

УДК 621 396 67

ДИФРАКЦИЯ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ИМПЕДАНСНОМ ЦИЛИНДРЕ

А. А. Звягинцев, Д. О. Батраков

С помощью метода моментов рассмотрена двумерная задача возбуждения импедансного эллиптического цилиндра нитью тока либо плоской волной. Обсуждаются рассчитанные распределения поверхностных токов и полей в дальней зоне.

Решение задач синтеза излучающих систем и электромагнитной совместимости, детектоскопии и неразрушающего контроля требует предварительного рассмотрения модельных дифракционных задач, представляющих, как правило, и самостоятельный интерес [1]. Существенного продвижения удастся добиться, когда поверхность тела совпадает с координатной поверхностью ортогональной системы координат, допускающей разделение переменных в волновом уравнении. Поэтому в качестве объекта исследования был выбран бесконечный импедансный цилиндр эллиптического сечения, а для решения задачи — метод моментов.

1. Пусть задан однородный и безграничный вдоль оси Oz эллиптический цилиндр. Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующим, и используемые обозначения показаны на рис. 1.

Пусть цилиндр облучается электромагнитным полем $u_0 = \xi u^i(\xi, \eta) \times \times \exp(-i\omega t)$ (ξ_i — единичный вектор нормали к поверхности), падающим перпендикулярно образующим. Зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ далее опускается. В этом случае исходная векторная задача может быть сведена к двум независимым скалярным, и, следовательно, без ограничения общности мы можем предположить, что в падающем поле отличны от нуля либо E_z , либо H_z -компоненты (E -либо H -поляризации) [2]. Отличную от нуля компоненту рассеянного поля обозначим u^s . На внешней стороне поверхности (в координатах эллиптического цилиндра) выполняется импедансное условие

$$u^i + u^s = \frac{i}{2\sqrt{q}} \frac{z_s^{\pm 1}(\eta)}{\sqrt{\text{ch}^2 \xi_c - \cos^2 \eta}} \times \times \left. \frac{\partial(u^i + u^s)}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_c}, \quad (1)$$

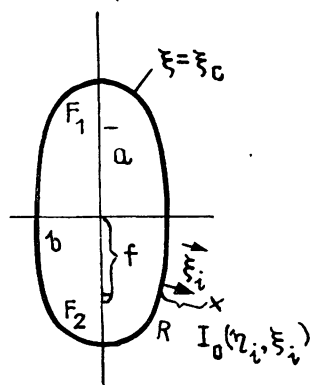


Рис. 1.

где для H -поляризации берем $z_s^{-1}(\eta)$, а для E -поляризации $z_s(\eta)$, $z_s(\eta)$ — комплекснозначная функция, описывающая азимутальное распределение эквивалентного поверхностного импеданса, $q = k^2 f^2 / 4$, $k = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 — длина волны падающего поля.

Из общей теории уравнений Штурма—Лиувилля следует, что система азимутальных периодических функций Матье $se_n(\eta, q)$, $se_n(\eta, q)$ образует базис в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ [3]. Поэтому представим $u^{i,s}$

разложениями в ряды Фурье по системе азимутальных функций Матье. Например, u^s будет определено следующим образом:

$$u^s := T^{E,H} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n^{E,H} c_n^2 \text{Ce}_n(\xi_c, q) \text{Me}_n^{(1)}(\xi, q) \text{ce}_n(\eta, q) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n^{E,H} d_n^2 \text{Se}_n(\xi_c, q) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi, q) \text{se}_n(\eta, q) \right], \quad (2)$$

