ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 9 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 537.87

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

О. А. Третьяков, Н. П. Жук

Методом теории многократного рассеяния построены эквивалентные граничные условия для среднего и флуктуационного полей в случае шероховатой поверхности произвольной формы, которая находится в произвольной неоднородной среде. Для открытого цилиндрического волновода найден сдвиг волновых чисел дискретного спектра под действием неровностей границы.

Существенная роль шероховатостей в некоторых радиофизических эффектах хорошо известна [1–3]. Пространственная неоднородность среды приводит к накоплению возмущений поля [1,4]. В данной работе с привлечением основополагающих идей [2] рассмотрена общая модель, когда подстилающая поверхность имеет произвольную форму и разделяет две произвольные пространственно-неоднородные среды. Такая модель — ключевая для радиосвязи, дистанционного зондирования, интегральной оптики.

1. Исходные уравнения. Неоднородное тело $\tilde{V}_-$ со случайной границей $\tilde{\Sigma}$ и окружающую его неоднородную среду $\tilde{V}_+$ описываем в совокупности материальными параметрами $\varepsilon(\boldsymbol{R})$, $\mu(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R} = (x, y, z)$, которые в области $\tilde{V}_-$ принимают значения $\varepsilon_-(\boldsymbol{R})$, $\mu_-(\boldsymbol{R})$, в области $\tilde{V}_+$, дополняющей $\tilde{V}_-$ до всего трехмерного пространства, равны $\varepsilon_+(\boldsymbol{R})$, $\mu_+(\boldsymbol{R})$, а на поверхности $\tilde{\Sigma}$, разделяющей $\tilde{V}_-$ и $\tilde{V}_+$, скачкообразно изменяются. Статистически среднее положение — подстилающую поверхность — обозначим Σ, а «средние» области, разделенные ею, — V_- и V_+ соответственно. Форму Σ и кусочно-непрерывные комплексные функции $\varepsilon_\pm(\boldsymbol{R})$, $\mu_\pm(\boldsymbol{R})$ не конкретизируем.

Случайное электромагнитное поле $\tilde{E}(\boldsymbol{R})$, $\tilde{H}(\boldsymbol{R})$, созданное в описанной статистически нерегулярной среде монохроматическими ($\sim e^{-i\omega t}$) детерминированными источниками $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, подчиняется уравнениям Максвелла

$$\nabla\times\tilde{H} + ik_0\varepsilon\tilde{E} = (4\pi/c)\boldsymbol{J}, \quad \nabla\times\tilde{E} - ik_0\mu\tilde{H} = -(4\pi/c)\boldsymbol{M} \qquad (1)$$

($k_0 = \omega/c$), которые рассматриваются в области непрерывности функций $\varepsilon(\boldsymbol{R})$ и $\mu(\boldsymbol{R})$. На поверхностях раздела среды, где по крайней мере одна из этих функций испытывает разрыв, к примеру на $\tilde{\Sigma}$, тангенциальные компоненты поля должны быть непрерывными. Кроме того полагаем, что поле в бесконечности равно нулю за счет имеющихся там диссипативных потерь (или же в силу обычного предположения $\operatorname{Im} k_0 = +0$, если таковые отсутствуют).

Параметризуем Σ произвольной криволинейной ортогональной системой координат u, v. Через каждую точку $\boldsymbol{R}_\Sigma = \boldsymbol{R}_\Sigma(u, v)$ подстилающей поверхности проведем прямую, перпендикулярную к Σ в этой точке. Произвольной точке $\boldsymbol{R}$ на этой прямой поставим в соответствие расстояние до точки $\boldsymbol{R}_\Sigma$, взятое со знаком $+$, если $\boldsymbol{R} \in V_+$, и со знаком —, если $\boldsymbol{R} \in V_-$. Обозначим это расстояние (со знаком) через ν. Очевидно, что $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_\Sigma + \nu \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma)$, где $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma)$ — нормаль к Σ в точке $\boldsymbol{R}_\Sigma$, направленная из V_- в V_+. Соответствие $\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{R}(u, v, \nu)$, $\boldsymbol{R}_\Sigma \equiv \boldsymbol{R}(u, v)$ подразумеваем всюду без особых оговорок.

Подстилающей поверхности отвечает значение $\nu = 0$. Поверхность $\tilde{\Sigma}$ считаем заданной уравнением $\nu = \zeta(\boldsymbol{R}_\Sigma)$, где ζ — случайная функция (равная в среднем нулю), которая определяет высоту неровностей. Нам понадобится ее функция корреляции $B(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma) = \langle \zeta(\boldsymbol{R}_\Sigma)\zeta(\boldsymbol{R}'_\Sigma)\rangle$.

