения: ограничившись  $n$ -м приближением, находим «подправленные» матрицы  $\tilde{A}_k$  (снизу вверх в (9)) по рекуррентным формулам

$$\tilde{A}_n = A_n, \quad \tilde{A}_{n-1} = A_{n-1} + B_{n-1} \tilde{A}_{n-2}^{-1} C_n, \dots, \quad \tilde{A}_1 = A_1 + B_1 \tilde{A}_2^{-1} C_2, \quad (10),$$

где  $\tilde{A}_k^{-1}$  — обратная матрица для  $\tilde{A}_k$ . Порядок матриц при такой процедуре понижается, дойдя до второго у матрицы  $\tilde{A}_1$ . Искомый вектор  $X_1$  находим из соотношения

$$X_1 = \tilde{A}_1^{-1} C_1 X_0. \quad (11)$$

При желании после нахождения  $X_1$  можно получить кумулянтные векторы высших порядков аналогичным образом:

$$X_2 = \tilde{A}_2^{-1} C_2 X_1, \quad X_3 = \tilde{A}_3^{-1} C_3 X_2, \quad \dots$$

4. Алгоритм вычислений, определяемый формулами (10), (11), легко реализуется с помощью ЭВМ. Основные вычислительные трудности (и основное время счета) связаны с обращением матриц  $\tilde{A}_k$ . Автором использовалась следующая схема обращения [7]:

$$A^{-1} = (1/a_n) \sum_{i=1}^n a_{i-1} A^{n-i}, \quad a_j = -(1/j) \sum_{k=0}^{j-1} a_k \operatorname{Sp} A^{j-k}, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = -\operatorname{Sp} A,$$

где  $A^s$  — степень матрицы  $A$ ,  $A^0 \equiv E$ ,  $\operatorname{Sp}$  — шпур,  $n$  — порядок матрицы.

Если исходная стохастическая система имеет только один флюктуирующий параметр, то, как следует из (6), (7), размерности векторов  $X_k$  и соответствующих матриц не растут с ростом порядка  $k$ :  $X_k = (\langle u_{k,0} \rangle, \langle v_{k,0} \rangle)$  при  $\beta=0$  или  $X_k = (\langle u_{0,k} \rangle, \langle v_{0,k} \rangle)$  при  $\alpha=0$ , что существенно упрощает вычисления. Выпишем соответствующие матрицы: при  $\beta=0$

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} k & k+2\delta\tau \\ \tau + \frac{k}{2} \left( \frac{k}{\tau} + \delta \right) & -\tau \end{pmatrix}, \quad B_{k+1} = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ \tau & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{k+1} = \begin{pmatrix} -D_1 k(k-1) & 0 \\ -\mu_1 \delta k & 0 \end{pmatrix},$$

(12a)

$$D_1 = \langle \alpha^2 \rangle, \quad \tau = v_1^{-1};$$

при  $\alpha=0$  матрицы  $A_k$  не меняются ( $\tau \rightarrow v_1^{-1}$ ), а

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2\delta\tau \\ \frac{1}{2}(k+1)\delta & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -k\mu_2 \\ -\frac{k}{2}(k-1)D_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \langle \beta^2 \rangle.$$

(12b)

Здесь  $\mu_1 = QD_1\tau$ ,  $\mu_2 = 2D_2\tau$  — эффективные спектральные мощности параметрических воздействий (для случая дельта-коррелированных флюктуаций условия среднеквадратичной устойчивости системы выражаются через эти параметры:  $\mu_1 < 1$  при  $\beta=0$  и  $\mu_2 < 1$  при  $\alpha=0$ ).

5. Приведем результаты, полученные с помощью численного счета на ПЭВМ указанным методом. На рис. 1 показана зависимость средней мощности нормированного выходного шума  $\langle \bar{u} \rangle = \langle u \rangle / \langle u \rangle_0$  от спектральной мощности  $\mu_1$  и времени корреляций  $\tau$  флюктуаций собственной частоты  $\alpha(t)$ . Видно, что с ростом  $\tau$  эффективность параметрической накачки падает. На рис. 2 приведена зависимость  $\langle \bar{u} \rangle$  от  $\tau$  при фиксированной эффективной мощности флюктуаций  $QD_1$  ( $Q$  — добротность невозмущенной системы). Как следует из графика, при этом наибольшее параметрическое возбуждение оказывает шум с  $\tau = 1/2$  (т. е. с шириной спектра  $2\Omega$ ). Уменьшение эффективности накачки в обе стороны от «оптимального» значения времени корреляции связано с уменьшением спектральной плотности шума на параметрических частотах системы  $2\Omega, \Omega, 2\Omega/3, \dots$  (При  $\tau \rightarrow 0$  спектр расширяется в «бесполезной» области  $\omega > 2\Omega$ , уменьшаясь, в силу условия  $D_1 = \text{const}$ , в «полезной», а при увеличении  $\tau$  в спектре постепенно пропадают основные параметрические частоты.)

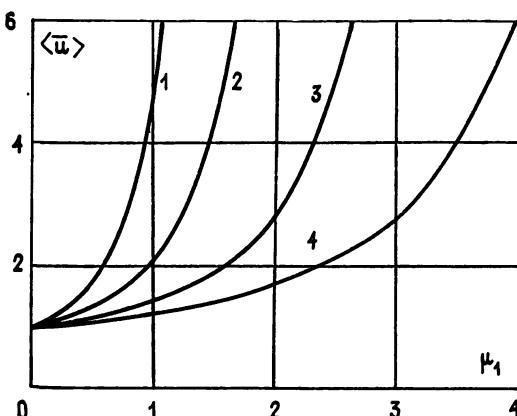


Рис. 1.

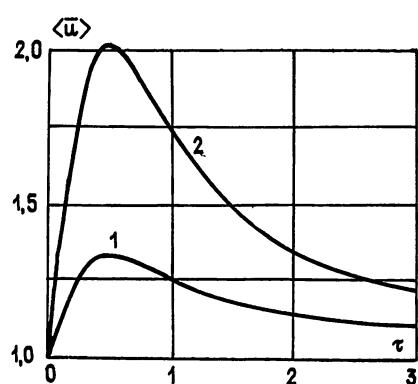


Рис. 2.

Рис. 1. Кривые 1—4 для  $\tau = 0,25; 0,5; 0,75; 1$  соответственно.  
Рис. 2. Кривая 1 для  $QD_1 = 1$ , кривая 2 —  $QD_1 = 2$ .

На рис. 3 показана область среднеквадратичной устойчивости системы с флюктуациями  $\alpha(t)$  на плоскости параметров  $\tau$ ,  $\mu_1$ . Сплошная линия — граница устойчивости, пунктир — граница сходимости используемой процедуры; как видно из графика, эти линии продолжают друг друга. Отметим сильную зависимость области устойчивости от добротности системы.

Сходимость метода оценивалась следующим образом: если начиная с некоторого номера приближения  $n$  результаты  $n$ -го и  $(n-1)$ -го приближений отличались менее чем на заданную величину  $\varepsilon$ , то вычисления автоматически прекращались (для приведенных здесь результатов  $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Если же при разумных значениях  $n$  это не имело места, процедура полагалась расходящейся.

Как показывает численный анализ, сходимость метода очень хорошая при  $\tau \leq 1$  и ухудшается с ростом  $\tau$ . Применительно к рассматриваемой системе это имеет определенный физический смысл: любыми методами трудно рассчитать параметрическую систему, возбуждаемую сильным шумом, но не эффективным образом (в спектре мало основных параметрических компонент).

Приведенная ниже табл. 1 дает представление о скорости сходимости метода в области значений параметров, где диффузионное приближение и приближение Бурре не работают\*. В ней даны значения  $\langle \bar{u} \rangle$  и  $\langle \bar{v} \rangle$  (соответственно 1-й и 2-й столбцы) для четырех пар параметров  $\tau$  и  $\mu_1$ , причем последние две пары лежат в непосредственной близости от границы среднеквадратичной устойчивости (соответствующие точки показаны кружками на рис. 3,  $Q=20$ );  $n$  — номер приближения. Отметим, что вблизи границы устойчивости второе приближение (хорошо известное как приближение Бурре) становится совершенно непригодным.

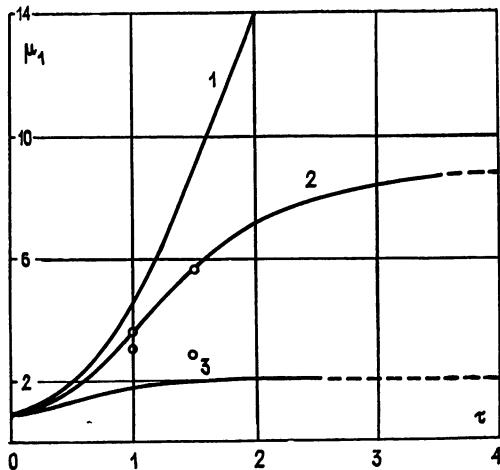


Рис. 3.

Рис. 3. Кривая 1 для добротности  $Q=100$ , кривая 2 —  $Q=20$ , кривая 3 —  $Q=4$ ; область устойчивости лежит ниже соответствующей кривой.

Рис. 4. Кривые 1 и 2 для  $Q=10$ : 1 —  $\tau=0,25$ , 2 —  $\tau=1$ . Кривые 3 и 4 (пунктир) для  $Q=2$ : 3 —  $\tau=0,25$ , 4 —  $\tau=1$ .

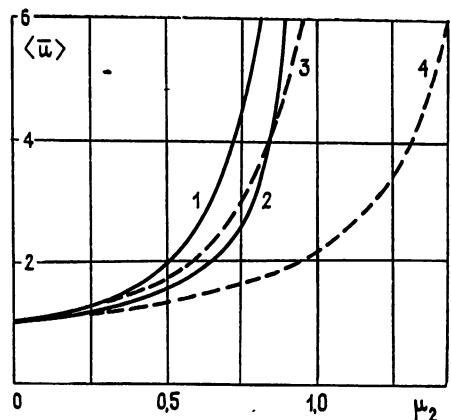


Рис. 4.

На рис. 4 показана зависимость средней мощности  $\langle \bar{u} \rangle$  от параметров  $\mu_2$  и  $\tau$  для системы с флюктуациями потерь  $\beta(t)$ . Поведение

\* Условия применимости приближения Бурре для рассматриваемой системы имеют вид  $\mu_1 \tau \ll 1$ . Как известно, оно учитывает лишь основную зону в спектре параметрической накачки; для приведенных же в таблице значений параметров  $\tau$  и  $\mu_1$  накачка осуществляется в основном высшими (низкочастотными) параметрическими зонами.

Таблица 1

$n$	$\tau=1, \mu_1=3$	$\tau=1,5, \mu_1=3$	$\tau=1, \mu_1=3,6$	$\tau=1,5, \mu_1=5,58$
2	3,10 2,91	1,57 1,50	5,36 4,96	3,09 2,82
3	4,49 4,18	1,72 1,63	25,78 23,53	9,96 8,79
4	4,67 4,34	1,74 1,65	43,76 39,88	41,52 36,23
5	4,68 4,34	1,75 1,65	45,36 41,33	125,78 109,51
6	— —	— —	45,40 41,37	164,45 143,13
7	— —	— —	45,40 41,37	167,96 146,18
8	— —	— —	— —	168,12 146,32
9	— —	— —	— —	168,13 146,32

соответствующих кривых качественно подобно приведенным на рис. 1. Существенным же отличием от случая возбуждения флюктуациями собственной частоты является то, что при средней и большой ( $Q \geq 10$ ) добротности системы граница среднеквадратичной устойчивости мало отличается от прямой  $\mu_2 = 1$ , как и в хорошо известном случае белых флюктуаций. Это вполне естественно, поскольку здесь принципиальны низкочастотные составляющие спектра флюктуаций, влияние которых качественно верно описывает и диффузионное приближение.

В заключение отметим, что использованный в работе метод является весьма универсальным средством отыскания моментов стохастических систем с сильными флюктуациями параметров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 10. С. 1246.
2. Крейчин Р. Х. Гидротехническая неустойчивость. — М.: ИЛ, 1964. С. 231.
3. Бобрик Р. В. // Укр. математ. журн. 1985. Т. 37. № 5. С. 551.
4. Музычук О. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 169.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970.

Горьковский инженерно-строительный  
институт

Поступила в редакцию  
4 апреля 1988 г.

#### ENERGY CHARACTERISTICS AND STABILITY OF HARMONIC OSCILLATOR WITH INTENSE PARAMETER FLUCTUATIONS

O. V. Muzychuk

Using the matrix chain fractions method stationary values of second order moments of harmonic oscillator output noise with Gaussian Markov parameters fluctuations are obtained. Power and correlation scales of fluctuations may be almost arbitrary. The convergences of this procedure are studied by numeral method. The region of rms system stability is obtained.

УДК 530.182:517.93

## РОЛЬ СИММЕТРИИ И ФОРМЫ ПОТЕНЦИАЛА НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЕТОРА В ИЕРАРХИИ БИФУРКАЦИЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*A. M. Самсон, Ю. А. Логвин, С. И. Туровец*

Исследовано влияние симметрии и формы потенциала нелинейного осциллятора на иерархию бифуркаций при гармоническом воздействии. Рассмотренные уравнения описывают динамику нелинейного электрического колебательного контура и многих других физических объектов. Предложен аналитический метод расчета нижних бифуркационных границ в пространстве управляющих параметров системы. Показано, что жесткость и симметрия потенциала препятствуют развитию неустойчивостей в системе и возникновению в ней странного аттрактора.

В последние годы в связи с обнаружением у нелинейных систем хаотического поведения появилось много работ, посвященных исследованию динамики нелинейного осциллятора [<sup>1-12</sup>]. В динамических системах странный аттрактор (СА) возникает, как правило, через ряд последовательных усложнений (иерархию бифуркаций) простого исходного режима [<sup>13, 14</sup>]. Поэтому важно установить очередьность возникновения различных режимов и их общее число в зависимости от параметров системы. Нелинейные осцилляторы с потенциалами Морзе, Тоды и другими служат математическими моделями различных систем в радиофизике [<sup>4</sup>] молекулярной спектроскопии [<sup>5</sup>], физике лазеров [<sup>6, 7</sup>]. Несмотря на большое количество численных расчетов динамики таких осцилляторов на данный момент существует определенный дефицит аналитических результатов. Кроме того, не выяснена до конца роль симметрии и формы потенциальной ямы в иерархии возможных бифуркаций на пути к СА. В данной работе поставлена цель провести такое исследование. В работе также предлагается аналитический метод расчета нижних бифуркационных границ в пространстве управляющих параметров системы. Похожая схема расчета была предложена ранее в работах [<sup>3, 8</sup>], но была реализована лишь для некоторых значений параметров. В начале работы приводится изложение аналитического метода, затем примеры применения его к различным типам потенциалов, далее сравнение с численным экспериментом и в заключение — обсуждение результатов.

**1. Аналитический метод.** Изучаемая система — нелинейный осциллятор с трением и вынуждающей периодической силой — описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \partial U(x)/\partial x = R \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $x$  — координата,  $\gamma$  — параметр, ответственный за трение,  $\partial U/\partial x = -F$  — возвращающая сила со стороны потенциала  $U(x)$ ,  $R$  и  $\omega$  — амплитуда и частота внешней силы, которые обычно полагают управляющими параметрами системы. Основная идея аналитического метода расчета бифуркационных границ (БГ) заключается в отыскании приближенного решения исходной динамической системы и исследования его на устойчивость в линейном приближении. Для нахождения приближенного решения уравнения (1) воспользуемся модификацией

Метода медленно меняющихся амплитуд — методом гармонического баланса [15], т. е. будем искать решение в виде

$$x_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t), \quad (2)$$

где величины  $A_k$  и  $B_k$  предстоит определить. Подстановка (2) в (1) и сравнение коэффициентов при  $\cos k\omega t$  и  $\sin k\omega t$  дает для нахождения  $A_k$  и  $B_k$  систему алгебраических уравнений. Далее, для исследования полученного решения  $x_0(t)$  на устойчивость необходимо рассмотреть динамику малого возмущения  $\xi(t)$ . Подстановка в уравнение (1) выражения  $x(t) = x_0(t) + \xi(t)$  и линеаризация по  $\xi$  приводят к соотношению

$$\ddot{\xi} + 2\gamma \dot{\xi} + \left( -\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)_0 \xi = 0, \quad (3)$$

где символ  $(\ )_0$  обозначает подстановку  $x_0(t)$  после дифференцирования. Уравнение (3) заменой  $\xi = e^{-\gamma t} \eta$  сводится к виду

$$\ddot{\eta} + \left[ \left( -\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)_0 - \gamma^2 \right] \eta = 0. \quad (4)$$

Так как выражение в скобках есть  $2\pi/\omega$  — периодическая функция, то (4) может быть преобразовано в уравнение типа Хилла [16]:

$$d^2\eta/d\tau^2 + [\theta_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} (\theta_{vc} \cos v\tau + \theta_{vs} \sin v\tau)] \eta = 0, \quad (5)$$

где  $\tau = \omega t$ ;  $\theta_0$ ,  $\theta_{vc}$ ,  $\theta_{vs}$  — коэффициенты, зависящие от параметров  $\gamma$ ,  $R$ ,  $\omega$ . В частном случае (если все  $\theta_{vs}$  и  $\theta_{vc}$  равны нулю, за исключением  $\theta_{2c}$  и  $\theta_{2s}$ ) оно переходит в уравнение Маттье, собственные значения и собственные функции которого затабулированы. Согласно теореме Флоке уравнение Хилла имеет общее решение [16]:

$$\eta(\tau) = \eta_1(\tau) + \eta_2(\tau) = c_1 e^{\mu\tau} \varphi_1(\tau) + c_2 e^{-\mu\tau} \varphi_2(\tau), \quad (6)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные,  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  —  $4\pi$ - или  $2\pi$ -периодические функции, а  $\mu$  принимает действительное или чисто мнимое значение. Области в пространстве параметров уравнения (5), где  $\mu$  — действительное, являются зонами неустойчивости. Количество их счетно. При пересечении границы такой зоны в системе происходит бифуркация (т. е. нарастает возмущение  $\xi(t)$  и устойчивым становится некоторое новое решение уравнения (1)).

Рассмотрим случай несимметричного потенциала и опишем бифуркацию удвоения периода. Если  $U(x)$  — несимметричная функция относительно  $x=0$ , то в исходном решении (2) все  $A_k$  и  $B_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) отличны от нуля и, следовательно, все коэффициенты в уравнении Хилла (5)  $\theta_{vs}$ ,  $\theta_{vc}$  ( $v=1, 2, 3, \dots$ ) тоже будут ненулевыми. Следуя методу Уиттекера, частное решение  $\eta_1(\tau)$  для  $n$ -й зоны неустойчивости уравнения Хилла (5) в первом приближении можно взять в виде [16]

$$\eta_1(\tau) = e^{\mu\tau} \sin(nt/2 - \sigma), \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где  $\sigma$  — новый параметр, подлежащий определению, а периодическая функция  $\varphi_1(\tau)$  взята в гармонической аппроксимации. Подставляя (7) в (5) и приравнивая коэффициенты при  $\sin nt/2$  и  $\cos nt/2$ , получаем (исключив предварительно параметр  $\sigma$ )

$$\mu^2 = - \left( \theta_0 + \left( \frac{n}{2} \right)^2 \right) + \sqrt{n^2 \theta_0 + \theta_n^2}, \quad \theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2. \quad (8)$$

Условием устойчивости периодического решения (2) ( $\xi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) является неравенство

$$\operatorname{Re}(-\gamma + \mu\omega) < 0. \quad (9)$$

Попадание бифуркационного параметра в зоны неустойчивости с четным  $n$  приводит к нарастанию малого возмущения с тем же периодом, который имеет исходное решение (2), что соответствует седловым решениям в области основного резонанса нелинейного осциллятора. В зонах неустойчивости с нечетным  $n$  нарастает возмущение с частотами  $\omega/2, 3\omega/2, 5\omega/2, \dots$ , т. е. происходит бифуркация удвоения периода. В следующем приближении метода Уиттекера частное решение  $\eta_1(\tau)$  для 1-й зоны неустойчивости следует взять в виде

$$\eta_1(\tau) = e^{\mu\tau} (\sin(\tau/2 - \sigma_1) + \sin(3\tau/2 - \sigma_3)). \quad (10)$$

Тогда бифуркационное условие сводится к равенству

$$\begin{vmatrix} \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} - \theta_{1c} & \theta_{1s} - \frac{\gamma}{\omega} & \theta_{1c} - \theta_{2c} & -\theta_{1s} + \theta_{2s} \\ \theta_{1s} + \frac{\gamma}{\omega} & \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} + \theta_{1c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} \\ \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} - \frac{9}{4} - \theta_{3c} & \theta_{3s} - 3\frac{\gamma}{\omega} \\ -\theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} & \theta_{3s} + 3\frac{\gamma}{\omega} & \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} - \frac{9}{4} + \theta_{3c} \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

в котором учтено, что на границе зоны неустойчивости  $\mu = \gamma/\omega$ . При дальнейшем изменении управляющего параметра на плоскости  $(R, \omega)$  по такому же механизму происходят следующие бифуркации удвоения периода и через каскад таких бифуркаций (цепочка Фейгенбаума) осциллятор эволюционирует к СА.

В случае симметричного потенциала последовательности удвоений периода должна предшествовать бифуркация нарушения симметрии [3]. Под нарушением симметрии здесь понимается тот факт, что минимум симметричной потенциальной функции не является центром колебаний. Предельный цикл на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$ , соответствующий исходному решению (2), расположен симметрично относительно осей абсцисс и ординат, в частности, максимальные отклонения в обе стороны от минимума  $U(x)$  будут равны  $|x_{\min}| = |x_{\max}|$ . Этот факт означает отсутствие четных гармоник в решении (2). Таким образом наличие симметрии однозначно связано с отсутствием четных гармоник в спектре решения. Вследствие отсутствия четных гармоник в (2) уравнение Хилла в этом случае будет выглядеть несколько иначе, чем уравнение (5):

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + [\theta_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} (\theta_{vc} \cos 2v\tau + \theta_{vs} \sin 2v\tau)] \eta = 0. \quad (12)$$

Теперь попадание в зоны с нечетным  $n$  соответствует неустойчивому седловому решению в области основного резонанса нелинейного осциллятора. Попадание в зоны с четным  $n$  приводит к появлению в спектре решения  $x(t)$  ранее отсутствовавших там четных гармоник и постоянной составляющей.

Решение уравнения Хилла (12) в  $n$ -й зоне в первом приближении можно взять в виде [16]

$$\eta_1(\tau) = e^{\mu\tau} \sin(n\tau - \sigma), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Для инкремента  $\mu$  аналогично (8) получаем

$$\mu^2 = -(\theta_0 + n^2) + \sqrt{4n^2\theta_0 + \theta_n^2}. \quad (14)$$

Таким образом, граница второй зоны неустойчивости уравнений Хилла (12) является искомой бифуркационной границей (БГ) нарушения симметрии. Чтобы улучшить условие устойчивости, функцию  $\eta_1(\tau)$  следует взять в виде

$$\eta_1(\tau) = e^{\mu\tau} (c + \sin(2\tau - \sigma)). \quad (15)$$

Поступая аналогично выводу выражения (11), приходим к уравнению бифуркационной кривой:

$$\begin{vmatrix} \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} & \theta_{1s} & \theta_{1c} \\ 2\theta_{1s} & \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} - 4 - \theta_{2c} & \theta_{2s} - 4 \frac{\gamma}{\omega} \\ 2\theta_{1c} & \theta_{2s} + 4 \frac{\gamma}{\omega} & \theta_0 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} - 4 + \theta_{2c} \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

После потери симметрии в системе при дальнейшем изменении управляющих параметров возможна бифуркация удвоения периода и, аналогично случаю несимметричного потенциала, переход к СА.

**2. Применение к различным потенциалам.** Проиллюстрируем реализацию этого метода для расчета нижних БГ на примере несимметричного потенциала Морзе  $U(x) = (e^{-2x}/2) - e^{-x}$  и симметричного потенциала  $U(x) = \text{ch } x$ . В первом случае, подставляя  $\partial U(x)/\partial x$  в уравнение (1), будем искать решение в виде ряда (2) с отличными от нуля  $A_0, A_1, A_2$ . Как будет показано ниже, такое приближение  $x_0(t)$  вполне достаточно для расчета нижней БГ удвоения периода. Воспользовавшись разложением [17]

$$e^{rt} \cos \varphi = I_0(r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(r) \cos k\varphi, \quad (17)$$

где  $I_k(r)$  — функция Бесселя мнимого аргумента, и приравняв в (1) коэффициенты при  $\cos \omega t, \sin \omega t$  и свободные члены, получим для  $A_0, A_1, B_1$  систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} e^{-A_0} I_0(r) - e^{-2A_0} I_0(2r) &= 0, \\ \left( 2e^{-2A_0} \frac{I_1(2r)}{r} - 2e^{-A_0} \frac{I_1(r)}{r} - \omega^2 \right) A_1 + 2\gamma\omega B_1 &= R, \\ \left( 2e^{-2A_0} \frac{I_1(2r)}{r} - 2e^{-A_0} \frac{I_1(r)}{r} - \omega^2 \right) B_1 - 2\gamma\omega A_1 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $r = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ . Мы должны при заданных  $\omega, R, \gamma$  найти  $A_0, A_1, B_1$  (или вместо  $A_1$  и  $B_1$  —  $r$ ). Однако видно, что неизвестная переменная  $r$  входит в систему уравнений (18) наиболее сложным образом — как аргумент специальных функций  $I_0, I_1$ . Очевидно, значительно удобнее зафиксировать  $r$  и считать неизвестной переменной  $\omega$ , тогда система (18) сводится к квадратному уравнению относительно  $\omega^2$ :

$$(\omega^2)^2 + 2(2\gamma^2 - S)\omega^2 + S^2 - R^2/r^2 = 0, \quad (19)$$

где  $S = 2e^{-A_0} (e^{-A_0} (I_1(2r)/r) - I_1(r)/r)$ , а выражение для  $A_0$  следует из первого уравнения системы (18):

$$A_0 = \ln(I_0(2r)/I_0(r)), \quad (20)$$

Определив  $A_0, A_1, B_1$ , запишем в явном виде коэффициенты  $\theta_0, \theta_{vs}$ ,

$\theta_{vc}$ , входящие в условие устойчивости (11):

$$\theta_0 = \frac{e^{-A_0}}{\omega^2} [2e^{-A_0} I_0(2r) - I_0(r)] - \frac{\gamma^2}{\omega^2},$$

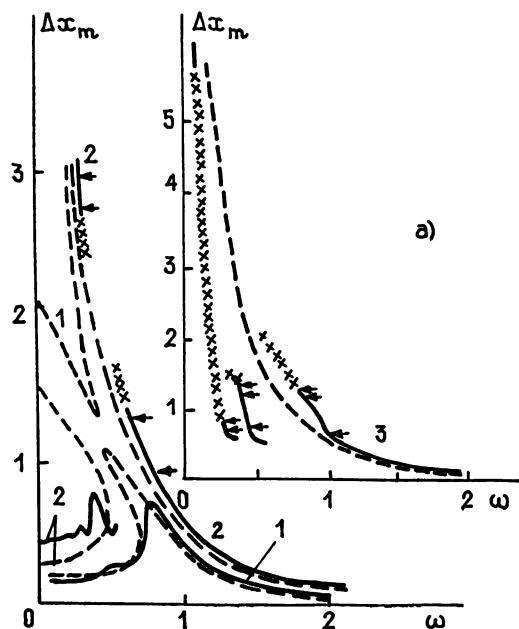
$$\theta_{1c} = \frac{e^{-A_0} A_1}{r\omega^2} [I_1(r) - 2I_1(2r)e^{-A_0}], \quad \theta_{1s} = \frac{e^{-A_0} B_1}{r\omega^2} [I_1(r) - 2I_1(2r)e^{-A_0}], \quad (21)$$

$$\theta_{2c} = \frac{e^{-A_0}(A_1^2 - B_1^2)}{r^3 \omega^2} [2e^{-A_0} I_2(2r) - I_2(r)],$$

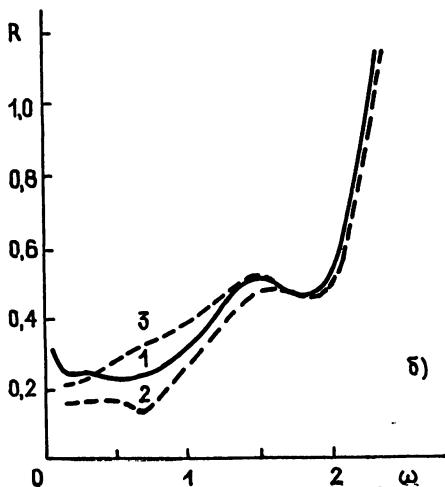
$$\theta_{2s} = \frac{2e^{-A_0} A_1 B_1}{r^3 \omega^2} [2e^{-A_0} I_2(2r) - I_2(r)],$$

$$\theta_{3c} = \frac{e^{-A_0} A_1 (A_1^2 - 3B_1^2)}{r^3 \omega^2} [I_3(r) - 2I_3(2r)e^{-A_0}],$$

$$\theta_{3s} = \frac{e^{-A_0} B_1 (3A_1^2 - B_1^2)}{r^3 \omega^2} [I_3(r) - 2I_3(2r)e^{-A_0}].$$



a)



б)

Рис. 1.

Рассчитанные по предложенной схеме амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и БГ удвоения периода для осциллятора с потенциалом Морзе нанесены соответственно на рис. 1а и 1б штриховыми линиями. Такие же результаты представлены на рис. 2а, б и на рис. 3а, б для осцилляторов с потенциалами  $U(x) = e^x - x$  и  $U(x) = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$  соответственно. (Промежуточные выкладки для них опущены.) Рассмотрим теперь случай симметричного потенциала  $U(x) = \text{ch } x$ . При отыскании симметричного решения уравнения (1) также ограничимся гармонической аппроксимацией. Использовав разложение (17), получаем для  $A_1$  и  $B_1$ :

$$-A_1\omega^2 + 2\gamma\omega B_1 + \frac{2I_1(r)}{r} A_1 = R, \quad -B_1\omega^2 - 2\gamma\omega A_1 + \frac{2I_1(r)}{r} B_1 = 0. \quad (22)$$

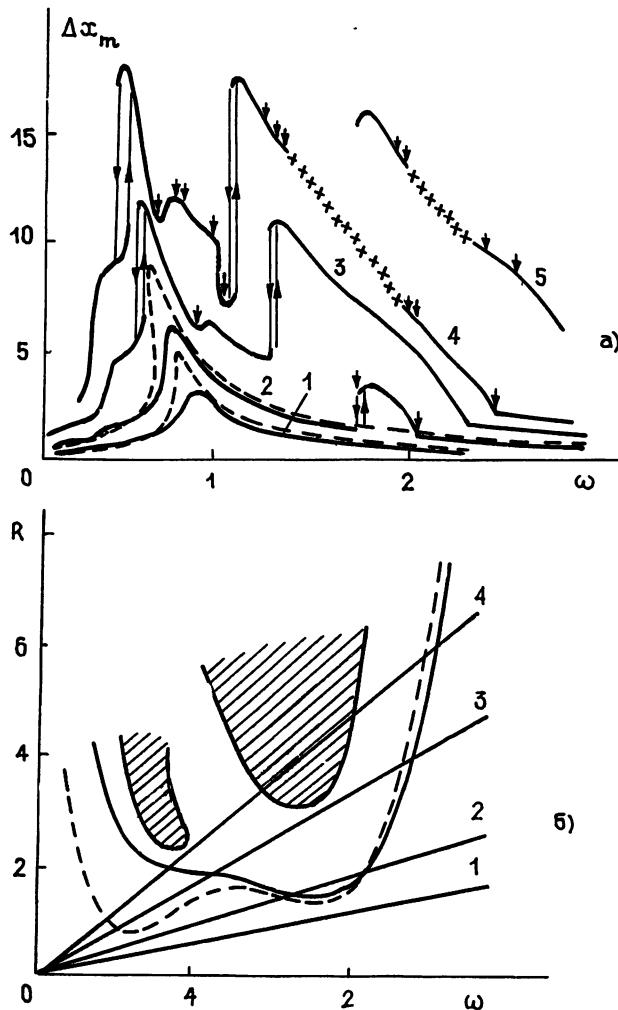


Рис. 2.

Как и в случае потенциала Морзе, будем считать неизвестной переменной  $\omega$ , а  $r$  — заданной. Тогда для  $\omega^2$  получим квадратное уравнение

$$(\omega^2)^2 + 4 \left( \gamma^2 - \frac{I_1(r)}{r} \right) \omega^2 + \frac{4I_1^2(r)}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} = 0 \quad (23)$$

и, аналогично выражениям (21), выпишем коэффициенты, входящие в условие устойчивости (16):

$$\theta_0 = \frac{I_0(r) - r^4}{\omega^4}, \quad \theta_{1c} = \frac{I_2(r)}{\omega^4} Z_1, \quad \theta_{1s} = \frac{I_2(r)}{\omega^4} Z_2, \quad (24)$$

$$\theta_{2c} = \frac{I_4(r)}{\omega^4} (Z_1^2 - Z_2^2), \quad \theta_{2s} = \frac{2I_4(r)}{\omega^4} Z_1 Z_2,$$

где

$$Z_1 = \frac{r^2 - 2B_1^2}{r^2}, \quad Z_2 = \frac{2A_1 B_1}{r^2}.$$

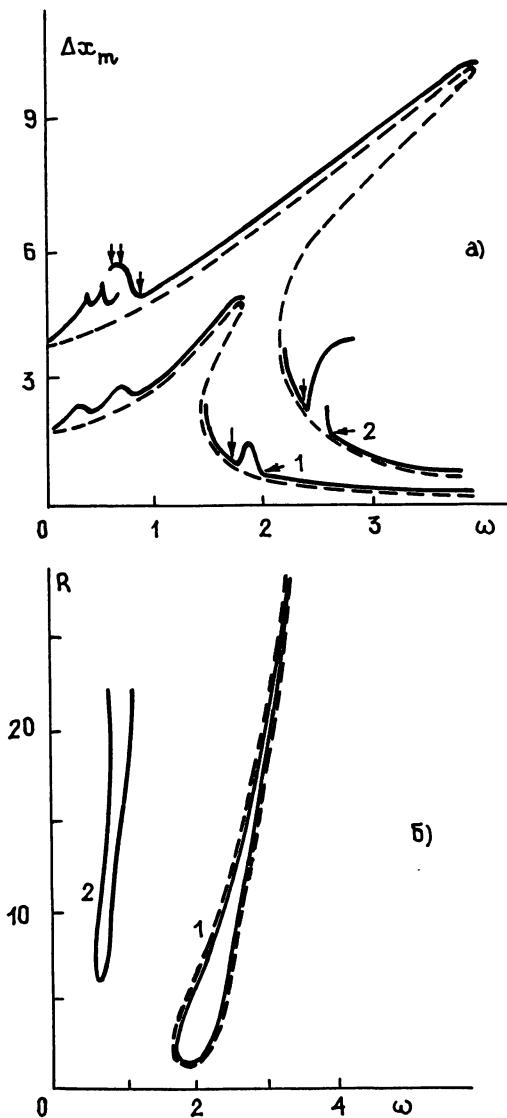


Рис. 3.

Рассчитанные из уравнения (23) АЧХ и из условия (16) БГ нарушения симметрии нанесены на рис. 4а и 4б штриховыми линиями. Результаты такого же исследования для осциллятора с симметричным потенциалом  $U(x) = (1/2)x^2 + (1/4)x^4$  приведены на рис. 5а, б.

**3. Сравнение с численным экспериментом.** Для подтверждения аналитических результатов уравнение (1) решалось численно методом

дом Рунге—Кутта четвертого порядка точности [18] для всех вышепречисленных потенциалов. Для сравнения численно рассчитанные АЧХ и БГ нанесены сплошными линиями на тех же рисунках, на которых приведены аналитические результаты. По оси ординат на рис. 1а—5а отложен максимальный размах колебаний  $\Delta x_m = (x_{\max} - x_{\min})/2$ . При расчете всех потенциалов, за исключением потенциала Тоды, в уравнении (1) коэффициент трения  $\gamma$  был равен  $1/\sqrt{70}$ .

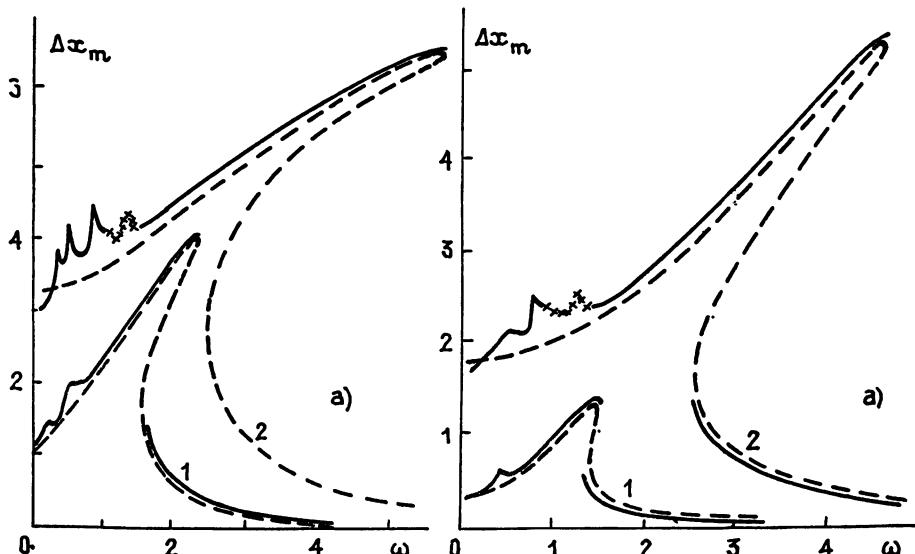


Рис. 4.

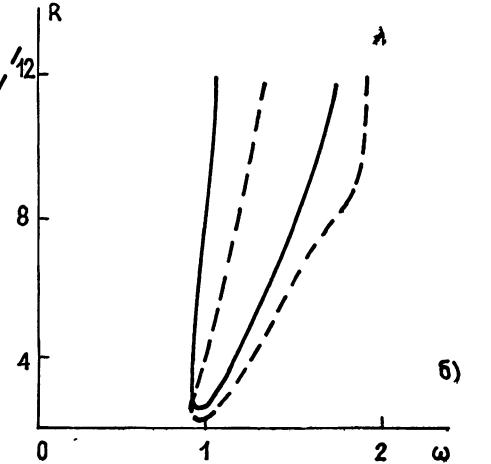


Рис. 5.

Проследим на рис. 1—3, как различие формы несимметричных потенциалов оказывает влияние на АЧХ и на расположение БГ первого удвоения периода в пространстве управляющих параметров системы  $R$  и  $\omega$ . На рис. 1а построены АЧХ осциллятора с потенциалом Морзе при  $R=0,14$  (кривая 1),  $R=0,25$  (2),  $R=0,3$  (3). Видно, что при малых  $R$  отклик системы близок к отклику гармонического осциллятора, а при увеличении  $R$  начинает проявляться нелинейность системы: наклон влево основного резонанса (мягкость потенциала Морзе) и возникновение вторичных резонансов на частотах  $\omega = \pm(k/n)\omega_0(\Delta x_m)$ , где  $k$  и  $n$  — взаимно простые числа, а  $\omega_0(\Delta x_m)$  — собственная частота осциллятора, в силу неизохронности зависящая от амплитуды колебаний  $\Delta x_m$ . Для всех исследуемых потенциалов при  $\Delta x_m \rightarrow 0$   $\omega_0(\Delta x_m) \rightarrow 1$ .

