

УДК 538.574.6

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА РЕШЕТКАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

С. Н. Воробьев, Е. В. Замятин, С. Л. Просвирнин

Изложен метод решения двумерных задач дифракции волн на решетках из идеально проводящих элементов со случайными флуктуациями параметров. Для иллюстрации возможностей метода рассмотрено решение задачи дифракции H -поляризованной электромагнитной волны на решетке из наклонных металлических лент с флуктуациями положения их в плоскости решетки. Проведен анализ физических результатов и сравнение их с данными, полученными другими методами.

Реальные дифракционные решетки, которые в настоящее время рассчитываются на основе теорий, существенным образом зависящих от строгой периодичности структуры, никогда не являются идеально периодическими. Это обусловлено рядом причин, таких, как ошибки в изготовлении, температурные и иные деформации, которые, как правило, носят случайный характер. В силу этого рассеянное поле при различных реализациях структуры в той или иной степени отличается от поля, рассеянного идеальной бесконечной периодической решеткой [1].

Целью работы является развитие метода решения двумерных задач дифракции волн на решетках из идеально проводящих элементов со случайными флуктуациями параметров, например периода, размеров элементов. Предполагается, что средние параметры решетки совпадают с параметрами идеальной периодической структуры.

Пусть на дифракционную решетку под углом α падает плоская H -поляризованная электромагнитная волна $H_i(\mathbf{r})$. Для случая E -поляризации решение задачи строится аналогично и не имеет принципиальных отличий, поэтому будем рассматривать только случай H -поляризации. Полное поле представим в виде суперпозиции потенциалов двойного слоя (в случае E -поляризации — в виде потенциалов простого слоя):

$$H_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{L}_n} \tilde{\mu}_n(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' \in \tilde{L}_n,$$

где штрихом обозначены координаты интегрирования, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина свободного пространства, \tilde{L}_n — контур n -го элемента флуктуирующей решетки, который пока не конкретизируется, V — внешняя нормаль к контуру. Из граничных условий на поверхности идеально проводящего элемента получим систему интегральных уравнений относительно неизвестной плотности тока на ленте — $\tilde{\mu}_n(\mathbf{r})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial V} \int_{\tilde{L}_n} \tilde{\mu}_n(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}' = -\frac{\partial H_i(\mathbf{r})}{\partial V}, \quad \mathbf{r} \in \tilde{L}_n. \quad (1)$$

Совокупность случайных функций $\tilde{\mu}_n(\mathbf{r})$ образует статистически однородный процесс. Предположим, что законы распределения флуктуаций параметров одинаковы для всех элементов решетки. Это позволяет определить статистические характеристики тока для одного элемента, а затем распространить полученный результат на всю решетку. В этом случае для рассеянного поля имеет место периодический статистически неоднородный процесс, характеристики которого имеют функциональную связь с характеристиками исходного однородного процесса [2].

Для определения тока на флуктуирующих элементах используется приближение заданного поля: ток определяется суперпозицией поля $H_i(\mathbf{r})$ и поля, созданного токами на остальных элементах. При этом ток на элементах, достаточно удаленных от выбранного, считается равным току на элементах идеальной периодической решетки.

Рассмотрим решетку, в которой флуктуирует только группа из $2N+1$ элементов в окрестности элемента с номером $n=0$. Флуктуации токов на них коррелированы с флуктуациями токов на элементах с номерами $-M \leq n \leq M$, при этом $M \geq N$, тогда уравнение (1) можно заменить приближенным уравнением

$$\sum_{|n| < M} \frac{\partial}{\partial V} \int_{\tilde{L}_n} \tilde{\mu}_n(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}' = - \frac{\partial H_i(\mathbf{r})}{\partial V} - \sum_{|n| > M} \frac{\partial}{\partial V} \int_{L_n} \mu_n(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}', \quad (2)$$

где $\mu_n(\mathbf{r})$ — известная плотность токов на элементах идеальной решетки, а L_n — контур элемента с номером n . Уравнение (2) описывает дифракцию заданного поля на ограниченной решетке из $2M+1$ элементов. Его решение можно найти, например, с помощью обобщенного метода наведенных ЭДС [3].