Предположим, что $\varepsilon_\pm$, $\mu_\pm$, $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ допускают аналитическое продолжение из области $\tilde{V}_\pm$ через границу $\tilde{\Sigma}$ на некоторую глубину порядка ζ в смежную область $\tilde{V}_\mp$. Тогда уравнения (1) очевидным образом распространяются на все пространство, за исключением Σ. Стандартная процедура «переноса» граничных условий [1], выполняемая в криволинейной неортогональной системе координат u, v, ν, дает

$$\{\boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{R})\} = (4\pi/c)\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{R}_\Sigma),$$
$$\{\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{R})\} = -(4\pi/c)\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{R}_\Sigma); \tag{2}$$

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{R}_\Sigma) = (ic/4\pi k_0)\{\mu^{-1}(\boldsymbol{R})[k^2(\boldsymbol{R})\zeta(\boldsymbol{R}_\Sigma)\hat{I} + \mu(\boldsymbol{R})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \nabla_\tau\zeta(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times$$
$$\times \mu^{-1}(\boldsymbol{R})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \nabla_\tau] \cdot \boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{R})\}, \tag{3}$$

$\boldsymbol{J}_s \to \boldsymbol{M}_s$ при $\varepsilon \leftrightarrow \mu$, $\tilde{E} \to \tilde{H}$; (2), (3) представляют собой нелокальные граничные условия для случайного поля на детерминированной поверхности Σ.

Здесь и далее для произвольной векторной функции $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \equiv \equiv \boldsymbol{A}(u, v, \nu)$ используется обозначение $\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{A}(u, v, \nu) \cdot [\hat{I} - \boldsymbol{N}_\Sigma(\boldsymbol{R}_\Sigma(u, v)) \times \times \boldsymbol{N}_\Sigma(\boldsymbol{R}_\Sigma(u, v))]$; $\hat{I}$ — единичная диада, $k(\boldsymbol{R}) = k_0[\varepsilon(\boldsymbol{R})\mu(\boldsymbol{R})]^{1/2}$ ($\operatorname{Im} k \geqslant \geqslant 0$); $\{f(u, v, \nu)\} \equiv f(u, v, \nu + 0) - f(u, v, \nu - 0)$, ∇_τ — векторный, дифференциальный оператор: $\nabla_\tau = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{R}_\Sigma)h_u^{-1}(\boldsymbol{R}_\Sigma)\partial_u + \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{R}_\Sigma)h_v^{-1}(\boldsymbol{R}_\Sigma)\partial_v$, $\boldsymbol{u}_0 = h_u^{-1}\partial_u \boldsymbol{R}_\Sigma$ и $\boldsymbol{v}_0 = h_v^{-1}\partial_v \boldsymbol{R}_\Sigma$ — орты, касательные к координатным линиям на Σ, h_u и h_v — коэффициенты Ламе.

Соотношения (2), (3) получены с точностью до величин первого порядка малости относительно ζ и ее первых производных; отброшены также члены порядка $\zeta/R_{u,v}$, малые по сравнению с единицей (R_u и R_v — главные радиусы кривизны Σ). Иными словами, мы ограничиваемся рассмотрением шероховатостей, малых по высоте, и пологих не ровностей.

2. **Эквивалентные граничные условия.** Разобьем поле $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ на статистически среднюю и флуктуационную компоненты:

$$\tilde{E}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{E}_f(\boldsymbol{R}), \qquad \tilde{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{R}),$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \langle \tilde{E}(\boldsymbol{R})\rangle, \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \langle \tilde{H}(\boldsymbol{R})\rangle. \tag{4}$$

Сформулируем уравнения, управляющие распространением каждой из этих компонент.

Усредним задачу (1)—(3) по ансамблю реализацией неровностей В применении к уравнениям (1) эта операция сводится к замене $\tilde{E} \to \boldsymbol{E}$, $\tilde{H} \to \boldsymbol{H}$. Усреднение (2), (3) выполняем в рамках приближения Бурре метода корреляционных групп [5] в полной аналогии с работой [6]. При этом в качестве вспомогательного аппарата используются диадные функции Грина (ФГ) уравнений Максвелла $\hat{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ $(\alpha, \beta = e, m)$ для регулярной ($\zeta \equiv 0$) среды, с ровной поверхностью раздела Σ. ФГ определены выражением

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{R}) = \int d\boldsymbol{R}'\left[\hat{G}_{ee}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') + \hat{G}_{em}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}')\right],$$

$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{R}) = \int d\boldsymbol{R}'\left[\hat{G}_{me}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') + \hat{G}_{mm}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}')\right]$$

для первичного поля $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$, которое создают сторонние источники в регулярной среде. Для широкого круга сред они приведены в [7,8].