При  $R > 0,15$  основной резонанс опрокидывается и наблюдается

гистерезис, для вторичных резонансов это происходит при больших значениях  $R$ . Аналитически рассчитанные АЧХ состоят из двух ветвей: верхней и нижней, которые при увеличении  $R$  соприкасаются и превращаются в правую и левую, левая затем исчезает. Для мягкого потенциала  $U(x) = (x^2/2) - x^4$  такие ветви были аналитически и численно рассчитаны ранее в работах [9, 10]. Бифуркация удвоения периода имеет место на склоне основного резонанса при  $R \geq 0,2$ . При дальнейшем увеличении  $R$  в этой области происходят следующие бифуркации удвоения и через каскад таких бифуркаций осциллятор достигает СА. Участки АЧХ с хаотическим поведением отмечены крестиками. Точки наблюдаемых при счете бифуркаций указаны стрелками. На СА теряют свой смысл  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$ , который они имели в случае периодического решения. Поэтому за характеристику амплитуды колебаний здесь принимался максимальный размах, усредненный по различным участкам хаотической траектории. Достигнуть хаоса и выйти из него можно и другим путем, отличным от цепочки удвоений периода. Так, например, при движении по нижней ветви 2 по частоте вправо происходит срыв непосредственно в хаотическую область верхней ветви на частоте  $\omega \approx 0,55$ . Ввиду ограниченного набора начальных данных не удалось полностью просчитать хаотический участок для  $R=0,25$  и определить, где точно обрываются верхние резонансные ветви для  $R=0,3$ . При достижении  $R$  некоторого значения при  $\omega \rightarrow 0$  амплитуда колебаний скачком становится бесконечно большой. (Для молекулы это можно отождествлять с явлением диссоциации.) Это значение  $R$  можно оценить из уравнения (1). Пренебрегая при  $\omega \rightarrow 0$  производными  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  и решая квадратное уравнение относительно  $e^{-x}$ , получим, что один из корней равен

$$e^{-x} = (1 + \sqrt{1 - 4R \cos \omega t}) / 2. \quad (25)$$

Учитывая, что  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  достигаются при  $\cos \omega t$ , равном соответственно  $+1$  и  $-1$ , получим для  $\Delta x_m$  выражение

$$\Delta x_m = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4R}}{1 + \sqrt{1 - 4R}} \right), \quad (26)$$

которое для  $R < 0,25$  дает хорошее согласие с результатами численного счета. Для  $R > 0,25$   $\Delta x_m$  становится комплексной величиной, а при численном интегрировании происходит скачок  $\Delta x_m$  на бесконечность (кривая 3 на рис. 1а).

На рис. 1б нанесена БГ удвоения периода в пространстве управляемых параметров системы  $R$  и  $\omega$ . Кривая 2 получена из условия устойчивости (8), (9), кривая 3 из улучшенного условия (11). Для  $\omega > 1,8$  обе кривые совпадают и хорошо согласуются с численной кривой 1. При  $\omega < 1,8$  для кривой 2 согласие лишь качественное, а кривая 3 совпадает с кривой 1 до  $\omega \approx 1,3$ . Поэтому можно предположить, что следующие приближения для условия устойчивости (т.е. добавление в выражение (10) слагаемых  $\sin(5\pi/2 - \sigma_5)$ ,  $\sin(7\pi/2 - \sigma_7)$  и т.д. приведут к более полному согласию. Около  $\omega = 1,9$  кривая 1 имеет локальный минимум, что соответствует развивающемуся здесь СА, который не отражен на АЧХ, представленных на рис. 1а. Развитие подобного СА (т.е. в районе  $\omega = 2\omega_0(\Delta x_m)$ , а не на склоне основного резонанса) видно на АЧХ осциллятора с потенциалом Тоды на рис. 2а. Эти АЧХ были рассчитаны из уравнения

$$\ddot{x} + \gamma(1 + e^x)\dot{x} + e^x - 1 = R \cos \omega t, \quad R = f\omega, \quad (27)$$

которое несколько отличается от (1) коэффициентом трения. Однако можно показать, что это различие несущественно, т.к. средний за период  $T = 2\pi/\omega$  коэффициент трения приближенно равен  $2\gamma$ . При расчете АЧХ, представленных на рис. 2а, амплитуда внешней силы меня-

лась вместе с частотой по закону  $R=f\omega$ , что соответствует движению по наклонным прямым на рис. 2б ( $f$  — тангенс угла наклона). При расчете параметр  $f$  был выбран для кривой 1 — 0,42, для 2 — 0,84, для 3 — 1,68, для 4 — 2,5. На рис. 2а помимо тех же бифуркаций вблизи основного резонанса, которые были представлены для потенциала Морзе на рис. 1а, видно рождение неустойчивости в районе  $\omega \approx 2$  и развитие здесь СА. Кривая 5 ( $f=2,5$ ) на рис. 2а представляет собой жестко возбуждаемую субгармоническую ветвь, период решения на которой равен 37. Выход на нее на языке теории бифуркаций интерпретируется как попадание решения на один из нескольких независимых атTRACTоров, существование которых возможно в нелинейной системе. При изменении управляющих параметров на этой ветви также может развиваться СА. (Подробно возникновение жестко возбуждаемых субгармонических ветвей рассмотрено в работе [12].) На рис. 2б помимо низшей БГ приведены области существования СА (заштрихованные участки). Промежуточные бифуркации на пути к СА на рисунке не обозначены.

На рис. 3а изображены АЧХ для осциллятора с потенциалом  $U(x) = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ , кривой 1 соответствует  $R=2$ , кривой 2 —  $R=10$ . Для этого потенциала интересным является тот факт, что неизохронность для него проявляется не столь просто, как для вышеупомянутых потенциалов. Член  $\frac{1}{3!}x^3$  стремится сделать потенциал

мягче, член  $\frac{1}{4!}x^4$  — жестче. При небольших амплитудах колебаний

сильнее оказывается действие  $x^3$ , при достаточно больших —  $x^4$ . На рис. 3а (кривая 2) это отражено в том, что резонанс на ультрагармонике внешней силы наклонен влево (явление  $x^3$ ), в то время как основной резонанс и резонанс, возникший из-за неустойчивости к удвоению периода около  $\omega=2$ , наклонены вправо (явление  $x^4$ ). В отличие от предыдущих случаев здесь СА развивается не на склонах основного резонанса и резонанса на  $\omega=2\omega_0(\Delta x_m)$ , а на склоне резонанса, возникшего на ультрагармонике внешней силы, на частоте  $\omega=(1/2)\omega_0(\Delta x_m)$ , что соответствует области, ограниченной кривой 2 на рис. 3б. СА возникает внутри этой области при  $R \approx 12$ . Аналитическое построение кривой 2 связано с некоторыми трудностями, но, в принципе, возможно при помощи изложенного в статье метода, если исходное решение уравнения (1) искать в виде ряда (2) с отличным от нуля  $A_2$  и  $B_2$ . Граница зоны неустойчивости  $T$ -периодического решения выродилась на рис. 3б в замкнутую кривую 1, но область существования решения с периодом  $2T$  значительно шире вследствие ярко выраженного на рис. 3а наклона резонанса вправо.

АЧХ для симметричных потенциалов приведены на рис. 4а (кривая 1 —  $R=2$ ; 2 —  $R=10$ ) и на рис. 5а (1 —  $R=0,5$ ; 2 —  $R=6,0$ ). На рис. 4, 5б для них построены БГ нарушения симметрии. То, что потенциалы  $U(x)=\text{ch }x$  и  $U(x)=(1/2)x^2+(1/4)x^4$  мало отличаются друг от друга по форме, определяет схожесть в поведении кривых на рис. 4, 5а, б. В обоих случаях можно проследить наклон основного резонанса вправо и ярко выраженную структуру вторичных резонансов. На резонансе  $\omega=(1/2)\omega_0(\Delta x_m)$  происходит бифуркация нарушения симметрии. Для осциллятора с потенциалом  $U(x)=(1/2)x^2+(1/4)x^4$  это происходит при  $R \approx 2,5$ , а в случае потенциала  $U(x)=\text{ch }x$  — при  $R \approx 4,3$ . При увеличении  $R$  внутри полученной области нарушения симметрии имеет место последовательность бифуркаций удвоения периода и около  $R \approx 32$  при  $\omega=1,5$  для обоих потенциалов достигается СА. Построение полного семейства бифуркационных кривых требует больших затрат машинного времени и проведено не было.

Несмотря на достаточно грубую аппроксимацию решения  $x_0(t)$  одной гармоникой и приближенные бифуркационные условия (8), (9),

(16), которые в общем случае должны быть заменены на равенство нулю бесконечного детерминанта Хилла, согласие оценочных кривых с численными результатами вполне удовлетворительное.

**Заключение.** В настоящей работе предложена методика оценок нижних бифуркационных кривых для осцилляторов с произвольной формой потенциальной ямы при периодическом силовом воздействии. В принципе, похожим образом можно найти и границы следующих бифуркаций, однако расчеты становятся слишком громоздкими. С другой стороны, даже одна бифуркационная кривая первого удвоения периода или нарушения симметрии дает информацию о месторасположении СА в пространстве управляющих параметров системы (см. рис. 2б), позволяя таким образом предсказывать набор параметров, при которых возможны режимы типа динамического хаоса.

Анализ влияния формы и симметрии потенциала на места локализации хаотических областей и величины порогов бифуркаций на пути к ним приводит к следующей закономерности: жесткость и симметрия потенциала сопротивляются возникновению неустойчивостей и рождению СА. Так, для осцилляторов с симметричными и жесткими потенциалами хаос достигается при  $R \approx 32$  в довольно узкой области в районе вторичного резонанса на  $\omega = (1/2)\omega_0(\Delta x_m)$ . При переходе к потенциальному  $U(x) = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ , у которого симметрии уже нет

а жесткость осталась, СА имеет место при  $R \approx 12$  в районе того же резонанса на  $\omega = (1/2)\omega_0(\Delta x_m)$ . Также появляется область неустойчивости к удвоению периода на частоте  $\omega = 2\omega_0(\Delta x_m)$ . СА здесь пока не достигается. Это происходит в случае потенциала Тоды, который отличается от предыдущего тем, что он мягкий. Для потенциала Тоды появляется область хаоса на склоне основного резонанса, и пороговое значение  $R$  понижается до 2,4 (рис. 2б). И, наконец, для потенциала Морзе, который является самым мягким из всех рассмотренных, область существования СА появляется на склонах основного и вторичных резонансов и также на  $\omega = 2\omega_0(\Delta x_m)$ . Порог достижения СА здесь самый низкий —  $R = 0,24$  (рис. 1а, 1б). Для сравнения можно также привести результаты других исследователей по изучению хаотической динамики осцилляторов с мягкими симметричными потенциалами. Так, в работах [1, 11] рассматривались осцилляторы с потенциалами  $U(x) = (x^2/2) - x^4$  и  $U(x) = -\cos x$ . Минимальные значения амплитуды периодического воздействия, при которых достигалось хаотическое поведение, соответственно равны  $R = 0,11$  и  $R = 0,45$ , при том, что коэффициент трения в этих работах был выбран несколько большим, чем в настоящей. Таким образом, эти результаты также свидетельствуют в пользу отмеченной выше закономерности.

## ЛИТЕРАТУРА

- Huberman B., Grutchfield J. // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. № 23. P. 1743.
- Izrailev F. M., Rabinovich M. I., Ugodnikov A. D. // Phys. Lett. A. 1981. V. 68. № 6—7. P. 321.
- Novak S., Frehlich R. // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. № 6. P. 3660.
- Астахов В. В. и др. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. Вып. 12. С. 2558.
- Lie G., Yuan J. // J. Chem. Phys. 1986. V. 84. № 10. P. 5486.
- Маторин И. И., Пиковский А. С., Ханин Я. И. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 10. С. 2096.
- Самсон А. М., Турофец С. И. Препринт ИФ АН БССР № 438. Минск, 1986.
- Takimoto N., Yamashida H. // Physica D. 1987. V. 26. № 1—3. P. 25L.
- Elding J., Forster D., Sarkar S. // Phys. Lett. A. 1983. V. 94. № 5. P. 195.
- Räty R., Von Boehm J., Isomäki H. // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. № 5. P. 4310.
- D'Humières D., Beasley M., Huberman B., Libchaber A. // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. № 6. P. 3483.
- Самсон А. М., Турофец С. И. // ДАН БССР. 1987. Т. 31, № 10. С. 888.
- Рабинович М. И. // УФН. 1979. Т. 126. Вып. 1. С. 123.
- Екстапп J. // Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. № 4. P. 643.

15. Мигулин В. В. и др.. Основы теории колебаний.—М.: Наука, 1978. С. 392.
16. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах.—М.: Мир, 1968. С. 293.
17. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана — М.: Наука, 1979. С. 832.
18. Калиткин Н. Н. Численные методы.—М.: Наука, 1978. С. 512.

Институт физики  
АН БССР

Поступила в редакцию  
12 апреля 1988 г.

## THE ROLE OF THE POTENTIAL SYMMETRY AND TOPOLOGY OF A DRIVEN NONLINEAR OSCILLATOR IN THE INSTABILITY HIERARCHIES

*A. M. Samson, Yu. A. Logvin, S. I. Turovets*

The role of the local potential symmetry and topology in determining chaotic dynamics of a driven nonlinear oscillator is investigated. The equations considered describe the dynamics of the nonlinear electrical oscillatory circuit as well as many other physical phenomena. The analytical method is suggested to estimate bifurcation curves in the control parameter space. It is shown that the potential stiffness and symmetry resist to chaotic behaviour of the system.

### ВСЕСОЮЗНОЕ АГЕНТСТВО ПО АВТОРСКИМ ПРАВАМ (ВААП)

#### ВНИМАНИЮ АВТОРОВ, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В ВААП ПО ВОПРОСАМ ВЫПЛАТЫ ГОНORАРА ЗА ПЕРЕПЕЧАТКУ ЗА РУБЕЖОМ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛАХ

##### I. ОФОРМЛЕНИЕ СПРАВОК-ЗАЯВЛЕНИЙ

Для получения гонорара автору необходимо оформить и выслать в ВААП справку-заявление автора.

СПРАВКА-ЗАЯВЛЕНИЕ оформляется:

- на листе бумаги стандартного формата;
- на пишущей машинке или печатными буквами от руки;
- на каждое наименование журнала и год его издания;
- с указанием следующих необходимых для расчета данных:
  1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
  2. Год рождения
  3. Наличие детей
  4. Домашний адрес (с почтовым индексом, по прописке в паспорте)
  5. Телефоны (служебный, домашний)
  6. Выходные данные статьи:
    - наименование журнала
    - год издания
    - раздел или серия (для ДАН, Изв. АН СССР, ВМУ, ВЛУ, ИЗВУЗ)
    - том
    - номер
    - страницы статьи
  7. Форма получения гонорара — указать нужное:
    - на текущий счет типа «В» — № \_\_\_\_\_ (только в свободно конвертируемой валюте), наименование учреждения банка, в котором открыт счет;
    - в рублях счет № \_\_\_\_\_ в отд. сбербанка
    - № \_\_\_\_\_ расчетный счет № \_\_\_\_\_ в \_\_\_\_\_ (наименование банка)
    - почтовым переводом
    - в кассе ВААП
  8. Льготы по подоходному налогу: удостоверение участника (инвалида) Великой Отечественной войны — указать серию, номер удостоверения, когда и каким учреждением выдано
  9. Дата
  10. Личная подпись

(Продолжение см. с. 110)

УДК 537.876.23:621.371.24

## КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ОТКРЫТЫХ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

*С. А. Гредескул, В. Д. Фрейлихер*

Показано, что в открытых неупорядоченных системах существуют квазистационарные состояния (квазиоднородные волны). Исследована структура таких состояний и на примере флюктуационного волновода, проанализирована их роль в процессе переноса энергии при распространении волн в случайных средах.

Теоретическое исследование процессов распространения волн в средах с флюктуирующими параметрами часто сводится к решению одномерного волнового уравнения со случайными коэффициентами. Для так называемых закрытых систем, на границах которых удовлетворяются самосопряженные граничные условия, спектральные свойства этого уравнения хорошо изучены (см., например, [1]). Примером закрытой системы является слой случайно-неоднородной среды, ограниченной идеально отражающими стенками. Однако природные среды (атмосфера, ионосфера, океан) являются открытыми системами — по крайней мере на одной из их границ поле имеет вид уходящей волны, что соответствует условию излучения Зоммерфельда.

В настоящей работе изучены спектральные характеристики одномерных неупорядоченных систем и на основании полученных результатов исследовано поле точечного источника в случайно-стратифицированном слое. Оказывается, что в таком слое наряду с нормальными (однородными) волнами, отвечающими дискретным вещественным значениям спектрального параметра, существует дискретный набор комплексных значений спектрального параметра с положительными вещественными частями, соответствующий неоднородным волнам. Случайная структура среды приводит к тому, что среди последних есть квазинормальные (квазиоднородные) волны — аналоги квазистационарных состояний в квантовой механике, которым соответствуют экспоненциально малые по толщине слоя мнимые части спектрального параметра, сформированные в отсутствие регулярной рефракции исключительно за счет многократного рассеяния на случайных неоднородностях. Поле каждой из таких волн (однородных и квазиоднородных) внутри слоя носит резко выраженный локализованный характер.

Описанные особенности спектральных характеристик обеспечивают каналирующие свойства случайно-стратифицированных сред. Поле точечного источника в такой среде представляется в виде суммы нормальных и неоднородных волн. Нормальные волны распространяются вдоль слоя без затухания, а квазиоднородные затухают на экспоненциально больших по толщине слоя расстояниях от источника. Таким образом, случайно-слоистая среда представляет собой флюктуационный волновод.

1. Рассмотрим неупорядоченный сегмент  $[-L, L]$ , на котором диэлектрическая проницаемость есть  $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \delta\epsilon(z)$ . Спектр нормальных волн в такой системе находится из уравнения [2]

$$1 - r_+(E)r_-(E) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $E = k^2$  — спектральный параметр,  $r_{\pm}(E)$  — коэффициенты отра-

жений при падении волны с длиной  $\lambda=2\pi/k$  на полусегменты  $[0, L]$  ( $[-L, 0]$ )<sup>\*</sup> слева (справа). «Закрытость» системы означает, что на границах сегмента  $z=\pm L$  волна удовлетворяет самосопряженным граничным условиям, в силу чего  $|r_{\pm}(E)|=1$  и уравнение (1) имеет дискретный спектр вещественных решений  $E_n$ .

В открытых системах граничные условия в точках  $z=\pm L$  не являются самосопряженными (например, условия излучения или отражения),  $|r_{\pm}(E)|<1$  и вещественные решения уравнения (1) отсутствуют. Пусть  $\delta_e(z)$  отлична от нуля только внутри сегмента и является пространственно-однородной в среднем случайной функцией с нулевым средним значением и убывающими корреляциями. Тогда модуль коэффициента отражения в случае  $L \gg l(E)$  ( $l(E)$  — длина локализации волны с параметром  $E$  в системе с  $\delta_e(z) \neq 0$  на всей оси) на почти каждой реализации, т. е. с вероятностью, близкой к единице, экспоненциально мало отличается от единицы [1]. Поэтому уравнение (1) может иметь комплексные решения  $\mathcal{E}_n = E_n - i\delta_n$  с экспоненциально малой по параметру  $L/l$  мнимой частью  $\delta_n$ , описывающие квазистационарные состояния (квазиоднородные волны). В самом деле, коэффициенты отражения  $R_{\pm}$  от целого сегмента  $[-L, L]$  при падении на него волны с длиной  $\lambda$  слева (справа) можно представить в виде

$$R_{\pm} = \frac{r_{1,2}}{r_{\mp}^*} \frac{r_{\mp}^* - r_{\pm}}{1 - r_+ r_-}, \quad (2)$$

где  $r_{1,2}$  — коэффициенты отражения от полусегментов  $[-L, 0]$  ( $[0, L]$ ) при падении волны слева (справа), а коэффициент прохождения  $T$  равен

$$T = \frac{t_1 t_2}{1 - r_+ r_-}$$

( $t_{1,2}$  — коэффициенты прохождения полусегментов  $[-L, 0]$ ,  $[0, L]$ ).

При комплексных  $\mathcal{E}_n$ , удовлетворяющих уравнению (1),  $R_{\pm}$  и  $T$  обращаются в бесконечность, при этом

$$\lim_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_n} \frac{R_+(\mathcal{E}) R_-(\mathcal{E})}{T^*(\mathcal{E})} = 1.$$

Вследствие этого две линейно независимые при вещественном  $E$  волны, отвечающие падению на сегмент слева и справа, сливаются при  $E \rightarrow \mathcal{E}_n$  в единое решение, содержащее вне сегмента  $[-L, L]$  только уходящие волны и описывающее распадающееся (квазистационарное) состояние. Отметим, что в противоположность хорошо изученным «подбарьерным» квазистационарным состояниям [3] (или квазиоднородным модам в диэлектрическом слое [2]) здесь экспоненциально малое отличие модулей коэффициентов прохождения  $|r_{\pm}(E)|$  от единицы имеет место в «надбарьерной» области открытой системы, т. е. не связано с отражением от границы раздела или регулярной рефракцией, а обусловлено интерференцией многократно рассеянных волн.

Как видно из формулы (2), комплексные корни  $\mathcal{E}_n$  лежат вблизи вещественных точек  $E_n$  таких, что  $\text{Arg}[r_+(E_n)r_-(E_n)] = 2\pi n$ . Заметим, что при таких  $E_n$  отношение  $r_{\pm}/r_{\mp}^*$ , фактически фигурирующее в (2), также вещественно. Однако в силу того, что относительные флуктуации величины  $1 - |r_{\pm}|$  экспоненциально велики [1, 4], модуль коэффициента отражения  $|R_{\pm}(E_n)|$  почти всегда экспоненциально близок к единице. В самом деле, полагая  $|r_{\pm}| = 1 - \delta_{\pm}$ ,  $|\delta_{\pm}| \ll 1$ , из (2) получаем

$$|R_{\pm}(E_n)| \simeq \left| \frac{\delta_+(E_n) - \delta_-(E_n)}{\delta_+(E_n) + \delta_-(E_n)} \right|.$$

\* В качестве точки разбиения может быть выбрана любая внутренняя точка сегмента  $[-L, L]$ , а не обязательно его середина.

Величины  $\delta_{\pm}(E_n)$ , экспоненциально малые в среднем, тем не менее экспоненциально флюктуируют. Поэтому с вероятностью, близкой к единице, имеет место одно из двух усиленных неравенств:  $\delta_+ \gg \delta_-$  или  $\delta_+ \ll \delta_-$ , вследствие чего  $|R_{\pm}(E_n)| \approx 1$ .

Исключение составляют резонансные ситуации, при которых  $|R_{\pm}(E_n)| \ll 1$ . Они могут возникать в результате как совпадения с экспоненциальной точностью добавок  $\delta_+$  и  $\delta_-$ , так и флюктуаций модулей коэффициентов отражения  $r_{\pm}$  таких, что  $|r_{\pm}| \ll 1$  (последний механизм формирования резонансных состояний был обнаружен в работе [5] при исследовании резонансной туннельной прозрачности неупорядоченных систем). Оба эти события, однако, чрезвычайно маловероятны. Идеальные резонансные состояния с  $R_{\pm}=0$  внутри неупорядоченного сегмента всегда носят, как нетрудно показать, локализованный характер.

2. В качестве простейшего примера, в рамках которого можно получить более детальную информацию о квазистационарных состояниях, рассмотрим неупорядоченный сегмент  $[0, L]$ , справа от которого  $\delta\varepsilon(z)=0$ , а левая граница является полностью отражающей с коэффициентом  $r_-=1$ . Тогда уравнение (1) принимает форму

$$1 - r_+(E) = 0. \quad (3)$$

Мы проанализируем его решение в не слишком выгодном для существования квазистационарных состояний, но допускающем количественное исследование случаев слабых флюктуаций  $|\delta\varepsilon(z)| \ll \varepsilon_0$ . (Это условие, естественно, не является необходимым для существования квазистационарных состояний, поскольку большие флюктуации диэлектрической проницаемости лишь благоприятствуют их возникновению.) Здесь фаза коэффициента отражения  $\Phi_+(E)$  имеет вид [1, 4]

$$\Phi_+(E) = \text{Arg } r_+(E) = 2L\sqrt{E}(1 + O(\delta\varepsilon/\varepsilon_0)),$$

откуда  $E_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} (1 + O(\delta\varepsilon/\varepsilon_0))$ . Учитывая, что  $1 - |r_{\pm}| \sim e^{-L/l}$ , нетрудно найти мнимую добавку  $\delta_n = -\text{Im } \delta_n$  и полуширину  $\Delta E_n$  функции  $|1 - r_+(E)|^{-1}$ :

$$2\delta_n = \Delta E_n = (2\pi)^{-1} (E_{n+1} - E_n) \exp(-L/l).$$

Как и ожидалось, получили экспоненциально малые величины.

Отметим, что волны, отвечающие значениям  $E=E_n$ , экспоненциально локализованы внутри сегмента (хотя, конечно же, ненормируемые из-за наличия осциллирующих «хвостов» при  $z>L$ ). Это следует из пропорциональности собственных волн внутри сегмента экспоненциально растущим от точки  $z=0$  [1] косинусным решениям  $c(z, E)$  ( $c(0, E)=1$ ,  $c'(0, E)=0$ ) и тождества

$$c^2(L, E_n) + E_n^{-1} c'_n(L, E_n) = \frac{|1 - r_+(E_n)|^2}{1 - |r_+(E_n)|^2} \sim e^{-L/l}.$$

3. Продемонстрируем роль квазистационарных состояний в распространении волн в случайных средах и рассмотрим задачу о точечном источнике излучения с частотой  $\omega$ , помещенном в точку 0, находящуюся внутри случайно-стратифицированного слоя, у которого  $\delta\varepsilon(z) \neq 0$  при  $0 < z < L$  и который ограничен отражающей поверхностью  $z=0$  с  $r_-=1$ . Поле, создаваемое таким источником, допускает представление [2]

$$u(\rho, z) = \sum_n u_n c(z, \delta_n) H_0^{(1)}(\rho \sqrt{\varepsilon_0(\omega^2/c^2) - \delta_n}), \quad 0 < z < L \quad (4)$$

(суммирование производится по вещественным  $\delta_n < 0$ , отвечающим

нормальным волнам, и комплексным  $-\pi/2 < \arg \xi_n < 0$  корням уравнения (1), отвечающим неоднородным волнам), а поток энергии, высвечивающийся через бесконечно удаленную плоскость, параллельную границе слоя, равен [6]

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dE}{\sqrt{E}} \frac{1 - |r_+(E)|^2}{|1 - r_+(E)|^2}. \quad (5)$$

Как следует из выражения (4) для поля, рассматриваемая система представляет собой флюктуационный волновод. Часть поля, формируемая нормальными волнами, описывает излучение, распространяющееся вдоль слоя без затухания. Существенную роль в переносе энергии вдоль слоя играет также часть поля, которая формируется квазиоднородными волнами с  $0 < \operatorname{Re} \xi_n < \varepsilon_0(\omega^2/c^2)$ ,  $-\operatorname{Im} \xi_n \ll \operatorname{Re} \xi_n$  и которая хотя и затухает вдоль слоя, но на экспоненциально больших по сравнению с его толщиной расстояниях от источника  $\rho \sim c/(\omega \sqrt{\varepsilon_0}) \exp(L/l)$ .

Из формулы (5) видно, что высвечивающаяся из слоя энергия практически целиком выносится квазистационарными состояниями. В самом деле, в силу экспоненциально малой близости  $|r_{\pm}(E)|$  к единице, дробь под интегралом в (5) почти для всех значений  $E$  экспоненциально мала, порядка  $\exp(-L/l)$ . Исключение составляют точки  $E_n$ , лежащие на вещественной оси вблизи комплексных значений  $\xi_n$ , отвечающих квазистационарным состояниям. В их окрестности эта дробь, напротив, экспоненциально велика ( $\sim \exp(L/l)$ ), так что как функция  $E$  она представляет собой систему экспоненциально высоких и одновременно экспоненциально узких пиков, вне которых она практически равна нулю. Оценивая поток (5) с помощью результатов разд. 2, нетрудно убедиться, что по порядку величины поток  $\Phi_c$  на реализации совпадает с вычисленным в [6] его средним значением. Это означает своеобразную эргодичность подынтегрального выражения в (5): его среднее по ансамблю с указанной точностью совпадает со средним по достаточно широкому интервалу значений  $E$ .

Авторы благодарны Л. А. Пастуру и В. И. Татарскому за обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

- Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982. — 360 с.
- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 344 с.
- Базы А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М.: Наука, 1971. — 544 с.
- Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
- Лифшиц И. М., Кирпиченков В. Я. // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 989.
- Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 10. С. 1210.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
12 апреля 1988 г.

## QUASISTATIONARY STATES IN OPEN DISORDERED SYSTEMS

S. A. Gredeskul, V. D. Freilikh

It is shown that quasistationary states (quasiuniform waves) exist in open disordered systems. The structure of such states is investigated and taken as an example for a fluctuation waveguide. The contribution of the states into energy transfer by the wave propagation in a random media is illustrated.

УДК 534.222

## ДИАГНОСТИКА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВОЛНОВОДА ПО ОГИБАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

А. Г. Нечаев, А. И. Хилько

Рассмотрены возможности диагностики неоднородностей волновода на основе «дифференциального» метода, использующего принцип импульсного стробирования при возбуждении мод с заметно отличающимися групповыми скоростями, в области применимости модифицированного борновского приближения.

В радиофизике и акустике часто требуется определить местоположение различных нерегулярностей волновода, а также оценить характеризующие их параметры. В [1] предложен дифференциальный метод диагностики неоднородностей волновода, основанный на использовании принципа импульсного стробирования в «просветной» схеме зондирования. Пространственная локализация неоднородностей осуществляется за счет импульсного возбуждения и приема мод с заметно отличающимися групповыми скоростями. Обсуждение в [1] проводилось в приближении однократного рассеяния [2, 4]. Ниже рассмотрим возможность использования предложенного в [1] дифференциального метода также и в области применимости модифицированного борновского приближения [2, 3].

Рассмотрим волновод (для определенности акустический), ограниченный неровной абсолютно мягкой поверхностью  $z = \zeta(x, y, t)$  и поверхностью  $z = D$  с произвольным коэффициентом отражения, где  $z$  — вертикальная,  $x$  и  $y$  — горизонтальные координаты.

Обозначим  $c(z)$  невозмущенный профиль скорости звука. Пусть источник поля расположен в точке  $x = 0, y = 0$ , а приемник — в точке  $x = a, y = 0$ . Источник и приемник будем характеризовать коэффициентами возбуждения мод  $A_S(n)$  и  $A_R(n)$ . Будем считать, что флуктуации скорости звука  $\delta c(x, y, z, t)$  ( $|\delta c| \ll c$ ) и возмущения  $\zeta(x, y, t)$  в рельефе поверхности являются стационарными, квазиоднородными в горизонтальной плоскости ( $R_c \gg l_c, R_\zeta \gg l_\zeta$ , где  $l_c$  и  $l_\zeta$  — радиусы пространственной корреляции  $\delta c$  и  $\zeta$ ,  $R_c$  и  $R_\zeta$  — характерные масштабы изменчивости параметров неоднородностей) и крупномасштабными ( $l_c, l_\zeta \gg \lambda$ ) по сравнению с длиной волны звука  $\lambda$ . Предположим также, что нерегулярности являются квазистатическими,  $\Delta f > T_c^{-1}, T_\zeta^{-1}$  ( $\Delta f$  — ширина частотного спектра поля,  $T_c$  и  $T_\zeta$  — радиусы временной корреляции неоднородностей), звуковое поле — квазимонохроматическим,  $f \gg \Delta f$  ( $f$  — частота), а для возвышений рельефа поверхности выполняется условие малости параметра Рэлея [2, 4].

Комплексную амплитуду квазимонохроматического поля  $p(x, y, z, t) \exp(2\pi i f t)$  в произвольной точке волновода приближенно представим в виде суммы нормальных волн [4–10]

$$p(x, y, z, t) \simeq \sum_{n=1}^N S_n(x, y, t) \varphi_n(z), \quad (1)$$

где  $\varphi_n(t)$  — собственные функции опорного волновода  $c(z)$  на несущей частоте  $f$ ,  $N$  — число мод,  $S_n(x, y, t)$  — амплитуды мод. Второй момент поля  $I(x, y_1, z_1, y_2, z_2, t) = \langle p(x, y_1, z_1, t) p^*(x, y_2, z_2, t) \rangle$ , усредненный

по горизонтальной интерференционной структуре (при этом усреднение  $\langle S_n S_n^* \rangle \simeq 0$  при  $n \neq v$  [4–10]), равен [4–10]

$$I(x, y_1, y_2, z_1, z_2, t) = \sum_{n=1}^N D_n(x, y_1, y_2, t) \varphi_n(z_1) \varphi_n(z_2), \quad (2)$$

где  $D_n(x, y_1, y_2, t) = \langle S_n(x, y_1, t) S_n^*(x, y_2, t) \rangle$  — функция когерентности поля  $n$ -й моды. Для поля, имеющего в горизонтальной плоскости  $z = \text{const}$  вид узкого волнового пучка, распространяющегося вдоль оси  $x$ , функции  $D_n(x, y_1, y_2, t)$  в пренебрежении внутримодовой частотной дисперсией удовлетворяют системе уравнений переноса [5–10]

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_n} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2h_n} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] D_n(x, y_1, y_2, t) = \\ = -(\gamma_0 + \gamma_n) D_n(x, y_1, y_2, t) + \sum_{m=1}^N M_n^m(x, y_1 - y_2) D_m(x, y_1, y_2, t), \quad (3a)$$

где  $h_n$  — постоянные распространения мод на несущей частоте  $f$ ,  $v_n = [dh_n/d\omega]_{\omega=2\pi f}^{-1}$  — групповые скорости мод,  $\gamma_0$  — коэффициент затухания поля, связанный с поглощением энергии,  $\gamma_n(x)$  — коэффициент затухания когерентной компоненты моды  $|\langle S_n \rangle|^2$  из-за рассеяния поля на неоднородностях,  $M_n^m(x, y_1 - y_2)$  — коэффициенты взаимодействия, учитывающие перераспределение энергии между модами. Связь коэффициентов  $\gamma_n$  и  $M_n^m$  с функцией корреляции нерегулярностей  $\xi$  и  $ds$  приведена, например, в работах [4–12]. Для объемных неоднородностей [7, 8, 10, 11]

$$\gamma_n(x) \simeq \sum_{m=1}^N M_n^m(x, 0), \quad M_n^m(x, y_1 - y_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle b_n^m(x + x', y_1, t) b_n^m(x, y_2, t) \rangle \exp[i(h_n - h_m)x'], \quad (3b)$$

$$b_n^m(x, y, t) = \frac{\omega^2}{V h_n h_m} \int_0^D dz \frac{\delta c(x, y, z, t)}{c^2(z)} \varphi_n(z) \varphi_m(z).$$

Для неровной поверхности [4–6, 9, 12] ( $h = 2\pi f/c(0)$ )

$$\gamma_n(x) \simeq [\varphi'_n(0)]^2 \frac{h^2}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \cos^2 \theta \sin \theta \int_{-\pi}^\pi d\varphi W(h_n - h \sin \theta \cos \varphi; -h \sin \theta \sin \varphi; x), \quad (3b)$$

$$M_n^m(x, y_1 - y_2) \simeq \frac{[\varphi'_n(0) \varphi'_m(0)]^2}{8\pi h^2} \int_0^h dk W(h_n - h_m, k, x) \cos[k(y_1 - y_2)],$$

$W(k_x, k_y, x)$  — фурье-спектр функции корреляции возвышений  $\langle \xi(x + x', y + y', t) \xi(x, y, t) \rangle$ . При выводе уравнений переноса для нестационарного сигнала (3) предполагались выполнеными следующие условия [1, 4–7]:

$$[x(\Delta f/c^2)]^{1/2} < l/c \ll T_c, T_\zeta,$$

$$R_c, R_\zeta, (\gamma_n)^{-1} \gg l_{nm} = 2\pi/|h_n - h_m|, \quad n \neq m.$$

Рассмотрим решение системы уравнений переноса (3а) в модифицированном борновском приближении, которое, как известно [2, 3], справедливо в случае сильно поглощающей среды  $\gamma_0 \gg \sum_{m=1}^N M_m^m$ , в случае  $\gamma_n \gg \sum_{m=1}^N M_m^m$  (большая часть энергии однократно рассеянного поля излучается из канала) и в случае коротких трасс  $a \ll (\gamma_n)^{-1}$  (область применимости приближения однократного рассеяния). В соответствии с [3] (с. 194—197) решение уравнений переноса для фурье-трансформант функций когерентности  $D_n(x, y_1, y_2, t)$  по переменным  $y_1$  и  $y_2$  в первом приближении теории многократного рассеяния имеет вид

$$D_n(x, k_1, k_2, t) \simeq |A_s(n)|^2 F\left(t - \frac{x}{v_n}\right) \frac{2\pi}{h_n^2} \exp\left[-\gamma_0 x - \left(- \int_0^x \gamma_n(x') dx' + i(k_1^2 - k_2^2) \frac{x}{2h_n}\right)\right] + \sum_{m=1}^N |A_s(m)|^2 \frac{2\pi}{h_m^2} \times \\ \times \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dk F\left(t - \frac{x'}{v_m} - \frac{x-x'}{v_n}\right) M_m^m(x', k) \exp\left\{-\gamma_0 x - \left(- \int_0^{x'} \gamma_m(x'') dx'' - \int_{x'}^x \gamma_n(x'') dx'' + i \frac{(k_1 + k_2)}{2} \left[ \frac{(k_1 - k_2 + 2k)}{h_m} x' + \frac{(k_1 - k_2)}{h_n} (x - x')\right]\right)\right\}, \quad (4a)$$

где  $F(t)$  — огибающая излученного импульса, длительность которого  $T = (\Delta f)^{-1}$ . При  $y_1 = y_2 = 0$  из формулы (4а) получим

$$D_n(x, y_1 = 0, y_2 = 0, t) \simeq \frac{|A_s(n)|^2 F(t - x/v_n)}{hx} \times \\ \times \exp\left[-\gamma_0 x - \int_0^x \gamma_n(x') dx'\right] + B_n(x, t)/hx; \quad (4б)$$

$$B_n(x, t) = \sum_{m=1}^N |A_s(m)|^2 \int_0^x dx' F\left(t - \frac{x'}{v_m} - \frac{x-x'}{v_n}\right) \times \\ \times M_m^m(x', 0) \exp\left[-\gamma_0 x - \int_0^{x'} \gamma_m(x'') dx'' - \int_{x'}^x \gamma_n(x'') dx''\right]. \quad (4в)$$

Заметим, что в частном случае рассеяния стационарного акустического сигнала на однородном ветровом волнении в океаническом волноводе решение (4б), (4в) приведено также в [13].

Предположим, что источник возбуждает только одну моду с номером  $n$ , а приемник принимает только моду с номером  $m$  ( $m \neq n$ ). Полагая  $\Delta x = T v_n v_m / |v_n - v_m| \ll R_c, R_\zeta$ , из (2), (4б) и (4в) получим интенсивность поля на выходе приемной системы

$$I_m(a, t_\Sigma) = |A_R(m)|^2 D_m(a, y_1 = 0, y_2 = 0, t_\Sigma) =$$

$$= I_0 \sigma_n^m(x_\Sigma) \exp \left[ -\gamma_0 a - \int_0^{x_\Sigma} \gamma_n(x') dx' - \int_{x_\Sigma}^a \gamma_m(x') dx' \right],$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &\simeq |A_S(n)|^2 |A_R(m)|^2 \max[F(t)]/ha, \\ \sigma_n^m(x_\Sigma) &= \Delta x M_n^m(x_\Sigma, 0), \quad t_\Sigma = (a - x_\Sigma)/v_m + x_\Sigma/v_n. \end{aligned}$$

В области применимости приближения однократного рассеяния  $\int_a^a \gamma_n(x') dx' \ll 1$ , как следует из формулы (5),  $I_m(a, t_\Sigma) \simeq I_0 \sigma_n^m(x_\Sigma) \times \exp(-\gamma_0 a)$ . Регистрируемый в момент времени  $t=t_\Sigma$  рассеянный сигнал формируется неоднородным слоем толщиной  $\Delta x$ , удаленным от излучателя на расстояние  $x_\Sigma$ . Следовательно, сканируя  $t_\Sigma$ , по измеренному временному распределению  $I_m(a, t_\Sigma)$  получим пространственное распределение вдоль волновода элемента матрицы  $\sigma_n^m(x_\Sigma)$ . Анализ этого случая (в частности, вопросов ухудшения пространственного разрешения из-за неидеальной селекции мод и межмодовой и внутримодовой дисперсии) сделан в [1].