$T^{E,H}$ — нормирующий множитель, определяемый видом падающего поля, $a_n^{E,H}$, $b_n^{E,H}$ — неизвестные коэффициенты, $\text{Ce}_n(\xi, q)$, $\text{Se}_n(\xi, q)$, $\text{Me}_n^{(1)}(\xi, q)$, $\text{Ne}_n^{(1)}(\xi, q)$ — четные и нечетные функции Матье—Бесселя и Матье—Ханкеля первого рода соответственно, зависимость от параметра q далее опускаем, коэффициенты c_n и d_n определены в [2]. Подстановка разложений $u^{i,s}$ в (1), домножение на $\text{se}_m(\eta)|_{m=0, \dots, \infty}$, $\text{se}_m(\eta)|_{m=0, \dots, \infty}$ и интегрирование по η на интервале $[0, 2\pi]$ приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода (СЛАУ I) с комплексными коэффициентами [4]. Для получения строгого решения и доказательства сходимости метода умножим обе части системы на матрицу P , состоящую из двух бесконечных матриц, элементы которых определены как

$$p_{mi} = \delta_{mi} / [\pi (-1)^m c_m^2 \text{Me}_m^{(1)}(\xi_c) \text{Ce}_m(\xi_c)],$$

$$p_{m+N, i+N} |_{N \rightarrow \infty} = \delta_{mi} / [\pi (-1)^m d_m^2 \text{Ne}_m^{(1)}(\xi_c) \text{Se}_m(\xi_c)],$$

причем если $t_m = \text{Me}_m^{(1)}(\xi_c) \text{Ce}_m(\xi_c) = 0 \cup \omega_m = \text{Ne}_m^{(1)}(\xi_c) \text{Se}_m(\xi_c) = 0$, то $p_{mi} = \delta_{mi} \cup p_{m+N, i+N} = \delta_{mi}$, а соответствующий элемент матрицы-столбца правой части $b_m = b_m + 1 \cup b_{m+N} = b_{m+N} + 1$.

Таким образом, благодаря выбору системы пробных функций, совпадающей с выбранным ранее базисом, и свойству ортогональности этих функций мы получаем новую СЛАУ II, которую запишем в форме

$$(A+I)X = B, \quad (3)$$

где I — единичная матрица, X — вектор неизвестных коэффициентов, матрица A имеет клеточную структуру и состоит из четырех бесконечных матриц,

$$A = \begin{vmatrix} a_{mn}^{(1)} & a_{mn}^{(2)} \\ a_{mn}^{(3)} & a_{mn}^{(4)} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

элементы которых сходны между собой и довольно громоздки. Поэтому для примера приведем один элемент матрицы

$$a_{mn}^{(1)} = -\frac{c_n^2}{c_m^2} \frac{(-1)^{n+m}}{\pi \text{Me}_m^{(1)}(\xi_c) \text{Ce}_m(\xi_c)} \left[i h^{-1} \text{Ce}_n(\xi_c) \text{Me}_n^{\prime(1)}(\xi_c) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} z_s(\eta) \text{ce}_n(\eta) \text{ce}_m(\eta) / \sqrt{\text{ch}^2 \xi_c - \cos^2 \eta} d\eta \right], \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ .

Матрица-столбец правой части B состоит из двух бесконечных матриц-столбцов, элементы верхней подматрицы, например, определяются соотношением (падающее поле — плоская волна, $t_m, \omega_m \neq 0$)

$$b_m^{(1)} = \frac{1}{\pi \text{Me}_m^{(1)}(\xi_c) \text{Ce}_m(\xi_c) c_m^2 (-1)^m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^n \text{ce}_n(\eta_i) \times \right.$$

$$\times \left[ih^{-1} Ce'_n(\xi_c) \int_0^{2\pi} \frac{z_s(\eta) ce_n(\eta) ce_m(\eta)}{\sqrt{ch^2 \xi_c - \cos^2 \eta}} d\eta - \pi Ce_n(\xi_c) \delta_{mn} \right] + \quad (6)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} d_n (-1)^n se_n(\eta_i) \left[ih^{-1} Se'_n(\xi_c) \int_0^{2\pi} \frac{z_s(\eta) se_n(\eta) ce_m(\eta)}{\sqrt{ch^2 \xi_c - \cos^2 \eta}} d\eta \right] \Bigg\}.$$

Чтобы получить элементы нижней подматрицы b_m^2 , достаточно в (6) заменить функции и коэффициенты $ce_m(\eta)$, $Se_m(\xi)$, $Me_m^{(1)}(\xi)$ на величины противоположной четности и наоборот. Случай H -поляризации принципиально ничем не отличается, если учесть, что в граничном условии необходимо заменить $z_s(\eta)$ на $1/z_s(\eta)$.