В результате получаем соотношения

$$\left\{\boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{R})\right\} = \int_\Sigma d\Sigma'\left\{\hat{M}_{ee}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{R}') + \right.$$

$$\left. + \hat{M}_{em}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{R}')\right\}, \tag{5}$$

$$\left\{\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{R})\right\} = \int_\Sigma d\Sigma'\left\{\hat{M}_{me}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{R}') + \right.$$

$$\left. + \hat{M}_{mm}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{R}')\right\};$$

$$\hat{M}_{ee}(\boldsymbol{R}_\Sigma \boldsymbol{R}') = k_0^{-2}[k_0^2\mu_-(\boldsymbol{R}_\Sigma)\hat{I} + \nabla_\tau \varepsilon_-^{-1}(\boldsymbol{R}_\Sigma)\nabla_\tau]\delta_\Sigma(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma) \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{v}_\varepsilon +$$

$$+ \{k_0^2\mu(\boldsymbol{R})\hat{I} + \nabla_\tau \varepsilon^{-1}(\boldsymbol{R})\nabla_\tau\} \cdot \hat{\Gamma}_{me} \cdot \boldsymbol{v}_\varepsilon, \tag{6}$$

$$\hat{M}_{em}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') = \{k_0^2\mu(\boldsymbol{R})\hat{I} + \nabla_\tau \varepsilon^{-1}(\boldsymbol{R})\nabla_\tau\} \cdot \hat{\Gamma}_{mm} \cdot \boldsymbol{v}_\mu.$$

Здесь скачок $\{...\}$ под интегралами в (5) вычисляется по переменной ν'; $d\Sigma'$ — элемент подстилающей поверхности, δ_Σ — поверхностная дельта-функция, такая, что $\int_\Sigma d\Sigma'\delta_\Sigma(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma) f(\boldsymbol{R}'_\Sigma) = f(\boldsymbol{R}_\Sigma)$, $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{v}_\mu$ — векторные дифференциальные операторы:

$$\boldsymbol{v}_\varepsilon \equiv k_0^2\varepsilon(\boldsymbol{R}')\,\mathrm{B}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma)\hat{I} + \nabla'_\tau \mathrm{B}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma)\mu^{-1}(\boldsymbol{R}')\nabla'_\tau, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v}_\mu \equiv k_0^2\mu(\boldsymbol{R}')\,\mathrm{B}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma)\hat{I} + \nabla'_\tau \mathrm{B}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma)\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{R}')\nabla'_\tau,$$

∇_τ и ∇'_τ действуют соответственно на переменные $\boldsymbol{R}_\Sigma$ и $\boldsymbol{R}'_\Sigma$ во всех функциях, стоящих справа от них (в том числе и справа от $\hat{M}_{\alpha\beta}$). Оператор ∇_ν действует (по переменной $\boldsymbol{R}_\Sigma$) только на функции $\delta_\Sigma(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}$ и $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta} \equiv \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma)$,

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta} \equiv \frac{c}{4\pi k_0^2} \lim_{\nu'' \to +0} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \hat{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{R}_\Sigma + \nu''\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma), \boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma). \tag{8}$$

Величины $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}$ относятся к классу обобщенных функций [8]. Обобщенными являются и производные от кусочно-гладкой функции $\mathrm{B}(\boldsymbol{R}_\Sigma \cdot \boldsymbol{R}'_\Sigma)$, так как она может иметь линии скачков, например на границе шероховатого участка. Поэтому все операции в (5), (6), включая предельный переход $v'' \to +0$ в определении $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}$, надлежит понимать в обобщенном смысле [9]. Положим, что В — дважды дифференцируемая функция. Тогда для перехода к обычным операциям математического анализа следует, подставив (6) в (5), вынести ∇_τ и lim за знак интеграла. В возникающих выражениях вида $\lim\limits_{v'' \to +0} \nabla_\tau \nabla_\tau \int d\Sigma' \nabla'_\tau \nabla'_\tau \ldots$ операции понимаются в обычном смысле и выполняются справа налево.

