Отметим в заключение, что полученные результаты не имеют аналога в варианте МР работы [3], который соответствует случаю существенного превышения величины ω над ω_0. При этом поправки к частотам ν_1 и ν_{-1} уже не зависят от магнитного поля и не дают эффекта «зануления» магнитной зависимости этих частот Очевидно, такой эффект возможен лишь при равенстве компонент на частотах ν_1 и ν_{-1}, что легко выполнимо при СТС оптической накачки паров рубидия В случае использования циркулярно поляризованного света накачки при индуцировании «магнитонезависимых» переходов [6] это условие не выполняется, что должно обусловливать большее влияние рабочего магнитного поля на стабильность частоты наблюдаемого сигнала

ЛИТЕРАТУРА

1 Григорьянц В В, Жаботинский М. Е, Золин В Ф Квантовые стандарты частоты — М · Наука, 1968 С 287
2 А. С 277135 СССР. Якобсон Н Н — Опубл в Б И 1970 № 24 С 65
3. Haroche S // Ann Phys 1971 V 6 № 4—5 P 189.
4. Гуцаки В Н, Диндаров В Э, Жолнеров В С и др // Опт и спектр. 1986. Т 60. Вып 1 С. 201
5 Winter J M // Ann Phys 1959 V 4 № 7—8 P 745
6. Гуцаки В. Н, Диндаров В Э, Петрунькин В Ю и др // Радиотехника и электроника 1987 Т. 32 № 2 С. 458

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию 10 мая 1988 г.

УДК 621.396 67

О ВЛИЯНИИ ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ВОЗМОЖНОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ

А. Б. Гершман, В. Т Ермолаев

Проекционный метод сверхразрешения источников излучения в антенных решетках (АР) включает в себя два этапа. На первом формируется выборочная корреляционная матрица (КМ) входных сигналов, определяются ее собственные числа и векторы и проводится оценка размерности шумового (или сигнального) подпространства собственных векторов, т. е числа источников [1, 2]. На втором этапе формируется матричный проектор D на шумовое подпространство и оценка пространственного спектра вида [1, 3]

$$\eta(\theta) = (S^+(\theta) D S(\theta))^{-1}, \tag{1}$$

где $S(\theta)$ — вектор обзора по углу θ, $(+)$ — знак эрмитова сопряжения. Ранг матрицы D в (1) выбирается равным оцененной на первом этапе размерности шумового подпространства. Характеристики проекционного метода исследовались в [3, 4], однако в этих работах полагалось, что число источников излучения известно априори, т. е. оцененная размерность шумового подпространства всегда совпадает с имеющей место в действительности. Вместе с тем известно, что при конечном объеме обучающей выборки существует вероятность ошибки при оценке ранга шумового проектора D [2, 5]. Такая ошибка существенно ухудшает характеристики разрешения, так как приводит либо к повышению вероятности неразрешения (пропуска) источников, либо к повышению вероятности ложного разрешения (формирования ложных спектральных пиков в оценке (1)) [6, 7]. В настоящей работе для линейной эквидистантной АР с изотропными элементами проведено сравнение потенциальной эффективности оценивания ранга шумового проектора в случаях двух и трех некоррелированных источников излучения.

Выборочная КМ размерности $N \cdot N$ при произвольном числе K источников

$$\hat{M} = \frac{1}{J} \sum_{l=1}^{J} X_l X_l^+ . \tag{2}$$

Хдесь X_l — выборка вектора входных сигналов АР в l-й момент времени, N — число элементов АР. Будем рассматривать случай одинакового для всех значений K и большого объема J обучающей выборки, когда с точностью до членов порядка малости $1/\sqrt{J}$ [4]

$$\langle\delta\lambda\rangle = 0, \qquad \sigma_\lambda = \lambda/\sqrt{J}, \tag{3}$$

где $\langle\delta\lambda\rangle$ — среднее смещение между выборочным и точным (соответствующим случаю $J=\infty$) значениями собственного числа КМ, σ_λ — среднеквадратичное отклонение выборочного значения собственного числа от его точного значения λ. Поскольку процедура оценивания ранга шумового проектора D сводится к сравнению выборочных собственных чисел с некоторым значением порога [6, 8], то при оптимальном выборе порога, при котором занижению и завышению ранга D приписываются одинаковые стоимости, отклонение наименьшего из сигнальных собственных чисел точной КМ от кратного шумового в соответствии с (3) есть монотонно возрастающая функция от вероятности правильного определения ранга шумового проектора. Рассматривая случай $N \gg K$, имеем, что эта функция практически не зависит от числа источников (будет одинаковой для любого K при фиксированном J) Поэтому в качестве относительной меры потенциальной эффективности оценивания размерности шумового подпространства можно выбрать величину отклонения между наименьшим сигнальным и шумовым собственным числом точной КМ Запишем эту КМ в виде [3]