Асимптотические относительно индекса представления радиальных функций Матье

$$\left. \begin{aligned} c_n Ce_n(\xi) \\ d_n Se_n(\xi) \end{aligned} \right\} \simeq \frac{i^n}{n!} \left(\frac{kv}{2} \right)^n, \quad \left. \begin{aligned} c_n Me_n^{(1)}(\xi) \\ d_n Ne_n^{(1)}(\xi) \end{aligned} \right\} \simeq \frac{i^{n+1}}{\pi} (n-1)! \left(\frac{2}{kv} \right)^n, \quad (7)$$

где $v = f \exp(\xi)/2$, позволяют установить, что если $z_s(\eta)$ — непрерывная бесконечно дифференцируемая функция, то матричный оператор A является вполне непрерывным [5]. Следовательно, единственное решение системы (3) может быть найдено на ЭВМ методом редукции. Из асимптотических по m оценок элементов B следует также абсолютная и равномерная сходимость рядов, представляющих рассеянное поле для всех $\xi \geq \xi_c$.

Полученные соотношения послужили основой для создания алгоритма вычисления неизвестных коэффициентов разложений Фурье, знание которых позволяет рассчитать не только поля в дальней зоне, но и азимутальные распределения комплексных токов и их фаз на поверхности цилиндра. Для удобства в работе рассчитаны не сами токи, а пропорциональные им величины:

$$j_z = T^{E,N} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n Ce_n(\xi_c) [ce_n(\eta_i) + a_n^{E,H} c_n Me_n^{(1)}(\xi_c)] ce_n(\eta) + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \sum_{n=1}^8 (-1)^n d_n Se_n(\xi_c) [se_n(\eta_i) + b_n^{E,H} d_n Ne_n^{(1)}(\xi_c)] se_n(\eta) \right\}.$$

Для плоской линейно поляризованной волны

$$T^E = E_0 / \sqrt{q(ch^2 \xi_c - \cos^2 \eta)},$$

E_0 — амплитуда падающего поля, для H -поляризации $T^H = -2H_0$, а дифференцирование по ξ не производится. Подобные выражения использовались для анализа возбуждения линейным источником.

Прежде чем приступить к анализу результатов, сделаем несколько замечаний. Из вида условия (1) следует, что если импеданс зависит от η по закону $z_s(\eta) = A\sqrt{ch^2 \xi_c - \cos^2 \eta}$, для коэффициентов $a_m^{E,H}$, $b_m^{E,H}$ получаются явные выражения [5], обеспечивающие весьма высокую скорость сходимости рядов (8). Этот факт существенно облегчает анализ и тестирование общих алгоритмов. При произвольном распределении импеданса из (7) следует, что помимо этого распределения сходимость будет определяться межфокусным расстоянием цилиндра и его эллиптичностью (значением ξ_c), из-за чего указать априорно порядок редукции довольно затруднительно. Поэтому на основании практического опыта мы выбирали N с небольшим запасом, а именно $N = \text{entier}(q) + 7$.