Вычтем теперь из (1) уравнения Максвелла для среднего поля. Получаем, что вне Σ флуктуационное поле подчиняется однородным уравнениям

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_f + ik_0 \varepsilon \boldsymbol{E}_f = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E}_f - ik_0 \mu \boldsymbol{H}_f = 0. \tag{9}$$

Вычитание из «перенесенных» граничных условий (2) соотношений (5) после несложных преобразований дает следующий результат:

$$\begin{gathered}
\{\boldsymbol{E}_{f\tau}(\boldsymbol{R})\} = \int\limits_{\Sigma} d\Sigma' \{\hat{M}_{ee}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{E}_{f\tau}(\boldsymbol{R}') + \\
+ \hat{M}_{em}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{H}_{f\tau}(\boldsymbol{R}')\} + (4\pi/c)\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{M}_f(\boldsymbol{R}_\Sigma), \\
\{\boldsymbol{H}_{f\tau}(\boldsymbol{R})\} = \int\limits_{\Sigma} d\Sigma' \{\hat{M}_{me}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{E}_{f\tau}(\boldsymbol{R}') + \\
+ \hat{M}_{mm}(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}') \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}'_\Sigma) \times \boldsymbol{H}_{f\tau}(\boldsymbol{R}')\} - (4\pi/c)\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}_\Sigma) \times \boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{R}_\Sigma),
\end{gathered} \tag{10}$$

$\boldsymbol{J}_f$, $\boldsymbol{M}_f$ получаются из соответственных выражений (3) для $\boldsymbol{J}_s$, $\boldsymbol{M}_s$ заменой $\tilde{E} \to \boldsymbol{E}$, $\tilde{H} \to \boldsymbol{H}$.

То обстоятельство, что подстилающая поверхность покрыта шероховатостями, оказалось учтенным с помощью нелокальных соотношений (5), (6), (10), которые выступают в роли эквивалентных граничных условий (ЭГУ). Это — главный результат данной работы.

Примечательно, что характер неоднородности среды проявляется в ЭГУ «скрытым» образом — посредством ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}$. Для рассмотренных ранее моделей (плоская в среднем граница, однородная или слоистая среда) ЭГУ (5) переходят в известные результаты [1–3, 6].

3. Поперечно-неоднородная среда. Пусть Σ имеет вид цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z, а материальные параметры регулярной среды зависят от поперечных координат x, y, т. е. $\Sigma = (\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_L(u),\ -\infty < z < +\infty)$, $\boldsymbol{\rho} = (x, y, 0)$, $\varepsilon_\pm \equiv \varepsilon_\pm(\boldsymbol{\rho})$, $\mu_\pm \equiv \mu_\pm(\boldsymbol{\rho})$. Допустим, что шероховатости статистически однородные в продольном направлении: $B(\boldsymbol{R}_\Sigma, \boldsymbol{R}'_\Sigma) \equiv B(\boldsymbol{\rho}_L, \boldsymbol{\rho}'_L, z - z')$. Здесь координата v отождествлена с z, u параметризует контур L сечения $z = 0$ поверхности Σ, $\boldsymbol{\rho}_L$ — произвольная точка на этом контуре. Очевидно, что $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho}(u, v) + \boldsymbol{z}_0 z$, $\boldsymbol{\rho}(u, v) = \boldsymbol{\rho}_L(u) + v\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\rho}_L(u))$, где $\boldsymbol{z}_0$ — орт оси z. Соответствие $\boldsymbol{\rho} \equiv \boldsymbol{\rho}(u, v)$, $\boldsymbol{\rho}_L \equiv \boldsymbol{\rho}_L(u)$ подразумеваем всюду без упоминаний.

Пусть среднее поле имеет вид пространственной гармоники $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\rho}) \exp(i\varkappa z)$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\rho}) \exp(i\varkappa z)$, где $\varkappa$ — (комплексное) волновое число. Тогда (5) преобразуются к ЭГУ для векторных амплитуд:

$$\{\boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{\rho})\} = \int\limits_L \{\hat{M}_{ee}(\boldsymbol{\rho}_L, \boldsymbol{\rho}'|\varkappa) \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\rho}'_L) \times \boldsymbol{E}_\tau(\boldsymbol{\rho}') + \hat{M}_{em}(\boldsymbol{\rho}_L, \boldsymbol{\rho}'|\varkappa) \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\rho}'_L) \times \boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{\rho}')\} dl',$$

$$\{H_\tau(\rho)\} = \int_L \{\hat{M}_{me}(\rho_L, \rho'|\varkappa)\cdot N(\rho'_L)\times E_\tau(\rho') + \hat{M}_{mm}(\rho_L, \rho'|\varkappa)\cdot N(\rho'_L)\times H_\tau(\rho')\}dl'. \tag{11}$$

Здесь dl' — элемент длины контура L, операторы $\hat{M}_{\alpha\beta}(\rho_L,\rho'|\varkappa)$ приведены в Приложении.

