ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 9 *РАДИОФИЗИКА* *1989*

УДК 538.56:519.25

ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТОЙ РЕГУЛЯРНО- И СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Б. М. Шевцов

На основе метода инвариантного погружения предложен обобщенный вариант диффузионного приближения и с его помощью исследуются статистические характеристики монохроматической волны, рассеянной назад в слоистой регулярно- и случайно-неоднородной среде. Обсуждается метод решения статистической задачи, если решение задачи с регулярными неоднородностями предварительно известно

В последнее время на основе метода инвариантного погружения широко исследуется рассеяние волн в неоднородных средах [1]. Были решены задачи как в случайно-, так и в регулярно-неоднородных средах. Совместное же рассмотрение двух типов неоднородностей представляет определенные трудности [1–3]. Для решения задач со случайными неоднородностями эффективно используется диффузионное приближение. Представляет интерес расширить применимость этого приближения и на случай, когда рассеяние происходит в среде с двумя типами неоднородностей.

Рассмотрим слой неоднородной среды, занимающей часть пространства $0 \leqslant x \leqslant L$. Отклонение диэлектрической проницаемости от единицы $\varepsilon(x)$ вне слоя равно нулю. Справа вдоль оси x на слой падает монохроматическая волна. Поле в слое и вне его описывается уравнением Гельмгольца с условиями непрерывности поля и его нормальной производной на границах. Коэффициент отражения волны от слоя R_L удовлетворяет уравнению Риккати [1]

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L + \frac{i\varkappa}{2} \varepsilon(L)(1+R_L)^2 \tag{1}$$

с начальным условием $R_{L=0} = 0$, где $k = \varkappa + i\gamma$, $\varkappa$ — волновое число задачи, γ — коэффициент затухания волны. Характеристику неоднородностей среды представим в виде $\varepsilon(L) = \varepsilon_0(L) + \tilde{\varepsilon}(L)$, где $\varepsilon_0(L)$ — детерминированная функция, $\tilde{\varepsilon}(L)$ — гауссов случайный процесс с параметрами $\langle\tilde{\varepsilon}(L)\rangle = 0$, $\langle\tilde{\varepsilon}(L)\tilde{\varepsilon}(L')\rangle = 2\sigma^2 l\delta(L-L')$. Отметим, что результаты дельта-коррелированного приближения легко обобщаются и на случай с конечным радиусом корреляции [1].

Представим коэффициент отражения в виде $R_L = \rho_L \exp(i\theta_L)$, $\rho_L = \sqrt{(u_L-1)/(u_L+1)}$, $\theta_L = 2\varkappa L + \varphi_L$. Согласно уравнению (1) получаем

$$\frac{d}{dL} u_L = -2\gamma(u_L^2-1) + \varkappa\varepsilon(L)\sqrt{u_L^2-1}\sin\theta_L,$$
$$\frac{d}{dL}\varphi_L = \varkappa\varepsilon(L)\left[1 + \frac{u_L}{\sqrt{u_L^2-1}}\cos\theta_L\right]. \tag{1a}$$

Следуя [1], с помощью (1а) найдем уравнение для величины $P_L(u,\varphi) = \langle\delta(u_L-u)\delta(\varphi_L-\varphi)\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализации $\tilde{\varepsilon}(L)$:

$$\frac{\partial}{\partial L} P_L(u, \varphi) = 2\gamma \frac{d}{du}(u^2-1) P_L(u, \varphi) -$$

$$- \varkappa\varepsilon_0(L) \sin(2\varkappa L+\varphi) \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{u^2-1}\, P_L(u, \varphi) - \tag{2}$$

$$- \varkappa\varepsilon_0(L) \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \cos(2\varkappa L+\varphi)\right] P_L(u, \varphi) +$$

$$+ D\left\{\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{u^2-1} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \cos(2\varkappa L+\varphi)\right]\right\}^2 P_L(u, \varphi),$$

где $D = \varkappa^2\sigma^2 l/2$.

Если предположить, что неоднородности среды слабые, т. е. $|\varepsilon_0(L)| \ll 1$ и $|\tilde{\varepsilon}(L)| \ll 1$, то статистические характеристики волны, а именно $P_L(u, \varphi)$, меняются медленно на масштабах по L порядка длины волны $\lambda = 2\pi/\varkappa$, поэтому в уравнении (2) можно провести дополнительное усреднение коэффициентов по периоду быстрых осцилляций. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial L} P_L(u, \varphi) = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u}(u^2-1) P_L(u, \varphi) -$$

$$- s_L(\varphi) \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{u^2-1}\, P_L(u, \varphi) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\mu_L + c_L(\varphi) \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right] P_L(u, \varphi) + \tag{3}$$

$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial}{\partial u} + \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{u^2-1}\right)\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] P_L(u, \varphi),$$

где $\mu_L = \varkappa\overline{\varepsilon_0(L)}$, $s_L(\varphi) = \varkappa\overline{\varepsilon_0(L)\sin(2\varkappa L+\varphi)}$, $c_L(\varphi) = \varkappa\overline{\varepsilon_0(L)\cos(2\varkappa L+\varphi)}$. Здесь черта сверху — знак усреднения по быстрым осцилляциям.