$$M = E + \Lambda H \Lambda^{+}, \tag{4}$$

где E — единичная матрица, $\Lambda = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_K)$; $\Phi_i =$
$$= \left\{\exp\left[j\left(1 - \frac{N+1}{2}\right)u_i\right],\ \exp\left[j\left(2 - \frac{N+1}{2}\right)u_i\right], \ldots,\ \exp\left[j\left(N - \frac{N+1}{2}\right)u_i\right]\right\}^{\text{т}},$$
H — диагональная $K \cdot K$ матрица с элементами $H_{ii} = \nu_i^{(K)}$; $u_i = 2\pi\lambda_{\text{в}}^{-1} d \sin\theta_i$; $\lambda_{\text{в}}$ — длина волны, d — шаг АР, θ_i — угол прихода сигнала i-го источника, $\nu_i^{(K)}$ — отношение мощности сигнала i-го источника к мощности собственного шума в одном элементе АР (верхний индекс обозначает общее число источников), т — знак транспонирования. Мощность собственного шума в элементе полагаем равной единице

Матрица M имеет $N - K$ кратных единичных шумовых собственных чисел и K сигнальных собственных чисел, больших единицы. При $K=2$ сигнальные собственные числа имеют вид [3, 9]

$$\mu_{1,2} = 1 + (\nu_1^{(2)} + \nu_2^{(2)})\frac{N}{2} \pm \left[(\nu_1^{(2)} - \nu_2^{(2)})^2 \frac{N^2}{4} + \nu_1^{(2)}\nu_2^{(2)} N^2 g_{12}^2\right]^{1/2}, \tag{5}$$

где $g_{pq} = \sin(Nu_{pq}/2)/N\sin(u_{pq}/2)$; $u_{pq} = u_p - u_q$. В случае трех источников одинаковой мощности ($\nu_1^{(3)} = \nu_2^{(3)} = \nu_3^{(3)} = \nu^{(3)}$) с малым по сравнению с шириной луча АР угловым разнесением и при не слишком больших значениях мощностей (когда справедливо $(\lambda_{\min} - 1)^3 \ll 1$, где $\lambda_{\min}$ — минимальное сигнальное собственное число M) получаем следующие асимптотические выражения для сигнальных собственных чисел точной КМ:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \nu^{(3)} N\left\{1{,}25 + (g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)/12 + 0{,}5\left[(g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)/6 + (g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)^2/36 - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} g_{12} g_{13} g_{23}\right]^{1/2} \pm 0{,}5\left[3(g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2) + 2 g_{12} g_{13} g_{23} - 0{,}5 - (g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)^2/6 - (3 + g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)\left((g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)/6 + (g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)^2/36 - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} g_{12} g_{13} g_{23}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\}, \tag{6}$$

$$\lambda_3 = 1 + \nu^{(3)} N\left\{0{,}5 - (g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)/6 - \left[(g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)/6 + (g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)^2/36 - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} g_{12} g_{13} g_{23}\right]^{1/2}\right\}.$$

При совмещении любых двух источников по углу (например второго и третьего, т. е. при $g_{12} = g_{13}$, $g_{23} = 1$) наблюдается предельный переход формул (6) в выражение (5) для случая двух источников с мощностями $\nu^{(3)}$ и $2\nu^{(3)}$

Для удобства сравнения случаев $K=2$ и $K=3$ будем считать, что при $K=3$ $u_{12} = u_{23} = \Delta u^{(3)} > 0$, а при $K=2$ $u_{12} = \Delta u^{(2)} > 0$, где верхний индекс обозначает общее число источников. Разлагая значения (5), (6) наименьших сигнальных собственных чисел при $K=2$, $\nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} = \nu^{(2)}$, и при $K=3$ в ряд по малым параметрам $(N\Delta u^{(2)})^2$, $(N\Delta u^{(3)})^2$, имеем с точностью до членов второго порядка малости

$$\mu_2 = 1 + \Delta\mu_2 \approx 1 + \nu^{(2)} N\left[\frac{(N\Delta u^{(2)})^2}{24} - \frac{(N\Delta u^{(2)})^4}{1920}\right]; \tag{7}$$

$$\lambda_3 = 1 + \Delta\lambda_3 \approx 1 + \nu^{(3)}N\left[\frac{(N\Delta u^{(3)})^4}{108}\right] \qquad (8)$$