При реконструкции неоднородностей волновода по полученной величине  $\sigma_n^m$  принципиально необходимо использовать априорную информацию о структуре функции корреляции неоднородностей. Если структура функции корреляции (или спектра) задана, то реконструкция будет заключаться в определении количественных значений параметров (или некоторой их комбинации), описывающих функцию корреляции (или спектр). Связь матрицы  $\sigma_n^m$  с параметрами неоднородностей различных типов и возможности извлечения по величине  $\sigma_n^m$  конкретной информации рассмотрены в [14].

Всю трассу, соединяющую источник и приемник, можно интервалами  $x_i < x < x_{i+1}$  ( $x_1=0$ ,  $x_{M+1}=a$ ,  $1 \leq i \leq M$ ,  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ ) разбить на  $M \simeq a/\Delta x$  пространственных ячеек, в каждой из которых  $\sigma_n^m(x) \simeq \text{const}$  и  $\gamma_n(x) \simeq \text{const}$ . В области, где условие  $\int_0^a \gamma_n(x') dx' \ll 1$  нарушается, интенсивность поля  $I_m(a, t)$  в момент времени  $t=t_\Sigma$  определяется не только неоднородностями, локализованными в одной ячейке с номером  $j$  ( $x_j < x_\Sigma < x_{j+1}$ ), но и всеми неоднородностями волновода. Поэтому в отличие от случая, рассмотренного в [1, 14], уже на этапе реконструкции пространственного распределения  $\sigma_n^m(x_\Sigma)$  необходимо привлекать априорную информацию о неоднородностях.

Как легко видеть из формулы (5), элементы матрицы  $\sigma_n^m$  для двух ячеек  $i$  и  $j$  ( $i < j$ ) связаны соотношением

$$\sigma_n^m(x_j) = \sigma_n^m(x_i) \frac{I_m(a, t_j)}{I_m(a, t_i)} \exp \left\{ \sum_{v=i}^{j-1} (x_{v+1} - x_v) [\gamma_m(x_v) - \gamma_n(x_v)] \right\}. \quad (6)$$

В соответствии с полученной формулой (6) реконструкция неоднородностей может, например, осуществляться по следующей схеме. Используя известные значения  $\sigma_n^m$  и  $\gamma_n$ ,  $\gamma_m$  в  $i$ -й ячейке и измеренные величины  $I_m$  в  $i$ -й и  $(i+1)$ -й ячейках, из (6) определяем  $\sigma_n^m$  в ячейке  $i+1$ . После этого по величине  $\sigma_n^m$  находим параметры неоднородностей (см. [14]) и вычисляем  $\gamma_n$  и  $\gamma_m$  в  $(i+1)$ -й ячейке. Затем из (6) определяем  $\sigma_n^m(x_{i+2})$  и т. д. Очевидно, что для такой реконструкции неоднородностей вдоль волновода в общем случае необходимы: во-первых, априорная информация о неоднородностях, по крайней мере, в одной

из ячеек, во-вторых, возможность однозначной оценки коэффициентов затухания  $\gamma_n$  и  $\gamma_m$  по величине  $\sigma_n^m$ .

Для достаточно коротких трасс,  $a|\gamma_n - \gamma_m| \ll 1$ , второе требование не является обязательным. Действительно, при  $a|\gamma_n - \gamma_m| \ll 1$  соотношение (6) упрощается:

$$\sigma_n^m(x_j) \simeq \sigma_n^m(x_i) \frac{I_m(a, t_j)}{I_m(a, t_i)}. \quad (7)$$

Заметим при этом, что ограничение на максимальную длину трассы  $a|\gamma_n - \gamma_m| \ll 1$  во многих случаях является существенно более слабым, чем условие применимости приближения однократного рассеяния  $a\gamma_n \ll 1$ .

Обсудим возможность выполнения второго требования. Если функция корреляции (или спектр) неоднородности характеризуется всего одним параметром, то по его оценке из  $\sigma_n^m$  и по формулам (4б) или (4в) однозначно определяются коэффициенты затухания  $\gamma_n$  и  $\gamma_m$ . Когда неоднородность является многопараметрической, то это вызывает трудности не только в оценке отдельных параметров [14], но и в реконструкции пространственного распределения  $\sigma_n^m(x_\Sigma)$  вдоль волновода. В этом случае априорного знания о структуре функции корреляции (или спектра) может быть недостаточно. Необходимо привлекать дополнительную информацию о количественных значениях некоторых из параметров. В частности, информация об интервалах изменения параметров в ряде случаев позволяет определить  $\sigma_n^m(x_\Sigma)$ .

Для подтверждения высказанного рассмотрим один из типичных океанических волноводов  $c(z) = c_0 + \alpha z$  ( $\alpha D \ll 1$ ) с флюктуационным полем скорости звука  $\delta c(x, y, z)$ , функция корреляции которого имеет характерный для океана вид

$$\langle \delta c(x_\Sigma + x', y', z_1) \delta c(x_\Sigma, 0, z_2) \rangle = \langle (\delta c)^2 \rangle \Phi_1(x', y') \times \Phi_2(z_1 - z_2) \Phi_3[(z_1 + z_2)/2],$$

где  $\Phi_1(0, 0) = 1$ ,  $\Phi_2(0) = 1$ ,  $\Phi_3(z)$  равно единице при  $z \ll d$  и нулю при  $d \leq z \leq D$ ,  $d$  — толщина приповерхностного слоя, где сосредоточены неоднородности,  $\langle (\delta c)^2 \rangle$  — дисперсия флюктуаций скорости звука. Полагая  $\Phi_1(x', 0) = \exp[-x'^2/l_x^2]$  и  $\Phi_2(z) = \exp(-z^2/l_z^2)$  и используя ВКБ-приближение для собственных функций волновода  $\varphi_n(z)$  и  $\varphi_m(z)$  (точки заворота которых  $z_n, z_m \leq D$ ) при  $l_z \ll 2\pi/q_n = 2\pi(h^2 - h_n^2)^{-1/2}$ , получим [14]

$$\sigma_n^m = 4\pi^2 h^2 \alpha^2 \Delta x l_x S \exp[-l_x^2 (h_n - h_m)^2/4] (c_0 \theta_n \theta_m)^{-2},$$

где  $S = \langle (\delta c/c)^2 \rangle l_x d$ ,  $\theta_n = \arccos(h_n/h)$ . В соответствии с этой формулой элемент матрицы  $\sigma_n^m$  при фиксированных вертикальных углах приема  $\theta_m$  и излучения  $\theta_n$  бриллюэновских волн достигает максимального значения на частоте  $f \simeq 2c_0[\pi l_x |\theta_n^2 - \theta_m^2|]^{-1}$ . Следовательно, путем варьирования частоты излучения  $f$  по максимуму  $\sigma_n^m$  можно оценить горизонтальный радиус корреляции  $l_x$ . Тогда по величине  $\sigma_n^m$  определяется и параметр  $S$ . Для коэффициента затухания при тех же приближениях имеем

$$\gamma_n \simeq \sum_{m=1}^N \frac{\sigma_n^m}{\Delta x} \simeq 4\pi h^2 \alpha^2 l_x S \sum_{m=1}^N \exp\left[-\frac{(h_n - h_m)^2 l_x^2}{4}\right] (c_0 \theta_n \theta_m)^{-2}.$$

Таким образом, коэффициент затухания  $\gamma_n$  является функцией тех же самых параметров  $S$  и  $l_x$ :  $\gamma_n = \gamma_n(S, l_x)$ , т. е. в случае гауссовой функции корреляции скорости звука  $\gamma_n$  однозначно определяется по величине  $\sigma_n^m$ .

Другой, часто встречающийся тип неоднородностей имеет степенную форму пространственного спектра:

$$\tilde{\Phi}_1(k_x, k_y) = R_1(k_x^2 + k_y^2)^r (k_0^2 + k_x^2 + k_y^2)^{-p} \exp[-(k_x^2 + k_y^2)\kappa_*^{-2}],$$

$$\tilde{\Phi}_2(k_z) = R_2 k_z^{2\mu+1} (x_0^2 + k_z^2)^{-\nu} \exp(-k_z^2/x_*^2),$$

где  $k_0 \ll k_*$ ,  $p > r+1$ ,  $\kappa_0 \ll \kappa_*$ ,  $\nu > \mu+1$ , коэффициенты  $R_1$  и  $R_2$  определяются условиями нормировки  $\Phi_1(0, 0) = 1$  и  $\Phi_2(0) = 1$ .

Введем частоту поля  $f_0(\theta_n, \theta_m)$ , на которой при заданных углах  $\theta_n$  и  $\theta_m$  выполняется равенство  $k_0^2 \simeq (h_n - h_m)^2$ . Тогда для часто реализующихся условий  $k_* \gg |h_n - h_m|$ ,  $r=0$  и  $\kappa_* \gg |q_n \pm q_m| \gg \kappa_0$ ,  $d^{-1}$  получим [14]

$$\sigma_n^m \simeq \frac{8\pi V 2/\pi h^2 a^2 \Delta x S}{c^2 \theta_n^2 \theta_m^2} R_{nm} \begin{cases} \frac{p-r}{p} \left( \frac{k_0}{|h_n - h_m|} \right)^{2p-2r-1}, & f > f_0(\theta_n, \theta_m) \\ (2r+1)^{-1}, & f < f_0(\theta_n, \theta_m) \end{cases},$$

где

$$S = \left\langle \left( \frac{\delta c}{c} \right)^2 \right\rangle \frac{d}{k_0} \kappa_0^{2(\nu-\mu-1)} \frac{(r+1)(p-r-1)(\mu+1)(\nu-\mu-1)}{\nu(2p-2r-1)},$$

$$R_{nm} = \frac{\exp[-(q_n - q_m)^2/\kappa_*^2]}{|q_n - q_m|^{2\nu-2\mu-1}} + \frac{\exp[-(q_n + q_m)^2/\kappa_*^2]}{|q_n + q_m|^{2\nu-2\mu-1}}.$$

При фиксированных углах  $\theta_n$  и  $\theta_m$  в диапазоне частот  $f < f_0(\theta_n, \theta_m)$  реализуется частотная зависимость  $\sigma_n^m(f) \sim f^{3-2(\nu-\mu)}$ , а в диапазоне  $f > f_0(\theta_n, \theta_m) - \sigma_n^m \sim f^{3-2(\nu-\mu)-2(p-r)}$ . Следовательно, анализируя наклон частотной зависимости  $\lg(\sigma_n^m)$ , можно определить переходную частоту  $f_0$ , а также показатели степени  $\beta_1 = \nu - \mu$  и  $\beta_2 = p - r$ . Тогда в каждом частотном интервале  $f < f_0$  и  $f > f_0$  по величине  $\sigma_n^m$  определяются, соответственно, коэффициенты  $S_1 = S/(2r+1)$  и  $S_2 = (S\beta_2/p)k_0^{2\beta_2-1}$ . Для коэффициента затухания  $\gamma_n$  при тех же приближениях имеем

$$\gamma_n \simeq \sum_{m=1}^N \frac{\sigma_n^m}{\Delta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{8\pi h^2 a^2}{c^2} \sum_{m=1}^N \frac{R_{nm}(\beta_1)}{\theta_n^2 \theta_m^2} \begin{cases} S_1, & f < f_0(\theta_n, \theta_m) \\ S_2, & f > f_0(\theta_n, \theta_m) \end{cases},$$

т. е. и  $\gamma_n$  есть функция  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $f_0$ . Каких-либо других комбинаций параметров, характеризующих спектр неоднородностей, в формулу для  $\gamma_n$  не входит. Таким образом, в этом случае  $\gamma_n$  также однозначно определяется по значениям  $\sigma_n^m$ .

В процессе решения обратной задачи предполагалось, что при измерении информационного сигнала  $I_m(a, t)$  отсутствуют ошибки измерения и нет помех. В реальности, конечно, это не так. Пусть относительная погрешность измерения интенсивности  $I_m(a, t)$  не превышает  $\delta \ll 1$ , а относительная погрешность определения  $\gamma_m$  и  $\gamma_n$  в ячейке  $i$  по величине  $\sigma_n^m$  (заданной с точностью  $\delta_i \ll 1$ ) равна  $\varepsilon(\delta_i) \ll 1$ . Тогда при условии  $|\varepsilon(\delta_v)(x_{v+1} - x_v)[\gamma_m(x_v) - \gamma_n(x_v)]| \ll 1$  из формулы (6) получим ( $i < j$ )

$$\delta_j \simeq \delta_i + 2\delta + 2 \sum_{v=i}^{j-1} \varepsilon(\delta_v) (x_{v+1} - x_v) |\gamma_m(x_v) - \gamma_n(x_v)|.$$

Таким образом, рассмотренный выше алгоритм решения задачи является достаточно приемлемым, если для всех ячеек  $\delta_v \ll 1$ , что возможно только при выполнении условия  $\sum_{v=1}^M \varepsilon(\delta_v) (x_{v+1} - x_v) |\gamma_m(x_v) - \gamma_n(x_v)| \ll 1$ . Если же это условие нарушается или в одной из ячеек  $\delta \geq 1$  (в ячейке расположены слабо рассеивающие неоднородности), то рассмотрен-

ный алгоритм является неработоспособным. В этом неблагоприятном случае необходимо привлекать дополнительную априорную информацию или применять другие более оптимальные алгоритмы решений задачи.

Проведенный выше анализ показывает, что увеличение длины трассы  $a$  или увеличение «мощности» неоднородностей приводит к необходимости использования априорной информации о количественных значениях параметров неоднородностей, а также к некоторому усложнению алгоритма обработки. Тем не менее в условиях применимости модифицированного борновского приближения дифференциальная диагностика сохраняет свою эффективность при достаточно ограниченном объеме привлекаемой априорной информации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нечаев А. Г., Хилько А. И. // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 285.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. Т. 1. С. 280.
3. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. — М.: Наука, 1983. С. 215.
4. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1987. С. 424.
5. Фрейлихер В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 6. С. 892.
6. Нечаев А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 3. С. 291.
7. Нечаев А. Г. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 358.
8. Моисеев А. А. // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 6. С. 1339.
9. Пузенко А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 6. С. 865.
10. Чаевский Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 3. С. 357.
11. Сазонов А. Г., Фарфель В. А. // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 635.
12. Абросимов Д. И., Долин Л. С., Нечаев А. Г. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 4. С. 511.
13. Горская Н. С., Раевский М. А. // Акуст. журн. 1987. Т. 33. С. 463.
14. Нечаев А. Г., Хилько А. И. // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 694.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
4 апреля 1988 г.

## DIAGNOSTICS OF WAVEGUIDE INHOMOGENEITIES BY THE INTENSITY ENVELOPE OF A PULSE SIGNAL

*A. G. Netchayev, A. I. Khil'ko*

Possibilities for the diagnostics of waveguide inhomogeneities by a «differential» method using the principle of a pulse gate circuit for excited modes with considerably different envelope velocities are considered in the field of application of modified Born approximation.

---

УДК 535.5

## ТОНКАЯ СТРУКТУРА ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

*М. А. Антонец, И. А. Шерешевский, Л. В. Шерстнева*

Исследуется качественное поведение дисперсионных кривых для волн в слоистой среде. Показано, что при наличии больших вариаций градиента в гладком профиле скорости распространения в поведении групповой скорости могут возникать характерные особенности — локальные экстремумы, оказывающие существенное влияние на распространение волн. Получены приближенные формулы для групповой скорости в области ее осцилляций.

1. Особенности поведения дисперсионных кривых  $k_l(\omega)$ , дающих решение задачи на собственные значения

$$\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \varphi_l = k_l^2(\omega) \varphi_l, \quad \varphi_l(0) = 0, \quad z \geq 0, \quad (1)$$

в значительной степени определяют распространение волн, испускаемых локализованным широкополосным источником в слоистой среде без потерь с профилем скорости звука  $c(z)$ , на больших расстояниях от этого источника. Так, например, характерный тип волны, называемой волной Эйри (см., например, [1, 2]), обязан своим существованием экстремумам групповой скорости  $\omega_l(\omega) = (dk_l/d\omega)^{-1}$ . Существенным является также и обращение в нуль производных от  $k_l(\omega)$  и фазовой скорости  $v_l(\omega) = \omega/k_l$ . Например, для двухслойного профиля  $c(z)$  (волновода Пекериса) кривая  $\omega_l(\omega)$  имеет в точности один минимум для каждой нормальной волны. В [2] показано, что в трехслойной среде число экстремумов групповой скорости  $\omega_l(\omega)$  пропорционально  $l$ .

В работе показано, что при наличии больших вариаций градиента в профиле  $c(z)$  производные функции  $k_l(\omega)$  могут иметь сколь угодно большое число локальных экстремумов или нулей. Для некоторых кусочно-линейных профилей получены асимптотические формулы для групповой скорости как функции частоты в области осцилляций.

Распространение звука в среде с профилем  $c(z)$ , состоящим из двух линейных участков, изучалось в работах [3–5]. В них было отмечено появление ложных каустик при использовании лучевых методов и проведено сравнение результатов вычисления поля точечного источника лучевым методом и методом нормальных волн. Однако в работах не отмечено наличия особенностей в поведении групповых скоростей нормальных волн.

Как показывает анализ упомянутых выше асимптотических формул, они не являются следствием приближения ВКБ, поскольку имеют место при одновременном согласованном устремлении в бесконечность частоты  $\omega$  и номера  $l$  нормальной волны. Характерные особенности указанного вида отсутствуют в приближении ВКБ, и поэтому их естественно называть тонкой структурой дисперсионных кривых.

2. Предварительные сведения о дисперсионных кривых. Будем считать, что  $c(z) = c_\infty$  при  $z > H$  и что  $c_{\min} = \min_z c(z)$  конечны и положительны. Изучение дисперсионных кривых  $k_l(\omega)$ , по существу, сводится

к известной в квантовой механике задаче изучения зависимости энергетических уровней от константы связи (см., например, [6]). Имеют место неравенства

$$c_{\min} \leq v_l(\omega) \leq c_{\infty}; \quad (2)$$

$$\frac{c_{\min}^2}{v_l(\omega)} \leq w_l(\omega) \leq v_l(\omega). \quad (3)$$

Неравенства (2) суть следствие классических неравенств Штурма, а неравенства (3) следуют из известного в теории возмущений соотношения

$$w_l(\omega) = \frac{1}{v_l(\omega) (c^{-2} \varphi_l, \varphi_l)}, \quad (\varphi_l, \varphi_l) = 1 \quad (4)$$

и неравенств

$$(c^{-2} \varphi_l, \varphi_l) = \frac{1}{\omega^2} (k_l^2 - (\varphi_l'', \varphi_l)) = \frac{1}{\omega^2} (k_l^2 + (\varphi_l', \varphi_l')) \geq \frac{k_l^2}{\omega^2},$$

$$(c^{-2} \varphi_l, \varphi_l) \leq c_{\min}^2.$$

В [7] показано, что неравенства (3) неулучшаемы. В частности, там показано, что для волновода Пекериса, выбирая  $l$  достаточно большим, можно добиться того, чтобы значение  $w_l(\omega)$  на некоторых частотах было сколь угодно близким к  $c_{\min}^2 / c_{\infty}$ .

Кроме того, имеют место следующие предельные соотношения:

$$v_l(\omega_l^{kp} + 0) = w_l(\omega_l^{kp} + 0) = c_{\infty}; \quad (5)$$

$$v_l(\infty) = w_l(\infty) = c_{\min}, \quad (6)$$

где  $\omega_l^{kp}$  — критическая частота (нижняя грань значений  $\omega$  при которых существует не менее  $l$  нормальных волн). Эти соотношения доказаны в [7].

**3. Результаты численного моделирования.** Численное моделирование было проведено для некоторых кусочно-линейных функций  $c^{-2}(z)$ . Для профилей  $c(z)$  такого вида вычисление собственных значений уравнения (1) сводится к решению трансцендентного уравнения, содержащего только элементарные функции и функции Эйри. Вычисление функций Эйри с достаточно высокой точностью производилось с помощью рядов Люка [8]. При вычислении групповой скорости  $w_l(\omega)$  были использованы явные формулы, выражающие  $w_l(\omega)$  в виде рациональной функции от функций Эйри и их производных, аргументы которых выражаются через  $\omega$  и  $k_l(\omega)$ . Это позволило вычислить  $w_l(\omega)$ , избежав потери точности, имеющей место при численном дифференцировании. На рис. 1 приведены графики функций  $v_l(\omega)$ ,  $w_l(\omega)$  для  $l=1, 2, \dots$ , рассчитанные для профиля  $c(z)$ , изображенного на рис. 2. Этот профиль предложен в [9] в качестве модели зависимости скорости звука от глубины в полярном океане.

В соответствии с соотношениями (2), (3) значения групповых скоростей на частотах, близких к критическим, близки к  $c_{\infty}$  и приближаются к  $c_{\min}$  при больших  $\omega$ . Следует также отметить наличие значений  $w_l$ , меньших  $c_{\min}$ .

В то же время на графиках функций  $w_l(\omega)$  видно большое число локальных экстремумов и точек перегиба. Число таких особенностей примерно равно номеру моды. Однако, как показывают результаты численного моделирования (см., например, [7]), едва ли можно надеяться в общем случае на установление простых соотношений между номером моды и числом экстремумов функции  $w_l(\omega)$ .

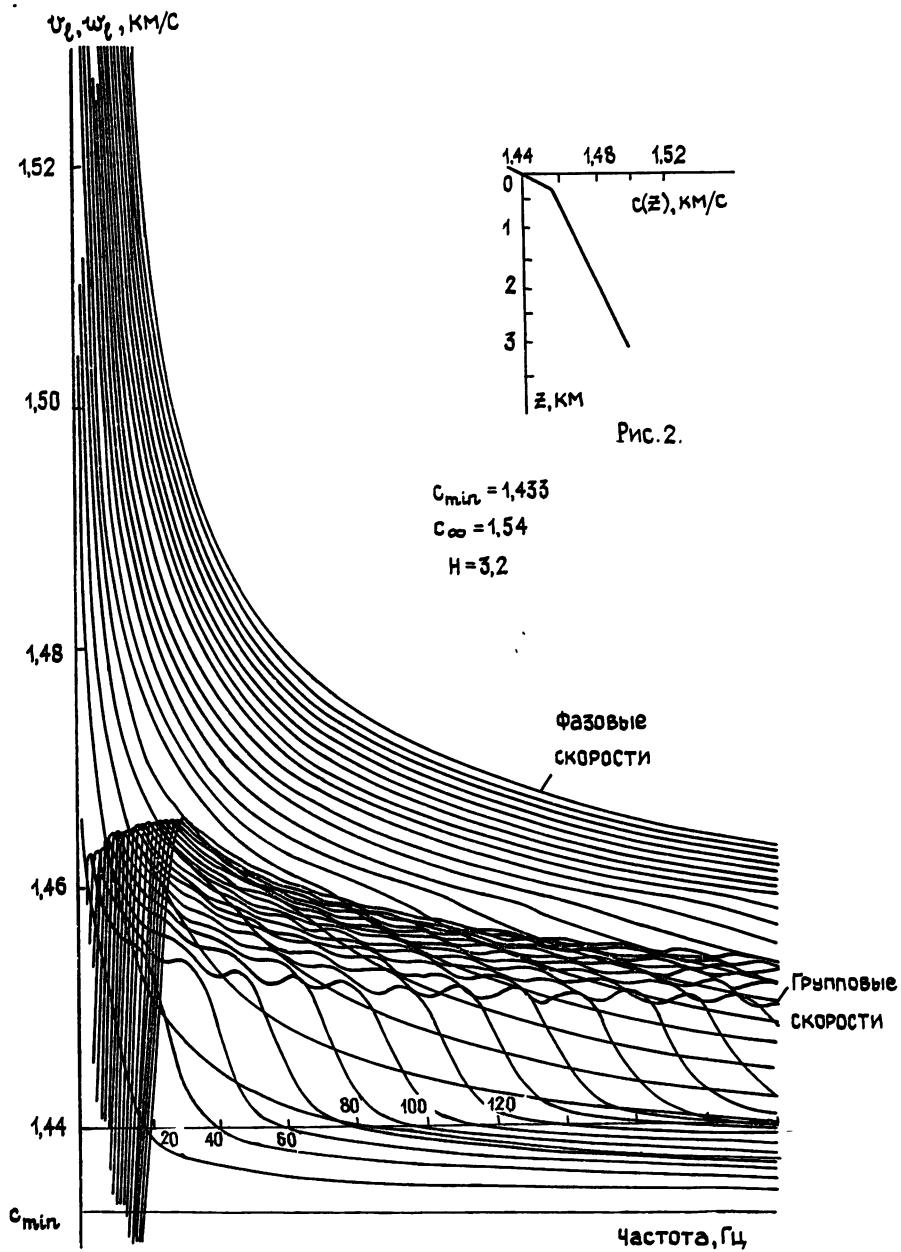


Рис.1.

Фазовые и групповые скорости могут быть вычислены в приближении ВКБ из условия квантования. Соответствующие графики для того же профиля  $c(z)$  приведены на рис. 3. Следует отметить, что, в то время как кривые фазовых скоростей в приближении ВКБ практически совпадают с истинными, соответствующие кривые групповых скоростей отличаются в весьма существенных деталях.

**4. Об аналитическом исследовании тонкой структуры.** Как показывают результаты модельных расчетов, в общем случае трудно надеяться получить связь между номером  $l$  моды и числом экстремумов функции  $w_l(\omega)$ . Даже в простых случаях, таких, как волновод Пекериса или трехслойная модель [2], математически строгое доказательство существования таких экстремумов не очень просто. В то же время класс профилей  $c(z)$ , для которых функции  $w_l(\omega)$  имеют критические точки, достаточно широк. Действительно, из стандартной теории возмущений для

дискретного спектра [10] и формулы (4) следует, что если для некоторого  $c(z)$  при данном  $l$  функция  $w_l(\omega)$  имеет критические точки, то найдется  $\varepsilon$ , такое, что для всех  $\tilde{c}(z)$ , удовлетворяющих условию

$$\max_z |c^{-2}(z) - \tilde{c}^{-2}(z)| < \varepsilon, \quad (7)$$

функция  $w_l(\omega)$  также будет иметь критические точки. Во всех случаях, которые ранее были аналитически исследованы, функция  $c(z)$  являлась разрывной, поэтому, вообще говоря, разрывными должны были быть и все функции  $\tilde{c}(z)$ , удовлетворяющие (7). Таким образом, оставался открытый вопрос о существовании непрерывных и гладких функций  $c(z)$ , для которых групповые скорости имеют особые точки. Заметим, что любая непрерывная функция может быть как угодно хорошо аппроксимирована бесконечно дифференцируемой, так что из (7) следует, что если существует непрерывный профиль  $c(z)$  с особыми кривыми групповых скоростей, то существуют и сколь угодно гладкие профили такого рода.

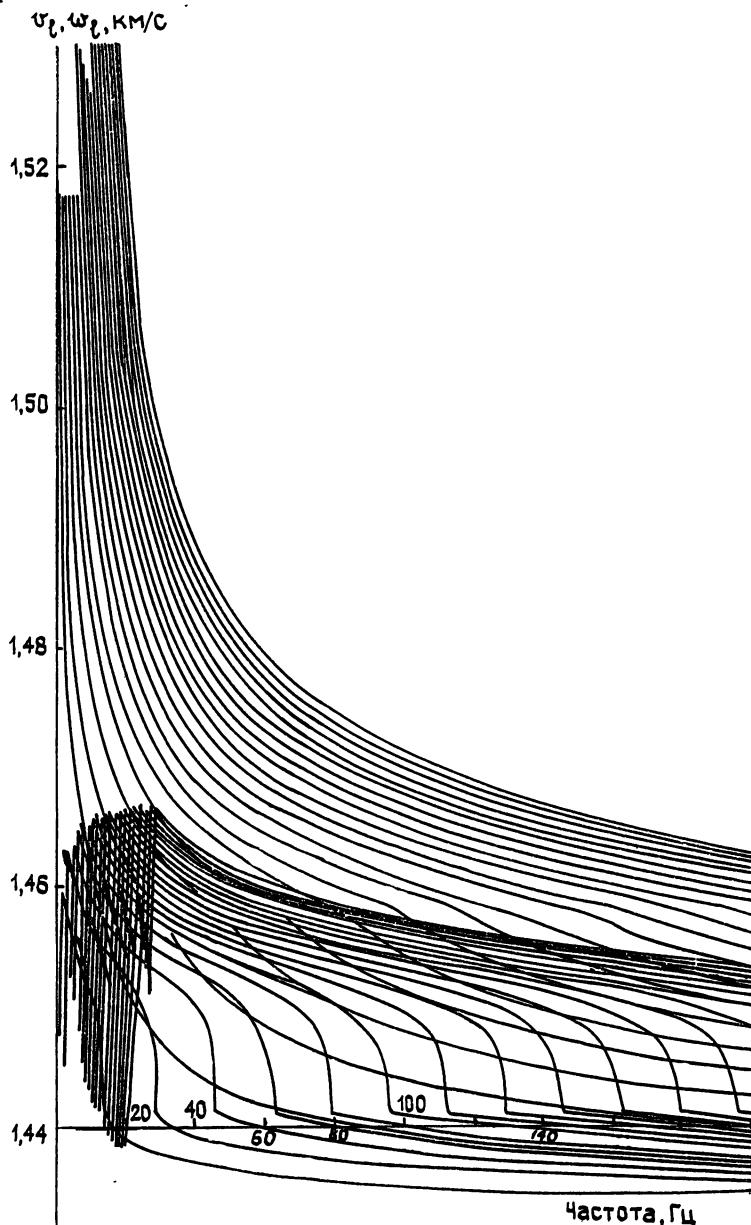


Рис. 3.

В связи со сказанным представляется важной приведенная ниже теорема, которая хотя и относится к функциям  $c(z)$  весьма специального вида, но, во-первых, закрывает вопрос о связи особенностей  $c(z)$  с критическими точками групповых скоростей, а во-вторых, хорошо иллюстрирует трудности, связанные с аналитическим исследованием дисперсионных кривых.

Пусть профиль  $n^2(z) = c^{-2}(z)$  имеет вид

$$n^2(z) = \begin{cases} n_1^2 - p_1 z, & 0 \leq z \leq h, \quad p_1 > 0 \\ n_1^2 - p_2(z-h), & h < z \leq H, \quad n_2^2 = n_1^2 - p_1 h, \quad p_2 > 0 \\ n_3^2, & z > H, \quad n_3^2 = n_2^2 - p_2(H-h) \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим  $\mu = p_1/p_2$ ,  $q^2 = n_1^2 - n_2^2 = p_1 h$ .

*Теорема.* Для любого натурального числа  $N$  найдутся (зависящий от  $N$ ) профиль  $n^2(z)$  вида (8) и натуральное число  $L$ , такие, что для всех номеров  $l \geq L$  функция  $w_l(\omega)$  имеет не менее  $N$  локальных экстремумов.

Ниже приводятся основные моменты доказательства этой теоремы. Опустим за недостатком места большинство утомительных технических деталей, большую часть которых можно найти в [7].

Доказательство разбивается в последовательность шагов. *Первый шаг.* Фиксируем функцию  $n^2(z)$  вида (8) и определим интервал  $\Delta_l = (\omega_l^{(1)}, \omega_l^{(2)})$  так, чтобы при  $\omega > \omega_l^{(2)}$  все нули собственной функции  $\varphi_l(z, \omega)$  находились в области  $0 < z < h$ , а при  $\omega = \omega_l^{(1)}$  в области  $h < z \leq H$  имелось ровно  $N$  нулей и  $\varphi_l(h, \omega_l^{(1)}) = 0$ . Существование такого интервала для всех  $l \geq L$  при некотором достаточно большом  $L$  следует из теоремы о нулях собственных функций [11] и формул, выраждающих  $\varphi_l(z, \omega)$  через функции Эйри для профилей  $n^2(z)$  вида (8).

Заметим, что нули  $z_{kl}(\omega)$  функции  $\varphi_l(z, \omega)$ ,  $0 \leq k \leq l$ , являются монотонно убывающими функциями  $\omega$ , поэтому при изменении  $\omega$  от  $\omega_l^{(1)}$  до  $\omega_l^{(2)}$  ровно  $N$  из них проходит через точку  $z = h$ . Это — основная причина возникновения экстремумов функции  $w_l(\omega)$ , однако этого недостаточно.

*Второй шаг.* Выведем формулу для  $w_l(\omega)$  в случае  $n^2(z)$  вида (8). Заметим вначале, что если  $u(z)$  — решение уравнения  $u'' + Q(z)u = 0$  и  $W(z) = u(z)^2$ , то функция  $W(z)$  удовлетворяет уравнению  $W''' + 2(QW)' + 2QW' = 0$ . Если функция  $Q(z)$  линейна в интервале  $a \leq z \leq b$ , то отсюда следует, что

$$\int_a^b Q(z)u^2(z)dz = \frac{1}{3}uu'\left|_a^b + \frac{Q}{3Q_z}(u'^2 + Qu^2)\right|_a^b,$$

$$\int_a^b u^2(z)dz = \frac{1}{Q_z'}(u'^2 + Qu^2)\Big|_a^b.$$

Используя эти формулы и соотношение (4), получим

$$w_l(\omega)^{-1} = v_l(\omega)^{-1} + v_l(\omega) \frac{n_2^2 - v_l(\omega)^{-2}}{3} + \frac{q^2}{3[1 + \pi^2(1-\mu)g_l(\omega)]}, \quad (9)$$

где функция  $g_l(\omega)$  выражается через функции Эйри и имеет критические точки в интервале  $\Delta_l$ , а функция  $v_l(\omega)$  монотонна, причем  $v_l(\omega_l^{(2)}) = n_2^{-1}$ .

Ясно, что наличие или отсутствие экстремумов у функции  $w_l(\omega)$  связано с соотношением «амплитуды колебаний» функции  $g_l(\omega)$  и изменением функции  $v_l(\omega)$ .

*Третий шаг* состоит как раз в том, чтобы путем выбора параметров функции  $n^2(z)$  обеспечить наличие осцилляций у функции  $g_l(\omega)$  и «почти постоянство» фазовой скорости  $v_l(\omega)$  в интервале  $\Delta_l$ . При анализе функции  $g_l(\omega)$ , представляющей собой многочлен от различных функций Эйри, некоторые аргументы этих функций оказываются большими, что дает возможность использовать известные асимптотические формулы, а другие — малыми, что позволяет считать соответствующие функции почти постоянными и заменить их значениями в нуле. Из сказанного ясно, почему экстремумы групповых скоростей отсутствуют в приближении ВКБ: соответствующая формула получается из (9), если считать большими аргументы всех функций Эйри и при этом  $g_l(\omega)$  оказывается неосциллирующей. Другое важное замечание состоит в том, что для осцилляторности  $g_l(\omega)$  и постоянства  $v_l(\omega)$  требуется, чтобы выполнялось условие  $\mu \gg 1$ . Таким образом, осцилляции могут возникать, когда градиент  $n^2(z)$  имеет положительный скачок ( $-p_2 \gg -p_1$ ), и не возникают, если скачок градиента отрицателен.

После того как параметры функции  $n^2(z)$  выбраны необходимым образом, для функции  $w_l(\omega)$  в интервале  $\Delta_l$  получается следующая приближенная формула:

$$w_l(\omega)^{-1} \sim n_2 + \frac{q^2}{3n_2[1 + \pi^2(\mu-1)g_l^{(0)}(\omega)]}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} g_l^{(0)}(\omega) &= \frac{[\text{Ai}'(0)]^2}{\pi|S_l(\omega)|^{1/2}} \left[ 1 + \cos\left(v_l(\omega) + \frac{\pi}{12}\right) \right], \\ S_l(\omega) &= \left(\frac{\omega}{p_1}\right)^{2/3} (n_1^2 - v_l^{-2}(\omega)), \quad v_l(\omega) = \frac{2}{3}(S_l(\omega))^{3/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что в интервале  $\Delta_l$  функция  $v_l(\omega)$  монотонна и ее изменение не меньше, чем  $(N+1)\pi$ , откуда и следует существование  $N$  экстремумов у функции  $w_l(\omega)$ .

Хотя общих утверждений о наличии экстремумов у групповых скоростей сделать нельзя, но, как следует из приведенного анализа, такая ситуация может возникнуть, если градиент функции  $n^2(z)$ , оставаясь отрицательным, на малом интервале изменения  $z$  резко возрастает.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: АН СССР, 1957.
- Толстой И., Клей К. Акустика океана. — М.: Мир, 1969.
- Pedersen M. A. // JASA. 1961. V. 33. № 4. P. 465.
- Pedersen M. A., Gordon D. F. // JASA. 1965. V. 37. № 1. P. 105.
- Pedersen M. A., Gordon D. F. // JASA. 1970. V. 47. № 1 (part 2). P. 304.
- Антонец М. А., Жислин Г. М., Шерешевский И. А. // ТМФ. 1973. Т. 16. № 2. С. 235.
- Антонец М. А., Шерешевский И. А., Шерстнева Л. В. Препринт НИРФИ № 215. Горький, 1986.
- Люк Ю. Специальные математические функции и их применения. — М.: Мир, 1980.
- Де Санто. Акустика океана. — М.: Мир, 1982.
- Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1978.
- Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1978.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
24 июня 1988 г.

#### THE FINE STRUCTURE OF THE DISPERSION LAWS FOR WAVES IN THE LAYERED MEDIUM

*M. A. Antonets, I. A. Shereshevskij, L. V. Sherstneva*

Some special behavior of the group velocities of normal waves in the inhomogeneous media is investigated. It is shown that the group velocity as the function of the frequency may have a number of extrema if the profile of the wave propagation velocity in the medium has some sharp variations. These extrema bring some special features for the wave propagation. Some formulas for the group velocity are obtained.

УДК 621.396.677.497

## ПЛОСКАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ С ПЕРИФЕРИЙНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

*C. H. Бойко, K. P. Яцук*

Исследован спектр волн плоской логарифмической спирали с периферийным возбуждением. Показано, что в случае разомкнутой в центре спирали направленные и поляризационные характеристики излученных волн отличаются от полученных для центрального возбуждения. Исследованы фазовые условия распространения поверхностных несимметрических волн. Рассчитано волновое сопротивление и входной импеданс спирали. Проведенные эксперименты подтвердили расчетные данные.

В работах, посвященных исследованию спектра волн плоской логарифмической спирали, предполагается расположение источников в центре системы или на небольшом расстоянии от него [1-3]. При переходе к области высоких частот возникает трудность осуществления центрального возбуждения. В этом случае сигнал удобнее вводить со стороны внешнего радиуса — периферии системы. Настоящая работа посвящена анализу особенностей периферийного возбуждения плоской логарифмической спирали с плотной намоткой.

**Формальное решение задачи.** В качестве модели спирали выбирается анизотропно проводящая плоскость, возбужденная на радиальном расстоянии  $\rho_0$  от центра кольцом  $\delta$ -генераторов с полем  $E_{\text{возб}} = -K_0 \delta(\rho - \rho_0) e^{-in\varphi}$  ( $K_0$  — эдс  $\delta$ -генератора,  $\delta(\rho - \rho_0)$  — функция Дирака). Рассматривается случай  $\rho < \rho_0$ , отвечающий периферийному возбуждению спирали, если активная область ее находится внутри кольца радиуса  $\rho_0$ . Анализируются случаи согласованной или разомкнутой в центре (при  $\rho \rightarrow 0$ ) спирали.