Заметим, что поскольку предполагается малость регулярных неоднородностей ($|\varepsilon_0(L)| \ll 1$), то точек поворота волны не возникает. Уравнение (3) описывает дрейф характеристик волны, который обусловлен регулярными неоднородностями, и диффузию, возникающую в результате рассеяния на случайных неоднородностях.

Уравнение (3) в общем случае решить не удается, однако его можно исследовать в двух предельных случаях: $|s_L| \ll D$ и $|s_L| \gg D$. Первый из них рассматривался ранее [1].

Во втором случае можно получить асимптотическое решение. Действительно, в силу малости случайных неоднородностей ($|s_L| \gg D$) мала и дисперсия фазы, т. е. $|\varphi - \varphi_L^0| \ll |\varphi_L^0|$, где φ_L^0 — решение уравнений (1а) при $\tilde{\varepsilon}(L) = 0$. Поэтому в коэффициентах уравнения (3) в первом приближении можно выполнить замену $s_L(\varphi) \simeq s_L(\varphi_L^0) = s_L$ и $c_L(\varphi) \simeq c_L(\varphi_L^0) = c_L$. Тогда после интегрирования по φ от уравнения (3) переходим к уравнению для функций распределения модуля коэффициента отражения:

$$\frac{\partial}{\partial L} P_L(u) = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u}(u^2-1) P_L(u) - \tag{4}$$

$$-s_L \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{u^2-1}\, P_L(u) + D \frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial}{\partial u} P_L(u).$$

Выражение (4) справедливо в области $|s_L|/D \gg 1$, однако оно переходит в точное уравнение и при $|s_L|/D \ll 1$ (см., например, [1]). В связи с этим можно предполагать, что в области сшивки асимптотик $|s_L| \sim D$ уравнение (4) даст хотя бы качественно правильный результат. Нахождение точного решения в этой области возможно лишь при непосредственном, например численном, решении уравнения (3).

При $|s_L| \gg D$ нетрудно найти и распределение фазы. Представляя решение уравнения (3) в виде $P_L(u, \varphi) \simeq P_L(u) P(\varphi, u_L^0, \varphi_L^0)$, используя приближенные замены в коэффициентах уравнения (3)

$$u_L \simeq u_L^0, \quad c_L(\varphi) \simeq c_L(\varphi_L^0) + s_L(\varphi_L^0)(\varphi - \varphi_L^0)$$

и приравнивая нулю члены одного порядка малости, найдем

$$P(\varphi, u_L^0, \varphi_L^0) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma_\varphi(L))^{-1} \exp\left[-(\varphi-\varphi_L^0)^2/2\sigma_\varphi^2(L)\right],$$

$$\sigma_\varphi^2(L) = (D/s_L)(3u_L^{02}-2)/(u_L^0\sqrt{u_L^{02}-1}).$$

Условие применимости приближения, при котором получено уравнение (4), имеет вид $\sigma_\varphi(L) \ll |\varphi_L^0|$. А поскольку φ_L^0 определена с точностью до 2π, то можно считать $|\varphi_L^0| \leqslant \pi$. Отсюда $\sigma_\varphi(L) \ll \pi$.

При уменьшении детерминированного сигнала u_L^0, как видно, $\sigma_L^2(L)$ возрастает. Это хорошо согласуется с тем, что в отсутствие регулярных неоднородностей фаза становится равнораспределенной (см. [1]). При малом случайном сигнале $\sigma_\varphi^2(L) \propto D s_L^{-1}$. Это говорит о том, что в среде дают вклад в рассеяние лишь те случайные неоднородности, которые находятся в слое толщиной $\Delta L \sim s_L^{-1}$.

Отметим, что характеристику задачи $s_L = \varkappa\varepsilon_0(L)\sin(2\varkappa L + \varphi_L^0)$, входящую в уравнение (4), можно отождествить с коэффициентом рассеяния на регулярных неоднородностях, а выражение для этой характеристики указывает на связь ее с условием Вульфа—Брэгга.