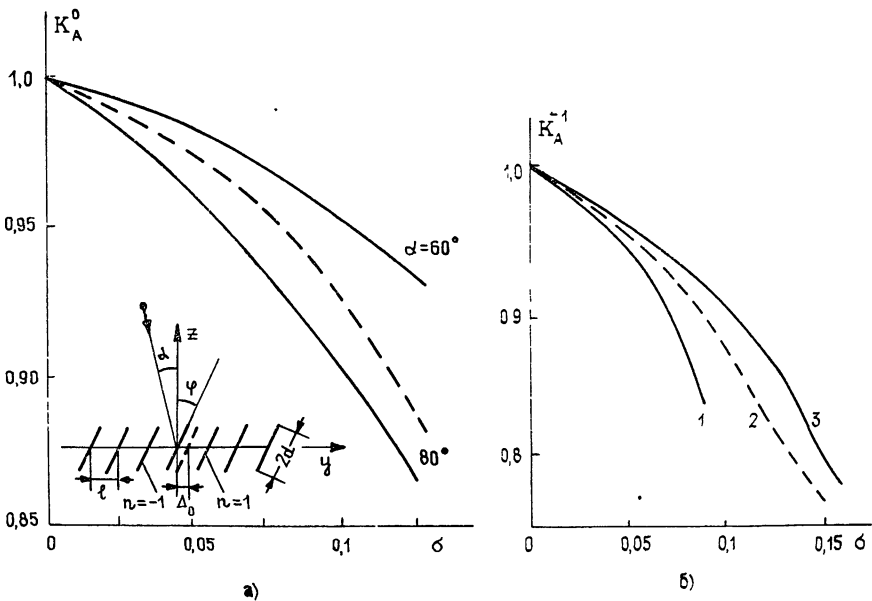


Рис. 1.

Предположим, для определенности, что флуктуирует один параметр решетки — положение элемента (рис. 1а). Флуктуации описываются случайными величинами $\delta_n = \Delta_n/l$, где l — период идеальной ре-

шетки, Δ_n — смещение n -го элемента относительно его положения в идеальной структуре. Тогда ток на элементе с номером n зависит и от $\{\delta_n\}_{n=-N}^N$: $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_n(\mathbf{r}, \delta_{-N}, \dots, \delta_N)$. Рассеянное поле будем искать в локальной декартовой системе координат, связанной с нулевым элементом. Вклад в рассеянное поле элемента с номером $n=0$ имеет вид

$$H_s^{(0)}(\mathbf{r}) = \exp(ik\Delta_0 \sin \alpha) \int_{\tilde{L}_0} \tilde{\mu}_0(\mathbf{r}', \delta_{-N}, \dots, \delta_N) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}',$$

где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число.

Поле, рассеянное n -м элементом в локальной системе координат, связанной с центром этого элемента, можно записать в виде

$$H_s^{(n)}(\mathbf{r}) = \exp[ik(l_n + \Delta_n) \sin \alpha] \int_{\tilde{L}_n} \tilde{\mu}_0(\mathbf{r}', \delta_{-N+n}, \dots, \delta_{N+n}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}'. \quad (3)$$

Представим функции $\tilde{\mu}_n(\mathbf{r}, \delta_{-N}, \dots, \delta_N)$ в уравнении (2) в виде разложения по некоторому детерминированному ортогональному базису $\{\psi_m(\mathbf{r})\}_{m=1}^{\infty}$: $\tilde{\mu}_n(\mathbf{r}, \delta_{-N}, \dots, \delta_N) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \psi_m(\mathbf{r})$. Затем, используя метод Галеркина, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_{mn} , зависящих от параметров δ_n :

$$\sum_{|n| < M} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mns} C_{mn} = F_s, \quad (4)$$

где матричные элементы W_{mns} имеют следующий вид:

$$W_{mns} = \int_{\tilde{L}_0} \int_{\tilde{L}_n} \psi_m(\mathbf{r}') \psi_s(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial V'} d\mathbf{r}' d\mathbf{r},$$

а свободный член системы (4) $F_s = \int_{\tilde{L}_n} U(\mathbf{r}) \psi_s(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, где $U(\mathbf{r})$ — извест-

ная правая часть уравнения (2). Для решения системы (4) при небольших флуктуациях в самом общем случае можно воспользоваться методом возмущений, т. е. представить величины C_{mn} , W_{mns} и F_s (являющиеся случайными вследствие того, что интегрирование проводится по контуру \tilde{L}_n , зависящему от случайных флуктуаций периода) в виде разложения по степеням малых параметров $\{\delta_n\}_{n=-N}^N$. После определенных преобразований получим систему уравнений для нахождения каждого члена этого разложения.

Конкретный выбор базисных функций $\psi_m(\mathbf{r})$ и вид систем уравнений определяется геометрией структуры.