Применяется метод интегральных преобразований. Поля спирали в цилиндрической системе координат выражаются через электрический  $P_e$ - и магнитный  $P_m$ -потенциалы Герца [3]. Интегральные представления потенциалов в бесконечных пределах для случаев периферийного и центрального возбуждений, согласно [4], записываются в виде

$$\Pi_e = \frac{1}{2} e^{\pm i n \varphi} \int_{-\infty}^{\infty} A(y) \exp(-ikz\sqrt{1-y^2}) \begin{cases} J_n(k\rho y) & \rho < \rho_0 \\ H_n^{(2)}(k\rho y) & \rho > \rho_0 \end{cases} y dy ; \quad (1)$$

$$\Pi_m = \frac{1}{2} e^{\pm i n \varphi} \int_{-\infty}^{\infty} B(y) \exp(-ikz\sqrt{1-y^2}) \begin{cases} J_n(k\rho y) & \rho < \rho_0 \\ H_n^{(2)}(k\rho y) & \rho > \rho_0 \end{cases} y dy , \quad (2)$$

где

$$A(y) = (1/2) [M(y) + N(y)], \quad B(y) = -(i/2) [M(y) - N(y)],$$

$$M(y) = iK_0 \rho_0^2 \sqrt{1+u^2} k^{-1} y^{-2} \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{n/2} (\xi - iu)^{-inu-1} \times \\ \times \left[ C_p + \int_0^y \left( \frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{n/2} (\tau - iu)^{inu} \begin{cases} H_n^{(2)}(k\rho_0 t) & \rho < \rho_0 \\ J_n(k\rho_0 t) & \rho > \rho_0 \end{cases} t dt \right] ; \quad (3)$$

$$N(y) = iK_0 \rho_0^2 \sqrt{1+u^2} k^{-1} y^{-2} \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{n/2} (\xi + iu)^{-inu-1} \times \\ (4)$$

$$\times \left[ C_\eta + \int_0^y \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{n/2} (\tau + iu)^{inu} \left\{ \begin{array}{ll} H_n^{(2)}(k\rho_0 t) & \rho < \rho_0 \\ J_n(k\rho_0 t) & \rho > \rho_0 \end{array} \right\} t dt \right],$$

$\xi = \sqrt{1-y^2}$ ,  $\tau = \sqrt{1-t^2}$ ,  $u$  — параметр намотки спирали, задаваемой уравнением  $\rho = \rho_0 e^{-\Phi/u}$ ,  $k = (\omega/c)$ ,  $C_\eta = 0$  при  $n \geq 0$ ,  $C_\mu = 0$  при  $n < 0$ .

Для интересующего нас случая периферийного возбуждения ( $\rho < \rho_0$ ) в подынтегральное выражение входит функция Бесселя  $J_n(k\rho y)$ . Представим ее через сумму функций Ханкеля:

$$J_n(k\rho y) = (1/2) [H_n^{(1)}(k\rho y) + H_n^{(2)}(k\rho y)].$$

Тогда первой особенностью решения для периферийного возбуждения оказывается представление потенциалов  $\Pi_e$  и  $\Pi_m$  в виде двух слагаемых, представляющих собой интегральные разложения по цилиндрическим волнам, бегущим к центру спирали и от него.

Второй особенностью решения следует признать различие азимутальных зависимостей для волн, бегущих к центру ( $\sim e^{-in\Phi}$ ) и от центра ( $\sim e^{in\Phi}$ ) [3]. Назовем первые падающими, вторые — отраженными волнами. С учетом отмеченных особенностей выражения для потенциалов  $\Pi_e$ ,  $\Pi_m$  запишутся в виде

$$\Pi_{e,m} = \frac{1}{4} \left[ e^{-in\varphi} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A(y) \\ B(y) \end{array} \right\}_{(-n)} \exp(-ikz\sqrt{1-y^2}) H_n^{(1)}(k\rho y) y dy + \right. \\ \left. + e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A(y) \\ B(y) \end{array} \right\}_{(+n)} \exp(-ikz\sqrt{1-y^2}) H_n^{(2)}(k\rho y) y dy \right]. \quad (5)$$

Третьей особенностью решения является необходимость вычисления как коэффициентов  $C_\mu$  (для  $n > 0$ ), так и  $C_\eta$  (для  $n < 0$ ), тогда как для центрального возбуждения спирали требуется вычисление только одной константы.

Согласно методике работы [5]  $C_\eta$ ,  $C_\mu$  можно найти соответственно из соотношений

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \lim_{z \rightarrow 0} [H_{s(-n)}^N(\rho, z) - H_{s(+n)}^N(\rho, z)] = 0; \quad (6)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} [H_{s(-n)}^M(\rho, z) - H_{s(+n)}^M(\rho, z)] = 0, \quad (7)$$

где  $H_s^N$ ,  $H_s^M$  — нормальные к виткам спирали компоненты магнитного поля, отвечающие только  $N(y)$  и  $M(y)$ .

В нашем случае константа  $C_\eta$  определялась из уравнения (6) путем численного интегрирования. Для  $C_\mu$  из (7) найдено аналитическое выражение

$$C_\mu = -n(i)^{-n}(1+iu) \left( \frac{k\rho_0}{2} \right)^{-inu} (i)^{inu} (k\rho_0)^{-2} \frac{\Gamma(n(1-iu)/2)}{\Gamma(n(1+iu)/2)}, \quad (8)$$

отличающееся множителем 0,5 от полученного в приближении квазистатики для центрального возбуждения [5]. Отметим, что условие (7) отвечает разомкнутой в центре спиралью.

Анализ решения, выделение пространственных и поверхностных волн. Выражения для потенциалов (5) анализировались почлененно в

плоскости комплексной переменной с учетом особенностей ветвления  $y=\pm 1$  и  $y=\pm\sqrt{1+u^2}$  в  $M(y)$  и  $N(y)$  (выражения (3), (4)).

Путем введения новой переменной  $y=\sin \xi$  и последующей деформации контура интегрирования в перевальный путь выделялись решения, соответствующие пространственным, поверхностным и вытекающим волнам [3].

Для полей пространственных волн в дальней зоне методом перевала получены выражения

$$E_{\varphi}^{np} = -H_{\theta}^{np} = \frac{1}{4}(i)^n k \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta \cos \theta \{e^{-in\Phi} (-1)^n \times \\ \times [M(-\sin \theta) - N(-\sin \theta)]_{(-n)} + e^{in\Phi} [M(\sin \theta) - N(\sin \theta)]_{(+n)}\}; \quad (9)$$

$$E_{\theta}^{np} = H_{\varphi}^{np} = -\frac{1}{4}(i)^{n-1} k \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta \cos \theta \{e^{-in\Phi} (-1)^n \times \\ \times [M(-\sin \theta) + N(-\sin \theta)]_{(-n)} + e^{in\Phi} [M(\sin \theta) + N(\sin \theta)]_{(+n)}\}, \quad (10)$$

где  $R$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — сферические координаты,  $M(\pm \sin \theta)$  и  $N(\pm \sin \theta)$  описываются формулами (3) и (4) при  $y=\sin \xi_s$ ,  $\xi_s=\pm \theta$  — точки перевала для первого и второго слагаемых в (5) соответственно.

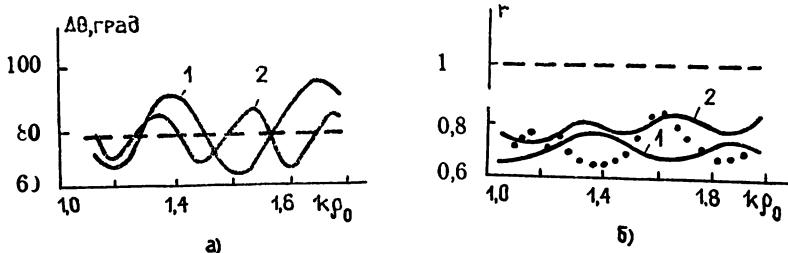


Рис. 1.

По формулам (9), (10) были просчитаны направленные и поляризационные характеристики спиралей с  $\mu=20$  и  $30$  для  $n=1$ . Расчеты показали, что диаграммы направленности и коэффициенты эллиптичности  $r$  согласованной в центре спирали с периферийным возбуждением не отличаются от ДН и  $r$  центрально возбужденной спирали: ширина ДН  $\Delta\theta \approx 76^\circ$ , а  $r=1$  в диапазоне частот с перекрытием 2:1 (пунктирные линии на рис. 1а, б). Для разомкнутой в центре спирали наблюдается периодическое изменение с частотой  $\Delta\theta$  и уменьшение  $r$  в направлении максимума излучения ( $\theta=0$ ) до значения 0,7—0,9 (кривые 1, 2 на рис. 1а, б для  $\mu=20$  и  $\mu=30$  соответственно). В пределах ширины ДН коэффициент эллиптичности  $r$  в среднем спадает на 20% для  $\mu=20$  и на 15% для  $\mu=30$ . Отметим, что значения  $r$  для произвольных углов  $\theta$  не зависят от  $\varphi$  — с изменением угла  $\varphi$  меняется только угол наклона поляризационного эллипса.

Выражения для ближнего поля спирали найдены путем оценки интегралов вдоль берегов разрезов из точек ветвления логарифмического типа  $y=\pm\sqrt{1+u^2}$  в комплексной плоскости  $y$ . Согласно [2, 3] выделены ветви функции  $\sqrt{1-y^2}=-i\sqrt{y^2-1}$  (решение 1) и  $\sqrt{1-y^2}=i\sqrt{y^2-1}$  (решение 2). При этом электрический и магнитный векторы Герца получены в виде суммы двух слагаемых с  $n<0$  и  $n>0$  для обоих случаев:

для решения 1

$$\Pi_e^1 = \frac{-i}{2k} [e^{-in\Phi} \alpha^*(u) \beta^*(k\rho) (-1)^n C'_\eta(k\rho_0) + e^{in\Phi} \times$$

(11)

$$\times \alpha(u) \beta(k\rho) C_n(k\rho_0)] \exp[-kz(u - n\sqrt{1+u^2}/(k\rho))], \quad \Pi_m^1 = i\Pi_e^1;$$

для решения 2

$$\Pi_e^2 = \frac{i}{2k} [e^{-in\varphi} \alpha^*(u) \beta(k\rho) (-1)^n C_{(-n)}(k\rho_0) + e^{in\varphi} \times \\ (12)$$

$$\times \alpha(u) \beta(k\rho) C'_\mu(k\rho_0)] \exp[kz(u - n\sqrt{1+u^2}/(k\rho))], \quad \Pi_m^2 = -i\Pi_e^2.$$

В (11), (12)

$$\beta(k\rho) = (k\rho)^{-1/2} \exp[-i(k\rho\sqrt{1+u^2} - nu \ln(k\rho))], \\ \alpha(u) = \frac{1}{2} K_0 \rho_0^2 \sqrt{\frac{u}{n}} (i)^{-inu} (1+u^2)^{-3/4} \exp[in(\pi/2 - \arctg u)] \times \\ \times \exp[-inu(\ln n + \ln\sqrt{1+u^2} - 1)],$$

$$C_\eta(k\rho_0) = C_\eta - \int_0^{y_0} \left( \frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{n/2} (\tau + iu)^{-inu} H_n^{(1)}(k\rho_0 t) dt;$$

$$C_{(-n)}(k\rho_0) = - \int_0^{y_0} \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{n/2} (\tau - iu)^{-inu} H_n^{(1)}(k\rho_0 t) dt,$$

$$C'_\mu(k\rho_0) = C_\mu + \int_0^{y_0} \left( \frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{n/2} (\tau - iu)^{inu} H_n^{(2)}(k\rho_0 t) dt,$$

$$C_n(k\rho_0) = \int_0^{y_0} \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{n/2} (\tau + iu)^{inu} H_n^{(2)}(k\rho_0 t) dt, \quad y_0 = \sqrt{1+u^2}.$$

Из выражений (11), (12) следует, что для падающей и отраженной волн и обоих решений радиальные фазовые скорости одинаковы,

$$v_{\Phi\rho}^{1,2} = \frac{c}{\sqrt{1+u^2} - nu/(k\rho)} \quad (n > 0). \quad (13)$$

Из (13) видно, что для  $k\rho < n$  и  $k\rho > n$   $v_{\Phi\rho}^{1,2} < c$ , а в районе  $k\rho \approx n$  происходит резкое возрастание  $v_{\Phi\rho}$  до величин, больших  $c$ . Дисперсионная зависимость имеет аномальный ход при  $k\rho < n$  и нормальный при  $k\rho > n$ .

Полученным решениям (11), (12) может быть дано следующее физическое толкование. При периферийном возбуждении в области источника возникает несимметричная поверхностная волна с  $e^{-in\varphi}$  азимутальной зависимостью поля. Эта волна при распространении к центру претерпевает изменения, связанные с ростом  $v_{\Phi\rho}$  и уменьшением декремента затухания поля по  $z$ , поэтому одновременно с поверхностной волной существует и квазивытекающая с  $v_{\Phi\rho} < c$ . Теоретическая возможность существования медленных несобственных волн уже отмечалась в работе [6] с оговоркой, что физическая интерпретация их не ясна. В нашем случае неоднородной системы эти решения приобретают физический смысл, так как поверхностные и квазивытекающие волны взаимосвязаны. В активной области  $k\rho \sim n$  эти волны при-

нимают форму быстрой вытекающей волны, излучающей большую часть принесенной поверхностной волной энергии [3]. При  $k\rho < n$  оставшаяся часть энергии локализуется в поверхностную и квазивытекающую волны. Поверхностная волна отражается от центра спирали и в области  $k\rho \sim n$  излучается с  $e^{in\phi}$  азимутальной зависимостью поля. Так как падающие и отраженные волны имеют противоположные круговые поляризации поля, суммарное поле излучения оказывается эллиптически поляризованным.

Эксперименты были проведены на однозаходной самодополнительной спирали диаметром 7 см с  $\mu = 30$ , возбужденной на  $\rho_0 = 3,5$  см. Исследования близких полей показали, что над спиралью существует несимметричная поверхностная волна с областями нормальной и аномальной дисперсий. Анализ полученных ДН и значений  $r$  (точки на рис. 1б) подтвердил теоретический вывод о влиянии отражения от центра спирали на характеристики излучения.

**Входные характеристики.** Существование поверхностной волны, трансформирующейся в излученную, позволяет вычислить входной импеданс спирали  $Z_{\Sigma}$  путем моделирования ее неоднородной линией с волновым сопротивлением  $W(k\rho)$  и коэффициентом распространения  $p(k\rho)$ , нагруженной на сопротивление излучения активной области  $R_\Sigma$  [7]. В нашем случае, согласно (13), коэффициент распространения волны равен ( $\mu \gg 1$ )

$$p(k\rho) = k\kappa(k\rho), \quad (14)$$

где  $\kappa(k\rho) = \mu[1 - n/(k\rho)]$ .

Выражение для волнового сопротивления, полученное по методике работы [7], одно и то же для падающей ( $\sim e^{-in\phi}$ ) и отраженной ( $\sim e^{in\phi}$ ) волн и имеет вид

$$W(k\rho) = \frac{30[(k\rho - n)^2\mu^2 + (k\rho)^2] |n - k\rho|}{(k\rho - n)^4\mu^2 + 0,25(k\rho)^2} \quad [\Omega_m]. \quad (15)$$

Сопротивление излучения определялось как

$$R_\Sigma = 2P_\Sigma / |I_{\Sigma}^{\text{пов}}|^2, \quad (16)$$

где

$$P_\Sigma = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) R^2 \sin\theta d\theta$$

— суммарная мощность излучения в верхнее и нижнее полупространства;  $E_\theta, E_\phi$  — компоненты поля излучения в дальней зоне, найденные методом Кирхгофа по токам прямой и отраженной поверхностных волн при интегрировании по площади активной области спирали шириной  $k\rho_1 \div k\rho_2$  [7];  $I_{\Sigma}^{\text{пов}}$  — значение суммарного тока при  $k\rho = k\rho_2$ .

Токи определялись через компоненты магнитных полей поверхностных волн

$$I^{\text{пов}} = 2\pi\rho J^{\text{пов}} = -\frac{c\rho}{\sqrt{1 + \mu^2}} (H_\rho^{\text{пов}} + \mu H_\phi^{\text{пов}})_{z=0} \quad (17)$$

и для  $n \geq 0$  приобрели вид

$$J_{(-n)}^{\text{пов}}(k\rho) = \frac{1}{2} \alpha^*(\mu) (-1)^n C'_\eta(k\rho_0) e^{-in\phi} G^*(k\rho); \quad (18)$$

$$J_{(+n)}^{\text{пов}}(k\rho) = \frac{1}{2} \alpha(\mu) C'_\mu(k\rho_0) e^{in\phi} G(k\rho), \quad (19)$$

где

$$G(k\rho) = c(1+u^2)\beta(k\rho) \left\{ ik\rho\sqrt{1+u^2} + 0,5 - 2inu + \right.$$

$$\left. + \frac{n\sqrt{1+u^2}}{k\rho} \left[ in - \frac{u}{2(1+u^2)} \right] \right\}.$$

Входной импеданс находился путем численного интегрирования уравнения Риккати [8]

$$\frac{dZ_{bx}}{d(k\rho)} - i \frac{x(k\rho)}{W(k\rho)} Z_{bx}^2 + ix(k\rho) W(k\rho) = 0 \quad (20)$$

с граничным условием, задаваемым при  $k\rho = k\rho_2$  нагрузкой  $R_n = R_\Sigma$ .

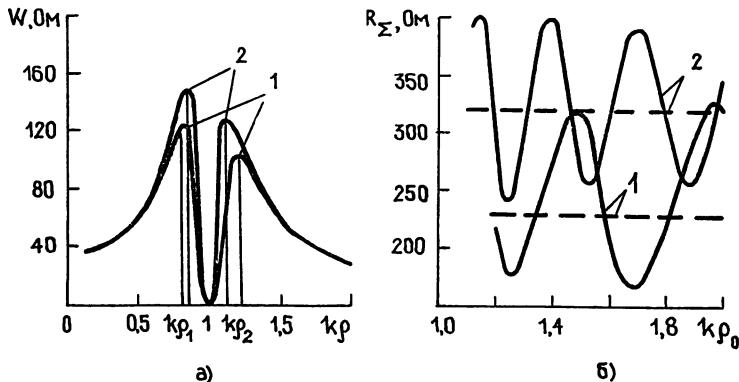


Рис. 2.

На рис. 2а приведены кривые изменения волнового сопротивления  $W$  как функции  $k\rho$  для  $u=20$  (кривая 1) и  $30$  (кривая 2). Согласно [7] положения максимумов  $W$   $k\rho_1$  и  $k\rho_2$  могут быть приняты за границы излучающей области спирали. В нашем случае для  $u=20$   $k\rho_1 = 0,812$ ,  $k\rho_2 = 1,213$ ; для  $u=30$   $k\rho_1 = 0,843$ ,  $k\rho_2 = 1,175$ .

На рис. 2б приведены расчетные зависимости  $R_\Sigma$  от величины  $k\rho$  для  $u=20$  (кривые 1) и  $u=30$  (кривые 2) (пунктирные линии для падающей волны, сплошные — для падающей и отраженной). Видно, что при наличии отраженной поверхностной волны сопротивление излучения становится периодической функцией  $k\rho$ .

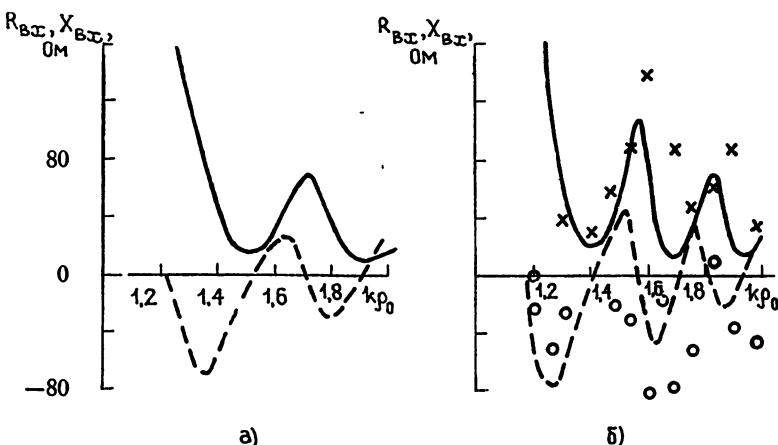


Рис. 3.

На рис. 3а, б для  $n=1$  и  $u=20$  и  $30$  соответственно приведены рас-

считанные активная  $R_{\text{вх}}$  (сплошные кривые) и реактивная  $X_{\text{вх}}$  (пунктирные кривые) составляющие входного импеданса разомкнутой в центре спирали с внешним возбуждением. На рис. 3б нанесены результаты измерений  $Z_{\text{вх}}$  (крестиками —  $R_{\text{вх}}$ , кружками —  $X_{\text{вх}}$ ) описанного выше макета. Из рис. 3а, б видно, что  $Z_{\text{вх}}$  является осциллирующей функцией  $k\rho_0$ , частота осцилляций увеличивается с ростом  $\mu$ . Среднее значение  $R_{\text{вх}}$  уменьшается с ростом  $k\rho_0$ , стремясь к величине 50 Ом, а среднее значение  $X_{\text{вх}}$  стремится к нулю. Для согласованной в центре спирали ( $R_\Sigma = \text{const}$ ) расчетные значения  $Z_{\text{вх}}$  слабо отличаются от полученных для разомкнутой спирали. По сравнению с центральным возбуждением наблюдается большее изменение  $Z_{\text{вх}}$  по частоте и меньший диапазон существования гармоники  $n=1$  в однозаходной спирале. Для его расширения необходимо использовать двухзаходную спираль с противофазным возбуждением ветвей с внешних концов.

**Выводы.** В возбужденной с периферии плоской логарифмической спирали существуют одновременно поверхностные, квазивытекающие и излученные волны; фазовые скорости поверхностных и квазивытекающих волн одинаковы и зависят от приведенного радиуса  $k\rho$ , обнаруживая области нормальной и аномальной дисперсий; в области  $k\rho \sim n$  поверхностная волна трансформируется в излученную посредством вытекающей; ДН поля излучения слабо отличаются от полученных для случая центрального возбуждения, коэффициент эллиптичности разомкнутой в центре спирали изменяется от 0,7 до 0,9 в частотном диапазоне 1 : 2; входной импеданс слабо зависит от наличия отражения в центре спирали, имеет осциллирующий характер и изменяется сильнее, чем при центральном возбуждении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cheo B. R. S., Rumsey V. H. // Radio Science. 1968. V. 3. № 3. P. 267.
2. Горощеня А. Б., Горбунков В. И. Теория частотно-независимых антенн. — Омск: Политехн. ин-т, 1979.
3. Яцук К. П., Бойко С. Н. // Сб.: Радиотехника. — Харьков: Гос. ун-т, 1985. Вып. 72. С. 7.
4. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Наука, 1962. С. 42.
5. Горощеня А. Б., Горбунков В. И. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. № 5. С. 1095.
6. Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14. № 10. С. 1768.
7. Яцук К. П., Бойко С. Н. // Сб.: Радиотехника. — Харьков: Гос. ун-т, 1988. Вып. 85. С. 10.
8. Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1964.

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
22 апреля 1988 г.

#### THE PLANAR-EQUIANGULAR-SPIRAL ANTENNA WITH PERIPHERAL EXCITATION

S. N. Boiko, K. P. Yatsuk

The wave spectrum of planar-equangular-spiral antenna with peripheral excitation has been investigated. It is shown, that the radiation pattern and axial ratio of the centre open spiral differ from those of the original excited spiral. The phase change in nonsymmetrical surface waves has been investigated. The characteristic impedance and input impedance of the spiral has been calculated. The theoretical results have been confirmed by the experimental data.

УДК 538.574.6

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

*А. Б. Самохин, С. В. Цветков*

Предложены дифференциальные асимптотические граничные условия излучения, которым с точностью до слагаемых порядка  $O(|kr|^{-3})$  удовлетворяет рассеянное электромагнитное поле в трехмерном случае. Полученные граничные условия позволяют ставить краевую задачу дифракции в более ограниченной области, чем при обычных условиях излучения. Доказано, что решение краевой задачи дифракции с приближенными условиями существует и единственным, что позволяет применять для ее решения прямые численные методы.

При применении такого мощного и универсального аппарата, как прямые численные методы, для решения задач дифракции, например, в локально-неоднородных средах, одна из основных проблем заключается в затруднительности самой постановки краевой задачи при решении внешних задач электродинамики, так как использование условий излучения в их явном виде неприемлемо из-за неограниченных размеров области. Возможности разрешения этой проблемы уже рассматривались в литературе. В сочетании с проекционными методами в работах [1, 2] и в ряде других использовались «парциальные» граничные условия. Можно указать работу [3], где рассматриваются краевые условия импедансного типа, при выборе которых учитывается поведение решения уравнения Шредингера на бесконечности. В работе [4] использованы поглощающие границы, которые моделируют основное свойство условия предельного поглощения, а именно отсутствие из бесконечности отраженных волн. Однако для прямых численных методов (конечных элементов, конечных разностей) наиболее удобны дифференциальные граничные условия, задаваемые вблизи области неоднородности среды. В работах [5–8] рассматривались асимптотические дифференциальные граничные условия для двумерной задачи дифракции в ограниченной области. Важным требованием к приближенным дифференциальным условиям является высокая точность, но не менее важно, чтобы решение краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями существовало и было единственным.

В настоящей работе для трехмерной краевой задачи дифракции предлагаются дифференциальные асимптотические граничные условия, имеющие точность  $O(|kr|^{-3})$ .

В дифференциальные граничные условия входят производные в поперечном направлении. Это увеличивает порядок точности асимптотических граничных условий, но приводит к неединственности решения соответствующей краевой задачи. С целью регуляризации краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями в дифференциальный граничный оператор вводится поправка, содержащая производные четвертого порядка в поперечном направлении, не ухудшающая точность приближенных условий, но обеспечивающая существование единственного решения соответствующей краевой задачи дифракции.

Предложенные граничные условия удобны в плане численной реализации как для методов конечных элементов, так и для сеточных методов.

**1. Уравнение в области.** Нашей целью является поставить краевую задачу в ограниченной области, удобную для применения метода конечных элементов, которая дает приближенное решение задачи дифракции в неограниченной области. В этой связи удобно вместо уравнений Максвелла рассматривать сильноэллиптическое уравнение [9]:

$$\hat{L}U = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} U + \epsilon^* \operatorname{grad} \operatorname{div} \epsilon U + \epsilon U = f(x), \quad (1)$$

что облегчает выбор сходящихся численных алгоритмов для решения соответствующей краевой задачи.

Здесь и ниже  $U$  соответствует вектору  $E$  в уравнениях Максвелла. Рассмотрим обоснованность такой замены. Пусть  $S$  — замкнутая поверхность, разделяющая две среды  $\alpha$  и  $\beta$ , заполняющие, соответственно, конечную область  $V_\alpha$ , расположенную внутри  $S$ , и бесконечную область  $V_\beta$  вне  $S$ . На поверхности  $S$  рассмотрим два типа условий сопряжения:

$$\left. \begin{aligned} n \times U_\alpha &= n \times U_\beta \\ n \times \operatorname{rot} U|_\alpha &= n \times \operatorname{rot} U|_\beta \end{aligned} \right|_S \quad (2)$$

и

$$\left. \begin{aligned} n \times U_\alpha &= n \times U_\beta \\ n \times \operatorname{rot} U|_\alpha &= n \times \operatorname{rot} U|_\beta \\ \operatorname{div} (\epsilon U)|_\alpha &= 0 = \operatorname{div} (\epsilon U)|_\beta \end{aligned} \right|_S, \quad (3)$$

$n$  — внешняя нормаль к  $S$ . На бесконечности также рассмотрим следующие два типа условий излучения:

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} k_0 r \left( U - \frac{i}{k_0} [n \times \operatorname{rot} U] \right) = 0, \quad k_0 r U < \infty \quad (4)$$

и

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} k_0 r \left( U - \frac{i}{k_0} [n \times \operatorname{rot} U] \right) = 0, \quad k_0 r U < \infty, \quad (5)$$

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} (k_0 r \operatorname{div} \epsilon_\beta U) = 0.$$

Предположим  $\operatorname{Im} \epsilon_\alpha > 0$ ,  $\epsilon_\alpha \in C^1[V_\alpha]$ ,  $\epsilon_\beta \equiv 1$ . Заметим, что всякое решение уравнений Максвелла в подходящем классе сред является и решением уравнения (1). Кроме того, всякое решение уравнений Максвелла с краевыми условиями (2), (4) удовлетворяет и условиям (3), (5). Как известно, решение краевой задачи уравнений Максвелла с условиями (2), (4) существует и единственno [10]. Следовательно, если решение краевой задачи (1), (3), (5) единствено, то получаем ее эквивалентность краевой задаче (3), (4) для уравнений Максвелла.

Покажем единственность решения краевой задачи (1), (3), (5). Пусть  $\sigma$  — сферическая поверхность достаточно большого радиуса  $k_0 r$ , охватывающая область  $V_\alpha$ . Умножим равенство  $\hat{L}U = 0$  на  $U^*$  и проинтегрируем по  $V_\sigma$ . В результате с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} & -(\operatorname{rot} U^*, \operatorname{rot} U)_{V_\sigma} - (\operatorname{div} \epsilon^* U^*, \operatorname{div} \epsilon U)_{V_\sigma} + \\ & + (U^*, \epsilon U)_{V_\sigma} + (\operatorname{div} \epsilon_\beta U(nU^*))_\sigma + (n[U^* \times \operatorname{rot} U])_\sigma = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь обозначено  $(a, b)_{V_\sigma} = \int_{V_\sigma} ab dV$ ,  $(a, b)_\sigma = \int_\sigma ab d\sigma$ . Устремим радиус  $k_0 r$  поверхности  $\sigma$  к бесконечности, возьмем мнимую часть от (6). В итоге получим

$$(\operatorname{Im} \epsilon_\alpha U^*, U)_{V_\alpha} + \operatorname{Im} \lim_{k_0 r \rightarrow \infty} (\operatorname{div} \epsilon_\beta U(nU^*))_\sigma + \lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \int_\sigma (U_\theta^2 + U_\varphi^2) d\sigma = 0. \quad (7)$$

В силу (5)  $\operatorname{Im} \lim_{k_0 r \rightarrow \infty} (\operatorname{div} \varepsilon_\beta U(nU^*))_\sigma = 0$ . Поэтому из (7) следует, что

$$|U|^2 = 0|_{V_\alpha}, \quad \lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \int_{\sigma} (U_\theta^2 + U_\varphi^2) dS = 0.$$

Из (5) получим

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \int_{\sigma} |U_r|^2 dS = 0.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \int_{\sigma} |U|^2 dS = 0.$$

И поскольку в области  $V_\beta$  каждая декартова координата вектора  $U$  удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца, то в силу основной леммы теории уравнения Гельмгольца [10]

$$|U|^2 = 0|_{V_\beta}.$$

Таким образом, единственность решения краевой задачи (1), (3), (5) доказана.

**2. Граничные условия.** Пусть  $D$  — область вне сферы радиуса  $k_0 r_0$ . В  $D$  среда однородна и изотропна. Рассмотрим векторное уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяет электрическое поле в  $D$  в сферической системе координат,

$$\Delta_r U + \Delta_{\theta, \varphi} U + U = 0, \quad x \in D. \quad (8)$$

Здесь  $\Delta_r, \Delta_{\theta, \varphi}$  — матричные операторы, имеющие вид

$$\Delta_r = \begin{pmatrix} \Delta_r & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_r & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_r \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_r = \frac{1}{(k_0 r)^2} \frac{\partial}{\partial k_0 r} (k_0 r)^2 \frac{\partial}{\partial (k_0 r)},$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \begin{pmatrix} \Delta_{\theta, \varphi} - S_1 & -\frac{2}{k_0 r} D_\theta & -\frac{2}{k_0 r} D_\varphi \\ \frac{2}{k_0 r} D'_\theta & \Delta_{\theta, \varphi} - S_2 & -\frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{k_0 r} D_\varphi \\ \frac{2}{k_0 r} D_\varphi & \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{k_0 r} D_\theta & \Delta_{\theta, \varphi} - S_2 \end{pmatrix},$$

$$D_\varphi = \frac{1}{k_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad D_\theta = \frac{1}{k_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta,$$

$$D'_\theta = \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Delta_{\theta, \varphi} = D_\theta D'_\theta + D_\varphi^2, \quad S_1 = \frac{2}{(k_0 r)^2},$$

$$S_2 = \frac{1}{(k_0 r)^2 \sin^2 \theta}, \quad k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0.$$

Относительно  $U$  будем предполагать следующее:  $U$  удовлетворяет условию излучения, а также  $\operatorname{div} U = 0$  при  $x \in D$ , что выполняется для решений уравнений Максвелла в области  $D$ .

Известно [11], если функция  $U$  непрерывна в  $D$ , удовлетворяет в области  $D$  уравнению (1) в обобщенном смысле, то  $U$  — бесконечно дифференцируема в  $D$ .

Представим функцию  $U$  в виде

$$U = U_0 \exp(ik_0 r)/k_0 r. \quad (9)$$

После подстановки (9) в (8) имеем

$$(\nabla_r)^2 U_0 + 2i \nabla_r U_0 + \Delta_{\theta, \varphi} U_0 = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\nabla_r = \begin{pmatrix} D_r & 0 & 0 \\ 0 & D_r & 0 \\ 0 & 0 & D_r \end{pmatrix}, \quad D_r = \frac{\partial}{\partial k_0 r}.$$

Оценим порядок малости каждого слагаемого в равенстве (10). В силу того, что  $U$  удовлетворяет условию излучения,  $U_0$  можно представить в виде ряда

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} U_0^{(n)} / (k_0 r)^{n-1},$$

где  $U_0^{(n)}$  есть функции  $\theta, \varphi$ .

Если  $U = (U_r, U_\theta, U_\varphi)$ , то из условий излучения на бесконечности следует

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \frac{|U_r|}{|U_\theta|} = \lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \frac{|U_r|}{|U_\varphi|} = 0,$$

т. е. на бесконечности поле принимает вид сферической волны. Отсюда  $U_0^{(1)} = \{0, a_2(\theta, \varphi), a_3(\theta, \varphi)\}$ . Введем операторы  $\hat{\gamma}, \hat{\gamma}_1$ :

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -D'_\theta & 0 & 0 \\ -D'_\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_1 = -\frac{2}{k_0 r} \hat{\gamma}.$$

Докажем, что если непрерывная функция удовлетворяет в области  $D$  уравнению (8) в обобщенном смысле и условиям излучения, то для  $U_0$  из (9) справедливы оценки

- 1)  $(\nabla_r)^2 U_0 = O((k_0 r)^{-3}),$
- 2)  $\nabla_r U_0 = O((k_0 r)^{-2}),$
- 3)  $\Delta_{\theta, \varphi} U_0 = O((k_0 r)^{-2}),$
- 4)  $\hat{\gamma}_1 U_0 = O((k_0 r)^{-3}).$

Докажем это утверждение.

$$1) \quad (\nabla_r)^2 U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\nabla_r)^2 (U_0^{(n)} / (k_0 r)^{n-1}).$$

Нетрудно видеть, что  $(\nabla_r)^2 U_0^{(1)} = 0$ , а  $(\nabla_r)^2 (U_0^{(2)} / k_0 r) = O((k_0 r)^{-3})$ . Отсюда следует 1).

$$2) \quad \nabla_r U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \nabla_r (U_0^{(n)} / (k_0 r)^{n-1}).$$

Ясно, что

$$\nabla_r U_0^{(1)} = 0.$$

Кроме того,

$$\nabla_r (U_0^{(2)}/(k_0 r)) = O((k_0 r)^{-2}),$$

и 2) доказано.

3) Очевидно.

$$4) \quad \hat{\gamma}_1 U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\gamma}_1 (U_0^{(n)}/(k_0 r)^{n-1}).$$

Ясно, что  $\hat{\gamma}_1 U_0^{(1)} = 0$ , а  $\hat{\gamma}_1 (U_0^{(2)}/(k_0 r)) = O((k_0 r)^{-3})$ , поэтому 4) доказано.

С учетом проведенных оценок и равенства (10) можно записать:

$$-\frac{2i}{k_0} [n \times \text{rot } U_0] - \frac{2i}{k_0 r} \hat{\alpha} U_0 + \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(1)} U_0 + O((k_0 r)^{-3}) = 0.$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} n &= i_r, \\ \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2iD'_\theta & \Delta_{\theta, \varphi} - S_2 & -\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{k_0 r} D_\varphi \\ 2iD_\varphi & \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{k_0 r} D_\theta & \Delta_{\theta, \varphi} - S_2 \end{pmatrix}, \\ \hat{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если вернуться к исходной вектор-функции  $U$ , то получим

$$-\frac{i}{k_0} [n \times \text{rot } U] + \hat{\alpha} U + \frac{1}{2} \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(1)} U = O((k_0 r)^{-4}). \quad (11)$$

Дифференциальное векторное соотношение (11) содержит фактически два скалярных уравнения и не может использоваться в качестве граничного условия для ограничения области, поскольку, как можно показать, соответствующая краевая задача дифракции с граничным условием (11) имеет не единственное решение. Поэтому в дифференциальное условие (11) добавим две поправки. Учтем, что  $\operatorname{div} U = 0$  в  $D$ , а также к левой части равенства (11) добавим регуляризующее слагаемое третьего порядка малости. В результате получим

$$\begin{aligned} k_0^{-1} ([\text{rot } U \times n] + n \operatorname{div} U) - i\hat{\alpha} U - (i/2) \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(1)} U - \\ - (3i/16) \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(2)} U = O((k_0 r)^{-3}), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\hat{B}_{\theta, \varphi}^{(2)}$  имеет вид

$$\hat{B}_{\theta, \varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} [-4\Delta_{\theta, \varphi} + \Delta_{\theta, \varphi}^2] & 0 & 0 \\ 0 & \left[ (\Delta_{\theta, \varphi} - S_2)^2 - \frac{4\operatorname{ctg}^2\theta}{(k_0 r)^2} D_\varphi^2 \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[ (\Delta_{\theta, \varphi} - S_2)^2 - \frac{4\operatorname{ctg}^2\theta}{(k_0 r)^2} D_\theta^2 \right] \end{pmatrix}.$$

В итоге приходим к следующему утверждению. Если непрерывная функция  $\mathbf{U}$  удовлетворяет в  $D$  уравнениям Максвелла и условиям излучения на бесконечности, то  $\mathbf{U}$  удовлетворяет асимптотическому дифференциальному условию (12).

Полученное асимптотическое дифференциальное условие (12) может быть использовано в качестве граничного, что позволяет вместо точной задачи дифракции в неограниченной области рассматривать приближенную краевую задачу дифракции в ограниченной области. В качестве границы удобно взять сферическую поверхность, включающую область неоднородности среды.

Ясно, что при  $k_0 r \rightarrow \infty$  приближенное граничное условие (12) переходит в обычные условия излучения. Введение поправок учитывает взаимодействие лучей, что улучшает порядок точности граничных условий по  $k_0 r$ .

Как будет показано ниже, введение поправок достаточно для существования единственного решения краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями.