Проиллюстрируем «накопление» возмущений на примере собственных волн среднего поля. Последние определим как убывающие при $\rho\to+\infty$ пространственные гармоники, удовлетворяющие однородным ($J=M\equiv0$) уравнениям Максвелла и ЭГУ (11).

Пусть $\varkappa$ и $\varkappa_0$ — однократные точки дискретного спектра, соответственно, задачи на собственные волны среднего поля и невозмущенной ($\hat{M}_{\alpha\beta}\equiv0$) задачи, $E(\rho)$, $H(\rho)$ и $E_0(\rho)$, $H_0(\rho)$ — отвечающие им векторные амплитуды собственных волн, причем $\varkappa\to\varkappa_0$, $E\to E_0$, $H\to H_0$, когда $\hat{M}_{\alpha\beta}\to0$. Рассматриваются волны, идущие как вдоль оси z ($\mathrm{Re}\,\varkappa$, $\mathrm{Re}\,\varkappa_0>0$), так и в обратном направлении ($\mathrm{Re}\,\varkappa$, $\mathrm{Re}\,\varkappa_0<0$). Взяв за образец выкладки работы [10], нетрудно получить (с точностью до линейных по $\hat{M}_{\alpha\beta}$ величин) формулу $\varkappa=\varkappa_0+Q_0/2P_0$, где

$$P_0=(c/8\pi)\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} dxdy\,z_0\cdot E_0(\rho)\times H_0(\rho),$$

$$Q_0=(c/8\pi i)\int\limits_L\int\limits_L N(\rho_L)\times[Q_0^m+Q_0^e]\cdot N(\rho'_L)dldl',$$

$$Q_0^m=[H_{-0}(\rho_L)\cdot\{\hat{M}_{ee}(\rho_L,\rho'|\varkappa_0)\}+E_{-0}(\rho_L)\cdot\{\hat{M}_{me}(\rho_L,\rho'|\varkappa_0)\}]\times E_0(\rho'_L), \tag{12}$$

$$Q_0^e=[H_{-0}(\rho_L)\cdot\{\hat{M}_{em}(\rho_L,\rho'|\varkappa_0)\}+E_{-0}(\rho_L)\{\hat{M}_{mm}(\rho_L,\rho'_L|\varkappa_0)\}]\times H_0(\rho'_L).$$

Здесь $E_{-0}(\rho)=-E_{0t}(\rho)+E_{0z}(\rho)$, $H_{-0}(\rho)=H_{0t}(\rho)-H_{0z}(\rho)$ — амплитуды собственной волны, отвечающей волновому числу $\varkappa_{-0}=-\varkappa_0$, $E_{0t,z}$, $H_{0t,z}$ — перпендикулярные (t) и параллельные (z) оси z составляющие векторов E_0, H_0.

Таким образом, шероховатости приводят к сдвигу волновых чисел дискретного спектра $\varkappa_0$ на малую ($\sim\hat{M}_{\alpha\beta}$) комплекснозначную добавку $\delta\varkappa_0=Q_0/2P_0$. Можно показать, что если $\mathrm{B}(\rho_L,\rho'_L,z)=\mathrm{B}(\rho_L,\rho'_L,-z)$, то добавки $\delta\varkappa_0$ и $\delta\varkappa_{-0}$ связаны равенством $\delta\varkappa_{-0}=-\delta\varkappa_0$. В общем же случае направление вдоль оси z и обратное ему оказываются физически неэквивалентными: $\delta\varkappa_{-0}\neq-\delta\varkappa_0$. В среде без омических потерь для затухания $\gamma_0=\mathrm{Im}\,\delta\varkappa_0$ получается выражение в виде суммы вкладов за счет рассеяния в распространяющиеся собственные волны регулярной среды («оптическая теорема»).

Полученные формулы решают, в частности, задачу о сдвиге волновых чисел дискретного спектра в открытом цилиндрическом волноводе под действием неровностей границы. Аналогичная задача для открытого планарного волновода решена в [4], а для закрытого волновода — в [1].

