

УДК 551.463

О РАССЕЯНИИ МОД В ВОЛНОВОДЕ С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Л. Вировлянский, А. Г. Костерин, А. Н. Малахов

В рамках метода малых возмущений получены приближенные выражения для описания изменений вдоль трассы амплитуд мод в многомодовом волноводе с неровной границей. Найденные соотношения удобны для статистического усреднения. С их помощью могут быть рассчитаны различные статистические характеристики амплитуд мод, в том числе и функции межмодовых корреляций.

При описании рассеяния волн на шероховатой поверхности с малыми и пологими неоднородностями обычно используют метод малых возмущений [1, 2]. При рассмотрении волноводных задач этот метод позволяет получить систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих вариации по трассе амплитуд мод [3-5]. В данной работе предложен способ приближенного решения системы таких уравнений для случая, когда поле возбуждается точечным монохроматическим источником. Для простоты ограничиваемся рассмотрением скалярных полей. Развитый здесь способ описания поля является прямым обобщением полученных в [6] результатов по исследованию флуктуаций амплитуд мод в волноводах с объемными крупномасштабными неоднородностями показателя преломления.

Рассмотрим плоскостной волновод, в котором находится точечный источник тонального сигнала частоты ω . Декартову систему координат (x, y, z) введем так, чтобы ось z совпадала с направлением изменения показателя преломления среды n . Далее считаем, что волновод ограничен статистически неровной поверхностью $z = \zeta(x, y)$ ($\langle \zeta \rangle = 0$), на которой скалярное волновое поле $U(x, y, z)$ обращается в нуль. Однако представленный здесь способ описания поля может быть использован и при решении задач с детерминированной поверхностью $z = \zeta(x, y)$. Полагая неровности границы $z = \zeta(x, y)$ малыми и пологими, точное условие $U(x, y, \zeta(x, y)) = 0$ заменим на приближенное на подстилающей плоскости $z = 0$ [1, 2]:

$$\left[U(x, y, z) + \zeta(x, y) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = 0. \quad (1)$$

Поскольку вид второго граничного условия при $z < 0$ не влияет на структуру полученных в дальнейшем выражений, то конкретизировать его не будем.

Ограничиваясь рассмотрением поля $U(x, y, z)$ вблизи оси x и полагая неровности границы $z = \zeta(x, y)$ крупномасштабными по сравнению с длиной волны, решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 n^2(z) U = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0) \quad (2)$$

с граничными условиями (1) ищем в виде разложения по плоским волнам и по собственным функциям $\varphi_m(z)$ регулярной краевой задачи [8]:

$$U(x, y, z) \doteq \sum_m \int dx A_{m,x}(x) \varphi_m(z) \exp \left[i \left(k_m x + \pi y - \frac{x^2}{2k_m} \right) \right]. \quad (3)$$

В (2) $k = \omega/c_0$ — волновое число, c_0 — фазовая скорость волн при $n = 1$,

$(0, 0, z_0)$ — координаты точечного источника, $A_{m,x}(x)$ — амплитуда моды, k_m — ее продольное волновое число. Суммирование в (3) ведется по всем распространяющимся модам дискретного спектра. Подставляя (3) в (2) и пренебрегая производной $d^2 A_{m,x}/dx^2$ в параболическом приближении, получим хорошо известную систему уравнений для амплитуд мод $A_{m,x}(x)$ [3].

$$\frac{dA_{m,x}}{dx} = \frac{i}{4\pi k_m} \sum_{m'} \int dx' \int dy \zeta(x, y) A_{m',x'}(x) \left[\frac{d\varphi_m(z)}{dz} \frac{d\varphi_{m'}(z)}{dz} \right] \Big|_{z=0} \times \exp \left\{ i \left[(k_{m'} - k_m)x + (x' - x)y - \left(\frac{x'^2}{2k_{m'}} - \frac{x^2}{2k_m} \right) x \right] \right\} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$A_{m,x}(0) = (i/k_m) \varphi_m(z_0). \quad (5)$$

Условия применимости (3), (4) обсуждаются в [3, 4]. В этих работах (см. также [5]) описание флуктуаций амплитуд мод базируется на анализе приближенными (либо численными) методами уравнений для статистических моментов амплитуд, вытекающих из (4). Наша цель, напротив, состоит в отыскании приближенного решения — динамического, а не усредненного — самой системы (4).

Используем ВКБ-приближение собственных функций $\varphi_m(z)$ регулярной краевой задачи в области между точками заворота [7]:

$$\varphi_m(z) = \varphi_m^+(z) + \varphi_m^-(z), \quad (6)$$

где

$$\varphi_m^\pm(z) = \left(\frac{a_m}{D_m} \right)^{1/2} (n^2(z) - a_m^2)^{-1/4} \exp \left[\pm i \left(k \int_z^0 (n^2(z) - a_m^2)^{1/2} dz - \delta \right) \right]. \quad (7)$$

Здесь $D_m = D(a_m)$ — длина цикла луча, имеющего те же точки заворота, что и m -я мода; значения фазы δ и собственных чисел $a_m = k_m/k$ определяются видом граничного условия при $z < 0$.