**3. Теорема единственности краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями.** Рассмотрим следующую задачу. Пусть  $\Omega \subset R^3$  — внутренность сферы радиуса  $k_0 r_0$ , содержащей неоднородность среды. На границе  $\sigma$  и в  $R^3 \setminus \Omega$  среда однородна с  $\epsilon_0$ , но в области  $\Omega$  рассмотрим  $\Omega_i \subset \Omega$  с гладкими,  $i = 1, \dots, l$ . Будем предполагать, что в  $\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^l \Omega_i$  поле удовлетворяет уравнению

$$\hat{\Delta} \mathbf{U} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{U} + \epsilon^* \operatorname{grad} \operatorname{div} \epsilon \mathbf{U} + \epsilon \mathbf{U} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad (13)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\epsilon \in C^1(\Omega_0)$ ,  $\epsilon = 1$  в некоторой окрестности  $\sigma$ ,  $\epsilon \neq 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega_0$ . На границе  $\sigma$  поле удовлетворяет приближенным асимптотическим граничным условиям

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} \mathbf{U} &= k_0^{-1} (\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + [\operatorname{rot} \mathbf{U} \times \mathbf{n}]) - i\alpha \mathbf{U} - (i/2) \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(1)} \mathbf{U} - \\ &\quad - (3i/16) \hat{B}_{\theta, \varphi}^{(2)} \mathbf{U} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \sigma. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к соответствующей поверхности. Операторы  $\alpha$ ,  $\hat{B}_{\theta, \varphi}^{(1)}$ ,  $\hat{B}_{\theta, \varphi}^{(2)}$  определены ранее. На границах  $\sigma_i$  областей  $\Omega_i$  поле удовлетворяет обычным импедансным условиям

$$\hat{B}_i \mathbf{U} = k_0^{-1} (\mathbf{n} \operatorname{div} \epsilon \mathbf{U} + [\mathbf{n} \times [\operatorname{rot} \mathbf{U} \times \mathbf{n}]]) - iZ_i [\mathbf{n} \times \mathbf{U}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \sigma_i, \quad (15)$$

причем  $\operatorname{Re} Z_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

Покажем, что если решение краевой задачи (13) — (15) существует, то оно единствено. Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу:

$$\hat{\Delta} \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad \hat{B} \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{x} \in \sigma, \quad \hat{B}_i \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{x} \in \sigma_i, \quad i = 1, \dots, l. \quad (16)$$

Умножим равенство  $\hat{\Delta} \mathbf{U} = 0$  на  $\mathbf{U}^*$  и проинтегрируем по  $\Omega_0$ , в результате получим

$$-(\operatorname{rot} \mathbf{U}^*, \operatorname{rot} \mathbf{U})_{\Omega_0} - (\operatorname{div} \epsilon^* \mathbf{U}^*, \operatorname{div} \epsilon \mathbf{U})_{\Omega_0} + (\mathbf{U}^*, \epsilon \mathbf{U})_{\Omega_0} + (\operatorname{div} \mathbf{U} (\mathbf{n} \mathbf{U}^*))_{\sigma} + \quad (17)$$

$$+ (\mathbf{n} [\mathbf{U}^* \times \operatorname{rot} \mathbf{U}]), + \sum_{i=1}^l (\operatorname{div} \epsilon \mathbf{U} (\mathbf{n} \mathbf{U}^*))_{\sigma_i} + \sum_{i=1}^l (\mathbf{n} [\mathbf{U}^* \times \operatorname{rot} \mathbf{U}])_{\sigma_i} = 0.$$

Возьмем мнимую часть от (17). С учетом граничных условий (14), (15) получим

$$(\operatorname{Im} \varepsilon \hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{U}})_{\sigma} + \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{U}}_{\theta})_{\sigma} + 0,5 \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{B}}_{\theta, \varphi}^{(1)} \hat{\mathbf{U}})_{\sigma} + \\ (18)$$

$$+ \frac{3}{16} \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{B}}_{\theta, \varphi}^{(2)} \hat{\mathbf{U}})_{\sigma} + \sum_{i=1}^l \operatorname{Re} Z_i(\hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{U}}_{\tau})_{\sigma_i} = 0.$$

Здесь  $\hat{\mathbf{U}}_{\tau}$  — касательная к поверхности  $\sigma_i$  компонента  $\hat{\mathbf{U}}$ . Представим (18) в виде

$$(\operatorname{Im} \varepsilon \hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{U}})_{\sigma} + \int_{\sigma} \left( \frac{1}{3} |U_{\theta}|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[U_{\theta}^*(\Delta_{\theta, \varphi} - S_2) U_{\theta}] + \right. \\ \left. + \frac{3}{16} |(\Delta_{\theta, \varphi} - S_2) U_{\theta}|^2 \right) dS + \int_{\sigma} \left( \frac{1}{3} |U_{\varphi}|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[U_{\varphi}^*(\Delta_{\theta, \varphi} - S_2) U_{\varphi}] + \right. \\ \left. + \frac{3}{16} |(\Delta_{\theta, \varphi} - S_2) U_{\varphi}|^2 \right) dS + \int_{\sigma} \left( \frac{1}{3} |U_{\theta}|^2 - \operatorname{Im}(U_{\theta}^* D'_{\theta} U_r) + \frac{3}{4} |D'_{\theta} U_r|^2 \right) dS + \\ + \frac{3}{16} \int_{\sigma} |\Delta_{\theta, \varphi} U_r|^2 dS + \int_{\sigma} \left( \frac{1}{3} |U_{\varphi}|^2 - \operatorname{Im}(U_{\varphi}^* D_{\varphi} U_r) + \frac{3}{4} |D_{\varphi} U_r|^2 \right) dS + \\ + \int_{\sigma} \left( \frac{1}{3} |U_{\theta}|^2 - \operatorname{Re}\left(U_{\theta}^* \frac{\operatorname{ctg} \theta}{k_0 r} D_{\varphi} U_{\varphi}\right) + \frac{3}{4} \left| \frac{\operatorname{ctg} \theta}{k_0 r} D_{\varphi} U_{\varphi} \right|^2 \right) dS + \\ + \int_{\sigma} \left( \frac{1}{3} |U_{\varphi}|^2 + \operatorname{Re}\left(U_{\varphi}^* \frac{\operatorname{ctg} \theta}{k_0 r} D_{\varphi} U_{\theta}\right) + \frac{3}{4} \left| \frac{\operatorname{ctg} \theta}{k_0 r} D_{\varphi} U_{\theta} \right|^2 \right) dS + \\ + \sum_{i=1}^l \operatorname{Re} Z_i(\hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{U}}_{\tau})_{\sigma_i} = 0. \quad (19)$$

Интегралы по  $\sigma$  в равенстве (19) неотрицательны в силу неравенства Коши—Буняковского, интегралы по  $\sigma_i$  неотрицательны в силу  $\operatorname{Re} Z_i > 0$ . Следовательно, при  $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$  необходимо  $(\hat{\mathbf{U}}^*, \hat{\mathbf{U}})_{\Omega} = 0$ , т.е.  $\hat{\mathbf{U}} \equiv \mathbf{O}$  на  $\Omega_0$ . При этом решение краевой задачи (13)–(15), если существует, то оно единственное.

**4. О разрешимости краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями.** Рассмотрим краевую задачу (13)–(15) в предположениях, сделанных в разд. 3. Введение слагаемого  $\varepsilon^* \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\mathbf{U}}$  делает оператор  $\hat{\mathbf{L}}$  в области  $\Omega_0$  сильноэллиптическим [9], из чего следует локальная разрешимость оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  в области  $\Omega_0$ .

Наличие в приближенном граничном условии производных в попечном направлении старших порядков требует рассмотрения согласованности граничного условия с уравнением в области  $\Omega_0$ . Введение в приближенные граничные условия регуляризующего оператора  $\hat{\mathbf{B}}_{\theta, \varphi}^{(2)}$ , действующего на поверхности  $\sigma$ , приводит к эллиптичности оператора приближенных граничных условий, действующего на  $\sigma$ .

В результате, используя технику [9], можно показать фредгольмовость краевой задачи дифракции с приближенными граничными

условиями, а также получить следующую оценку гладкости ее решения:

$$\begin{aligned} \|\|U\|_{H^{2+k}(\Omega_0)}^2 &\leq C_1 \|\hat{L}U\|_{H^k(\Omega_0)}^2 + C_2 \|\hat{B}U\|_{k-(1/2)}^2 + \\ &+ C_3 \sum_{l=1}^l \|\hat{B}_l U\|_{k-(1/2)}^2 + C_4 \|U\|_{H^0(\Omega_0)}^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\|\cdot\|$  — обычные соболевские нормы в  $\Omega_0$  и поверхностях  $\sigma_i$ . Оценка гладкости существенна при построении и обосновании численного метода решения краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями. Аналогично доказательству единственности краевой задачи (13)–(15) можно показать единственность эрмитово-сопряженной к ней краевой задаче. Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что для любой  $f \in H^k(\Omega_0)$  существует единственное решение краевой задачи дифракции с приближенными граничными условиями  $U \in H^{k+2}(\Omega_0)$ .

Полученные в работе приближенные асимптотические граничные условия позволяют формулировать широкий класс задач дифракции на диэлектриках, однородных и неоднородных телах с металлическими и импедансными включениями в ограниченных областях, существенно меньших, чем при использовании обычных условий излучения. Аналитические оценки и численные расчеты в двумерном случае показывают эффективность использования полученных асимптотических условий излучения в случае размера области дифракции порядка нескольких длин волн. Это означает целесообразность использования граничных условий в резонансном или квазистатическом случаях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский В. В. // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14. № 2. С. 201.
2. Свешников А. Г. // ДАН СССР. 1969. Т. 184. № 1. С. 63.
3. Марчук Г. И., Колесов В. Е. Применение численных методов для расчета нейтронных сечений. — М.: Атомиздат. 1970.
4. Завадский Ю. В. Вычисление полей в открытых областях и волноводах. — М.: Наука, 1972.
5. Самохин А. Б., Цветков С. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 7. С. 1063.
6. Самохин А. Б., Цветков С. В. // Труды МФТИ. Сер. Общая и молекулярная физика. 1977. № 8. С. 34.
7. Engquist B., Majda A. // Math. Comp. 1977. V 31. № 199. P. 629.
8. Colones M., Krgneger P. // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 9. P. 1641.
9. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
10. Кошляков Н. С., Глинэр Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
11. Владимиrow В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
31 мая 1988 г.,  
после переработки  
9 ноября 1988 г.

## ABOUT ASYMPTOTIC DIFFERENTIAL RADIATION CONDITIONS FOR THREE-DIMENSIONAL DIFFRACTION PROBLEMS

A. B. Samokhin, S. V. Tsvetkov

The differential asymptotic boundary radiation conditions to which scattered electromagnetic field in three-dimensional case satisfies with an accuracy to addendies  $O(|k_0r|^{-\delta})$  are suggested in this paper. These boundary conditions allow one to formulate the boundary diffraction problem in significantly less regions as compared to the ordinary radiation conditions. A unique solution of the boundary diffraction problem with appropriate conditions is proved, that gives a possibility to apply it for the solution of the direct numerical methods.

УДК 621.372.8

## СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ

*A. B. Маненков*

Проанализирована точность нескольких, приближенных (квазиоптических) методов расчета основной моды прямоугольного диэлектрического волновода (световода). Предложена простая методика, которая позволяет продолжить квазиоптическое решение в область малых замедлений. В области низких частот получены аналитические выражения для характеристик основной моды волновода.

Прямоугольный диэлектрический волновод является одним из основных элементов систем интегральной оптики. Для расчета параметров таких волноводов предложено большое число приближенных методов [1–5]. Наибольшее распространение получили четыре подхода: приближение Маркатили [1], приближение эффективного показателя преломления [2], приближение эффективного сечения [3] и расчет с помощью асимптотических граничных условий [4, 5]. Все эти методы применимы при высоких частотах (см. ниже); однако их достаточно часто используют в промежуточной области, а иногда и для низких частот. Поэтому важно определить область применимости этих методик. В настоящей работе проведено сравнение результатов, полученных в работах [1–5], с точными данными, которые рассчитаны с помощью интегрального уравнения [6, 7].

Следует отметить, что частично подобные исследования уже проводились (см., например, [1, 2]), однако для оценки погрешности приближенных методов использовались неточные результаты\*. Кроме того, сравнение проводилось в узкой области параметров и не всех методов сразу.

**1. Методы расчета.** Геометрия поперечного сечения волновода изображена на рис. 1. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда диэлектрическая восприимчивость материала волновода  $\chi = \epsilon - 1$  мала, т. е.  $\chi \ll 1$ . Следует отметить, что, вообще говоря, только при этом условии можно пренебречь сингулярностью полей в углах волновода, как это делается во всех приближенных методах [1–5]. Мы не будем здесь описывать эти методы, а остановимся коротко лишь на способе, с помощью которого получены точные данные. При  $\chi \ll 1$  поперечная компонента электрического поля  $E_{\perp}$  внутри волновода удовлетворяет уравнению [7]

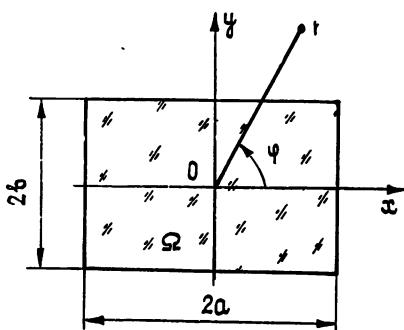


Рис. 1. Поперечное сечение волновода.

$$E_{\perp}(r_1) = \frac{k^2}{2\pi} \int_{\Omega} \chi(r_2) K_0(pr_{12}) E_{\perp}(r_2) dS, \quad dS = dx_2 dy_2, \quad (1)$$

\* В частности, один из самых распространенных численных методов — метод цилиндрических гармоник [8] — в большинстве случаев оказывается расходящимся [7]; это связано с тем, что для прямоугольного волновода неверна гипотеза Рэлея [7].

где

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad h^2 = k^2 + p^2, \quad k = \omega/c, \quad (2)$$

$h$  — постоянная распространения,  $k$  — волновое число,  $p$  — поперечное волновое число,  $\omega$  — частота,  $K_0$  — функция Макдональда. При  $\chi \ll 1$  поле  $\mathbf{E}_\perp$  поляризовано вдоль одной из координатных осей, причем волны с разной поляризацией вырождены. Для определенности ниже будем рассматривать волну, поляризованную вдоль оси  $y$ . Электрическое поле основной моды ищем в виде

$$E_y = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} T_{2m}\left(\frac{x}{a}\right) T_{2n}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (3)$$

где  $T_s$  — полиномы Чебышева. Методика решения уравнения (1) описана в [7], поэтому мы не будем на ней останавливаться; отметим лишь, что для расчета поперечного волнового числа  $p$  с точностью  $10^{-5}$  обычно достаточно учесть 16—25 членов в разложении (3), т. е.  $M=N=4 \div 5$ . Заметим также, что эта методика устойчиво работает при произвольном отношении  $a/b$ , в том числе и при  $a \gg b$  (в отличие от других методов решения таких уравнений [9]), а также при малых частотах (при  $k \rightarrow 0$ ).

**2. Результаты расчета и их обсуждение.** Рассмотрим сначала, как меняются величины погрешностей  $\Delta p$  различных способов расчета при изменении частоты. На рис. 2а показана зависимость  $p$  от параметра  $v = k\sqrt{\chi}$  для квадратного волновода ( $a=b$ ); на рис. 2б приведены кривые  $\Delta p(v)$ , полученные различными методами. Величина погрешности  $\Delta p$  определяется как  $\Delta p = p - p_0$ , где  $p_0$  — точные, а  $p$  — приближенные значения. На этом рисунке кривая 1 построена исходя из формул работы [1], кривая 2 — в приближении эффективного показателя преломления, кривая 3 — в приближении эффективного сечения, а кривая 4 — при использовании приближенных граничных условий импедансного типа. Из рисунка видно, что в квазиоптической области  $vb \gg 1$  наилучшие результаты дают формулы Маркатили. В очень узком частотном диапазоне (для квадратного волновода при  $0,8 < vb < 1,7$ ) меньшую погрешность обеспечивает второй из указанных методов. Однако этот диапазон частот невелик, а, кроме того, в нем относительная погрешность  $\Delta p/p$  превышает 10 %. Поэтому говорить о преимуществах метода эффективного показателя преломления [2] для расчета прямоугольных диэлектрических волноводов, по-видимому, нельзя. В частности, при столь большой ошибке в этой области частот нельзя достаточно точно рассчитать другие характеристики мод [10] (затухание, потоки мощностей и т. д.).

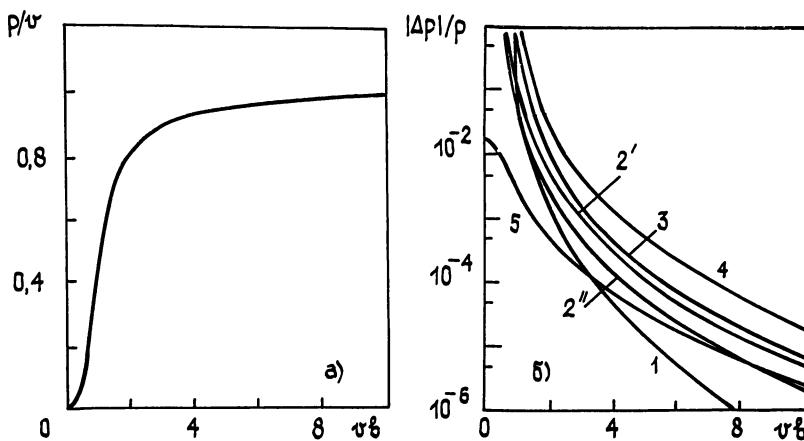


Рис. 2. Зависимость поперечного волнового числа основной моды квадратного волновода и погрешностей квазиоптических формул от частоты.

Приведенные результаты являются достаточно типичными: качественно вид зависимостей  $\Delta p(v)$  для  $a \neq b$  остается приблизительно таким же, как и на рис. 2б. Следует отметить, что в общем случае возможны два варианта метода эффективного показателя преломления. Описанный в книге [2] вариант заключается в последовательном решении уравнений

$$g_x \operatorname{tg}(g_x a) = \sqrt{v^2 - g_x^2}, \quad v^2 = k^2 \chi, \quad (4)$$

$$g_y \operatorname{tg}(g_y b) = \sqrt{v^2 - g_x^2 - g_y^2}, \quad p^2 = v^2 - g_x^2 - g_y^2.$$

Можно изменить порядок уравнений и написать другую систему:

$$g_y \operatorname{tg}(g_y b) = \sqrt{v^2 - g_y^2}, \quad g_x \operatorname{tg}(g_x a) = \sqrt{v^2 - g_x^2 - g_y^2}. \quad (5)$$

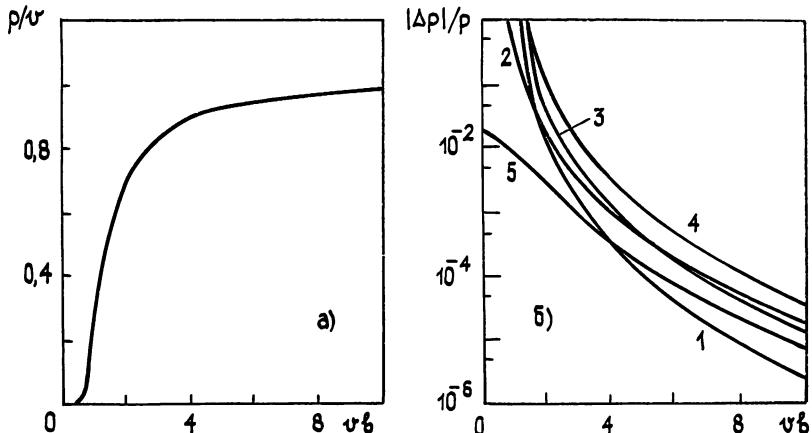


Рис. 3. Зависимости  $p$  и  $\Delta p$  от частоты для прямоугольного волновода: кривая 1 построена по формулам [1]; кривые 2' и 2'' — по формулам (4) и (5); кривая 3 — исходя из [3]; кривая 4 — с помощью приближенных граничных условий; кривая 5 — ошибка первого приближения метода интегрального уравнения.

При  $a=b$  значения  $p$ , полученные из (4) и (5), совпадают. В общем случае, как показали расчеты, в области малых  $v b$  уравнения (5) обеспечивают меньшую погрешность. Для иллюстрации на рис. 3 приведены зависимости  $p(v)$  и  $\Delta p(v)$  для прямоугольного волновода, у которого  $a=2b$ . На следующем рис. 4 представлены значения  $p$  при изменении отношения  $a/b$  в области малых замедлений ( $v b = 0,6$ ), рассчитанные разными методами. Кривая 0 построена исходя из интегрального уравнения, кривая 1 — в приближении Маркатили, кривая 2' — с помощью формул (4), кривая 2'' — с помощью формул (5), кривая 3 — в приближении эффективного сечения. Такой же характер зависимостей сохраняется и при больших значениях  $v b$  (см. рис. 5). Следует отметить, что метод работы [1] и метод эффективного показателя преломления [2] являются асимптотическими не только

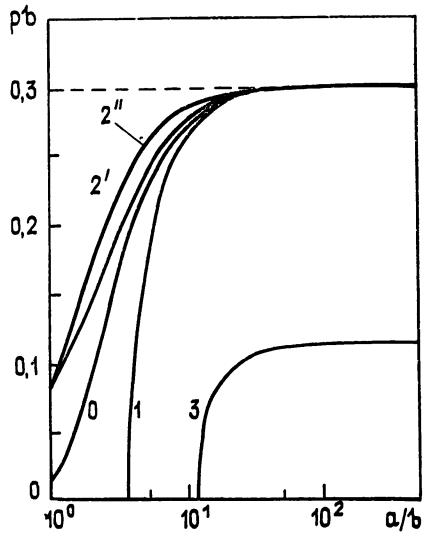


Рис. 4. Зависимость  $p$  от отношения сторон при  $v b = 0,6$ .

ко по параметру  $v b$ , но и по параметру  $a/b$ ; для остальных методов погрешность  $\Delta p$  с ростом  $a/b$  остается конечной (см. рис. 4 и 5).

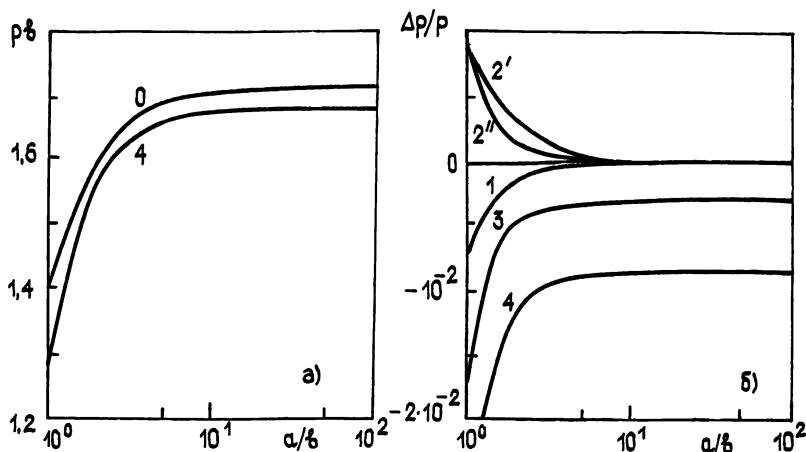


Рис. 5. Зависимость  $p$  и  $\Delta p$  от  $a/b$  при  $v b=2$ : кривая 0 построена с помощью интегрального уравнения; кривая 1 — исходя из [1]; кривые 2' и 2'' — по формулам (4) и (5); кривая 3 — по формулам [3]; кривая 4 — с помощью приближенных граничных условий.

**3. Приближенное решение интегрального уравнения.** При выводе всех квазиоптических формул [1—5] поле внутри диэлектрика ищется в виде

$$E_y = E_0 \cos(g_x a) \cos(g_y b), \quad E_0 = E_y(0). \quad (6)$$

Основная трудность при расчете волн заключается в представлении поля во внешней области. Это поле существенно меняет свою структуру при изменении частоты [7] в отличие от поля внутри волновода. Разная точность рассмотренных методов как раз и обусловлена различием в способах описания этого внешнего поля. При решении задачи с помощью интегрального уравнения (1) требуется знать только внутреннее поле; поэтому с его помощью можно рассчитать характеристики мод при произвольной частоте, используя представление (6). Алгебраизация уравнения (1) проводилась методом коллокаций с единственной точкой  $(x_0, y_0)$ ; оценки показывают, что координаты этой точки должны быть следующими:  $x_0 = a/\sqrt{2}$ ,  $y_0 = b/\sqrt{2}$  [7]. Параметры  $g_x$  и  $g_y$  можно связать, исходя из квазиоптических соображений [5]:

$$g_x \operatorname{tg}(g_x a) = g_y \operatorname{tg}(g_y b), \quad g_x^2 + g_y^2 = v^2 - p^2. \quad (7)$$

Проведенные расчеты показали, что погрешность рассмотренного метода не превышает 2% даже в квазистатической области (при  $v \rightarrow 0$ ). Для иллюстрации на рис. 2б и 3б представлены зависимости  $\Delta p(v)$ , построенные на основе этой методики (кривые 5). Если допустить небольшое увеличение ошибки, то можно упростить расчеты, используя более простую связь параметров:  $g_x a = g_y b$ .

В ряде случаев с помощью интегрального уравнения (1) можно получить аналитические выражения для поперечного волнового числа. Например, при малых  $v^2 ab$ , решая (1) итерациями, получим (при  $a \geq b$ )

$$pa = \frac{2}{\gamma} \exp \left[ \sigma - \frac{\pi}{2k^2 ab \chi} \right], \quad \gamma = 1,78107\dots; \quad (8)$$

$$\sigma = 0,1116 + 0,5102\xi + 0,0738\xi^2 + 0,1082\xi^3; \quad \xi = 1 - (b/a). \quad (9)$$

Формулы (8) — (9) обобщают известное приближение (вблизи отсечки) для основной моды круглого волокна на случай прямоугольного волно-

вода. Исходя из (1), можно методом возмущений определить сдвиг поперечного волнового числа  $\delta p$  при малом изменении диэлектрической проницаемости  $\delta\epsilon = \delta\chi$ :

$$\delta p = \frac{2\pi \int \delta\epsilon(\mathbf{r}_1) E^2(\mathbf{r}_1) dS_1}{k^2 \int \int r_{12} K_1(pr_{12}) \chi(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_2) E(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_2) dS_1 dS_2}, \quad (10)$$

где  $dS = dx dy$ ; в этой формуле интегрирование проводится по поперечному сечению диэлектрика  $\Omega$ . С помощью похожих рассуждений можно также оценить поперечные волновые числа в системе связанных волноводов. Подчеркнем, что во многих задачах применение описанной методики оказывается проще по сравнению со стандартным методом возмущений [1, 2, 11], так как при расчетах последним методом требуется знать структуру поля вне диэлектрика. Например, способ расчета связанных волноводов, изложенный в [1], неприменим в случае их несимметричного расположения, поскольку в этом методе пренебрегается полями в угловых областях (в точках вблизи углов).

Сравнение различных квазиоптических приближений показало, что при  $v^2 ab \gg 1$  наименьшую погрешность обеспечивают соотношения Маркатили [1]. Этот вывод был сделан исходя из анализа волноводов с малой диэлектрической восприимчивостью. Подобный анализ общего случая (особенно при больших  $\epsilon$ ) наталкивается на определенные трудности, которые обусловлены сингулярным поведением полей в углах волновода; эта область параметров требует дальнейших исследований.

Описанный в статье метод расчета может быть обобщен на случай волноводов с переменным профилем диэлектрической проницаемости, а также на системы с анизотропным диэлектриком.

Автор признателен Л. А. Вайнштейну, А. И. Клееву, В. В. Шевченко и Ю. В. Колесниченко за обсуждение вопросов, связанных с работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Marcatili E. A. J. // Bell System Techn. J. 1969. V. 48. № 7. P. 2071.
2. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984. С. 247.
3. Quester E. F. // Opt. Letters. 1983. V. 8. № 3. P. 192.
4. Войтович Н. Н., Сивов А. Н. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 3. С. 465.
5. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 11. С. 1365.
6. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 1. С. 84.
7. Клеев А. И., Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 1. С. 93.
8. Goell J. E. // Bell System Techn. J. 1969. V. 48. № 7. P. 2133.
9. Euyges L., Gianino P., Wintersteiger P. // J. Opt. Soc. Am. 1979. V. 62. № 9. P. 1226.
10. Беланов А. С., Черный В. В. // В сб.: Взаимодействие излучения с веществом. — М.: ВЗМИ, 1972. С. 246.
11. Когельник Г. // В сб.: Интегральная оптика / Ред. Т. Тамир. — М.: Мир, 1978. С. 56.

Институт физических проблем  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 июня 1988 г.

#### COMPARISON OF APPROXIMATE TECHNIQUES FOR CALCULATION OF RECTANGULAR WAVEGUIDES

*A. B. Manenkov*

The accuracy of several approximate (quasioptical) techniques for calculation of the main mode of the rectangular dielectric waveguide (lightguide) is analysed. The simple method, which makes it possible to extend the quasioptical solution in a region of small wave slowing, is suggested. For the low frequencies the analytical expressions for the characteristics of the dominant mode of the waveguide are derived.

УДК 621.396.677

**СРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
КОНЕЧНЫХ РЕШЕТОК ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДОВ  
С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВСТАВКАМИ  
ПРИ  $E$ - и  $H$ -ВОЗБУЖДЕНИИ**

Б. Д. Мануилов, К. И. Чернышев, В. А. Яковенко

Возбуждение волной  $H_1$  конечной решетки плоских волноводов со вставками рассмотрено на основе метода частичных областей, леммы Лоренца и метода Галеркина с использованием базисных функций полной области. Численно исследована зависимость от угла сканирования КНД, КПД и ошибки ориентации луча  $\Delta\theta$ , обусловленной электродинамическими эффектами, в случае одномодовых вставок. Проведено сопоставление интегральных характеристик системы с различным числом волноводов при возбуждении волнами  $H_1$  и  $T$ .

В работе [1] проведено сопоставление интегральных характеристик конечной решетки плоских волноводов, содержащих диэлектрические вставки, с бесконечным фланцем и характеристик центрального элемента решетки при возбуждении излучателей волнами  $E$ . Целью данной работы является сравнение интегральных характеристик решеток рассматриваемого типа при  $E$ - и  $H$ -возбуждении.

Математическая модель антенной решетки (АР) при  $E$ -возбуждении приведена в [1]. Для случая  $H$ -возбуждения математическая модель может быть получена аналогично. Положим, что АР (рис. 1а) возбуждается волнами  $H$ , набегающими по волноводам и имеющими временную зависимость  $e^{i\omega t}$ . Обозначим комплексные амплитуды волн  $H_m$  в волноводе и вставке с номером  $n$  соответственно ( $A_j^{1n}$ ,  $A_1^{mn}$  — движущиеся в положительном и  $B_0^{mn}$ ,  $B_1^{mn}$  — в отрицательном направлении оси  $Z$ ). Используя метод частичных областей, теорему эквивалентности и метод Галеркина, сведем граничную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая после редукции может быть записана в виде блочных матриц:

$$\left[ \begin{array}{c} [Y_{1n'}^{1n}] [Y_{1n'}^{2n}] \dots [Y_{1n'}^{Mn}] \\ [Y_{2n'}^{1n}] [Y_{2n'}^{2n}] \dots [Y_{2n'}^{Mn}] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ [Y_{Mn'}^{1n}] [Y_{Mn'}^{2n}] \dots [Y_{Mn'}^{Mn}] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} [B_0^{1n}] \\ [B_0^{2n}] \\ \vdots \\ [B_0^{Mn}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} [I^{1n'}] \\ [I^{2n'}] \\ \vdots \\ [I^{Mn'}] \end{array} \right], \quad (1)$$

где  $[Y_{m'n'}^{mn}]$  — квадратная матрица порядка  $N$  ( $N$  — число элементов АР);  $[B_0^{mn}]$  — столбец комплексных амплитуд наведенных в волноводах (область  $V_0$ ) волн  $H_m$ ;  $[I^{m'n'}]$  — столбец возбуждения;  $M$  — номер высшего учитываемого типа волн  $H_m$ . Элементы матриц имеют вид

$$Y_{m'n'}^{mn} = [Q(m) + P(m)] C_{m'n'}^{mn} + [Q(m) - P(m)] i b \gamma_{lm} \delta_{m'n'}^{mn},$$

$$I^{m'n'} = \sum_{n=1}^N A_0^{1n} R_{m'n'}^{1n},$$

$$Q(m) = 2^{-1} (1 + \gamma_{0m}/\gamma_{1m}) \exp[d(\gamma_{1m} - \gamma_{0m})],$$

$$P(m) = 2^{-1} (1 - \gamma_{0m}/\gamma_{1m}) \exp[-d(\gamma_{1m} + \gamma_{0m})],$$

$$C_{m'n'}^{mn} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sin[m'\pi b^{-1}(\xi' + b/2)] \sin[m\pi b^{-1}(\xi + b/2)] \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}\right) H_0^{(2)}(|u|) d\xi d\xi',$$

$$u = y_0(n - n') + (\xi - \xi'),$$

$$\xi = y - y_n, \quad y_n = \left(n - \frac{N+1}{2}\right) y_0,$$

$H_0^{(2)}(|u|)$  — функция Ганкеля второго рода,

$$\delta_{m'n'}^{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=m', n=n' \\ 0 & \text{при } m \neq m' \text{ или } n \neq n' \end{cases},$$

$$R_{m'n'}^{1n} = -[Q^*(1) + P^*(1)] C_{m'n'}^{1n} + [Q^*(1) - P^*(1)] i b \gamma_{1m} \delta_{m'n'}^{1n},$$

$$\gamma_{lm} = \sqrt{(m\pi/b)^2 - \varepsilon_l}, \quad l \in 0, 1.$$

Знак \* означает комплексное сопряжение,  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  — относительные диэлектрические проницаемости материала волноводов и вставок. Здесь все размеры также выражены в радианах.

Найдя из (1) вторичные поля в волноводах  $B_0^{mn}$ , можно вычислить согласование волноводов, поля во вставках  $A_1^{mn}$  и  $B_1^{mn}$ , диаграмму направленности (ДН) решетки  $F(\theta)$ , ее КНД и КПД, а также  $\Delta\theta$  (разность между реализованным при линейном фазировании первичных полей и заданным угловыми положениями максимума луча) с помощью соотношений

$$F(\theta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_1^{mn} + B_1^{mn}) \varphi_{mn}(\theta),$$

где

$$\varphi_{mn}(\theta) = \frac{b}{2} \cos \theta \exp(iy_n \sin \theta) \times$$

$$\times \left\{ \exp\left(i \frac{m\pi}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{m\pi}{2} - \frac{b}{2} \sin \theta\right) - \exp\left(-i \frac{m\pi}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{b}{2} \sin \theta\right) \right\},$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x, \quad \text{КНД} = |F(\theta_0)|^2 / \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F(\theta)|^2 d\theta \right],$$

где  $\theta_0$  — угол ориентации максимума луча,

$$\begin{aligned} \text{КПД} = & \left\{ \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N i \gamma_{1m} (-A_1^{mn} + B_1^{mn})(A_1^{mn} + B_1^{mn}) \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N (-i \gamma_{11}) |A_1^{1n}|^2 \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В процессе вычислений элементов матрицы системы (1) в случае  $H$ -возбуждения используются те же упрощающие приемы, что и при  $E$ -возбуждении [1]. Контроль правильности результатов осуществлялся

ся путем сопоставления с известными результатами для одиночного волновода с диэлектрическим заполнением и без него [2], а также с результатами для решетки, состоящей из двух плоских волноводов со вставками и без них [3].

При  $N=1$  и  $\epsilon_0=\epsilon_1=1$  модель АР трансформируется в одиночный волновод и для размеров  $\pi < a < 1,5\pi$  даже в случае  $M=1$  значения  $|B_0^{11}|$  и  $\arg B_0^{11}$  практически совпадают с приведенными в [2]. Для размеров волновода  $a \geq 1,5\pi$  учет волны  $H_3$  позволяет снизить относительную погрешность вычисления  $|B_0^{11}|$  до величины, не превышающей 5%, а при учете дополнительно волны  $H_5$  делает ее меньше 1%. Ошибка в вычислении  $\arg B_0^{11}$  при учете одной, двух и трех гармоник поля в волноводе не превышает соответственно  $6^\circ$ ,  $5^\circ$  и  $3,5^\circ$ .

Результаты расчета зависимости коэффициента отражения  $\Gamma$  в волноводе со вставкой от толщины вставки  $d$  с графической точностью совпали с аналогичной зависимостью в [3], рис. 8.63. То же самое можно сказать и о зависимостях коэффициента взаимной связи двух плоских волноводов без вставок и со вставками от расстояния между волноводами и толщины вставок [3], рис. 8.41, 8.42.

Вычислительный эксперимент показал, что редукция системы (1) допустима, причем различные характеристики излучающей системы для получения высокой точности их вычисления требуют учета различного числа типов волн в волноводах.

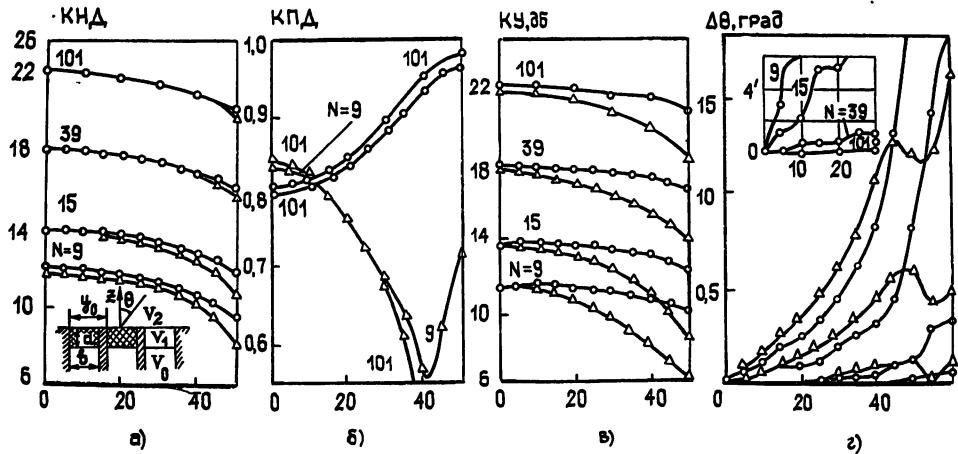


Рис. 1.

Как и в случае  $E$ -возбуждения [1], наиболее стационарной является зависимость от  $\theta_0$  КНД. В решетке с одномодовыми вставками учет только волны  $H_1$  обеспечивает вычисление КНД с относительной погрешностью, не превышающей 0,5%, при этом угловое положение луча определяется с ошибкой порядка одной угловой минуты ( $N=9$ ), а относительная погрешность вычисления КПД не превышает 2,5%. Увеличение количества учитываемых в решении гармоник до трех (при одномодовых вставках) позволяет резко уменьшить эти ошибки (КНД — до 0,01%; КПД — до 0,4%;  $\Delta\theta_0$  — до десятых долей минуты). Дальнейшее увеличение  $M$  в АР с одномодовыми вставками на результатах практически не оказывается.

Перейдем к сопоставлению характеристик АР при  $E$ - и  $H$ -возбуждении. Поскольку основной интерес представляют режимы АР, не сопровождающиеся резонансными явлениями, были выбраны соответствующие параметры АР:  $b=1,05\pi$ ,  $y_0=1,1b$ ,  $d=0,78b$ ,  $\epsilon_1=2,56$ . При этом в случае  $E$ -возбуждения распространяющимися во вставках являются волны  $T$  и  $E_1$ , при  $H$ -возбуждении — волна  $H_1$ . Зависимости интегральных характеристик АР от угла  $\theta_0$  при  $E$ - и  $H$ -возбуждении приведены на рис. 1. Кривые, соответствующие  $E$ -случаю, помечены треугольниками (на рис. 1г нижняя кривая соответствует  $N=39$ , средняя

$N=15$ , верхняя— $N=9$ ), а  $H$ -случаю—кружочками. Рис. 1а иллюстрирует зависимость КНД от  $\theta_0$  при разном числе излучателей  $N$ . С увеличением  $N$  зависимости КНД ( $E$ ) и КНД ( $H$ ) сближаются. Так если при  $N=9$  КНД ( $H$ ) в пределах сектора  $|\theta_0| < 45^\circ$  выше КНД ( $E$ ) на 0,9 дБ, то при  $N=39$  эта разница уменьшается до 0,13 дБ. Существенно отличаются в  $H$ - и  $E$ -случаях зависимости КПД от  $\theta_0$  (рис. 1б). Если КНД ( $E$ ) с увеличением  $\theta_0$  уменьшается, то КПД ( $H$ ) растет\*. В обоих случаях зависимость от числа излучателей относительно невелика, особенно в  $H$ -случае. Подобный характер зависимости КПД ( $H$ ) от  $\theta_0$  позволяет строить излучающую систему с практическим постоянным коэффициентом усиления (КУ) в секторе сканирования. На рис. 1в показаны зависимости КУ ( $H$ ) и КУ ( $E$ ) от  $\theta_0$  при разном числе излучателей. Из рис. 1в следует, что с ростом числа излучателей сектор, в пределах которого КУ ( $H$ ) постоянен, увеличивается. Неравномерность зависимости КУ ( $H$ ) от  $\theta_0$  в секторе  $45^\circ$  составляет 0,9 дБ при  $N=9$ ; 0,85 дБ при  $N=15$ ; 0,79 дБ при  $N=27$ ; 0,76 дБ при  $N=39$  и 0,6 дБ при  $N=101$ . Для  $E$ -случая неравномерность намного больше: 4 дБ ( $N=9$ ); 3,5 дБ ( $N=15$ ); 3,2 дБ ( $N=27$ ); 3,0 дБ ( $N=39$ ); 2,8 дБ ( $N=101$ ). При этом важно заметить, что на краю сектора сканирования КУ ( $H$ ) превышает КУ ( $E$ ) примерно на 2,5 дБ.