Условия применимости диффузионного приближения рассмотрены в [1], здесь лишь остановимся на обсуждении метода усреднения по быстрым осцилляциям. Этот метод широко используется (см., например, [4]), однако стандартной процедуры оценки его применимости не существует. Если известно решение регулярной задачи (аналитическое или численное) и если прямая проверка показывает, что метод усреднения по быстрым осцилляциям дает решение, совпадающее с точным (с заданной погрешностью), то далее с помощью уравнения (3) или (4) можно переходить к решению задачи статистической. Рассмотрим это на конкретных примерах.

Пусть $\varepsilon_0(L) = -4\mu\cos(2(\varkappa+\Omega)L)$. В [1] показано, что решение, найденное методом усреднения быстрых осцилляций, хорошо согласуется с точным, оно дает для фазы $\varphi_L^0 = \arccos\{2\Omega L - \pi/2 + [1+(\Delta/\alpha)^2 \operatorname{th}^2 \alpha\varkappa L]^{-1/2}\}$ и для модуля $\rho_L^0 = \operatorname{sh}\alpha\varkappa L/[\operatorname{ch}^2\alpha\varkappa L - (\Delta/\mu)^2]^{1/2}$, где $\alpha = \sqrt{\mu^2-\Delta^2}$, $\Delta = \Omega/\varkappa$, здесь для простоты $\gamma = 0$. Нетрудно вычислить характеристику задачи $s_L = 2\mu\varkappa/\sqrt{1+(\Delta/\alpha)^2\operatorname{th}^2\alpha\varkappa L}$. Решение же для модуля ρ_L^0 (можно убедиться прямой подстановкой) удовлетворяет усредненному по осцилляциям первому уравнению (1а) при $\tilde{\varepsilon}(L) = 0$, которое соответствует уравнению (4) при $D = 0$. Таким образом, для периодических сред метод усреднения по осцилляциям дает правильное решение, и можно переходить к рассмотрению статистической задачи, решая уравнение (3).

В известном примере Рэлея [5] $\varepsilon_0(L) = \dfrac{a^2}{(L+a)^2} - 1$. Решение

для коэффициента отражения от слоя $\tilde{R}_L = \frac{i}{2}\frac{-1+\mu^{2im}}{m+n+\mu^{2im}(m-n)}$,

где $\mu = \frac{L+a}{a}$; $m^2 = n^2 - 1/4$, $n = \varkappa a$, $\gamma = 0$. В [5] справа от слоя волновое число есть $\varkappa + \varkappa\varepsilon_0(L)$, а в нашем случае — $\varkappa$, поэтому решение уравнения (1) связано с $\tilde{R}_L$ следующим образом: $R_L = [1 + (1 + 2a/L)\tilde{R}_L]/[1 + 2a/L + \tilde{R}_L]$. (см. [1]).

Рассмотрим случай $n \gg 1$, $L/a \ll 1$, для которого $\rho_L^0 \simeq L/2a$, $\theta_L^0 \simeq \arcsin[(-1+\cos 2\varkappa L)/2\varkappa L]$. Находим, что $s_L = (1 - \cos 2\varkappa L)/2a$, а прямой подстановкой убеждаемся, что $\rho_L^0 = L/2a$ удовлетворяет усредненному по осцилляциям первому уравнению (1а) при $\tilde{\varepsilon}(L) = 0$, которое соответствует уравнению (4) при $D = 0$. Отметим, что в приведенном примере при $n \lesssim 1$ осцилляции отсутствуют, а при $L \gtrsim a$ период осцилляций логарифмически меняется и метод усреднения по осцилляциям не проходит. В указанной же выше области параметров, как и в предыдущем примере, метод усреднения по осцилляциям дает правильное решение, и можно переходить к рассмотрению статистической задачи.

Рассмотрим статистическую задачу в наиболее простом случае $s_L = s$. В первом примере этому соответствует $\Delta = 0$ или $\alpha\varkappa L \gg 1$, $\mu > \Delta$. Стационарное решение (4) при $L \to \infty$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{du}P(u) + \left(\beta - \frac{\alpha}{\sqrt{u^2-1}}\right)P(u) = 0, \tag{5}$$

где $\alpha = s/D$, $\beta = 2\gamma/D$, интегрирование которого дает

$$P(u) = A(u + \sqrt{u^2-1})^{\alpha} e^{-\beta(u-1)}. \tag{6}$$

Нормировочная константа A определяется из условия $\int_1^\infty du P(u) = 1$. Для модуля коэффициента отражения $\rho = \sqrt{(u-1)/(u+1)}$ получаем

$$P(\rho) = A\frac{4\rho}{(1-\rho^2)^2}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}\right). \tag{6а}$$

Распределение (6) имеет максимум в точке $u_{\max} = \sqrt{\tau^2+1}$, $\tau = \alpha/\beta = s/2\gamma$. Таким образом, положение максимума распределения модуля коэффициента отражения определяется рассеянием на регулярных неоднородностях. А рассеянием на случайных неоднородностях определяется ширина этого распределения (формально параметром $\beta = 2\gamma/D$).