С помощью (7), (8) проведем сопоставление потенциальной эффективности оценивания ранга шумового проектора для случаев двух и трех источников. Для этого рассмотрим несколько ситуаций

1) $\nu^{(2)} = \nu^{(3)}$; $\Delta u^{(2)} = \Delta u^{(3)} = \Delta u$. При этом величина $\Delta\lambda_3$ в 4,5 $(N\Delta u)^{-2}$ раз меньше величины $\Delta\mu^2$ Следовательно, эффективность оценивания ранга D в случае трех источников более низкая, чем в случае двух

2) $\nu^{(2)} \neq \nu^{(3)}$; $\Delta u^{(2)} = \Delta u^{(3)} = \Delta u$. Приравнивая $\Delta\lambda_3$ и $\Delta\mu_2$, получим отношение мощностей источников, необходимое для обеспечения одинаковой эффективности оценивания размерности шумового подпространства в случаях $K=2$ и $K=3$ при равном угловом разнесении:

$$\nu^{(3)}/\nu^{(2)} \approx 4,5(N\Delta u)^{-2} \approx 0,1(\Delta\theta_л/\Delta\theta)^2, \qquad (9)$$

где $\Delta\theta_л$ и $\Delta\theta$ — ширина луча АР и разнесение источников по углу Из (9) следует, что для обеспечения одинаковой эффективности $\nu^{(3)}$ должна существенно превышать $\nu^{(2)}$, причем отношение $\nu^{(3)}/\nu^{(2)}$ возрастает при сближении источников по углу

3) Пусть теперь $\nu^{(2)} = \nu^{(3)}$, а $\Delta u^{(2)} \neq \Delta u^{(3)}$. Приравнивая $\Delta\mu_2$ и $\Delta\lambda_3$, получим соотношение между величинами углового разнесения, при котором эффективность оценивания ранга шумового проектора одинакова для случаев $K=2$ и $K=3$:

$$\frac{\Delta u^{(3)}}{\Delta u^{(2)}} \approx \frac{3}{\sqrt{2}}(N\Delta u^{(3)})^{-1} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}(N\Delta u^{(2)})^{-1}}. \qquad (10)$$

Таким образом, одинаковая эффективность имеет место при $\Delta u^{(3)} > \Delta u^{(2)}$ Отношение (10) возрастает при сближении источников по углу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shmidt R O // Proc. RADC Spectral Est Workshop. 1979 P 243
2. Wax M, Kailath T // IEEE Trans 1985 V ASSP-33 № 7 P 387
3. Kaveh M, Barabell A J // IEEE Trans 1986 V ASSP-34 № 2 P. 331.
4. Караваев В. В., Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. — М.: Радио и связь, 1987 — 240 с
5. Bronez T P, Cardzow J. A // Proc. Int Conf Acoust Speech Sign Proc. 1984 V 1 P 14 8/1
6. Lee K S Herper J. C // Proc Ant. and Propag AP-S Int Symp Dig 1986 V 2 P 587
7. Бьенвеню Ж, Копп Л. В кн.: Подводная акустика и обработка сигналов. — М: Мир, 1985 С. 442
8. Кнафель А И Препринт НИРФИ № 238 Горький, 1987.
9. Ермолаев В. Т, Флаксман А. Г. // Изв вузов Радиофизика. 1982. Т. 25. № 4. С. 472.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 17 декабря 1987 г., в окончательном варианте 13 декабря 1988 г.

УДК 538.574 4

О РАССЕЯНИИ ВОЛНЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ГОФРОМ: УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МОЩНОСТИ МЕЖДУ РАССЕЯННЫМИ ВОЛНАМИ ПОДБОРОМ ПРОФИЛЯ

Е. В. Копосова, М И. Петелин

Как известно, при падении плоской электромагнитной волны на периодически гофрированную поверхность возникают рассеянные плоские волны, направления распространения которых определяются только периодом гофра d, а амплитуды зависят от его профиля, описываемого функцией $l(z) = l(z+d)$, где z — координата, параллельная поверхности. В частности, если глубина гофра много меньше длины волны λ, то амплитуда n-й рассеянной волны пропорциональна амплитуде n-й гармоники l_n ряда Фурье

$$l(z) = \sum_n l_n \exp\left(in\frac{2\pi}{d}z\right) + к.с.$$