Отличие зависимостей КНД ( $E$ ) и КНД ( $H$ ) связано с разницей ДН одиночного излучателя при  $E$ - и  $H$ -возбуждении. При  $H$ -возбуждении, в отличие от  $E$ -случая, ДН излучателя при  $\theta = \pm 90^\circ$  спадает до нуля, что приводит к подавлению дальних боковых лепестков ДН системы и росту КНД. С ростом числа излучателей  $N$  дальние лепестки множителя решетки уменьшаются, вследствие чего зависимости КНД ( $E$ ) и КНД ( $H$ ) сближаются.

На рис. 1г приведены данные об ошибке ориентации луча при двух типах возбуждения. При малых углах  $\theta_0$  ошибка  $\Delta\theta(H)$  больше, чем  $\Delta\theta(E)$ . Так, например, при угле  $\theta_0 = 20^\circ$  ошибка  $\Delta\theta(H)$  меньше  $\Delta\theta(E)$  примерно на 30% (при  $N = 9$  на  $0,1^\circ$ ). При углах, больших  $45-50^\circ$ , ошибка  $\Delta\theta(E)$  становится меньше, чем  $\Delta\theta(H)$ . Такой характер зависимости ошибок от  $\theta_0$  также обусловлен, в основном, различием ДН одиночного излучателя при двух типах возбуждения.

Таким образом, анализ интегральных характеристик решетки плоских волноводов показывает, что при  $H$ -возбуждении можно получить практически постоянное в широком секторе углов ( $\pm 50^\circ$ ) значение КУ, существенно превышающее при относительно больших углах  $\theta_0$  усиление для  $E$ -возбуждения. При этом величина ошибки ориентации луча в случае  $H$ -возбуждения в рабочем секторе углов  $\theta_0$  оказывается меньше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мануилов Б. Д., Яковенко В. А. // Радиоэлектроника. 1985. Т. 28. № 2. С. 34.
2. Буров В. Ф., Черноверский А. Г. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 5. С. 881.
3. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток.—М.: Мир, 1974. — 445 с.

Поступила в редакцию  
21 июля 1988 г.

#### COMPARISON OF INTEGRAL CHARACTERISTICS OF FINITE ARRAYS CONSISTING OF PARALLEL-PLATE WAVEGUIDES WITH DIELECTRIC PLUGS IN $H$ - AND $E$ -PLANE

B. D. Manuilov, K. I. Chernyshev, V. A. Yakovenko

The analysis problem of finite array consisting of parallel-plate waveguides with dielectric plugs has been solved by equivalent-current-sheet and Galerkin's methods using full-domain basic functions. Scan angular dependences of efficiency, amplification coefficient and scan angle error have been numerically researched for one-mode plugs. Comparison of integral characteristics of arrays with different waveguide number has been made in  $H$ - and  $E$ -plane.

\* Такой характер изменения КПД при  $H$ - и  $E$ -возбуждениях соответствует характеру изменения КПД при падении плоской волны перпендикулярной и параллельной поляризации на бесконечный слой диэлектрика.

УДК 621.384.6

## РЕЗОНАНСЫ В ПУЧКЕ ПРИ ФОКУСИРОВКЕ СПИРАЛЬНЫМ КВАДРУПОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

*С. П. Ефимов, И. Л. Коренев, Л. А. Юдин*

Найдены условия неустойчивости волн в пучке электронов, который фокусируется однородным и спиральным квадрупольным магнитными полями и взаимодействует с окружающими его структурами. Взаимодействие различных типов волн описывается в рамках теории возмущений. Обсуждаются возможности использования неустойчивых волн для генерации СВЧ излучения. Оцениваются инкременты паразитной неустойчивости в циклическом ускорителе.

Задача исследования резонансов пучковой волны с волнами внешней структуры — традиционная в теории коллективных методов ускорения и генерации СВЧ волн. Выбор и реализация резонанса зависят от его инкремента и возможности управления физическими параметрами в том случае, когда резонанс является полезным. Если резонанс паразитный, то расчет его позволяет оценить рабочие параметры установки.

В данной работе изучаются волны в пучке, который фокусируется однородным продольным и спиральным квадрупольным магнитными полями. Такие фокусирующие системы хорошо известны в ускорительной технике. Движение отдельных частиц в подобных системах рассчитывалось, например, в работах [1-3]. В работе [4] рассматривались волны в приближении малых колебаний, причем принималась модель безграничного и однородного в поперечном направлении пучка. Было показано, что при определенных условиях возможно нарастание амплитуды плоской волны, что предполагается использовать как механизм усиления в лазере на свободных электронах.

Используемая ниже теория возмущений, когда пучковая волна слабо взаимодействует с волнами внешней структуры, в отличие от метода [4], позволяет рассчитывать дисперсионные характеристики ограниченных систем (различного типа волноводов). При этом основное внимание уделено резонансу пучковой и электромагнитной волны в волноводе. Для генерации СВЧ волн подобный резонанс является полезным, при транспортировке пучка — паразитным.

Плазменная частота, характеризующая ток пучка, в известном смысле считается малой. Это позволяет рассматривать только поперечные моды колебаний. Традиционно используется параксиальное приближение, а продольная динамика считается не связанный с поперечной. По этой причине присутствующие ниже термины (возмущенный ток, восприимчивость системы, отклонение частиц от равновесия) относятся к поперечным частям соответствующих величин.

**1. Тензор восприимчивости системы.** В теории возмущений ключевым моментом является расчет тензора восприимчивости (или тензора диэлектрической проницаемости) пучка. Для расчета отклика системы на внешнюю высокочастотную силу, которая в линейном приближении по полу есть

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

где  $u$  — скорость пучка, необходимо решить уравнения движения частиц.

Кроме силы (1) на отдельную частицу, имеющую поперечные смещения  $x$  и  $y$ , действует статическое спиральное квадрупольное магнитное поле с градиентом  $G$ :

$$f_x = -\frac{eGu}{c} (x \cos \alpha s + y \sin \alpha s).$$

Компонента  $f_y$  сдвинута по фазе на  $\pi/2$ . Эта сила меняет «по спирали» направление с ростом продольного расстояния  $s$ . Жесткость структуры  $Q^2 = eGu/m\gamma c$ , ее период  $2\pi/\alpha$ . Продольная скорость частиц  $u$  предполагается неизменной в силу условия параксиальности.

Уравнения поперечных колебаний частицы с зарядом  $e$ , в продольном магнитном поле  $B_0$ , параллельном скорости пучка  $u$ , в указанном приближении просты:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Omega \frac{dy}{dt} + Q^2(x \cos \alpha s + y \sin \alpha s) = \frac{f_x}{\gamma m} \exp[i(hs - \omega t)], \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \Omega \frac{dx}{dt} + Q^2(x \sin \alpha s - y \cos \alpha s) = \frac{f_y}{\gamma m} \exp[i(hs - \omega t)],$$

$$\Omega = eB_0/m\gamma c \text{ — циклотронная частота, } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial s}.$$

Вместо пары уравнений обычно рассматривают одно комплексное уравнение для переменной  $z = x + iy$ . Однако в уравнениях (2) введение переменной  $z$  привело бы к путанице, поскольку в сформулированной ниже задаче следует различать пространственную фазу (т. е. угол поворота) и временную фазу. С целью разделения фаз введем пространственную мнимую единицу  $j$ . В отличие от  $i$  ее можно считать матрицей

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

со всеми свойствами мнимой единицы (так,  $e^{ja} = \cos a + j \sin a$ ,  $j^2 = -1$ ). Соответственно возникают две операции сопряжения — временная  $i^* = -i$  и пространственная  $\bar{j} = -j$ , которые нужны для обратного перехода к  $x$ - и  $y$ -компонентам.

Для переменных  $z = x + iy$  и  $f = f_x + jf_y$  вместо системы (2) имеем одно (матричное) уравнение

$$\ddot{z} - j\Omega \dot{z} + Q^2 e^{jas} z = \frac{e}{\gamma m} f \exp[i(hs - \omega t)]. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) слагается из двух гармоник,

$$z = \frac{e}{\gamma m} [A \exp[i(hs - \omega t)] f + \bar{B} \exp[i(hs - \omega t)] \exp(jas) \bar{f}], \quad (4)$$

причем вторая из них содержит пространственную фазу и является пространственно-промодулированным откликом на волну  $f \exp(ihs - i\omega t)$ . Комплексные в расширенном понимании (т. е. содержащие «числа»  $i, j$ ) коэффициенты  $A$  и  $B$  входят в систему уравнений

$$(-\Delta\omega^2 + ij\Omega\Delta\omega) A + BQ^2 = 1, \quad (5)$$

$$Q^2 A + [-(\Delta\omega - ij\alpha u)^2 - ij\Omega(\Delta\omega - ij\alpha u)] B = 0,$$

где  $\Delta\omega = \omega - hu$ . Напомним, что  $ij \neq -1$ .

\* Матрица  $(1+ij)$  не имеет обратной, что не сказывается на математическом формализме и физическом существе задачи.

В теории возмущений, которая применяется для расчета взаимодействия волн, инкременты связаны с работой тока  $I$ . Поперечная его компонента в линейном приближении есть  $I = \rho_0 z$ . Коэффициенты  $A$  и  $B$ , определяющие  $z$ , как следует из системы (5), равны

$$A = -(\Delta\omega - i\alpha u) [\Delta\omega + ij(\Omega - \alpha u)] (\det)^{-1}, \quad (6)$$

$$B = -Q^2 (\det)^{-1},$$

где  $\det$  — определитель системы, а выражение для тока есть

$$I = \rho_0 \frac{e^2}{\gamma m} [(-i\Delta\omega) Af + (-i\Delta\omega + j\alpha u) \bar{B} \bar{f} \exp(j\alpha s)] \exp[i(hs - \omega t)]. \quad (7)$$

Напомним, что входящие в (6), (7) параметры  $A$ ,  $B$ ,  $\det$  есть двумерные матрицы. Ток содержит два слагаемых — синфазное с электромагнитным полем и сдвинутое относительно него на пространственную фазу  $\alpha s$ . Второе слагаемое, кроме того, пропорционально пространственно-сопряженному значению  $\bar{f}$ , что вызвано спиральным характером модуляции внешнего поля.

Как хорошо известно, матрица поляризуемости определяется в системе отсчета, связанной со средой пучка, при использовании обычной векторной записи. Это эквивалентно выделению матрицы  $\hat{\chi}$  в выражении для тока\*

$$I = (-i\Delta\omega) \gamma^2 \hat{\chi} \hat{f}. \quad (8)$$

Сравним его с выражением (7). Поляризуемость  $\hat{\chi}$  складывается из двух частей. Первая обусловлена синфазной поляризуемостью среды. При использовании пространственной комплексной записи (т. е. матрицы  $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) ее можно представить в простой форме

$$\chi = \frac{\rho_0 e^2}{\gamma^3 m} A = \frac{\omega_p^2}{4\pi\gamma^3} A, \quad (9)$$

где  $\omega_p^2 = 4\pi\rho_0 e^2/\gamma$  — плазменная частота,  $A$  — коэффициент, приведенный в (6). Вторая часть поляризуемости из-за пространственной неоднородности среды имеет более сложную структуру. Как будет показано ниже, в рамках теории возмущений для описания взаимодействия пучка с внешними волнами ток среды (без фазового множителя  $\exp(ihs - i\omega t)$ ) необходимо усреднить вдоль оси пучка. В результате второе слагаемое можно не учитывать, поскольку среднее значение матрицы  $\exp(j\alpha s)$  равно нулю, и применять формулу (9).

В записи (6) для коэффициента  $A$  содержится матрица  $j$  как в числите, так и в знаменателе  $\det$ , нули которого определяют резонансы системы. Физика задачи требует, чтобы корни  $\omega(h)$  (либо  $h(\omega)$ ) были числами, т. е. не содержали матрицу  $j$ . Это означает, что физические полюсы определяются знаменателем — числовой функцией

$$\det \overline{\det} = P(\Delta\omega) P(\Delta\omega + \alpha u), \quad (10)$$

$$P(\Delta\omega) = \Delta\omega (\Delta\omega - \alpha u) (\Delta\omega + \Omega - \alpha u) (\Delta\omega - \Omega) - Q^4,$$

что естественно и при использовании традиционной векторной записи,

\* Проницаемость среды есть  $\hat{\epsilon} = 1 + 4\pi\hat{\chi}$ .

Модуляция тока возникает не только за счет спиральности квадрупольной фокусировки. Опираясь на метод работы [6], можно показать, что в равновесном состоянии пучок есть эллиптический цилиндр, спирально закрученный с шагом  $2\pi/\alpha$ . Его невозмущенная плотность  $\rho_0$ , входящая в (7), промодулирована с тем же шагом. Однако по аналогичным причинам, что и второе слагаемое в (7), плотность  $\rho_0$  можно усреднить по длине  $s$  и считать ее постоянной.

При  $Q=0$ , т. е. когда отсутствует спиральная фокусировка, формула (9) должна дать матрицу поляризации для пучка в продольном магнитном поле [6]. Из (6), (9) следует, что для  $Q=0$  значение поляризации есть

$$\hat{\chi} = - \frac{\omega_p^2}{4\pi\gamma^2} \frac{1}{\Delta\omega(\Delta\omega - ij\Omega)}.$$

Нетрудно убедиться, умножая на пространственно-сопряженное значение числитель и знаменатель, что полученная формула

$$\hat{\chi} = - \frac{\omega_p^2}{4\pi\gamma^2} \frac{\Delta\omega + i\Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\Delta\omega(\Delta\omega^2 - \Omega^2)} \quad (11)$$

совпадает с известной (при переходе к матричной записи). Напомним, что все приведенные формулы относятся к поперечной динамике без учета ее связи с продольной, а использование матрицы  $j$  необходимо для компактности формул.

**2. Резонанс пучка с внешней структурой.** В модели пучковых волн предыдущего раздела, в которой пучковая волна не взаимодействует с внешней структурой ( $f=0$ ), дисперсионное уравнение есть

$$\det \overline{\det} = P(\Delta\omega)P(\Delta\omega + \alpha u) = 0, \quad (12)$$

где полином  $P(\Delta\omega)$  указан в (10). Несложный анализ показывает, что волны пучка устойчивы, если жесткость не превосходит критическое значение

$$Q^2 < \left| \frac{\alpha u}{2} \left( \Omega - \frac{\alpha u}{2} \right) \right|. \quad (13)$$

Корни уравнения  $P(\Delta\omega)=0$ , пронумерованные в порядке возрастания, определяют четыре правовращающихся по отношению к внешнему полу волны с частотами

$$\Delta\omega = \xi_i^+ \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (14)$$

а корни уравнения  $P(\Delta\omega + \alpha u) = 0$  — четыре левовращающиеся волны с частотами

$$\Delta\omega = (\xi_i^+ - \alpha u) = \xi_i^- = -\xi_{5-i}^+ \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (15)$$

Для краткости будем их называть правыми или левыми волнами.

Одновременно изменение знаков  $\alpha$  и  $\Omega$  изменяет поляризацию волн. Волна с индексом «+» переходит при этом в волну с индексом «—» (и наоборот). В дальнейшем изложении ограничимся положительными значениями  $\alpha$ , когда квадрупольная спираль правовинтовая.

Правые волны содержат одну медленную волну  $i=1$  ( $\xi_1^+ < 0$ ) и три быстрых  $i=2, 3, 4$  ( $\xi_i^+ > 0$ ). Термин быстрая или медленная, как обычно, связан с соотношением фазовой скорости волны и скорости пучка  $u$ . Левые волны при  $i = 1, 2, 3$  медленные; при  $i=4$  левая волна быстрая.

Взаимодействие пучка с внешней структурой приводит к расщеп-

лению каждой волны. Степень расщепления определяется числом волн внешней структуры, взаимодействующих с данной. Сдвиги частот при слабом взаимодействии (которое обычно реализуется в экспериментах с малым значением  $\omega_p^2$ ) могут быть найдены методами теории возмущений. Однако эта теория, справедливая для однородного по оси волновода, не применима непосредственно к волноводу неоднородному, который и появляется в задаче с винтовой фокусировкой. В настоящей работе не излагается математическое обоснование применяемого метода, поскольку физическая сторона его прозрачна и сводится к следующему. При расчете энергетических величин — работы токов, потока или энергии в периодической структуре, какой является пучок с винтовой фокусировкой, необходимо усреднить их по длине волновода и только после этого подставлять в формулы работы [7]. В частности, формула для сдвига  $h$  относительно волнового числа структуры  $h_0(\omega)$ , возникающего из-за взаимодействия пучковой и внешней волн, принимает вид

$$h - h_0 = \frac{\omega\gamma^2}{4} \frac{\langle f^* \hat{\chi} f \rangle}{\langle S_z \rangle}, \quad (16)$$

где скобками обозначена операция усреднения по всему объему волновода, а  $\hat{\chi}$  — матрица восприимчивости среды. Поле  $f$  и поток энергии в (16) вычисляются для внешней волны. Например, если волновод не содержит среду с пространственной дисперсией, то  $\langle S_z \rangle$  — среднее значение вектора Пойнтинга,

$$\langle S_z \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{c}{16\pi L} \int_{-L}^L dz \int_{\Sigma} \frac{\operatorname{Re}[E^* \times H]_z}{\Sigma} d\sigma, \quad (17)$$

где  $\Sigma$  — площадь поперечного сечения.

Из формулы (16), в силу ортогональности гармоник, следует, что в отклике  $\hat{\chi} f$  нужно учитывать только волны, входящие в  $f$ . В частности, если  $\hat{\chi} f$  — отклик, записанный в (7) с использованием матрицы  $j$ , то гармонику, содержащую  $e^{j\alpha s}$ , нужно отбросить, а плотность пучка  $\rho_0$  усреднить по его длине, что упоминалось выше.

Наиболее интересной является область пересечения дисперсионных характеристик волн пучка и структуры — область резонанса, поскольку именно такое взаимодействие наиболее эффективно при малых значениях  $\omega_p^2$ . Существенно, что сдвиг волнового числа внешней структуры можно рассчитать по формуле (16) даже в резонансе, подставляя в правую часть истинное (точное расчетное, см. [7]) значение  $\delta h$ . Резонанс с правой волной возникает в точке  $h_i^+ = (\omega - \xi_i^+)/u$ , с левой, соответственно, в точке  $h_i^-$ . В этих точках определитель  $\det$

из (13) равен нулю, а восприимчивость  $\hat{\chi}$  имеет особенность.

В окрестности резонанса с номером  $n$  тензор восприимчивости (9) можно представить в виде

$$\hat{\chi}^+ = -\frac{\omega_p^2}{4\pi\gamma^2} \frac{(\xi_n^- + \Omega)\xi_n^-}{(\Delta\omega - \xi_i^+) \prod_{k \neq n} (\xi_n^+ - \xi_k^+)} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В случае резонанса с левой волной индексы «+» и «—» в (18) следует поменять местами. Обратим внимание, что матрица  $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  стоит за скалярным множителем и не содержит размерных параметров. Именно она определяет изменение пространственной поляризации отклика по отношению к полю  $f$ .

Отсюда следует важный результат: с волнами внешней структуры резонируют пучковые волны круговой поляризации. Продемонстрируем этот факт в простейшем случае, когда нет винтового поля, а есть лишь продольное поле  $B_0$ . В окрестности резонанса тензор восприимчивости (9) равен

$$\hat{\chi} = -\frac{\omega_p^2}{8\pi\gamma^2} \frac{1}{(\Delta\omega - \Omega)} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Этот тензор волну внешней структуры с компонентами  $(f_x, f_y)$  превращает в волну  $(f_x - if_y)(1, i)$ , т. е. в волну круговой поляризации. Вне резонанса соответствующая волна обладает эллиптической поляризацией.

Подставим выражение (18) в формулу (16) и умножим обе части на  $(\Delta\omega - \xi_n^+)$ , чтобы устраниТЬ малый знаменатель в правой части. Получим дисперсионное уравнение для правых волн вблизи значения  $h_0(\omega)$

$$(h - h_0(\omega))(\Delta\omega - \xi_n^+) + \frac{\omega_p^2}{c} K^+ = 0, \quad (20)$$

где

$$K^+ = \frac{mc}{32\pi} \frac{\langle |f - i\mathbf{n}_z \times f|^2 \rangle (\xi_n^- + \Omega) \xi_n^-}{\langle S_z \rangle \prod_{k \neq n} (\xi_n^+ - \xi_k^+)}. \quad (21)$$

Волновое число структуры  $h_0(\omega)$  в резонансе совпадает с  $(\omega - \xi)/u$ . Точку пересечения кривых в  $n$ -м резонансе обозначим через  $(h_n, \omega_n)$ . Напомним, что скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение по объему волновода. Для левой волны индексы «+» и «-» следует поменять местами.

Линеаризуем в (20) зависимость  $h_0(\omega)$ , поскольку  $h_0(\omega)$  близко к  $h_n$ . Если  $\delta\omega = \omega - \omega_n$  — расстройка частоты, то в этом приближении

$$h_0(\omega) = h_n + \delta\omega/v_{gn}, \quad (21)$$

где  $v_{gn}$  — групповая скорость волн внешней структуры. Подставим (21) в (20) и решим квадратное уравнение относительно  $h$ :

$$h = h_n + \frac{\delta\omega}{2} \left( \frac{1}{v_{gn}} + \frac{1}{u} \right) \pm \left[ \frac{(\delta\omega)^2}{4} \left( \frac{1}{v_{gn}} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\beta c^2} K_n \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Знаки  $\pm$  возникают для каждого значения  $\xi_n^+$  и, соответственно,  $\xi_n^-$ . Формула (22) описывает расщепление дисперсионной кривой в окрестности резонанса.

Наиболее интересны ситуации, когда возникает неустойчивость. Из (22) следует, что неустойчивость связана с отрицательными значениями  $K_n$ . Для оценки пространственного инкремента  $\Gamma_s$  оставим только отрицательное слагаемое под корнем. Тогда

$$\Gamma_s \simeq \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\left| \frac{K_n}{\beta} \right|} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\left| \frac{K_n}{\beta} \right|}, \quad (23)$$

а ширина резонанса порядка

$$\delta\omega_{\text{эфф}} \simeq 2\Gamma_s \left| \frac{1}{v_{gn}} - \frac{1}{u} \right|^{-1}. \quad (24)$$

Индексы  $\pm$  в формулах (24) и (25) опущены для сокращения записи.

В задачах с начальными условиями, когда процесс развивается во времени, требуется определить сдвиг частоты как функцию волнового

числа  $h$ . Решим уравнение (21) теперь относительно  $\omega$ . В том же приближении получим

$$\omega - \omega_n = \frac{\delta h}{2} (v_{gn} + u) \pm \left[ \frac{(\delta h)^2}{4} (v_{gn} - u)^2 + \frac{v_{gn}}{c} \omega_p^2 K_n \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Неустойчивость во времени возникает, если отрицателен множитель  $v_{gn} K_n$ . Оценка временного инкремента дает

$$\Gamma_t = \omega_p \sqrt{|K_n v_{gn}/c|} \quad (26)$$

с соответствующей шириной резонанса

$$\delta h_{\text{эфф}} = 2\Gamma_t / |v_{gn} - u|.$$

Для абсолютной неустойчивости необходимы противоположные знаки групповой скорости  $v_{gn}$  и коэффициента  $K_n$ .

**3. Резонанс медленных волн.** Медленные волны, фазовая скорость которых  $v_\phi$  меньше скорости пучка  $u$ , могут резонансно взаимодействовать с замедляющими структурами. Среди волн (14), (15) медленными являются волны с параметрами  $h_i^+$  и  $h_n^-$  ( $n=1, 2, 3$ ). В области устойчивости пучковой волны, когда выполнено условие (13), величины  $K_i^\pm$  отрицательны. Поскольку значения  $K_i^+$  входят под корень в выражении (22), соответствующие моды  $(1, \pm)$  неустойчивы при взаимодействии их с замедляющей внешней структурой.

Условие неустойчивости пучковых мод с номером 2 связано с соотношением между продольным полем и периодом квадрупольной структуры. Если продольное поле велико ( $\Omega > \alpha u/2$ ), то становится неустойчивой вторая левая мода  $(2, -)$ . При малой циклотронной частоте ( $\Omega < \alpha u/2$ ) неустойчивость возникает у правой моды  $(2, +)$ . Анализ показывает, что моды с номерами 2, 3 устойчивы. Таким образом, резонанс с замедляющей внешней структурой дает три неустойчивые моды:  $(1, \pm)$ ,  $(2, \pm)$  или  $(2, -)$ . Мы не будем приводить расчет инкрементов этих мод ввиду аналитически сложной зависимости результатов от параметров конкретной внешней структуры.

**4. Резонанс быстрых волн.** Резонанс быстрых волн, фазовая скорость которых выше скорости пучка  $u$  и, как правило, выше скорости света, можно использовать в методах генерации СВЧ колебаний. Рассмотрим в связи с этим те быстрые волны из набора (14), (15), которые неустойчивы в резонансе с внешней структурой. Анализ формулы (20) показывает, что неустойчивыми могут быть только правые волны. При сильном продольном поле  $\Omega > \alpha u$  неустойчива волна  $(2, +)$ , в слабом поле возникает генерация волны  $(3, +)$ .

Рассмотрим в качестве примера резонанс быстрых волн пучка в гладком волноводе. Дисперсионное уравнение электромагнитной волны

$$\omega^2/c^2 - h^2 = \kappa^2, \quad (27)$$

где  $\kappa$  — поперечное волновое число, необходимо решить совместно с уравнением (14). Дисперсионные кривые при условии  $\xi_i^+ > \kappa c/v$  пересекаются в точке

$$\omega_i = \frac{1}{2} (\eta^2 + 1) \xi_i^+, \quad h_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2 - 1}{u} \right) \xi_i^+, \quad (28)$$

где параметр  $\eta = \kappa c / \xi_i^+$ , а индекс  $i$  может принимать значения 2 или 3.

Для конкретности рассмотрим фокусирующую систему кольцевого ускорителя, предложенную в работе [8]. Оценим длину, на которой проявляется неустойчивость. Характерные параметры установки проведены в табл. 1.

Таблица 1

При этих параметрах наибольший инкремент возникает при резонансе пучковой моды  $(2, +)$  с волной TE<sub>11</sub> круглого волновода. Резонанс возможен при энергиях выше 20 МэВ. Поскольку размеры пучка малы по сравнению с радиусом волновода, формулы (20), (23) дают для пространственного инкремента (в единицах 1/см) значение

$$\Gamma = \left[ \frac{4,22}{b^4} \left( \frac{J}{J_A \gamma} \right) \frac{(\xi_2^+)^2 (\xi_2^+ - 2\alpha)(\xi_3^+ - 2\alpha + \Omega)}{h(\xi_2^+ - \xi_1^-)(\xi_3^+ - \xi_2^+)(\xi_4^+ - \xi_2^+)} \right]^{1/2}, \quad (29)$$

где  $2\pi/\alpha$  — длина волны в резонансе (28). Характерная длина неустойчивости  $L=1/\Gamma$  уменьшается с набором энергии  $\gamma$ , и неустойчивость, таким образом, проявляет себя более сильно.

Приведем расчет по формуле (29) несколько значений инкрементов, возникающих в процессе ускорения при токе 1 кА (табл. 2). К концу ускорения, когда  $\gamma=60$ , при длине орбиты 6,3 м амплитуда колебаний возрастает после одного оборота на порядок, т. е. резонансная неустойчивость проявляет себя при таких параметрах существенным образом.

В работе найден набор медленных волн пучка, резонирующих с модами внешней структуры и нарастающих в пространстве или во времени. Наиболее эффективно с пучком резонируют волны круговой поляризации. Пучковая волна, фокусируемая продольным магнитным полем, расщепляется на четыре, если ввести дополнительно спиральную квадрупольную фокусировку. Три из этих волн оказываются неустойчивыми при взаимодействии с внешней структурой. Этот эффект расширяет возможности управления волной в установках, используемых для коллективного ускорения. Например, ускоряющую систему можно разделить на три участка. После прохождения пучком первого участка с адиабатическим изменением характеристик параметры второго подбираются так, чтобы первая неустойчивая мода непрерывно переходила во вторую. Аналогично осуществляется переход из второй системы в третью. В результате появляется дополнительный диапазон изменения фазовой скорости, равный  $(v_{\phi 3} - v_{\phi 1})$ . Медленные пучковые волны могут резонировать также с циклотронными волнами плазмы.

Особый интерес представляют быстрые волны, которые возможны в рассматриваемой системе фокусировки. Резонанс пучковой волны с электромагнитной в вакуумном гладком волноводе эффективен, поскольку поле этой волны максимально в ее приосевой области, где проходит пучок. В особенности следует ожидать эффективного взаимодействия с волнами типа  $E_{11}$ ,  $H_{11}$ , которые в приосевой области имеют круговую поляризацию. Разумеется, реальное использование рассчитанного режима генерации СВЧ колебаний требует дополнительных исследований. В частности, здесь важен вопрос о кпд.

Наконец, отметим методический результат данной работы. Как выше показано, введение комплексного представления отдельно для колебаний во времени и отдельно для описания пространственного вращения сокращает число уравнений и порядок определителей вдвое.

Авторы глубоко признательны М. Л. Левину и Э. Л. Бурштейну за полезные обсуждения работы.

Продольное поле	16 кГс
Градиент поперечного поля	480 Гс/см
Шаг намотки спирали	62,8 см
Радиус камеры	10 см
Радиус орбиты	1 м
Набор энергии	4 МэВ/об
Энергия инжекции	3 МэВ
Частота отсечки волновода	5,8 кГц

Таблица 2

Энергия, $\gamma$	Длина неустойчивости, м
20	85
40	16
60	2,6

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sacerdoti G. // Electronica. 1960. V. 47. № 5. P. 322.
2. Симонян Х. А. // ПТЭ. 1962. Вып. 3. С. 27.
3. Reiser M. // Part. Accel. 1978. V. 8. P. 67.
4. Levush B., Antonsen T. M., Manheimer W. M., Sprangle P. // Phys. Fluids. 1985. V. 28 (7). P. 2273.
5. Ярковой О. И. // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 6. С. 988.
6. Коренев И. Л., Юдин Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 12. С. 1523.
7. Юдин Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 2. С. 235.
8. Карапанос С. А., Sprangle P. et al. // Part. Accel. 1985. V. 18. P. 73.

Поступила в редакцию  
12 июля 1988 г.

## ELECTRON BEAM RESONANCES IN ITS FOCUSING BY SPIRAL-LIKE QUADRUPOLE MAGNETIC FIELD

S. P. Efimov, I. L. Korenev, L. A. Yudin

Conditions had been found for the instability of waves in an electron beam to be focused by a homogeneous magnetic field and spiral-like, quadrupole one. The beam is simultaneously interacts with surrounding objects. The interaction of waves of various types is described within framework of perturbation theory. The possibility of generating UHF radiation by unstable waves is discussed. The increments of parasitic instability are estimated in a stellarator.

---

## ВСЕСОЮЗНОЕ АГЕНТСТВО ПО АВТОРСКИМ ПРАВАМ (ВААП) (Продолжение)

### II. СРОКИ ВЫПЛАТЫ ГОНОРАРА

Выплата авторского гонорара начинается через 2 года и заканчивается через 4 года после выхода последнего номера журнала в СССР (например, выплата гонорара за перепечатку статей, опубликованных в журналах в 1988 г., будет производиться с 1 января 1991 г. по 30 декабря 1992 г.).

### III. ПОРЯДОК ОТКРЫТИЯ ТЕКУЩЕГО СЧЕТА ТИПА «В» И ПОСЛЕДУЮЩИХ РАСЧЕТОВ

1. Счет типа «В» открывается по месту жительства автора:

а) для авторов, проживающих в Москве и Московской области, — во Внешэкономбанке СССР (г. Москва, ул. Чкалова, 14/16);

б) для авторов, проживающих в городах Ленинград, Вильнюс, Выборг, Ереван Измайл, Киев, Кишинев, Львов, Минск, Находка, Новороссийск, Одесса, Сочи, Таллин Ужгород, Унгены, Хабаровск, Ялта, — в отделениях Внешэкономбанка СССР;

в) для остальных авторов — в банковских учреждениях, занимающихся иностранными операциями, расположенных в столицах союзных республик и областных центрах РСФСР (наименование банка, в адрес которого направлен перевод для открытия счета типа «В», сообщается автору в извещении ВААП).

2. Авторам, проживающим в Москве и Московской области и желающим открыть счет типа «В» в ВЭБ СССР, к справкам-заявлениям необходимо приложить заявление на открытие счета, оформленное в соответствии с образцом.

3. По правилам Внешэкономбанка СССР счет типа «В» открывается с суммы авторского гонорара, превышающей 25 инвалютных рублей (после удержания налогов).

4. По открытии счета и получении его номера автор должен оформить все последующие справки-заявления с указанием номера счета и наименования учреждения банка, где открыт этот счет.

5. Если в справке-заявлении автора указана форма выплаты гонорара «на счет типа «В — новый», а открыть указанный счет ввиду недостижения суммы гонорара 25 инв. руб. не представляется возможным, сумма, срок хранения в ВААП которой истекает, выплачивается автору в рублях в порядке, предусмотренном в п. IV.

### IV. ПОРЯДОК ВЫПЛАТЫ АВТОРСКОГО ГОНОРАРА В РУБЛЯХ

Выплата гонорара «в рублях» производится с применением расчетного коэффициента 4, 6.

(Окончание см. с. 117)

УДК 621.373.7

## МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ ПРИ УЧЕТЕ ДИСПЕРСИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, Н. В. Мицкевич*

Исследовано влияние дисперсии третьего порядка на процесс трансформации непрерывного излучения в периодическую последовательность сверхкоротких импульсов света. Рассмотрены интегрируемый и неинтегрируемый варианты нелинейного уравнения Шредингера, описывающие этот процесс. Численными и аналитическими методами исследована эволюция как огибающей, так и спектра сигналов. Показано, что учет фазовых сдвигов в начальных условиях задачи позволяет получить решение в виде неискаженной последовательности импульсов.

Явление модуляционной неустойчивости непрерывного сигнала в одномодовом оптическом волокне, предсказанное в [1, 2], может иметь ряд важных практических приложений. В работах [3, 4] исследовалась возможность генерации периодической последовательности сверхкоротких импульсов с большой частотой повторения. Эксперименты [5–7] показали, что уже на сегодняшнем этапе развития волоконно-оптической техники можно достичь частоты повторения импульсов порядка 1 Гц. Теоретически [8] скважность импульсов в таком процессе можно сделать неограниченно большой. Тогда длительность отдельных импульсов могла бы доходить до фемтосекундных значений. Однако при уменьшении длительности каждого отдельного импульса необходимо учитывать влияние на процесс дисперсии третьего порядка и запаздывания нелинейного отклика [9, 10], а также ряд других более тонких эффектов [11]. Например, учет влияния дисперсии третьего порядка на эффект модуляционной неустойчивости проводился недавно в работе [12]. При теоретическом описании распространения коротких сигналов в волокне учет этих эффектов выражается в усложнении нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) дополнительными слагаемыми, которые в общем случае нарушают его полную интегрируемость. Однако в ряде особых ситуаций интегрируемость может и сохраняться, что дает возможность получать и в этих случаях точные решения в аналитическом виде [9, 10].

В данной работе мы провели более полное, чем в [12], исследование влияния пространственной дисперсии на модуляционную неустойчивость в оптическом волокне. Численными методами мы исследовали как эволюцию огибающей, так и эволюцию спектра сигналов. При этом мы исследовали как неинтегрируемый случай, так и полностью интегрируемое модифицированное НУШ со слагаемым, отвечающим дисперсии групповой скорости третьего порядка.

Распространение волн в одномодовом оптическом волокне при учете дисперсии третьего порядка описывается НУШ с производной третьего порядка (подробный вывод этого уравнения можно найти, например, в [13, 14]):

$$i\psi_{\xi} + (1/2)\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = i\mu\psi_{\tau\tau\tau}, \quad (1)$$

где

$$\xi = q^2 \frac{x}{\lambda}, \quad \tau = q(-\lambda k'')^{-1/2} \left( t - \frac{x}{v_{rp}} \right), \quad \psi = \frac{(\pi n_2)^{1/2}}{q} F,$$

$F$  — огибающая оптического поля,  $\lambda$  — длина волны излучения,  $v_{\text{grp}} = -\partial\omega/\partial k$  — групповая скорость,  $k'' = \partial^2 k / \partial \omega^2$  — дисперсия групповой скорости,  $\omega$  — несущая частота,  $q$  — нормировочный множитель, определяющий связь между амплитудой сигнала и характерными временными и пространственными изменениями поля в волокне,  $n_2$  — нелинейный коэффициент в зависимости показателя преломления от поля волны  $n = n_0 + n_2 |E|^2$ ,  $E$  — напряженность электрического поля,  $\mu = -\partial^3 k / \partial \omega^3$ .

Уравнение (1) в отличие от НУШ не является полностью интегрируемым, и его решения мы моделировали численными методами. Начальный этап развития модуляционной неустойчивости описывается следующей формулой:

$$\psi(\xi, \tau) = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^N A_j \exp(\delta_j \xi) \left[ \frac{\kappa_j}{2} + i \frac{\delta_j}{\kappa_j} \right] \cos \kappa_j (\tau - \mu \kappa_j^3 \xi + \tau_{0,j}) \right\} \exp(i\alpha + i\xi), \quad (2)$$

где  $A_j$  — амплитуда начальной модуляции,  $\kappa_j = j\kappa$ ,

$$\delta_j = \kappa_j \sqrt{1 - \kappa_j^2/4}$$

есть инкремент нарастания неустойчивости модулированного сигнала,  $\kappa$  — частота начальной модуляции,  $\alpha$  — общая фаза сигнала. В отличие от обычного НУШ аргумент тригонометрических функций в (2) отличается дополнительным слагаемым  $\mu \kappa^3 \xi$ , что приводит к фазовому смещению огибающей поля со скоростью  $v = \mu \kappa^3$ . Это фазовое смещение сохраняется и при последующей эволюции огибающей поля.

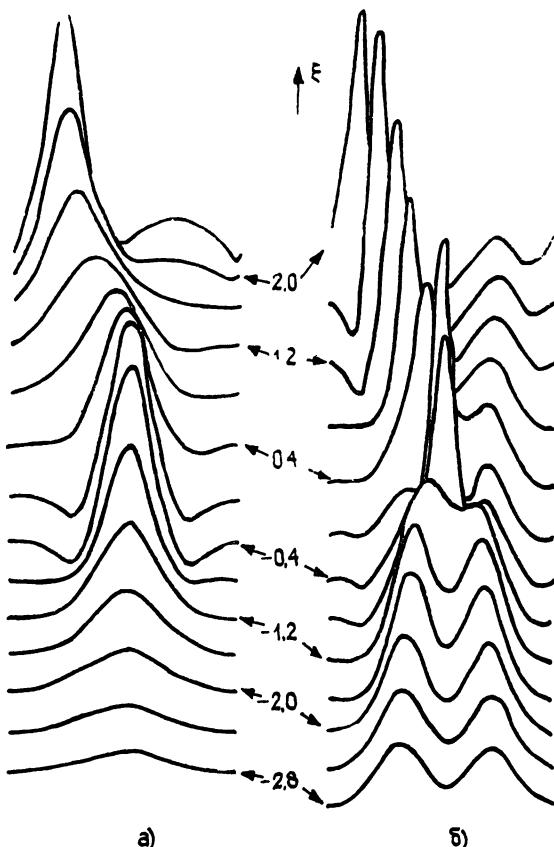


Рис. 1.