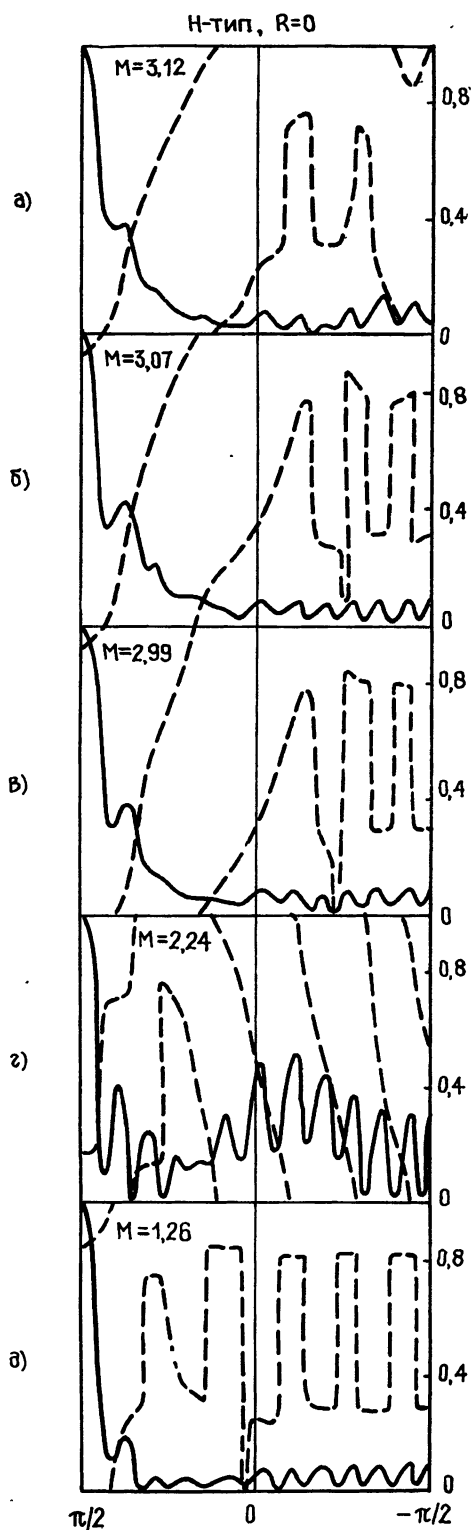
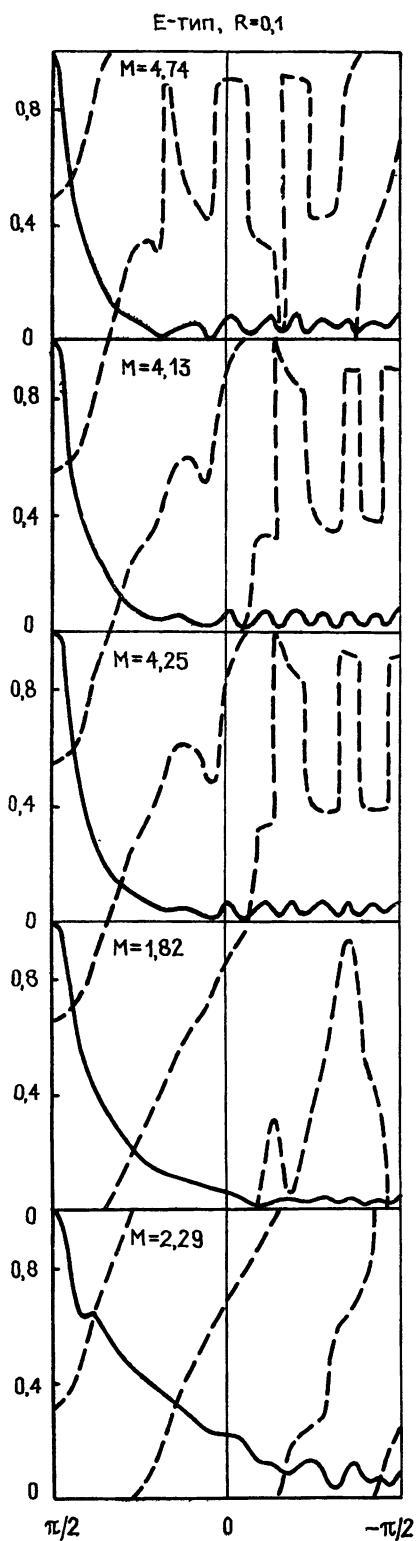


Рис. 2.