Выражение (6), как и уравнение (4), является асимптотически точным в областях $\alpha \ll 1$, $\alpha \gg 1$ и приближенным, когда $\alpha \sim 1$. При $\alpha \to 0$ оно переходит в известную формулу [1]

$$P(u) = \beta\exp[-\beta(u-1)]. \tag{7}$$

Этот переход как нетрудно, показать, происходит при следующих соотношениях параметров: если $\beta \ll 1$, то при $\alpha \ll \beta$, а если $\beta \gg 1$, то при $\alpha \ll \sqrt{2\beta}$. Рассмотрим случаи $\beta \ll 1$ и $\beta \gg 1$ более подробно.

Если $\beta \gg 1$, то при $\alpha \ll \beta$ (это соответствует теории возмущений) можно воспользоваться тем, что в выражении (6а) $\rho \lesssim 1/\sqrt{2\beta}$ и нетрудно преобразовать его к виду

$$P(\rho) = 4A\rho\exp(2\alpha\rho - 2\beta\rho^2). \tag{8}$$

При $\alpha \ll \sqrt{2\beta}$ формула (8) дает распределение Рэлея так же, как и выражение (7), если в нем $\beta \gg 1$, а при $\sqrt{2\beta} \ll \alpha \ll \beta$ (8) переходит в смещенное распределение Гаусса. Случай $\alpha \gg \beta$ соответствует многократному рассеянию и будет рассмотрен ниже.

Если $\beta \ll 1$, то при $\alpha \ll \beta$ (6), как отмечалось выше, переходит в (7), а обратный случай $\alpha \gg \beta$ соответствует многократному рассеянию.

Случаи многократного рассеяния характеризуются тем, что распределение (6) смещено в область $u \gg 1$. Это позволяет преобразовать его с заменой нижнего предела интегрирования $1 \to 0$ к следующему выражению:

$$P(u) = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} u^{\alpha} e^{-\beta u}, \tag{9}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Получили гамма-распределение, с помощью которого легко вычисляются моменты интенсивности рассеянной волны $\langle \rho^{2n} \rangle = \int\limits_1^{\infty} du \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n P(u)$. При $\beta \ll 1$ и $\alpha \gg 2n\beta$ $\langle \rho^{2n} \rangle \simeq 1 - 2n\beta/\alpha$. При $\beta \gg 1$ и $\alpha \gg 2n\beta$ тот же результат. В то время, как при $\beta \gg 1$, но $\sqrt{2\beta} \ll \alpha \ll \beta$, $\langle \rho^{2n} \rangle \simeq (\alpha/2\beta)^{2n}$. Таким образом, флуктуации интенсивности исчезают всегда в случае многократного рассеяния, а в случае однократного рассеяния — при соотношении параметров $\sqrt{2\beta} \ll \alpha \ll \beta$. Это говорит о том, что в последнем случае рассеяние на регулярных неоднородностях подавляет флуктуации интенсивности, обусловленные рассеянием на случайных неоднородностях.

В заключение можно сделать следующий вывод. Для описания обратного рассеяния волны удается обобщить диффузионное приближение на случай сред с регулярными и случайными неоднородностями. При этом для описания сред в дополнение к коэффициенту диффузии вводится динамическая характеристика задачи, которую можно отождествить с коэффициентом рассеяния на регулярных неоднородностях. В феноменологической теории переноса такое раздельное описание двух типов неоднородностей не существует, поскольку она оперирует не с полями, а с их интенсивностями. Статистическая же теория переноса более информативна.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Кляцкину за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
2. Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 2. С. 183.
3. Лапин В. Г., Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 5. С. 529.
4. Найфэ А. Х. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. С. 180.
5. Рэлей Дж. В. Теория звука. — М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1. С. 257.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
10 декабря 1987 г.

BACKSCATTERING OF THE WAVE IN THE REGULAR AND RANDOM INHOMOGENEOUS LAYER MEDIUM

B M. Shevtsov

The generalized diffusion approximation is proposed on the basis of the invariant imbedding method. The statistical characteristics of the wave backscattering in the regular and random inhomogeneous layer medium are investigated in the diffusion approximation. The statistical problem solution method is suggested if the solution of the regular nonhomogeneous problem is preliminary known.