На рис. 1а приведены результаты численного моделирования эволюции поля с начальным условием (2) при наличии одной гармоники

начальной модуляции ( $N=1$ ). В отличие от интегрируемого НУШ в данном случае не происходит возврата к исходному состоянию поля в виде непрерывного сигнала. На рис. 2 фазовый портрет процесса эволюции в данном случае представлен сплошной кривой, а в случае НУШ — пунктирной (см. [15]). Видно, что дисперсия третьего порядка приводит к отклонению от первоначальной траектории (при  $\mu=0$ ), и это отклонение с ростом  $\xi$  возрастает. При численном моделировании для наглядности мы взяли завышенные значения  $\mu$  (далее всегда  $\mu=0,07$ ) по сравнению с реальными, имеющими место в кварцевом волокне [13]. Аналогичный фазовый сдвиг имеет место и при модуляции исходного сигнала двумя гармониками ( $N=2$ ). Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1б. Однако

в этом случае фазовый сдвиг для первой и второй гармоник оказывается различным, и в итоге максимальная амплитуда импульса оказывается меньше, чем в случае НУШ. Этот вывод согласуется с результатами численных расчетов работы [12]. Для того, чтобы восстановить то же самое значение максимальной амплитуды, что и в случае НУШ, необходимо ввести в начальное условие (2) дополнительную разность фаз двух гармоник, которая компенсировала бы сдвиг, накапливающийся в результате эволюции. Более подробно об этом будет сказано ниже при исследовании интегрируемого случая.

Мы также исследовали эволюцию спектра сигнала при начальной модуляции одной и двумя гармониками. Пусть  $\psi(\xi, \tau)$  — решение уравнения (1). Представим его в виде комплексного разложения Фурье:

$$\psi(\xi, \tau) = C_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\xi) \exp(i\kappa n\tau) + C_{-n}(\xi) \exp(-i\kappa n\tau), \quad (3)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$C_0(\xi) = \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\pi/\kappa}^{\pi/\kappa} \psi(\xi, \tau) d\tau, \quad C_n(\xi) = \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\pi/\kappa}^{\pi/\kappa} \psi(\xi, \tau) \exp(-i\kappa n\tau) d\tau, \\ C_{-n}(\xi) = \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\pi/\kappa}^{\pi/\kappa} \psi(\xi, \tau) \exp(i\kappa n\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $T = 2\pi/\kappa$  — период следования импульсов,  $\kappa$  — основная частота внешней модуляции. На рис. 3 и 4 приведены примеры эволюции спектров для сигналов с одной и двумя гармониками начальной модуляции соответственно. Приведены результаты численных расчетов только для первой (рис. 3а и 4а) и второй (рис. 3б и 4б) гармоник, поскольку остальные гармоники в указанном масштабе оказываются малыми. В отличие от случая НУШ учет дисперсии третьего порядка приводит к несимметричным спектрам, эволюция левой (сплошная кривая) и правой (прерывистая кривая) гармоник не повторяют друг друга. (Левой гармонике соответствует более низкая частота.) Кроме того, поскольку отсутствует явление возврата Ферми—Пасты—Улама, спектры оказываются также несимметричными относительно значения

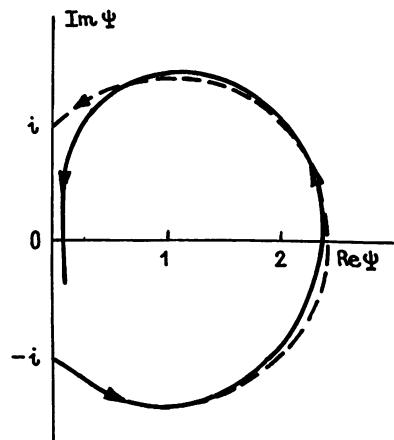


Рис. 2.

$\xi = 0$ . Несимметрия проявляется в большей степени для сигнала с двумя гармониками начальной модуляции. При этом поведение левой и правой гармоник при  $\xi > 0$  оказывается различным даже качественно. Коэффициент преобразования сигнала в первую гармонику остается, однако, достаточно высоким ( $\sim 32\%$ ), и волокно, в принципе, может быть использовано для преобразования частоты излучения.

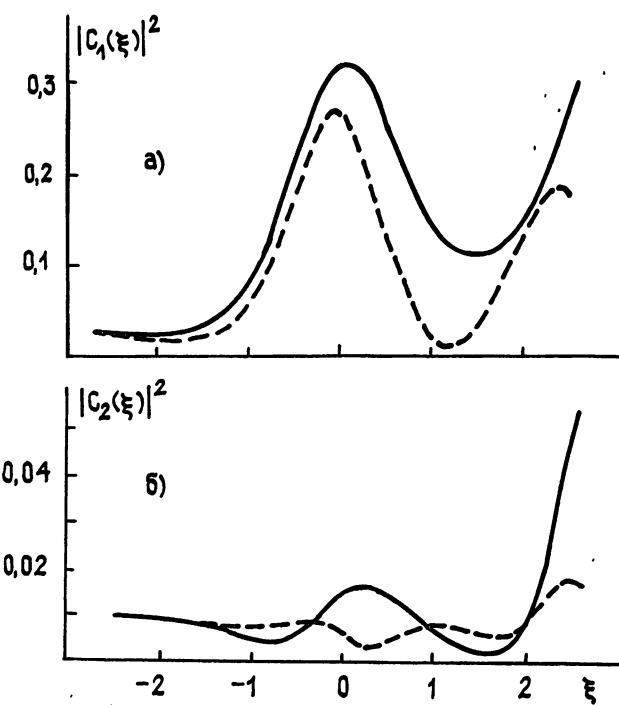


Рис. 3.

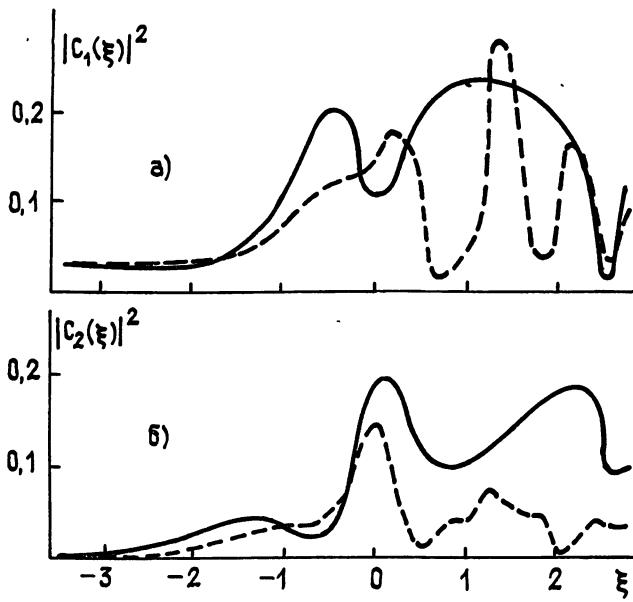


Рис. 4.

**Модифицированное НУШ.** Хотя численное моделирование решений эволюционных уравнений позволяет исследовать любой частный случай начальных условий, для выявления общих свойств эволюции сигналов, тем не менее, нужен большой объем вычислений. В этой связи

интегрируемые системы представляют собой более удобный объект исследования, поскольку для них удается выявить интересующие нас свойства системы, не обращаясь к громоздким расчетам. Особенно удобными являются такие системы, которые позволяют построить точные решения в аналитическом виде. В данном разделе мы обратимся к модифицированному НУШ с учетом дисперсии третьего порядка следующего вида:

$$i\psi_{\xi} + (1/2)\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = i\mu(\psi_{\tau\tau\tau} + 6|\psi|^2\psi_{\tau}). \quad (5)$$

Известно, что уравнение (5) является полностью интегрируемым. Для него возможно построение решений с помощью метода обратной задачи рассеяния. Солитонное решение (5) имеет вид [9]

$$\Psi(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}[\eta(\tau - \rho\xi - \tau_0)] \exp(-if\tau + i\beta\xi - i\varphi), \quad (6)$$

$$\rho = -f + \mu(\eta^2 - 3f^2), \quad \beta = (\eta^2 - f^2)/2,$$

где  $\eta$ ,  $f$ ,  $\tau_0$ ,  $\varphi$  — константы, определяемые из начальных условий. Из (6) видно, что наличие правой части уравнения (5) приводит к дополнительной скорости солитона, пропорциональной параметру  $\mu$ . Форма огибающей при этом остается неизменной.

Пользуясь методами работы [15], мы нашли также точное решение уравнения (5), описывающее явление модуляционной неустойчивости. Оказалось, что это решение имеет такой же вид, что и в случае НУШ, но периодическая последовательность импульсов приобретает дополнительный фазовый сдвиг:

$$\psi(\xi, \tau) = \left\{ 1 + \frac{p(x^2/2) \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) + ip\delta_1 \operatorname{sh} \delta_1(\xi - \xi_{01})}{-p \operatorname{ch} \delta_1(\xi - \xi_{01}) + \cos \kappa [\tau + \mu(6 - x^2)\xi - \tau_{01}]} \right\} \exp(i\xi + i\alpha), \quad (7)$$

где  $p = \delta_1/\kappa$ ,  $\alpha$  — произвольная фаза,

$$v_1 = \mu'(6 - x^2). \quad (8)$$

Соотношение (8) определяет отличную от нуля скорость импульсов. На рис. 5 приведены зависимости инкремента нарастания модуляционной неустойчивости  $\delta_1$  (кривая 1) и скорости импульсов  $v_1$  (кривая 2) от частоты модуляции. Из рисунка видно, что при отличных от нуля  $\xi$  во всем интервале существования эффекта модуляционной неустойчивости ( $0 < x < 2$ ) скорость импульсов отлична от нуля и монотонно зависит от  $\mu$ . Явление возврата к исходному состоянию при  $\xi \rightarrow \infty$  сохраняется, как и в случае НУШ, с тем же поворотом фазы [4]. Эволюция огибающей  $|\psi(\xi, \tau)|$  при этом практически не претерпевает изменений, так что учет дисперсии третьего порядка не влияет на периодическую последовательность импульсов, наблюдавшуюся на выходе волокна.

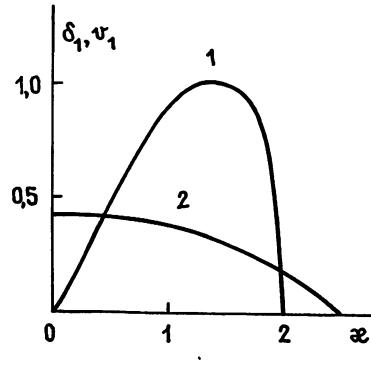


Рис. 5.

Иначе обстоит дело в случае начальной модуляции сигнала двумя гармониками (и более). Точное решение уравнения (5) в этом случае имеет вид

$$\psi(\xi, \tau) = -\frac{\operatorname{ch}^2(4/5)\xi + P(\tau) \operatorname{ch}(4/5)\xi - C(\tau) + iF(\tau) \operatorname{sh}(4/5)\xi}{\operatorname{ch}^2(4/5)\xi + (5/4)F(\tau) \operatorname{ch}(4/5)\xi + C(\tau)},$$

$$P(\tau) = (\kappa/2) [2 \cos \kappa(\tau + v_1\xi - \tau_{01}) - \cos 2\kappa(\tau + v_2\xi - \tau_{02})],$$

$$F(\tau) = (2\kappa/3) [2 \cos \kappa(\tau + v_1 \xi - \tau_{01}) + \cos 2\kappa(\tau + v_2 \xi - \tau_{02})],$$

$$C(\tau) = \{8/9 + \cos \kappa[\tau + (2v_2 - v_1)\xi + \tau_{01} - 2\tau_{02}] + \\ + (1/9) \cos \kappa[3\tau + (2v_2 + v_1)\xi - \tau_{01} - 2\tau_{02}]\},$$

где  $v_1 = \mu(6 - \kappa^2)$ ,  $v_2 = \mu(6 - 4\kappa^2)$ . В (9) мы ограничились случаем, когда инкременты нарастания двух гармоник одинаковы:  $\delta_1 = \delta_2$ . Общий случай легко построить, используя формулу (12) работы [4]. Особенность решений с двумя гармониками состоит в том, что в нелинейной суперпозиции двух гармоник каждая из них обладает собственной скоростью движения  $v_1$  и  $v_2$ , которые не равны друг другу. Поэтому каждая из гармоник в процессе эволюции приобретает дополнительный фазовый сдвиг, и для того, чтобы на выходе волокна наблюдать сигналы, форма которых совпадает с формой сигналов описываемых НУШ, необходимо в начальных условиях компенсировать возникающий фазовый сдвиг. Аналогичную компенсацию необходимо вводить и в случае большего числа гармоник модуляции. Однако гармоники с номером  $n > N$  обладают фазой, которая не управляема фазой входного сигнала. Поэтому точного повторения формы сигнала, как в случае НУШ, не происходит. Тем не менее, поскольку в действительности значения  $\mu$  очень малы, фазовыми поправками, как показывают наши оценки, в этих случаях можно пренебречь.

Проведенный нами анализ показывает, что учет дисперсии третьего порядка при малых  $\mu$  сводится в основном к фазовым сдвигам гармоник сигнала. В чистом виде дисперсия третьего порядка приводит к неинтегрируемому уравнению, численное моделирование решений которого приводит к результатам, мало отличающимся от случая классического НУШ. Дополнительное слагаемое позволяет сделать уравнение интегрируемым, имеющим точные решения, в которых фазовые сдвиги рассчитываются аналитически. Учет этих фазовых сдвигов в начальных условиях задачи дает возможность получить решения модифицированного НУШ в виде таких же импульсов, как и в случае НУШ без учета дисперсии третьего порядка.

Вопросы применимости модифицированного интегрируемого НУШ с учетом дисперсии третьего порядка к реальному волокну составляют отдельную проблему [9], которой мы здесь не касаемся. Вместе с тем полученные результаты позволяют надеяться, что теорию генераций периодической последовательности импульсов можно распространить и на диапазон фемтосекундных длительностей импульсов, где учет дисперсии третьего порядка становится важным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hasegawa A., Brinkman W. E. // IEEE. J. Quantum Electron. 1980. QE-16. № 7. P. 694.
2. Anderson D., Lisak M. // Optics Lett. 1984. V. 9. № 10. P. 468.
3. Hasegawa A. // Optics Lett. 1984. V. 9. № 7. P. 288.
4. Ахмедиев Н. Н., Елеонский В. М., Кулагин Н. Е. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 5. С. 1542.
5. Tai K., Tomita J. L., Jewell J. L., Hasegawa A. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 49. № 5. P. 236.
6. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. № 2. P. 135.
7. Potasek M. J. // Optics Lett. 1987. V. 12. № 9. P. 717.
8. Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И., Мицкевич Н. В. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 1. С. 159.
9. Kodama Y. J. // J. Statistical Phys. 1985. V. 39. № 5/6. P. 597.
10. Ohkuma K., Yoshi H., Ichikawa H., Abe Y. // Optics Lett. 1987. V. 12. № 7. P. 516.
11. Christodoulides D. N., Joseph R. H. // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 47. № 2. P. 76.
12. Выслюх В. А., Сухотская Н. А. // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. № 11. С. 2371.

13. Хасэгава А., Кодама Йо. // ТИЙЭР. 1981. Т. 69. № 9. С. 57.  
 14. Agrawal G. P., Potasek M. J. // Phys. Rev. 1986. V. 33. № 3. P. 1765.  
 15. Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И. // Теоретическая и математическая физика. 1986. Т. 69. № 2. С. 189.

Московский институт  
электронной техники

Поступила в редакцию  
18 мая 1988 г.

## MODULATION INSTABILITY OF CW SIGNAL IN AN OPTICAL FIBER WITH THE THIRD-ORDER DISPERSION

N. N. Akhmediev, V. I. Korneev, N. V. Mitskevich

The influence of the third-order dispersion on the process of the transformation of a CW optical signal into periodic sequence of ultrashort pulses are investigated. Integrable and nonintegrable cases of modified nonlinear Schrödinger equation describing this process are analysed. Evolution of both the envelope and the spectrum of signals are investigated by numerical and analytical methods. It is shown that the solution of the problem in the form of undistorted pulse sequence is possible if the phase shifts in the initial conditions are taken into account.

### ВСЕСОЮЗНОЕ АГЕНТСТВО ПО АВТОРСКИМ ПРАВАМ (ВААП) (Окончание)

#### V. ПРИМЕЧАНИЯ

1. Отделения Внешэкономбанка СССР и банки, упомянутые в п. III, 1в, по поступлении в их адрес перевода из ВААП вызывают автора в учреждение банка и оформляют открытие счета типа «В» в его присутствии.

Номер открытого счета типа «В» автор должен сообщить в ВААП.

2. Переводные экземпляры журналов направляются иностранными издательствами в редакции советских журналов.

3. Иностранным издателю предоставлено право не перепечатывать до 15% материалов, помещенных в советском журнале.

Образец не заполнять!

БАНКУ ВНЕШНЕЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СССР

От автора ВААП

(фамилия, имя, отчество)

(место работы: наименование

и адрес организации)

США

(страна перепечатки)

доллары США

(валюта взноса)

#### ЗАЯВЛЕНИЕ

Прошу открыть мне текущий счет типа «В» во Внешэкономбанке СССР, г Москва. Платежи с текущего счета прошу производить на основании письменных распоряжений, подписанных мною (моим доверенным лицом).

Образец моей подписи

Правила Внешэкономбанка СССР по текущим счетам типа «В» мне известны, и я считаю их для себя обязательными.

Мой адрес

Об изменении адреса буду ставить банк в известность в письменной форме.

<\_\_> 19 \_\_ г.

(подпись владельца счета)

Собственноручную подпись тов. \_\_\_\_\_ удостоверяю.

(подпись должностного лица, заверяющего подпись)

М. П.

Фамилия, и. о. лица,  
заверяющего подпись автора

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 533.951

### О ВЛИЯНИИ ИСКУССТВЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ ВИСТЛЕРОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Т. М. Заборонкова, А. В. Кудрин

Исследование вопросов возбуждения и распространения вистлеров в замагниченных плазменных волноводах представляет интерес в связи с проблемой волноводного распространения свистовых мод в магнитосферных дактах, ориентированных вдоль силовых линий магнитного поля, а также в связи с экспериментами по активному воздействию на ионосферу.

В работах [1-4] в рамках ВКБ-приближения было рассмотрено волноводное распространение вистлеров в плавно неоднородной плазме с повышенной концентрацией при наличии постоянного магнитного поля, направленного перпендикулярно градиенту плотности плазмы, в частности, были оценены потери энергии волны из канала, обусловленные трансформацией вистлеров в мелкомасштабные плазменные волны.

В настоящей работе изучается обратный предельный случай, позволяющий оценить влияние резкого изменения концентрации плазмы, а именно: рассматривается задача о распространении и возбуждении вистлеров в цилиндрическом плазменном волноводе с резкими границами, окруженном фоновой плазмой с меньшей электронной концентрацией. Показано, что в таком волноводе могут существовать слабозатухающие собственные моды, с помощью которых возможна эффективная передача энергии вистлеров на достаточно большие расстояния; определены сопротивления излучения рамочной антенны в эти моды.

Рассмотрим однородный цилиндрический плазменный столб радиусом  $a$ , ориентированный вдоль внешнего магнитного поля и граничащий с плазмой меньшей плотности, внутри которого помещена тонкая рамка с заданным током

$$j^e = I_0 \delta(r-a) \delta(z) \exp(i\omega t) \varphi^0. \quad (1)$$

В интересующем нас свистовом диапазоне частот  $\omega$

$$\omega_L \ll \omega \ll \omega_H \ll \omega_p < \tilde{\omega}_p \quad (2)$$

( $\omega_L$  — нижняя гибридная частота,  $\omega_H$  — гирочастота электронов,  $\omega_p$  и  $\tilde{\omega}_p$  — значения плазменной частоты электронов вне и внутри волновода соответственно) тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы при  $r>a$  записывается в виде

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = v/u$ ,  $g = -v/\sqrt{u}$ ,  $\eta = -v$ ,  $v = \omega_p^2/\omega^2$ ,  $u = \omega_H^2/\omega^2$  (при  $r<a$   $v$  необходимо заменить на  $\tilde{v} = (\omega_p/\omega)^2$ ).

Полное поле, возбуждаемое током (1), может быть представлено в виде суперпозиции полей собственных мод, направляемых поверхностью цилиндра. Компоненты поля отдельной аксиально-симметричной моды при  $r>a$  можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi \pm m} &= iF_m(r) \\ E_{r \pm m} &= \varepsilon^{-1}[\Phi_m(r) - gF_m(r)] \\ E_{z \pm m} &= \mp i \frac{c}{\omega h_m \eta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Phi_m(r)) \end{aligned} \right\} \exp(\mp ih_m k_0 z + i\omega t), \quad (4)$$

$$H = ik_0^{-1} \operatorname{rot} E, \quad k_0 = \omega/c$$

где  $F = A_1 K_1(k_0 s_1 r) + A_2 H_1^{(2)}(k_0 s_2 r)$ ,  $\Phi = -h[N_1 A_1 K_1(k_0 s_1 r) + N_2 A_2 H_1^{(2)}(k_0 s_2 r)]$ ,  $N_{1,2} = (h \mp \sqrt{h^2 - 4v/u}) \sqrt{u}/2$ ,  $s_{1,2}^2 = (hu/2) \sqrt{h^2 - 4v/u \mp h^2(u/2 - 1) - v}$ . При  $r < a$  в формулах (3) заменяется:  $\omega_p \rightarrow \tilde{\omega}_p$ ,  $F \rightarrow \tilde{F}$ ,  $\Phi \rightarrow \tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{F} = \sum_{i=1}^2 B_i J_1(k_0 q_i r)$ ,  $\tilde{\Phi} = -h \sum_{i=1}^2 N_i B_i J_1(k_0 q_i r)$ .  $\tilde{N}_{1,2} = (h \mp \sqrt{h^2 - 4v/u}) \sqrt{u}/2$ ,  $q_{1,2}^2 = \mp(hu/2) \sqrt{h^2 - 4v/u + h^2(u/2 - 1) - v}$ . Здесь  $J_n(\xi)$ ,  $K_n(\xi)$ ,  $H_n^{(2)}(\xi)$  — функции Бесселя, Макдональда и Ханкеля соответственно.

Постоянные распространения  $h_m = h_{rm} - ih_{im}$  собственных мод можно определить из дисперсионного уравнения, справедливого для цилиндрических каналов как с повышенной, так и с пониженной плотностью электронов относительно фоновой плазмы:

$$J(q_2 p_0) \left[ \frac{v}{v} J(q_1 p_0) + C_1 K \right] - C_2 J(q_1 p_0) K + H[C_3 J(q_2 p_0) - K - C_4 J(q_1 p_0)] = 0, \quad (5)$$

где

$$J(q_{1,2} p_0) = \frac{J_1(q_{1,2} p_0)}{q_{1,2} p_0 J_0(q_{1,2} p_0)}, \quad K = \frac{K_1(s_1 p_0)}{s_1 p_0 K_0(s_1 p_0)}, \quad H = \frac{H_1^{(2)}(s_2 p_0)}{s_2 p_0 H_1^{(2)}(s_2 p_0)},$$

$$C_1 = (\tilde{N}_2 - N_1)(N_2 \tilde{v}/v - \tilde{N}_1) \Delta^{-1}, \quad C_2 = (\tilde{N}_1 - N_1)(N_2 \tilde{v}/v - \tilde{N}_2) \Delta^{-1},$$

$$C_3 = (\tilde{N}_2 - N_2)(N_1 \tilde{v}/v - \tilde{N}_1) \Delta^{-1}, \quad C_4 = (\tilde{N}_1 - N_2)(N_1 \tilde{v}/v - \tilde{N}_2) \Delta^{-1},$$

$$\Delta = (N_1 - N_2)(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2), \quad p_0 = k_0 \alpha.$$

Положив в коэффициентах  $C_i$  (во вторых круглых скобках) уравнения (5) множитель  $v/v$  равным единице, можно получить уравнение (17) работы [9], в которой рассматривался случай  $\omega_L \ll \omega < \omega_H$ ,  $v/v \sim 1$ , реализующийся в магнитосфере в естественных условиях. В нашей работе исследуется случай искусственных ионосферных неоднородностей (аналогичных наблюдавшимся в [5]), для которых  $v/v \gg 1$ , что существенно оказывается на результатах решения дисперсионного уравнения.

Уравнение (5) в общем виде является довольно сложным даже для численного исследования. Однако в некоторых предельных случаях существование слабозатухающих собственных мод вистлера может быть доказано аналитически. Рассмотрим область значений параметров  $h_r^2 u \gg v$ ,  $v/v \gg 1$ ,  $k_0 a h_r \gg 1$ , соответствующую существенному различию характерных поперечных масштабов захватываемых в канал вистлеров и «высвечивающихся» из волновода плазменных волн. Тогда уравнение (5) преобразуется к следующему виду:

$$J(q_1 p_0) + K = \left\{ \frac{v}{v} H \left[ \left( \frac{\tilde{v}}{h^2 u} \right)^3 J(q_2 p_0) - (J(q_1 p_0) + K) \right] + \frac{\tilde{v}}{h^2 u} J(q_1 p_0) K \right\} J^{-1}(q_2 p_0), \quad (6)$$

где  $q_1^2 = \tilde{v}^2/h^2 u - h^2$ ,  $q_2^2 = h^2 u - 2\tilde{v}$ ,  $s_1^2 = h^2 - v^2/h^2 u$ ,  $S_2^2 = h^2 u - 2v$ ,  $a v/\tilde{v}$  и  $\tilde{v}/h^2 u$  — малые параметры. Решение уравнения (6) может быть получено методом возмущений:

$$h_m = \left( \frac{\tilde{v}}{\sqrt{u}} \right)^{1/2} - \left( \frac{v_m^{(1)}}{k_0 a} \right)^2 \frac{\sqrt{u}}{4 \sqrt{\frac{\tilde{v}}{v}}} - \frac{i}{2v} \frac{v}{\tilde{v}} \frac{v_m^{(1)2}}{(k_0 a)^3 u^{3/2}}, \quad p_0 |q_2| \neq v_m^{(1)}, \quad (7)$$

где  $v_m^{(n)}$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $J_n(\xi)$ ,  $h_0 = \sqrt{\tilde{v}/u^{1/2}}$  — постоянная строго продольного распространения вистлера в однородной плазме с концентрацией  $N_e = m \rho_p^3 / 4\pi e^2$ . Из формулы (7) нетрудно оценить, что высвечивание мод вистлера из канала произойдет на расстоянии

$$L_m = 2 \frac{\tilde{v}}{v} \frac{(k_0 a)^3 u^{3/2}}{k_0 v_m^{(1)2}} \gg \lambda_m = \frac{2\pi}{k_0 h_m}. \quad (8)$$

Дополнительный численный анализ показывает, что слабозатухающие моды в канале могут существовать и при условии  $k_0 a h_m \sim 1$ .

Заметим, что от рассмотренного выше случая цилиндрического волновода можно осуществить переход к плоскому слою толщиной  $2a$  с помощью замены:  $v_m^{(1)} \rightarrow \pi a$ ,  $J(q_1 p_0) \rightarrow \operatorname{tg}(q_1 p_0)/q_1 p_0$ ,  $K \rightarrow 1/s_1 p_0$ ,  $H \rightarrow i/s_2 p_0$ . Дисперсионное уравнение (5) за-

писывается при этом через тригонометрические функции и допускает сравнительно простое численное решение.

Мощность, излучаемая в  $m$ -ю моду вистлера тонкой рамочной антенной с током (1), может быть рассчитана стандартным методом теории возбуждения диэлектрических волноводов и определяется выражением

$$W_m^e = (I_0^e)^2 \frac{4\pi^2(b/a)^2}{ch_{rm}(1 + \tilde{v}^2/h_{rm}^4 u)} \frac{J_1^2(\gamma_m^{(1)} b/a)}{J_0^2(\gamma_m^{(1)})}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что мощность  $W_m^e$  существенно зависит от соотношения размеров источника  $b$  и цилиндра  $a$ . Для основной моды ( $m=1$ )  $W_1^e$  достигает максимального значения при радиусе антенны  $b=b_{opt} \approx av_1^{(0)}/\gamma_1^{(1)}$ , что соответствует размещению антенны вблизи максимума азимутальной составляющей электрического поля.

Сравним мощность  $W_1^e$  при  $b=b_{opt}$  с мощностью  $W_\Phi^e$ , излучаемой тем же источником в вистлеры фоновой однородной плазмы. Соответствующее выражение для  $W_\Phi^e$  в интересующем нас диапазоне частот и при довольно естественном ограничении  $k_0 b |g|^{1/2} \ll 1$  можно получить, воспользовавшись общей формулой [4]  $W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int J^* E dV$ , где интегрирование проводится по области, занятой сторонними токами. В результате имеем

$$W_\Phi^e \approx (I_0^e)^2 \frac{\pi^2(k_0 b)^4}{12c} |g|^{3/2}. \quad (10)$$

Сравнение выражений (9) и (10) дает

$$\frac{W_1^e}{W_\Phi^e} \approx 24 \left[ \frac{\gamma_1^{(0)} J_1(\gamma_1^{(0)})}{\gamma_1^{(1)} J_0(\gamma_1^{(1)})} \right]^2 \left( \frac{v}{\tilde{v}} \right)^{1/2} (k_0 b |g|^{1/2})^{-4}. \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что сопротивление излучения рамочных антенн малых электрических размеров заметно увеличивается в присутствии вытянутой  $\sim$  магнитного поля плазменной неоднородности повышенной концентрации, если  $v/\tilde{v} \gg 1$ .

Таким образом, в плазменных волноводах повышенной концентрации может осуществляться эффективная передача энергии волн в свистовом диапазоне частот.

Авторы благодарят Кондратьева И. Г., Маркова Г. А. и Миронова В. А. за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В. И., Каuffman Р. Н. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 5. С. 1845; Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. № 5. С. 266.
2. Кагртап V. I., Kaufman R. N. // J. Plasma Physics. 1982. V. 27. Pt. 2. P. 225.
3. Каuffman Р. Н., Рябова Н. А. // Сб.: Исследование структуры и волновых свойств околоземной плазмы. — М.: ИЗМИРАН, 1980. С. 97.
4. Беллюстин Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 1. С. 22.
5. Авдушин С. А., Агафонов Ю. Н., Дудоладов Ю. П. и др. // Высоко-частотный разряд в волновых полях. — Горький: ИПФ АН СССР, 1987. С. 83.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
6 июня 1988 г.

УДК 621.373.42

## О ВЗАЙМОНОДАЧЕ СИНХРОНИЗАЦИИ АНСАМБЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗНЕСЕННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ПО ТИПУ «КАЖДЫЙ С КАЖДЫМ»

A. A. Дворников, B. I. Огурцов

Необходимость обеспечения синхронной работы пространственно разнесенных автогенераторов в радиотехнической практике возникает достаточно часто. Это относится к фазированным антенным решеткам, системам сложения мощностей, к сетям цифровой связи и единого времени, к спутниковым навигационным системам и т. д.

[<sup>1-3</sup>]. Синхронность колебаний автогенераторов достигается введением связей между ними. Во многих случаях нужна не только синхронность колебаний автогенераторов системы, но и поддержание заданного фазового соотношения между их колебаниями. С этой точки зрения важно знать, какие синхронные режимы возможны в ансамбле взаимосвязанных автогенераторов, при каких условиях эти режимы устойчивы. Для ансамблей с произвольными связями можно получить лишь оценочные результаты. Конкретизация же структуры связей дает возможность получить более детальную информацию о режимах ансамбля. Одной из структур связей, которая привлекает к себе внимание радиоисследователей, является структура связей типа «каждый с каждым». Ниже применительно к ней для ансамбля из  $n$  почти одинаковых одноконтурных автогенераторов, взаимосвязанных через одинаковые нерезонансные линейные каналы связи с запаздыванием, определяются возможные стационарные режимы, условиях их локальной устойчивости и модовой селекции, дается оценка полосы синхронизации. В известной литературе эти вопросы рассмотрены лишь для ансамбля двух автогенераторов при условии, что запаздывание в канале связи между ними мало [<sup>4</sup>].

Аналогично [<sup>3</sup>], полагая, что колебание  $k$ -го автогенератора ансамбля можно представить в виде

$$u_k = \operatorname{Re}[U_k(t) \exp j[\omega_0 t + \psi_k(t)]],$$

где  $U_k$  и  $\psi_k$  — медленно меняющиеся амплитуда и фаза,  $\omega_0$  — частота синхронных колебаний ансамбля, получаем для исследуемой системы следующие укороченные уравнения:

$$2C \left( \frac{dU_k}{dt} \right) = [S_a(U_k) - G]U_k - \sum_{j \neq k}^n dU_{j*} \cos(\varphi_* - \Delta_{kj*}); \quad (1)$$

$$2C \left( \frac{d\psi_k}{dt} \right) = S_p(U_k) - 2C(\omega_0 - \omega_k) - \sum_{j \neq k}^n d \left( \frac{U_{j*}}{U_k} \right) \sin(\varphi_* - \Delta_{kj*}), \quad (2)$$

где  $S_a$  и  $S_p$  — активная и реактивная составляющие крутизны тока активного элемента автогенератора по первой гармонике,  $\omega_k$ ,  $C$  и  $G$  — собственная частота, емкость и проводимость потерь резонатора  $k$ -го автогенератора,  $d$  и  $\varphi_* = \varphi - \omega_0 t$  — модуль и фаза взаимной проводимости между  $k$ -м и  $j$ -м автогенераторами на частоте  $\omega_0$  с учетом запаздывания  $\tau$  в канале связи,  $\varphi$  — фаза взаимной проводимости между  $k$ -м и  $j$ -м автогенераторами без учета запаздывания в канале связи,  $\psi_{j*}(t) = \psi_j(t - \tau)$ ,  $U_{j*}(t) = U_j(t - \tau)$ ,  $\Delta_{kj*} = \psi_k - \psi_{j*}$ .

При выводе системы уравнений (1), (2) предполагалось, что полоса возможных автоколебаний ансамбля, а также разность между собственными частотами автогенераторов по порядку не превышает полосу пропускания их резонаторов. Кроме того, считалось, что в каналах задержанной взаимной связи нет переотражений сигналов.

Будем далее рассматривать равнамплирудные стационарные режимы,  $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$ . Тогда для нерасстроенных по частоте относительно друг друга автогенераторов из (1), (2) аналогично [<sup>3</sup>] получаем, что в ансамбле возможны либо синфазные стационарные режимы  $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n$  (т. е.  $\Delta_{kj} = 0$ ), либо несинфазные, для которых справедливо  $\sum_{k=1}^n \exp j\psi_k = 0$ . При этом для синфазных режимов стационарные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} S_a(U) &= G + (n-1)d \cos \varphi_*, \\ 2C[\omega_0 - \omega_k - 0.5S_p(U)/C] &= -(n-1)d \sin \varphi_*, \end{aligned} \quad (3)$$

а для несинфазных режимов

$$S_a(U) = G - d \cos \varphi_*, \quad (4)$$

$$2C[\omega_0 - \omega_k - 0.5S_p(U)/C] = d \sin \varphi_*.$$

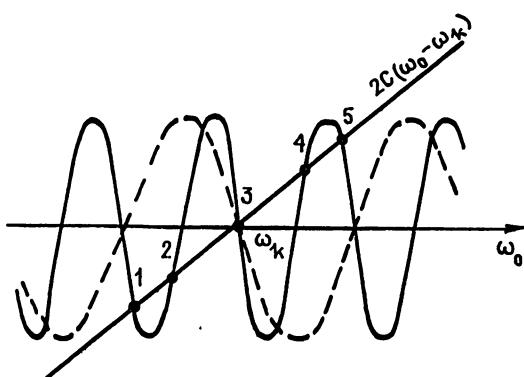


Рис. 1.

Сравнивая уравнения (3), (4) с аналогичными, но не учитывающими запаздывание в каналах связи [3], получаем, что запаздывание приводит к увеличению числа возможных стационарных режимов, а, следовательно, и к увеличению числа частот стационарных колебаний. Это видно из рис. 1, на котором изображен пример графического решения второго уравнения (3) относительно частоты стационарных колебаний  $\omega_0$  для случая  $\Phi = \pi$ ,  $t\omega_0 = 2\pi m$ , где  $m$  — целое число, и двух значений  $\tau$  (пунктирная кривая соответствует меньшему значению  $\tau$ ). При этом считалось, что автогенераторы изохронны  $S_p(U) = \text{const}$ .

Получение дальнейших результатов в обозримой форме для неизохронных автогенераторов возможно лишь при слабой связи между автогенераторами ансамбля,  $d \ll G$ . Тогда, используя подход, предложенный в [5], амплитуду колебаний  $k$ -го автогенератора можно искать в виде

$$U_k = U_0 + \tilde{U}_k, \quad (5)$$

где  $S_a(U_0) = G$ ,  $\tilde{U}_k/U_0 = \varepsilon \ll 1$ , а для фаз  $\varphi_k$  колебаний ансамбля получить из (1), (2), (5) с точностью порядка  $\varepsilon$  следующую систему уравнений:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega'_k - \omega_0 - 0.5 \left( \frac{d}{C} \right) H \sum_{j \neq k}^n \sin(\varphi_* - \xi - \Delta_{kj*}), \quad (6)$$

где

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad H = \sqrt{1 + (\sigma_p/\sigma_a)^2}, \quad \sigma_{(a)} = U_0 [dS_{(a)}(U)/dU] \Big|_{U=U_0},$$

$$\xi = \text{Arg}(\sigma_a + j\sigma_p), \quad \omega'_k = \omega_k - 0.5S_p(U_0)/C.$$

Графическое решение стационарного уравнения (6) относительно частоты  $\omega_0$  во многом аналогично решению, представленному на рис. 1. Из (6) следует, что достаточным условием одиночности режима (синфазного или несинфазного) является неравенство

$$\tau < \tau_{kp}, \quad (7)$$

где  $\tau_{kp} = 2C/[d(n-1)]$  для синфазного и  $\tau_{kp} = 2C/d$  для несинфазного режима. Случаю выполнения условия (7) на рис. 1 соответствует пунктирная кривая.

Рассмотрим, используя (6), локальную устойчивость стационарных режимов. При этом аналогично [5] полагаем, что условие устойчивости стационарного автономного режима любого автогенератора ансамбля  $\sigma_a < 0$  выполняется. Из (6) для синфазных и несинфазных равноамплитудных режимов имеем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} p - A & A_{12} \exp(-p\tau) & \dots & A_{1n} \exp(-p\tau) \\ A_{21} \exp(-p\tau) & p - A & \dots & A_{2n} \exp(-p\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} \exp(-p\tau) & A_{n2} \exp(-p\tau) & \dots & p - A \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где

$$A = \begin{cases} (n-1)D \cos(\varphi_* - \xi) & \text{синфазный режим} \\ -D \cos(\varphi_* - \xi) & \text{несинфазный режим} \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} -D \cos(\varphi_* - \xi) & \text{синфазный режим} \\ -D \cos(\varphi_* - \xi - \Delta_{ij}) & \text{несинфазный режим} \end{cases}$$

$D = 0.5 dH/C$ ,  $p$  — корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение (8) для синфазных режимов преобразуется к виду

$$[p - a - a \exp(-p\tau)][p - a + b \exp(-p\tau)]^{n-1} = 0, \quad (9)$$

где  $a = 0.5(n-1)(d/C) \cos(\varphi_* - \xi)$ ,  $b = a/(n-1)$ . Используя результаты [6] анализа корней квазиполиномов вида (9), получаем, что условием асимптотической устойчивости синфазного режима является

$$\cos(\varphi - \omega_0 \tau - \xi) < 0. \quad (10)$$

Из (10) следует, что в зависимости от величины  $\omega_0 \tau$  синфазный стационарный режим может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Так, например, для случая, представленного на рис. 1, стационарные режимы, которым соответствуют точки 1, 3, 5, будут устойчивыми, а режимы, которым соответствуют точки 2, 4, — неустойчивыми.

Для несинфазных режимов характеристическое уравнение (8) удается упростить до следующего вида:

$$[p + a_1 + a_1 \exp(-p\tau)] M(p) = 0, \quad (11)$$

где  $a_1 = 0.5(d/C) \cos(\varphi_* - \xi)$ ,  $M(p)$  — квазиполином,

Из анализа корней первого сомножителя (11) получаем достаточное условие, при выполнении которого несинфазные режимы неустойчивы. Это условие имеет вид (10). Следовательно, выполнение условия (10) обеспечивает существование в системе лишь синфазных равнамплитудных режимов. Если дополнительно выполняется неравенство (5), то в системе возможен лишь один синфазный режим. Таким образом, одновременное выполнение условий (5), (10) обеспечивает селекцию одночастотного синфазного равнамплитудного режима. Применительно к такому режиму оценим полосу синхронизма ансамбля.