Для иллюстрации возможностей метода рассмотрим решение задачи дифракции на классической структуре — решетке из наклонных металлических лент (рис. 1а). Решетка расположена в плоскости xOy ; ленты наклонены под углом φ к оси Oz , их ширина $2d$. Вводя спектральные плотности токов так же, как в [4], можно заменить уравнение (2) системой парных интегральных уравнений. Для простоты ограничимся первым приближением, полагая $M=0$ в (2). Выберем систему базисных функций в виде [5]: $\psi_m(\xi) = (\sqrt{m}/\xi) J_m(kd\xi)$, где $J_m(\xi)$ — функция Бесселя m -го порядка. Используя метод Галеркина, удастся в явном виде обратить сингулярную статическую часть оператора задачи дифракции на одной ленте и свести решение парных интеграль-

ных уравнений к решению корректной системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмового типа [4]: $\tilde{C} = \tilde{F} + W\tilde{C}$. Здесь матричные элементы W_{mn} удается получить в детерминированном виде:

$$W_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(\xi) \psi_n(\xi) |\xi| \varepsilon(\xi) d\xi, \quad \gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} = i\xi[1 - \varepsilon(\xi)].$$

Для функции $\gamma(\xi)$ выбрана ветвь корня, обеспечивающая выполнение условия излучения. Свободный член системы равен

$$\tilde{F}_n = -i\eta \sin(\alpha + \varphi) \psi_m[\eta \cos(\alpha + \varphi)] (-1)^n \exp(2i\pi\kappa\delta \sin \alpha) + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \tilde{Q}_{ns},$$

где $\kappa = l/\lambda$, $\eta = 2\pi d/l$, C_s — известные коэффициенты разложения тока на ленте в идеальной периодической решетке по выбранному базису $\psi_m(\xi)$. Матричные элементы \tilde{Q}_{ns} после преобразований необходимых для исключения полюсов (соответствующих распространяющимся дифракционным гармоникам) на действительной оси, аналогично [4], имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ns} = & \int_0^B \left[E_{ns}(\xi) \tilde{H}_{ns} - \sum_{p=-m^-}^{m^+} \left(\frac{\Phi_{nsp}^-}{\xi - \xi_p^-} - \frac{\Phi_{nsp}^+}{\xi - \xi_p^+} \right) H(\xi, \delta) \right] d\xi + \\ & + \frac{V(\delta, \xi)}{\theta^2} \sum_{p=-m^-}^{m^+} \left[H(\delta, \xi_p^-) \Phi_{nsp}^- \left(\ln \frac{B - \xi_p^-}{\xi_p^-} - i\pi \right) - H(\delta, \xi_p^+) \times \right. \\ & \left. \times \Phi_{nsp}^+ \left(\ln \frac{B - \xi_p^+}{\xi_p^+} + i\pi \right) \right] + \int_B^{\infty} E_{ns}(\xi) \tilde{H}_{ns} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$E_{ns}(\xi) = \psi_n(\xi) \psi_s(\xi) \gamma(\xi), \quad \tilde{H}_{ns} = H(\xi, \delta) + (-1)^{ns} H(-\xi, \delta), \quad B > \eta,$$

$$H(\xi, \delta) = e^{-i\delta\theta \cos \varphi} \frac{\cos[\beta(1+\delta)] + e^{i\varphi} \cos \theta\beta}{\cos q - \cos \theta\beta}, \quad \beta = \gamma(\xi) \cos \varphi,$$

$$q = \theta(\eta \sin \alpha - \xi \sin \varphi), \quad \theta = l/d, \quad \Phi_{nsp}^{\pm} = \text{sign}(\xi_p^{\pm}) \frac{E_{ns}(\xi_p^{\pm})}{\sin \xi_p^{\pm}} (\cos \theta\beta - e^{i\varphi}),$$

$$\xi_p^{\pm} = \pm \frac{\cos \varphi}{\theta} \sqrt{1 - 2\pi(\sin \alpha - \rho)}, \quad m^{\pm} = \text{ent}[\kappa(1 \mp \sin \alpha)],$$

$$V(\delta, \xi) = \exp\{i\delta\theta(\xi \sin \varphi - \beta \sin \theta\beta)\} / (\cos \theta\beta + e^{i\varphi}).$$

На основе построенного решения задачи создан эффективный численный алгоритм расчета статистических характеристик амплитуды рассеянного поля, реализованный на ЭВМ БЭСМ-6.