Полученные результаты допускают очевидное обобщение на случай многосвязной или незамкнутой подстилающей поверхности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\hat{M}_{ee}(\rho_L,\rho'|\varkappa)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\varkappa'[(\mu_-(\rho_L)\hat{I}+k_0^{-2}d(\rho_L,\varkappa)\varepsilon_-^{-1}(\rho_L)d(\rho_L,\varkappa'))\delta_L(\rho_L,\rho'_L)\cdot N(\rho_L)\times$$

$$\times w_\varepsilon + \{k_0^2\mu(\rho)\hat{I} + d(\rho_L, \varkappa)\varepsilon^{-1}(\rho)d(\rho_L, \varkappa')\}\cdot\hat{\Gamma}^{(F)}_{me}\cdot w_\varepsilon],$$

$$\hat{M}_{em}(\rho_L, \rho'|\varkappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa'\{k_0^2\mu(\rho)\hat{I} + d(\rho_L, \varkappa)\varepsilon^{-1}(\rho)d(\rho_L, \varkappa')\}\cdot\hat{\Gamma}^{(F)}_{mm}\cdot w_\mu,$$

$$\hat{M}_{ee}\to\hat{M}_{mm},\quad \hat{M}_{em}\to-\hat{M}_{me}\ (\varepsilon\leftrightarrow\mu,\ \hat{\Gamma}^{(F)}_{mm}\to\hat{\Gamma}^{(F)}_{ee},\quad \hat{\Gamma}^{(F)}_{me}\to-\hat{\Gamma}^{(F)}_{em});$$

$$w_\varepsilon = k_0^2\varepsilon(\rho')\mathrm{B}^{(F)} + d(\rho_L', \varkappa')\mathrm{B}^{(F)}\mu^{-1}(\rho')d(\rho_L', \varkappa),$$

$$w_\mu = k_0^2\mu(\rho')\mathrm{B}^{(F)} + d(\rho_L', \varkappa')\mathrm{B}^{(F)}\varepsilon^{-1}(\rho')d(\rho_L', \varkappa).$$

Здесь $\mathrm{B}^{(F)} \equiv (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\mathrm{B}(\rho_L, \rho_L', z)\exp[i(\varkappa'-\varkappa)z]$, $\delta_L(\rho_L, \rho_L')$ — контурная дельта-функция такая, что $\int_L dl'\delta_L(\rho_L, \rho_L')f(\rho_L') = f(\rho_L)$; $d(\rho_L, \varkappa) = u_0(\rho_L)h_u^{-1}(\rho_L)\partial_u + i\varkappa z_0$. Дифференциальные операторы $d(\rho_L...)$ и $d(\rho_L'...)$ действуют по ρ_L, ρ_L' на все функции соответствующих переменных справа от них (в том числе и справа от $\hat{M}_{\alpha\beta}$ в (9), (11)); $d(\rho_L...)$ действует (по ρ_L) только на δ_L и на $\hat{\Gamma}^{(F)}_{\alpha\beta} \equiv \hat{\Gamma}^{(F)}_{\alpha\beta}(\rho_L, \rho_L', \varkappa') = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}(R_\Sigma, R_\Sigma')\exp[i\varkappa'(z'-z)]$. Особенности $\hat{\Gamma}^{(F)}_{\alpha\beta}(\rho_L, \rho_L', \varkappa')$ в комплексной плоскости $\varkappa'$ считаются смещенными с вещественной оси за счет омических потерь (возможно, исчезающих малых, $\mathrm{Im}\,k_0 = +0$) в среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
2. Басс Ф. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3. № 1. С. 72.
3. Брюховецкий А С., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 11. С. 1400.
4. Жук Н. П., Третьяков О А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 1. С. 79.
5. Frisch U. In· Probabilistic methods in applied mathematics. — N.Y.: Academic Press, 1968. V 1. P. 75.
6. Жук Н. П, Третьяков О. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 12. С. 1476.
7. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1982. Т. 2
8. Жук Н. П., Третьяков О А. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 5. С. 869.
9. Гельфанд И. М, Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.
10. Шевченко В. В. // Изв. вузов Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 5. С. 9.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 8 октября 1987 г.

BOUNDARY CONDITIONS FOR ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE CASE OF ROUGH BOUNDARY

O. A. Tret'yakov, N. P. Zhuck

We present the equivalent boundary conditions for mean and fluctuating components of electromagnetic field to deal with the statistically rough boundary of arbitrary mean shape separating two arbitrary inhomogeneous media. They are applied to the open cylindrical waveguide with rough boundary for which the shift of eigenvalues caused by roughness is obtained.