Для этого рассмотрим вначале случай  $n=2$ . Тогда для вариаций собственных частот  $\delta\omega_1 = -\delta\omega_2$  получаем из (6) полосу синхронизма ансамбля  $\Pi_1 = 2Hd/C$ . Для нахождения полосы синхронизма  $\Pi_2$  при вариациях  $\delta\omega_1 = \delta\omega_2$  необходимо учесть условие одночастотности режима (7), из которого следует, что  $\Pi_2 > 1,6 Hd/C$ . Сравнивая  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , в качестве оценки полосы синхронизма ансамбля двух автогенераторов возьмем  $\Pi = 1,6 Hd/C$ . Для случая  $n > 2$  линеаризуем систему (7) вблизи точки синфазного режима  $\Delta_k = 0$ . В результате получаем

$$\omega_m - \omega_k = \Delta_{km} ndH \cos(\phi - \omega_0 t - \xi). \quad (12)$$

Задавая вариации собственных частот, такие, что  $\sum_{i=1}^n \delta\omega_i = 0$ , и считая, что максимальные значения  $\Delta_{km}$  для случаев  $n > 2$  и  $n = 2$  равны, получаем из (12), что соответствующая полоса синхронизма приближенно равна  $\Pi_3 = nHd/C$ . Для вариаций собственных частот  $\delta\omega_1 = \delta\omega_2 = \dots = \delta\omega_n$  полоса синхронизма системы  $\Pi_4$  с учетом (7) удовлетворяет неравенству  $\Pi_4 > 1,6 Hd/C$ . Поэтому в качестве оценки полосы синхронизма ансамбля  $n$  автогенераторов возьмем  $\Pi = 1,6 Hd/C$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- Линдсей У. С., Гхазвинян Ф., Хагман В. К., Дессуки Х. // ТИИЭР. 1985. Т. 73. № 10. С. 6.
- Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы / Под ред. Д. С. Чернавского. — М.: Наука, 1987. — С. 240.
- Дворников А. А., Уткин Г. М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств. — М.: Энергия, 1980. — 176 с.
- Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
- Хохлов Р. В. // ДАН СССР. 1954. Т. 47. № 3. С. 411.
- Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

Московский энергетический  
институт

Поступила в редакцию  
25 августа 1988 г.

УДК 621.391.822.3:537.533.2

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ФУНКЦИЕЙ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

О. Л. Сироткин

Как известно [1-3], один из возможных механизмов возникновения шума  $1/\omega$  состоит в том, что исследуемая система должна иметь память о прошлых событиях. Возникает вопрос, все ли процессы с последействием приводят к фликкерному эффекту или среди них есть исключения. Дать ответ, очевидно, можно после изучения более широкого, чем в работах [1-3], класса процессов с памятью.

Рассмотрим модель Вольтерра, в которой последействие имеет ограниченную продолжительность  $T_0$  [4] и динамика плотности популяции  $x(t)$  описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)(r - ax(t) - \int_{t-T_0}^t f(t-s)x(s)ds) \\ &\text{или} \\ \dot{x}(t) &= x(t)(r - ax(t) - \int_0^{T_0} f(s)x(t-s)ds), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r$  — коэффициент роста,  $a$  — параметр, учитывающий влияние лимитирующих факторов,  $f$  — наследственная функция, определяющая степень влияния предыстории на динамику популяции,  $f(s)=0$  при  $s > T_0$ .

Отметим, что следующее из (1) как частный случай уравнение Ферхюльста встре-

чается при исследовании хаоса в диссипативных системах, которые могут иметь самую разнообразную природу [5]. В данном сообщении природа уравнения (1) не конкретизируется, а рассматривается только принципиальная возможность «генерирования» им шума  $1/\omega$ .

Будем считать, что влияние флюктуирующей среды на макроскопические свойства нашей системы проявляется через параметр  $r$ , который становится стационарным случайным процессом. Вообще говоря, для такого представления  $r(t)$  требуется выполнение некоторых условий [6]. Как правило, в прикладных задачах они выполняются.

Разложим  $r(t)$  на две части  $r+\varepsilon(t)$ , где  $r$  соответствует среднему состоянию среды,  $\varepsilon(t)$  — флюктуации относительно  $r$ , и рассмотрим отклонение от стационарного значения  $y(t) = x(t) - x_{ct}$ . Подставляя эти значения  $r(t)$  и  $y(t)$  в (1), получим уравнение

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \bar{r}(y(t) + x_{ct}) + \varepsilon(t)(y(t) + x_{ct}) - a(y(t) + x_{ct})^2 - \\ &- y(t) \int_0^{T_0} (y(t-s) + x_{ct}) f(s) ds - x_{ct} \int_0^{T_0} (y(t-s) + x_{ct}) f(s) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

которое затем линеаризуем в предположении малых флюктуаций:

$$\dot{y}(t) = -Py(t) + Q + x_{ct}\varepsilon(t) - x_{ct} \int_0^{T_0} y(t-s) f(s) ds. \quad (3)$$

Здесь

$$P = x_{ct} \int_0^{T_0} f(s) ds + 2ax_{ct} - \bar{r}, \quad Q = x_{ct}(\bar{r} - ax_{ct} + x_{ct} \int_0^{T_0} f(s) ds).$$

Величину  $x_{ct}$  определим из условия  $Q=0$ :

$$x_{ct} = \bar{r} \left( a + \int_0^{T_0} f(s) ds \right)^{-1}. \quad (4)$$

Найдем из (4) значение  $\bar{r}$  и подставим его в (3):

$$y(t) + ax_{ct}y(t) = x_{ct}\varepsilon(t) - x_{ct} \int_0^{T_0} y(t-s) f(s) ds. \quad (5)$$

Следуя методике, применяемой при исследовании броуновского движения [7], и используя теорему запаздывания, из (5) получаем компоненту Фурье  $y_\omega$ :

$$y_\omega = \frac{x_{ct}\varepsilon_\omega}{ax_{ct} + j\omega + x_{ct} \int_0^{T_0} f(s) \cos \omega s ds - jx_{ct} \int_0^{T_0} f(s) \sin \omega s ds}. \quad (6)$$

Здесь принято  $y(0) = 0$ ,  $y(t-s) = 0$  при  $s>t$ .

Спектральная плотность  $S_y(\omega)$  в стационарном режиме связана с  $y_\omega$  соотношением

$$\overline{y_\omega y_\omega'} = 2\pi S_y(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (7)$$

С учетом (6) и (7) находим

$$S_y(\omega) = \frac{x_{ct}^2 S_\xi(\omega)}{\left( x_{ct} \int_0^{T_0} f(s) \sin \omega s ds - \omega \right)^2 + \left( ax_{ct} + x_{ct} \int_0^{T_0} f(s) \cos \omega s ds \right)^2}. \quad (8)$$

Для дальнейшего вычисления  $S_y(\omega)$  необходимо определить функцию  $f(t)$ . Здесь, во-первых, должен существовать интеграл  $\int_0^{T_0} f(s) ds$  из (4) и, во-вторых, послед-

действие должно быть тем слабее, чем оно более отдалено в прошлое, т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ . В [8] предлагается, напри- мер,  $f = \varphi(t) t^{-(1+\varepsilon)}$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $|\psi|$  ограничено. Рассмотрим  $f(t) = f_0(t+\tau_0)^{-\nu}$  с  $0 < \nu < 1$ ,  $\tau > 0$ . Функциями такого вида моделируются импульсы с медленно спадающими «хвостами», которые могут описывать «умирание» активных центров на поверхности катода электронной лампы [9]. В данном случае роль такого «хвоста» играет затухающее во времени последействие. Определив таким образом  $f(t)$ , получаем



Рис. 1.

$$x_{ct} = \frac{\bar{r}(1-v)}{a(1-v) + f_0(T_0 + \tau_0)^{1-v} - f_0 \tau_0^{1-v}}, \quad (9)$$

$$J_1 = \int_0^{T_0} f(s) \cos \omega s ds = f_0 \omega^{v-1} \cos \omega \tau_0 \int_{\omega \tau_0}^{\omega(T_0 + \tau_0)} x^{-v} \cos x dx + f_0 \omega^{v-1} \sin \omega \tau_0 \int_{\omega \tau_0}^{\omega(T_0 + \tau_0)} x^{-v} \sin x dx,$$

$$J_2 = \int_0^{T_0} f(s) \sin \omega s ds = f_0 \omega^{v-1} \cos \omega \tau_0 \int_{\omega \tau_0}^{\omega(T_0 + \tau_0)} x^{-v} \sin x dx + f_0 \omega^{v-1} \sin \omega \tau_0 \int_{\omega \tau_0}^{\omega(T_0 + \tau_0)} x^{-v} \cos x dx.$$

Входящие в  $J_1$  и  $J_2$  интегралы вычисляются приближенно при  $\omega \tau_0 \ll 1$  и  $\omega(T_0 + \tau_0) \gg 1$  по методике [9]. Например,

$$\int_{\omega \tau_0}^{\omega(T_0 + \tau_0)} x^{-v} \cos x dx = \int_0^{\omega(T_0 + \tau_0)} \frac{\cos x}{x^v} dx - \int_0^{\omega \tau_0} \frac{\cos x}{x^v} dx \approx \Gamma(1-v) \cos \frac{\pi(1-v)}{2} - \frac{(\omega \tau_0)^{1-v}}{1-v}.$$

Таким образом,

$$J_1 \approx \frac{f_0 \Gamma(1-v) \cos \theta}{\omega^{1-v}} - \frac{f_0 (\omega \tau_0)^{1-v}}{(1-v) \omega^{1-v}} + \frac{f_0 (\omega \tau_0) \Gamma(1-v) \sin \theta}{\omega^{1-v}} - \frac{f_0 (\omega \tau_0)^{3-v}}{(2-v) \omega^{1-v}} \approx \\ \approx \omega^{v-1} f_0 \Gamma(1-v) \cos \theta,$$

где  $2\theta = \pi(1-v)$  и принято  $\cos \omega \tau_0 \approx 1$ ,  $\sin \omega \tau_0 \approx \omega \tau_0$ . Аналогично вычисляется  $J_2$ :

$$J_2 \approx \omega^{v-1} f_0 \Gamma(1-v) \sin \theta.$$

Подставляя полученные значения  $J_1$ ,  $J_2$  в (8), получаем

$$S_y(\omega) \approx \frac{x_{ct}^2 \omega^{2(1-v)} S_e(\omega)}{(x_{ct} f_0 \Gamma(1-v) \sin \theta - \omega^{2-v})^2 + (f_0 \Gamma(1-v) \cos \theta + a \omega^{1-v})^2}. \quad (10)$$

При больших значениях  $x_{ct}$ , т. е. когда действие лимитирующих факторов мало скаживается на динамике процесса, приближенно можно считать

$$x_{ct} f_0 \Gamma(1-v) \sin \theta \gg \omega^{2-v}, \quad f_0 \Gamma(1-v) \cos \theta \gg a \omega^{1-v},$$

что приводит к

$$S_y(\omega) \approx \frac{\omega^{2(1-v)}}{f_0^2 \Gamma^2(1-v)} S_e(\omega). \quad (11)$$

Интересующее нас значение  $S_y(\omega) \sim \omega^{-2v}$  получается из (11), если  $e(t)$  моделируется процессом Орнштейна с  $S_e(\omega) \sim \omega^{-2}$ .

Интегродифференциальные уравнения типа (1) встречаются в различных разделах математической физики [4]. Например, электрическая или магнитная поляризации могут зависеть не только от электромагнитного поля в данный момент времени, но и от истории этого поля во все предыдущие моменты (гистерезис). Другим примером служит явление упругости, когда кручение струны зависит от предыдущих деформаций.

## ЛИТЕРАТУРА

- Бонч-Бруевич В. Л. — ФТТ. 1965. Т. 7. № 7. С. 2147.
- Кешнер М. С. — ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 2. С. 60.
- Вайнштейн Л. А., Рождественский В. В. — ЖЭТФ. 1984. Т. 87. № 6 (12). С. 2142.
- Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. С. 30.
- Yamada T., Fujisaka H. // Prog. Theor. Phys. 1986. 76. № 3. С. 582.
- Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. — М.: Мир. 1987. С. 166.
- Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. — М.: Наука, 1982. С. 218.
- Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. С. 162.
- Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968. С. 119.

Поступила в редакцию  
6 июня 1988 г.

# ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВА СВЕТОВОГО ПУЧКА НА АКУСТИЧЕСКОМ ИМПУЛЬСЕ

*E. A. Никанорова, В. Н. Парыгин*

Вопрос о дифракции световой волны на акустическом импульсе является весьма актуальным, поскольку в акустооптических модуляторах и системах считывания изображений применяется схема акустооптического взаимодействия, в которой ультразвуковая волна представляет собой короткий бегущий импульс [1, 2]. В большинстве работ теоретическое исследование такого взаимодействия ограничивается случаем малой эффективности дифракции (например, [2]). Авторы работы [3] выразили дифрагированное световое поле через гипергеометрические функции для случая сильного акустооптического взаимодействия. Однако полученные выражения имеют сложный для анализа вид.

Данная работа посвящена исследованию брэгговской дифракции гауссова светового пучка на акустическом импульсе с гауссовой огибающей. Задача решена методами фурье-оптики. Область акустооптического взаимодействия ограничена параллельными плоскостями  $x=0$  и  $x=l$ . Используются полученные в работе [4] выражения для спектральных компонент светового поля на выходе из области взаимодействия  $U(l, k_y, \omega)$ . Рассмотрение проводится в двумерной пространственной области  $(x, y)$ . Решение ищем в виде разложения искомых функций  $U_0$  и  $U_1$  в ряд по степеням малого параметра ( $U_0, U_1$  — амплитуды спектральных компонент светового поля в нуле вом и первом порядках дифракции).

Звуковое поле представляет собой бегущий в направлении оси  $y$  импульс с гауссовой огибающей

$$a(y, t) = \exp[-(\Delta\Omega)^2(t-y/v)^2] \cos(\Omega_0 t - K_0 y), \quad (1)$$

где  $\Omega_0, K_0$  — частота и волновой вектор несущей волны,  $v$  — скорость звука.

С помощью преобразования Фурье получим выражение для спектра акустического поля:

$$A(K, \Omega) = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Delta\Omega} \delta\left(K - \frac{\Omega}{v}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(\Omega - \Omega_0)^2}{4(\Delta\Omega)^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\Omega + \Omega_0)^2}{4(\Delta\Omega)^2}\right] \right\}. \quad (2)$$

На область акустооптического взаимодействия под углом Брэгга к центральной компоненте звукового спектра падает световая волна, распределенная в пространстве по гауссову закону:

$$E(0, y, t) = \exp[i(k_{0y}y - \omega_0 t)] \exp(-\beta^2 y^2), \quad (3)$$

где  $\omega_0, k_{0y}$  — частота и волновой вектор центральной компоненты.

Спектр светового поля в плоскости  $x=0$  является нулевым приближением в решении задачи:

$$U^{(0)}(0, k_y, \omega) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\beta} \delta(\omega - \omega_0) \exp\left[-\frac{(k_{0y} - k_y)^2}{4\beta^2}\right]. \quad (4)$$

Подставляя (2), (4) в выражения, полученные в работе [4] для спектральных компонент светового поля на выходе из области взаимодействия, можно последовательно рассчитать любой член ряда, представляющего собой точное решение задачи. В результате получим ряд функций  $U^{(m)}(l, k_y, \omega)$ , определяющих искомый спектр светового поля:

$$\begin{aligned} U^{(m)}(l, k_y, \omega) &= \frac{4\pi^2(ikl/2)^m}{m!} \left\{ \frac{\exp[-(\omega - \omega_{0m})^2/4m(\Delta\Omega)^2]}{2\Delta\Omega\sqrt{m\pi}} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\beta\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(k_y - k_{0y} - (\omega - \omega_0)/v)^2}{4\beta^2}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega_{0m} = \omega_0$  для нулевого дифракционного максимума ( $m$  — четное) и  $\omega_{0m} = \omega_0 + \Omega_0$  — для первого максимума ( $m$  — нечетное).

Выражение (5) получено для достаточно узких спектров падающего света и звука, таких, что степень фазового рассогласования  $\eta l \ll \pi$  при дифракции любой спектральной составляющей светового поля на любой компоненте звукового спектра.

С помощью преобразования Фурье получаем значение светового поля на выходе из области взаимодействия:

$$E(l, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikl)^m}{m!} \exp\left[-m(\Delta\Omega)^2\left(t - \frac{y}{v}\right)^2\right] \times$$

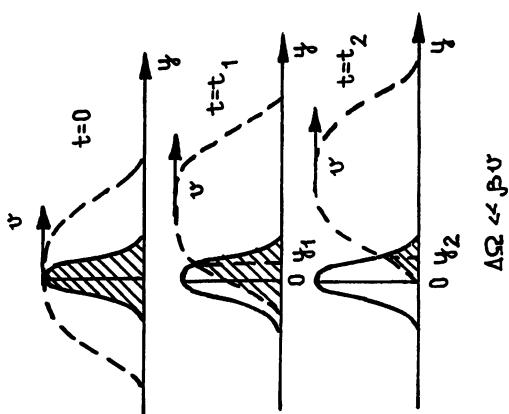


Рис. 3.

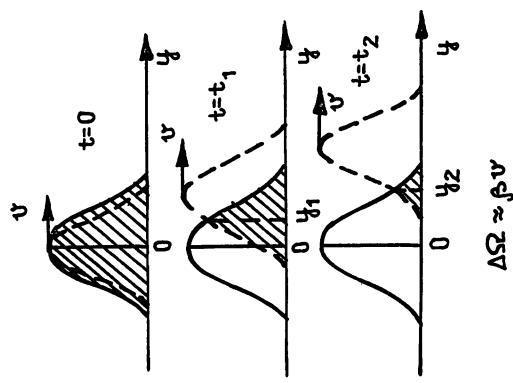


Рис. 2.

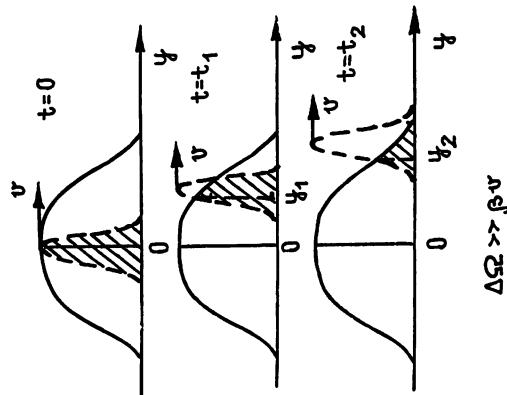


Рис. 1.

$$\times \exp(-\beta^2 y^2) \exp \left[ i \left( k_{0y} + \frac{\omega_{0m} - \omega_0}{v} \right) y - i \omega_0 t \right],$$

где  $q$  — параметр, характеризующий эффективность дифракции [4].

Выражение (6) показывает, что световое поле на выходе из области взаимодействия в случае дифракции гауссова светового пучка отличается от поля в случае дифракции плоской световой волны [4] членом  $\exp(-\beta^2 y^2)$ , характеризующим пространственное распределение падающей световой волны и не зависящим от номера приближения  $m$ . Суммирование ряда (6) позволяет получить следующее выражение:

$$E(l, y, t) = \cos \{ql \exp[-(\Delta\Omega)^2(t-y/v)^2]\} \exp(-\beta^2 y^2) \times \\ \times \exp[i(k_{0y}y - \omega_0 t)] + i \sin \{ql \exp[-(\Delta\Omega)^2(t-y/v)^2]\} \times \\ \times \exp(-\beta^2 y^2) \exp[i(k_{0y} + \Omega_0/v)y - i(\omega_0 + \Omega_0)t]. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что формула (7) в случае  $\Delta\Omega=0$  переходит в известное выражение для дифракции гауссова светового пучка на плоской монохроматической акустической волне [4].

Рассмотрим поведение дифрагированного светового импульса при малой эффективности дифракции  $ql$  для различных соотношений  $\Delta\Omega$  и  $\beta v$ . Поле световой волны в первом дифракционном максимуме имеет вид

$$E_1(l, y, t) = ql \exp[-(\Delta\Omega)^2(t-y/v)^2 - \beta^2 y^2] \times \\ \times \exp[i(k_{0y} + \Omega_0/v)y - i(\omega_0 + \Omega_0)t]. \quad (8)$$

Задача решена при условии, что в начальный момент времени  $t=0$  в точке  $y=0$  выполняется условие фазового синхронизма. При этом наблюдается максимальная интенсивность дифрагированного света. Свет дифрагирует в области пересечения светового и звукового полей, и, следовательно, при движении звукового импульса дифрагированный свет будет перемещаться в направлении оси  $y$ . На рис. 1—3 схематично показано взаимодействие гауссова светового пучка (сплошная кривая) и бегущего акустического импульса (пунктирная кривая) для различных соотношений  $\Delta\Omega$  и  $\beta v$  в разные моменты времени. Область пересечения светового и звукового полей заштрихована. Из рис. 1—3 видно, что положение максимума дифрагированного света определяется координатой  $y_1$  в момент времени  $t=t_1$  и  $y_2$  при  $t=t_2$ . Максимум перемещается в направлении оси  $y$ , однако скорость его распространения отлична от скорости звукового импульса  $v$ .

Соотношение (8) позволяет определить скорость распространения огибающей дифрагированного светового импульса

$$v_d = v \frac{(\Delta\Omega)^2}{(\Delta\Omega)^2 + \beta^2 v^2}. \quad (9)$$

Выражение (9) показывает, что скорости светового и звукового импульсов совпадают лишь в случае дифракции плоской световой волны ( $\beta=0$ ). Если  $\beta \neq 0$ , то скорость светового импульса уменьшается и при  $\beta v \gg \Delta\Omega$  стремится к нулю.

Из соотношения (8) нетрудно определить полуширину дифрагированного светового импульса

$$\Delta y = v / \sqrt{(\Delta\Omega)^2 + \beta^2 v^2}. \quad (10)$$

Согласно (10) дифрагированный световой импульс сужается по сравнению со случаем дифракции плоской световой волны на гауссовом акустическом импульсе или дифракции гауссова светового пучка на монохроматической акустической волне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Магдич Л. Н., Молчанов В. Я. Акустооптические устройства и их применение. — М.: Сов. радио, 1978.
2. Балакши В. И., Парыгин В. Н. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 7. С. 1413.
3. Задорин А. С., Шарангович С. Н. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 8. С. 1732.
4. Никанорова Е. А., Парыгин В. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 5. С. 600.

# АНАЛИЗ ВОЗБУЖДЕНИЯ ИМПЕДАНСНОЙ ВОЛНОВЕДУЩЕЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

С. С. Аркадакский, А. А. Колотырин

Для широкого класса волноведущих систем дисперсионное уравнение, определяющее продольные волновые числа, может иметь кратные корни [1]. Уравнения возбуждения, справедливые при наличии кратных корней, получены для попутных и встречных кратных волн изотропных волноводов в [2, 3], а в более общем случае, включающем возбуждение волноводов с анизотропным заполнением без учета пространственной дисперсии, — в [4].

Наличие кратных волновых чисел в рабочем диапазоне частот волноведущей системы приводит к различным эффектам, связанным с трансформацией типов волн [5]. Поэтому целесообразным представляется подробный анализ возникновения кратных волновых чисел, а также особенностей возбуждения соответствующих типов волн, что и является целью настоящей работы.

**1. Возникновение кратных волновых чисел.** Анализ проведем на примере волноведущей системы, образованной двумя поверхностями: идеально проводящей, расположенной в плоскости  $x=a$ , и импедансной ( $Z \neq 0$ ), расположенной в плоскости  $x=0$ . В работе [2] получено дисперсионное уравнение для такой системы

$$f(\gamma, k) = \sqrt{\gamma^2 - k^2} \operatorname{th}(a\sqrt{\gamma^2 - k^2}) - jkZ = 0 \quad (1)$$

и найдено условие возникновения кратных корней

$$\operatorname{sh}(2a\sqrt{\gamma^2 - k^2}) + 2a\sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь и ниже сохранены обозначения, принятые в [2], зависимость от времени  $e^{-j\omega t}$ .

Кратность корней дисперсионного уравнения не выше второй. Первый и второй корни уравнения

$$\operatorname{sh}(X+jY) + (X+jY) = 0 \quad (3)$$

имеют следующие значения:  $X_1 = 2,25$ ,  $Y_1 = 4,21$ ,  $X_2 = 3,10$ ,  $Y_2 = 10,71$ . Для  $n \geq 4$  следует использовать приближенные решения, получаемые на основании соотношений

$$Y_n/\operatorname{tg} Y_n = \ln(-2Y_n/\sin Y_n), \quad X_n = Y_n/\operatorname{tg} Y_n, \quad (4)$$

а нулевое приближение при решении (4) задается выражением

$$Y_n = \pi(2n + 1,456). \quad (5)$$

Приведем также значения нормированного импеданса  $v_n = kaZ_n$ , при котором возникают кратные корни:  $v_1 = 5,33 - j2,06$ ;  $v_2 = 8,52 - j2,28$ ;  $v_3 = 11,69 - j2,43$ .

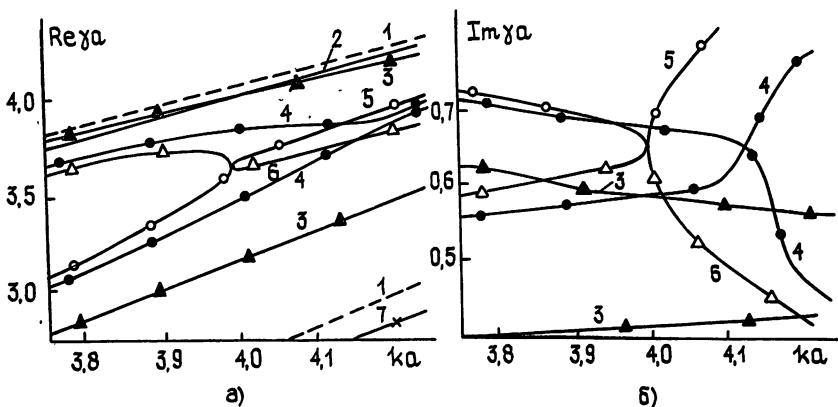


Рис. 1.

Для выяснения закономерностей появления кратных корней на некоторой частоте  $\omega_0$  была численно исследована зависимость волновых чисел в интервале частот, содержащем  $\omega_0$ , от импеданса при его изменении от нуля до значения  $Z_1$ , соответствующего появлению кратного корня. На рис. 1 представлена зависимость  $\operatorname{Re}(\gamma a)$  и  $\operatorname{Im}(\gamma a)$  от  $ka$  при различных значениях  $Z$ : 1— $Z=0,103-j0,083$ ; 2—TEM,  $Z=0$ ; 3— $Z=0,412-j0,33$ ; 4— $Z=0,5-j0,4$ ; 5, 6— $Z=0,515-j0,413$ ; 7—TM<sub>1</sub>,  $Z=0$ . Видно, что при изменении импеданса  $Z$  от нуля до  $Z_1$  исходные дисперсионные кривые TEM- и TM<sub>1</sub>-волн деформируются и сближаются, пересекаясь при  $Z=Z_1$ . Аналогичные расчеты

для других корней (2) показывают, что второй корень соответствует слиянию  $TM_1$ - и  $TM_2$ -волн, третий —  $TM_2$ - и  $TM_3$ -волн и т. д.

Если разложить соответствующие волновые числа  $\gamma_s$ ,  $\gamma_{s+1}$  вблизи точки кратности в ряд по степеням параметра

$$\Delta = \sqrt{2(\omega - \omega_0)/\omega''(\gamma_0)}, \quad (6)$$

как это сделано в [4].

$$\gamma_s = \gamma_0 + \Delta - \frac{1}{6} \frac{\omega'''(\gamma_0)}{\omega''(\gamma_0)} \Delta^2 + \dots, \quad \gamma_{s+1} = \gamma_0 - \Delta - \frac{1}{6} \frac{\omega'''(\gamma_0)}{\omega''(\gamma_0)} \Delta^2 + \dots, \quad (7)$$

и вычислить для анализируемой системы входящие в (7) производные, получим хорошее совпадение приближенных выражений с результатами численного решения дисперсионного уравнения при условии, что в (7) учтены слагаемые до  $\Delta^2$  включительно. Следует отметить, что при слиянии волн, распространяющихся в противоположные стороны, в выражениях, аналогичных (7), достаточно учесть слагаемые до первой степени параметра  $\Delta$  в силу симметрии дисперсионных характеристик  $\gamma_{\pm s}(\omega)$  относительно оси частот.

**2. Уравнения возбуждения.** В [2] для анализируемой волноведущей системы получены уравнения возбуждения, справедливые при наличии кратных волновых чисел. Отличие от нуля квадратичной формы  $J_{1,-2}$ , составленной из полей собственной и присоединенной волн, означает, что данные волны неортогональны между собой. Проведем ортогонализацию собственной и присоединенной волн, для чего введем новые волны соотношениями

$$\mathcal{E}_{\pm 1}^{\perp} = \mathcal{E}_{\pm 1} - \frac{J_{1,-2}}{J_{2,-2}} \mathcal{E}_{\pm 2}, \quad \mathcal{E}_{\pm 2}^{\perp} = \mathcal{E}_{\pm 2}, \quad (8)$$

$\mathcal{E}_{\pm 1}^{\perp}$ ,  $\mathcal{E}_{\pm 2}^{\perp}$  — поля собственной и присоединенной волн соответственно. Выражения для  $J_{1,-2}$ ,  $J_{2,-2}$  приведены в [2]. Новые коэффициенты разложения  $b_{\pm 1}$ ,  $b_{\pm 2}$  определяются уравнениями возбуждения, которые после ортогонализации приобретают вид

$$\frac{db_{\pm 1}}{dz} = \pm \frac{1}{J_{1,-1}} \int_{S'} I^e \mathcal{E}_{\mp 1}^{\perp} dS, \quad \frac{db_{\pm 2}}{dz} = \pm \frac{1}{J_{2,-2}} \int_{S'} I^e \mathcal{E}_{\mp 2}^{\perp} dS, \quad (9)$$

где  $J_{1,-1}^{\perp} = -J_{1,-2}^2/J_{2,-2}$ ,  $J_{2,-2}^{\perp} = J_{2,-2}$ . Отметим, что уравнения (9) совпадают по форме с уравнениями возбуждения Вайнштейна [6]. Поля вновь полученных волн не трудно выразить через мембранные функции собственной волны

$$\mathcal{E}_{\pm 1}^{\perp} = \left( \hat{\mathcal{E}}_{\pm 1} - \frac{J_{1,-2}}{J_{2,-2}} \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_{\pm 1}}{\partial \gamma} \mp z \frac{J_{1,-2}}{J_{2,-2}} \hat{\mathcal{E}}_{\pm 1} \right) e^{\pm j\gamma_0 z}, \quad \mathcal{E}_{\pm 2}^{\perp} = \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_{\pm 1}}{\partial \gamma} \pm z \hat{\mathcal{E}}_{\pm 1} \right) e^{\pm j\gamma_0 z}. \quad (10)$$

Ортогональность собственных типов волн означает, что возможно их независимое возбуждение, т. е. существует хотя бы одно распределение сторонних токов  $I^e$ ,  $I^m$ , возбуждающее только заданный тип волны. Действительно, пусть выражения для сторонних токов имеют вид

$$I^e = \frac{c}{4\pi} [lH_k] \delta(z - z_0), \quad I^m = -\frac{c}{4\pi} [lE_k] \delta(z - z_0), \quad (11)$$

где  $E_k$ ,  $H_k$  — поля  $k$ -й собственной волны,  $l$  — орт оси  $z$ ,  $\delta(z)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Подставив соотношения (11) в уравнения возбуждения Вайнштейна из [6] и учитывая соотношение ортогональности, убеждаемся, что  $c_{\pm s} = 0$ , если  $s \neq k$ . Поскольку вновь введенные волны, поля которых определяются соотношением (8), ортогональны между собой и ко всем собственным, каждая из них, в том числе и присоединенная, обозначенная индексом 2, может быть возбуждена независимо от других.

Подведем итоги.

1) Для анализируемой системы при изменении импеданса стенок от нуля до значения, соответствующего точке кратности, дисперсионные кривые собственных волн гладкого волновода постепенно деформируются и пересекаются, что и приводит к возникновению кратных волновых чисел.

2) Уравнения возбуждения при наличии кратных волновых чисел с помощью процедуры ортогонализации записаны в виде, совпадающем по форме с уравнениями возбуждения Вайнштейна. Возможно независимое возбуждение присоединенной волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Краснушкин П. Е., Федоров Е. Н. // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129.
- Аркадакский С. С., Цикин Б. Г. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 11. С. 2328.

3. Аркадакский С. С., Цикин Б. Г. // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 3. С. 608.
4. Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 3. С. 456.
5. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М.: Гос. ун-т, 1983.
6. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
8 августа 1988 г.

УДК 621.372.8.001.24

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ $H$ -ПЛОСКОСТНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО ДЕЛИТЕЛЯ МОЩНОСТИ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Л. М. Онуфриенко, В. П. Чумаченко

Теории модифицированного  $H$ -плоскостного делителя мощности посвящено сравнительно небольшое количество работ [1, 2]. В частности, в [2] выполнен строгий электродинамический анализ такого устройства с областью связи прямоугольной формы и исследовано влияние на его параметры толщины общей стенки между волноводами. На практике для повышения степени компенсации отраженной от соединения волноводов волны в область связи вводят индуктивный стержень. В настоящей работе на электродинамическом уровне выполнен численный анализ возможностей согласования делителя при помощи стержня квадратного сечения, расположенного в области связи со срезанными углами.

Рассматриваемая структура изображена на рис. 1. Для решения задачи используем новый [3] аналитически более простой вариант предложенного в [4] метода анализа  $H$ -плоскостных волноводных трансформаторов с соединительной полостью многоугольной формы.

Совместим контур волноводного соединения с плоскостью  $z=0$  и разобьем область определения поля на частичные пересекающиеся области, выделив многоугольную соединительную полость и регулярные участки волноводов. Общие части на рис. 1 заштрихованы. Отсчетные плоскости  $T-T$ , ограничивающие полость, сдвинуты на некоторое расстояние в глубь волноводов. Обозначим через  $J$  множество номеров прямоугольных звеньев контура полости, отвечающих идеально проводящим границам полости и стержня, а также апертурам волноводов. Сопоставим каждому такому звену системы прямоугольных  $(x_i, y_i)$  и эллиптических  $(\xi_i, \eta_i)$  координат:

$$x_i = f_i \cos \eta_i \operatorname{ch} \xi_i, \quad y_i = f_i \sin \eta_i \operatorname{sh} \xi_i, \quad i \in J. \quad (1)$$

где  $f_i$  — половина длины  $i$ -го звена. В плечах введем системы координат  $(X_L, Y_L)$ ,  $L = 1, 2, 3$ .

Пусть со стороны первого плеча падает волна  $H_{10}$ . В таком случае поле в узле полностью определяется компонентой электрического поля  $U = E_z$ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца и однородным граничным условиям Дирихле на идеально проводящих стенках. В  $L$ -м плече искомое поле обозначим через  $U^L$  и представим в виде разложения по собственным волнам волновода:

$$U^L = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^L \varphi_n^L(Y_L) \exp(-\gamma_n^L X_L) + \delta_{1L} A_1^L \varphi_1^1(Y_1) \exp(\gamma_1^1 X_1), \quad L = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi_n^L(Y_L) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi Y_L/a)$ ,  $A_1^1$  — известная амплитуда возбуждающей соединение волны,  $\gamma_n^L = \sqrt{(n\pi/a)^2 - k^2}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $\delta_{1L}$  — символ Кронекера.

Внутри соединительной полости решение представим в виде суммы функций, каждая из которых относится к определенному звену контура полости:

$$U = \sum_{i \in J} U_i; \quad (3)$$

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^i \frac{M\epsilon_n^{(2)}(\xi_i, q_i)}{M\epsilon_n^{(2)}(0, q_i)} \text{se}_n(\eta_i, q_i). \quad (4)$$

Здесь  $\text{se}_n$ ,  $M\epsilon_n^{(2)}$  — разновидности функций Маттье,  $q_i = (f_i k / 2)^2$ .

Удовлетворяя граничным условиям на проводящих поверхностях, а также «сшивая» функции  $U$  и  $U^L$  в плоскостях  $T-T$  и плоскостях  $X_L = X_B^L$ , расположенных в общих частях пересекающихся областей, приедем [3, 4] к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов разложения  $B_n^L$ ,  $D_n^L$ . СЛАУ задачи, являющаяся частным случаем СЛАУ, приведенной в [3], может быть решена методом усечения. После решения системы элементы матрицы рассеяния рассчитываются по известным амплитудам волноводных волн.

Алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ типа ЕС на языке ФОРТРАН IV. При счете плоскости  $T-T$ , ограничивающие соединительную полость, сдвигались внутрь регулярных участков волноводов на величину, больше или равную  $0,3 a$ ,  $X_B^L = -0,2 a$ . В соответствии с результатами работ [3, 4] число слагаемых в разложениях (2), (4) выбирается программой автоматически, чтобы обеспечить погрешность расчета элементов матрицы рассеяния меньше 0,005. Этого достаточно для построения графиков. Для сравнения укажем, что, например, при  $a/\lambda = 0,75$  порядок СЛАУ составляет 89 и время расчета всех элементов матрицы рассеяния на ЭВМ ЕС-1045 равняется 2 мин 10 с. Заметим, что при вычислении интегралов, описывающих матрицы системы, используется свойство «симметрии», установленное в [3]. Контрольный расчет для случая прямоугольной области связи, не содержащей включений, дал результаты, подтверждающие известные [2] данные.

На рис. 2 приведены рассчитанные частотные зависимости коэффициента отражения  $|R|$  в плечо 1 при различных значениях геометрических параметров соединительной полости ( $\alpha = 45^\circ$ ,  $e = 0,225 a$ ,  $b = 0,05 a$ ):

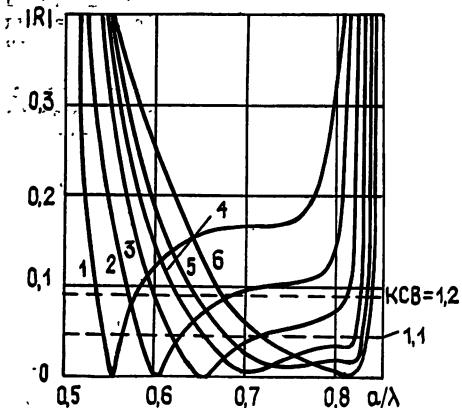


Рис. 2.

- 1— $C = 1,553 a$ ,  $C_1 = 1,358 a$ ;
- 2— $C = 1,478 a$ ,  $C_1 = 1,268 a$ ;
- 3— $C = 1,426 a$ ,  $C_1 = 1,203 a$ ;
- 4— $C = 1,388 a$ ,  $C_1 = 1,15 a$ ;
- 5— $C = 1,359 a$ ,  $C_1 = 1,121 a$ ;
- 6— $C = 1,24 a$ ,  $C_1 = 1,073 a$ ;

Из рисунка видно, что при фиксированной толщине стенки между волноводами подбором размеров области связи и положения стержня можно добиться перемещения минимума коэффициента отражения вдоль всего приведенного интервала частот. По мере смещения в низкочастотную область рабочий интервал суживается. Оптимальной является область изменения частотного параметра  $0,6 < a/\lambda < 0,8$ , где ширина рабо-

чего диапазона может достигать значений около 20% при уровне  $KCB < 1,2$ .

Полученные численные результаты позволяют осуществить выбор оптимальных значений геометрических параметров области связи и будут полезными при конструировании реальных волноводных узлов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Л. Теория волноводов. — М.: Радио и связь, 1981. — 312 с.
2. Прохода И. Г., Дмитрюк С. Г., Лозянай В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 2. С. 256.
3. Онуфrienко Л. М., Чумаченко В. П. Антенно-волноводные устройства и методы СВЧ измерений. — Днепропетровск: Гос. ун-т, 1987. С. 72.
4. Чумаченко В. П. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 30. № 12. С. 2335.
5. Чумаченко В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 6. С. 701.