С помощью метода, изложенного в [6], получены статистические характеристики полей, рассеянных ограниченной в среднем эквидистантной решеткой из 11 лент с флуктуациями в расположении элементов в плоскости решетки. Выбор количества элементов обусловлен тем, что, как показано в [6, 8], такая ограниченная решетка по своим электродинамическим характеристикам с точностью порядка одного

процента соответствует свойствам эквивалентной периодической структуры.

На основе строгого решения задачи рассеяния на ограниченной решетке с произвольным расположением лент был набран ансамбль реализаций рассеянного поля, обеспечивающий доверительный интервал 0,97—0,99, который обработан обычным методом. Имеет смысл сравнить статистические характеристики ограниченной решетки [8], полученные на основе строгого решения, и результаты, полученные предлагаемым методом для бесконечной, в среднем периодической, решетки с малыми флуктуациями в расположении элементов. Это позволит оценить границы применимости метода и убедиться в его достоверности.

Для сравнения была выбрана область параметров решетки с гладким участком дисперсионной зависимости, так как на практике часто используются решетки именно с такими параметрами: $\kappa=0,9$, $\theta=0,125$. Угол наклона лент был выбран $\varphi=10^\circ$.

На рис. 1а, б представлены коэффициенты, характеризующие амплитуду n -й гармоники в направлении ее излучения: $K_A^n = \bar{A}_n / A_n$, где \bar{A}_n — средняя амплитуда n -й гармоники, A_n — ее амплитуда в идеальной структуре. На рис. 1а приведена зависимость K_A^0 , на рис. 1б K_A^{-1} от среднеквадратичной величины флуктуаций σ . Область определения σ выбрана так, чтобы было выполнено условие применимости борновского приближения по флуктуационному полю, которое в данном случае является более грубым приближением, чем рассматриваемое ($\sigma \leq 0,15$).

На рис. 1а сплошными линиями показаны зависимости, полученные для ограниченной решетки (в случае равномерного распределения δ_n), штриховой — рассчитанная для бесконечной решетки. Существенное их отличие — отсутствие для бесконечной решетки зависимости K_A^0 от угла падения возбуждающей волны α . Это обусловлено конечностью размеров ограниченной решетки, что приводит к качественно отличающимся свойствам — в ограниченной решетке рассеянное поле имеет вид непрерывной по углам функции, в бесконечной же рассеянное поле представляет собой дискретный спектр дифракционных гармоник.

На рис. 1б приведена зависимость K_A^{-1} от σ . Линия 1 соответствует случаю отсутствия взаимодействия между лентами в бесконечной решетке, простая асимптотическая формула для которого была получена в [7]. Кривая 2 — случай ограниченной решетки, кривая 3 получена предлагаемым методом. Заметим, что K_A^{-1} весьма слабо зависит от α как для ограниченной, так и для бесконечной решетки. Анализ полученных данных позволяет заключить, что мы наблюдаем эффект, аналогичный эффекту предельного коэффициента направленного действия [1] в статистической теории антенн, что свидетельствует о качественном совпадении результатов, полученных различными методами.

На рис. 2а представлена зависимость K_A^0 от частотного параметра κ при различных значениях σ для периодической решетки. С увеличением κ флуктуации положения лент сильнее влияют на изменения амплитуды дифракционных гармоник. Это объясняется тем, что с ростом κ сдвиги Δ_n оказываются соизмеримыми с длиной волны, что и приводит к большему влиянию флуктуаций. Для K_A^0 из приведенных данных можно получить простой эмпирический закон, хорошо описывающий зависимость $K_A^0(\delta, \kappa)$ в пределах рассматриваемой геометрии решетки и выбранного значения κ :

$$K_A^0(\delta, \kappa) = -129,7\sigma^2 + (11,78\kappa - 14,55)\sigma + 0,99\kappa + 12,99.$$

Подобные выражения удобны для использования в задачах оптимизации параметров, нахождения допусков и т. д.

Следует также отметить, что характер зависимостей K_A^0 и K_A^{-1} от σ близок, что отличается от случая ограниченной решетки ($K_A^0 > K_A^{-1}$) [8] и решетки без учета взаимодействия между элементами ($K_A^0 = 0$) [7]. Таким образом, учет взаимодействия между бесконечным числом элементов сглаживает различие во влиянии флуктуаций элементов на амплитуды распространяющихся дифракционных гармоник.