2. Результаты расчетов представлены на рис. 2—4. Повсюду считывались модуль и фаза величин j_z и j_η , пропорциональных соответствующим компонентам индуцированного тока, а также нормированные на максимум диаграммы рассеяния (ДР) и излучения (ДИ) при возбуждении нитью тока (E - либо H -типа). Были фиксированы волновой размер большей полуоси $a/\lambda_0=1$, отношение полуосей $a/b=2$ и азимутальная координата источника $\eta_i=90^\circ$. Сплошными линиями на всех рисунках показаны азимутальные распределения модуля плотности тока (максимумы M указаны непосредственно на рисунках), а штриховыми— его фазы (максимальное значение всюду равно 2π), определенной нами в интервале $[0, 2\pi]$.

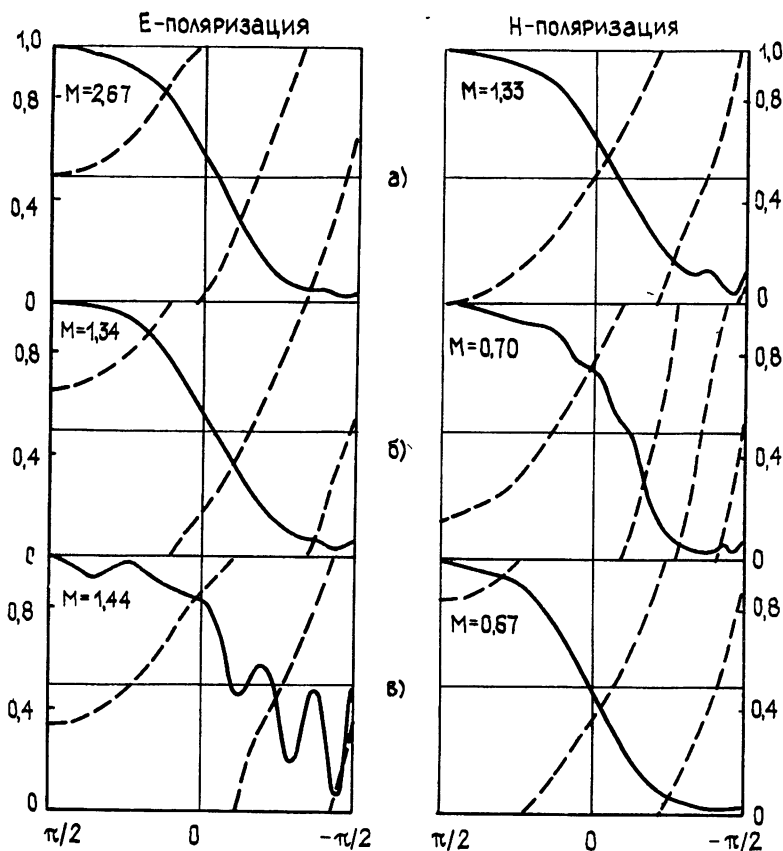


Рис. 3.

Как видно из рис. 2, 3, при любой кривизне падающего волнового фронта максимум плотности тока приходится на наименее удаленную от источника точку поверхности, что характерно и для плоских импедансных поверхностей [6]. Ввиду ортогональности и полноты системы угловых функций Матье на интервале $[0, 2\pi]$ и принятой нами постановки задачи источником рассеянного поля служат моды тока, возбуждаемого на поверхности цилиндра падающей волной. Амплитуды мод, как следует из вышеизложенного, определяются выражениями (плоская волна)

$$(-1)^n c_n \left\{ \frac{C e_n(\xi_c, q)}{S e_n(\xi_c, q)} \right\} \left(1 + \left\{ \frac{c_n M e_n^{(1)}(\xi_c, q) a_n^{E,H}}{d_n N e_n^{(1)}(\xi_c, q) b_n^{E,H}} \right\} \right).$$

Вообще говоря, все они отличны от нуля, однако в силу асимптотического относительно индекса поведения коэффициентов $a_n^{E,H}$ и $b_n^{E,H}$, а также в силу представлений (7) лишь конечное число мод

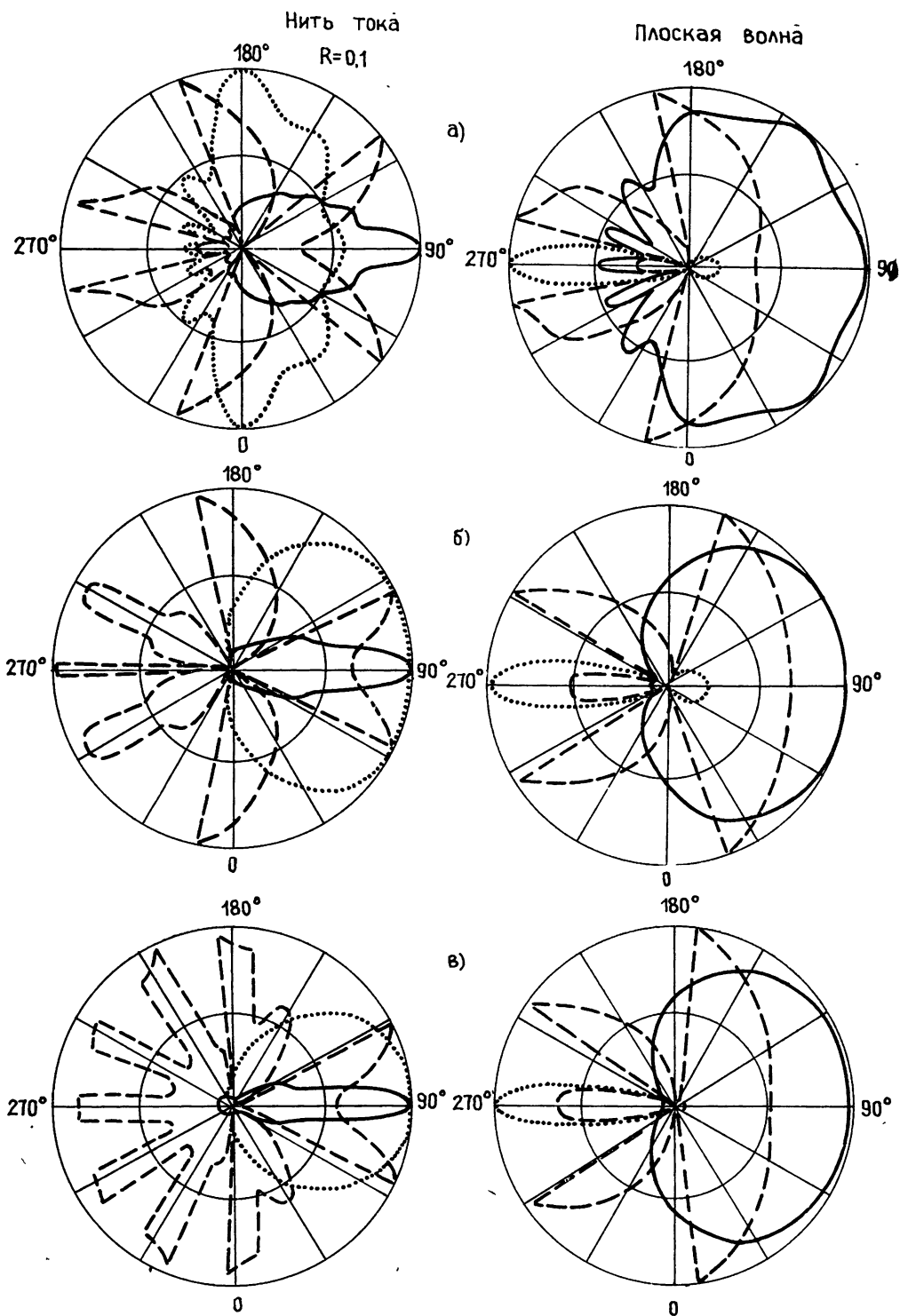


Рис. 4.