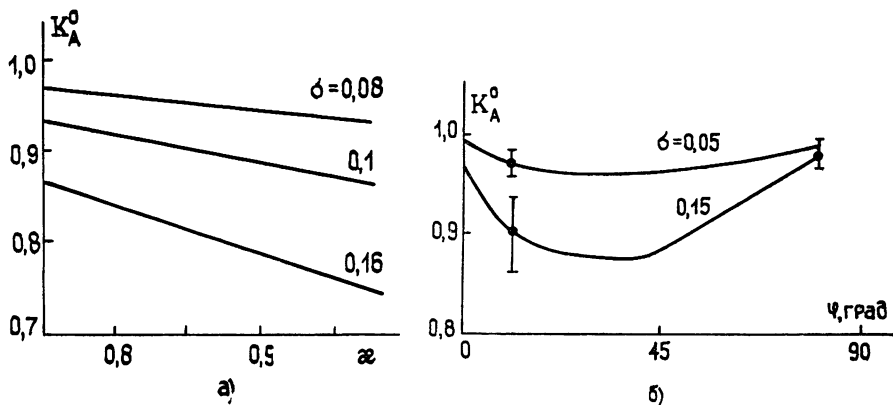


Рис. 2.

На рис. 2б изображены зависимости K_A^0 от угла наклона лент ϕ . Вертикальными отрезками показаны пределы изменения K_A^0 для ограниченной решетки в зависимости от угла падения плоской волны α ($0 < \alpha < 85^\circ$) при данных ϕ и σ . Видно, что существуют углы, при которых влияние флуктуаций максимально.

На рис. 3 показана зависимость дисперсии D амплитуды основной волны, нормированной на амплитуду нулевой дифракционной гармоники идеальной решетки от σ . Сплошные кривые соответствуют ограниченной решетке, штриховые — бесконечной. Отметим, что D быстро возрастает с ростом σ и существенно зависит от угла наклона лент.

Кроме того, косвенным методом из энергетических соображений можно оценить среднюю амплитуду флуктуационной части рассеянного поля, т. е. поля, имеющего равномерный по углам характер. В приведенных пределах изменения σ эта величина имеет порядок 1—3% амплитуды падающего поля.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет рассчитывать все основные статистические характеристики периодических дифракционных решеток, что наглядно иллюстрируется данными, полученными для решетки из тонких наклонных лент. Реализация предлагаемого метода на ЭВМ более проста, чем в случае строгого решения задачи дифракции для неэквидистантных решеток из конечного числа лент [6], так как получение статистических характеристик рассеянного поля является математической частью самого метода и не требует усреднения по ансамблю реализаций [8].

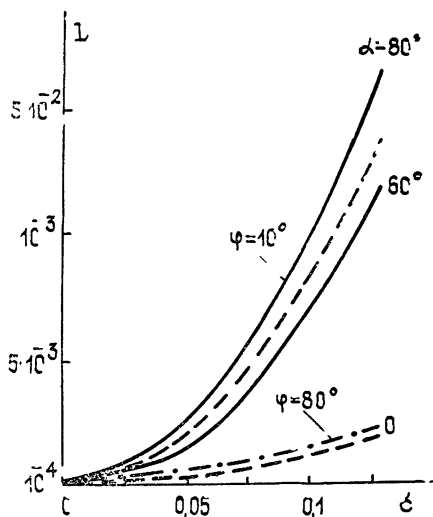


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шляфрин Я. С. Статистическая теория антенн. — М.: Сов. радио, 1970. — 380 с.
2. Гудзенко Л. И. // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4. Вып. 6. С. 1062
3. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983. — 296 с.
4. Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. // ЖВММФ. 1986. Т. 26. Вып. 6. С. 894.
5. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. — Киев: Наукова думка, 1984. — 240 с.
6. Воробьев С. Н. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 4. С. 687. -
7. Замятин Е. В., Просвирнин С. Л. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 11. С. 2124.
8. Воробьев С. Н., Замятин Е. В., Просвирнин С. Л. // Тезисы докл. XLII Всесоюзной научной сессии НТО РЭС им. А. С. Попова, посвященной Дню радио. — М.: Радио и связь, 1987. Ч. 2. С. 3.

Радиоастрономический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
10 декабря 1987 г.

THE METHOD OF THE PROBLEM SOLUTION FOR THE WAVE DIFFRACTION BY GRATINGS WITH RANDOM FLUCTUATIONS OF THE PARAMETERS

S. N. Vorob'ev, E. V. Zamyatin, S. L. Prosvirnin

The method for solution of two-dimensional problem of the wave diffraction by gratings, consisting of perfectly conducting elements with random fluctuations of their parameters has been obtained. Diffraction of H -polarized electromagnetic wave by the grating which consists of inclined metal strips is investigated to demonstrate the facilities of constructed method. The physical results, the analysis and comparison with data, which is calculated using other methods, is also given.