$N(\xi_c, q, z_s(\eta), \tilde{R})$ играет существенную роль в формировании распределения тока. При возбуждении линейным источником убывание амплитуд должно происходить медленнее, поскольку теперь в разложении падающего поля вместо асимптотических разложений фигурируют множители $c_n \text{Me}_n^{(1)}(\xi_i, q)$, $d_n \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_i, q)$. Это подтверждают и проведенные расчеты (рис. 2). В этом случае главный максимум острее и по мере удаления от направления на источник наблюдаются осцилляции плотности тока, обусловленные взаимодействием волн, обтекающих цилиндр, а также резкие скачки фазы (рис. 2д), соответствующие изменению направления тока. Таким образом, в структурах с пассивным импедансом ток, как и для идеально проводящих тел, в основном распределен на освещенной части поверхности.

Размещение источника вблизи либо непосредственно на поверхности (узкая щель в импедансном экране) вызывает эффективное взаимодействие поля со структурой, заключающееся в возбуждении волн плотности тока, амплитуда которых существенным образом зависит от импедансных свойств поверхности и может быть весьма значительной (рис. 2г).

При падении плоской волны замедление, определяемое тангенсом угла наклона фазового распределения, растет по мере удаления от точки соприкосновения фазового фронта с поверхностью. В некоторых случаях (рис. 3в) в области геометрической тени могут возникнуть осцилляции, свидетельствующие о заметном возбуждении и интерференции волн, огибающих цилиндр в противоположных азимутальных направлениях. Максимальное замедление наблюдается для H -поляризации и $z_s = 0,5 - 2,5i$. Рис. 4 иллюстрирует связь азимутального распределения тока и фазы с ДИ и ДР (показаны пунктиром) для E -поляризованного поля. Как видно, наличие у импеданса реактивной составляющей может существенным образом изменить дифракционную картину. Наибольшие изменения (это очевидно из физических соображений) претерпевает фаза тока, в меньшей степени — его модуль, что приводит к перераспределению энергии, излучаемой системой в различных направлениях. Существенно также, что для отыскания решений мы использовали разложение по собственным функциям, удовлетворяющим условиям периодичности и излучения однородного волнового уравнения. Зависимость каждого члена такого ряда от азимутальной координаты описывается периодической осциллирующей без затухания функцией, что приводит к замедлению убывания коэффициентов по мере усложнения поведения искомого распределения (например, с ростом волновых размеров структуры).

В заключение отметим, что решение поставленной краевой задачи можно искать в виде рядов по собственным функциям волнового уравнения, удовлетворяя граничному условию (ряды Ватсона). Однако трудности, связанные с необходимостью вычисления комплексных значений постоянной разделения [7] и соответствующих собственных функций азимутального и радиального операторов, делают, на наш взгляд, более предпочтительным использование схемы, описанной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук И. М., Черенков В. С. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18. № 2. С. 242.
2. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — М.: Наука и техника, 1967. — 239 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Справочная математическая библиотека. — М.: Наука, 1967. — 294 с.
4. Alexopoulos N. G., Tadtler G. A // IEEE Trans. 1974. V. AP-20. № 1. P. 132.
5. Батраков Д. О. Автореферат диссертации. — Харьков, Гос. ун-т, 1985.
6. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983. — 296 с.
7. Березман А. М., Керимов М. К., Скороходов С. Л., Шадрин Г. А. // ЖВММФ. 1986. Т. 26. № 9. С. 1350.