С учетом (5)–(7) представим амплитуды мод $A_{m,x}(x)$ в виде

$$A_{m,x}(x) = A_{m,x}^+(x) + A_{m,x}^-(x), \quad (8)$$

где совокупности функций $\{A_{m,x}^+(x)\}$ и $\{A_{m,x}^-(x)\}$ удовлетворяют одной и той же системе уравнений (4), но с различными начальными условиями: $A_{m,x}^+(0) = (i/k_m) \varphi_m^+(z_0)$, $A_{m,x}^-(0) = (i/k_m) \varphi_m^-(z_0)$. С помощью соотношений

$$A_{m,x}^\pm(x) = (i/k_m) \varphi_m^\pm(z_0) \exp [iX_{m,x}^\pm(x)] \quad (8a)$$

перейдем к новым неизвестным функциям $X_{m,x}^\pm(x)$, которые являются решениями систем уравнений

$$dX_{m,x}^\pm/dx = \int dy \zeta(x, y) \tilde{\Delta}_{m,x}^\pm(x, y), \quad (9)$$

где

$$\Delta_{m,x}^\pm(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m'} \frac{\varphi_{m'}'(0) \varphi_m'(0)}{k_{m'}} \frac{\varphi_{m'}^\pm(z_0)}{\varphi_m^\pm(z_0)} \exp [i(k_{m'} - k_m)x] \times \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int dx' \exp \left[i(x' - x)y - i \left(\frac{x'^2}{2k_{m'}} - \frac{x^2}{2k_m} \right) x \right] \exp [i(X_{m',x'}^\pm(x) - X_{m,x}^\pm(x))] \right], \quad (10)$$

$$\varphi_m'(z) \equiv d\varphi_m(z)/dz,$$

с начальными условиями $X_{m,x}^{\pm}(0) = 0$. Введенное таким образом разбиение каждой из амплитуд мод на два слагаемых имеет простой физический смысл, который становится ясным при рассмотрении невозмущенной задачи, т.е. случая, когда $\zeta \equiv 0$ и волновод является плоскостойким. После подстановки (8) в (3) (при $\zeta \equiv 0$ $A_{m,x}^{\pm}(x) \equiv A_{m,x}^{\pm}(0)$) последнее выражение разбивается на две суммы, в каждую из которых входят слагаемые с одинаковыми верхними индексами (либо «+», либо «-»). Если стандартным способом перейти от модового представления поля к лучевому (для этого необходимо преобразовать (3) с помощью формулы суммирования Пуассона [8]), легко убедиться, что слагаемые с индексом «+» («-») описывают вклады лучей, вышедших из источника в полупространство $z > z_0$ ($z < z_0$). Отсюда понятно, что функции $X_{m,x}^{\pm}(x)$ ($\tilde{X}_{m,x}^{\pm}(x)$) при $\zeta \neq 0$ описывают вариации вдоль трассы волн, вышедших из источника, соответственно в полупространство $z > z_0$ ($z < z_0$).

Полученные системы связанных нелинейных уравнений для функций $X_{m,x}^{\pm}(x)$ упростим, полагая

$$|X_{m',x'}^{\pm} - X_{m,x}^{\pm}| \ll 1 \quad (11)$$

и заменяя в первом приближении последнюю экспоненту в правой части (10) единицей. В этом приближении формирование случайных фаз $X_{m,x}^{\pm}(x)$ в соответствии с (9), (10) происходит за счет взаимодействия на неоднородностях границы невозмущенных мод. Такое упрощение позволяет решать каждое уравнение систем (9) в отдельности. В силу крупномасштабности неровностей границы условие (11) должно выполняться лишь для мод с близкими m' и m , x' и x . Поскольку эти моды распространяются приблизительно в одинаковых условиях, то предположение (11) может оставаться справедливым даже в том случае, если фазы $X_{m',x'}^{\pm}$ и $X_{m,x}^{\pm}$, входящие в (11), сами по себе велики. Условия применимости приближения (11) применительно к статистическим задачам обсуждаются в Приложении.

После сделанного предположения функцию $\tilde{\Delta}_{m,x}^{\pm}(x, y)$ можно привести к более удобному и физически ясному виду в полной аналогии с тем, как это делалось в [6]. Суть этих приближенных преобразований заключается в интегрировании по x' и вычислении суммы по m' с помощью формулы суммирования Пуассона [8]. Опуская подробности (см. [6], а также [9, 10]), приведем окончательный результат. При его формулировке используем следующие обозначения. Введем функцию $\mu(x, y) = \zeta(x, y) / \sqrt{\langle \xi^2 \rangle}$ и обозначим через P_m параметр Рэлея m -й моды:

$$P_m = 2kn(0) \sqrt{\langle \xi^2 \rangle} \sin \theta_m^0, \quad (12)$$

где θ_m^0 — угол по отношению к плоскости $z = \text{const}$, под которым волны Бриллюэна данной моды подходят к границе $z = 0$. (Заметим, что одним из условий применимости метода малых возмущений является малость параметра Рэлея [14].) Тогда комплексные фазы $X_{m,x}^{\pm}(x)$ задаются формулами

$$X_{m,x}^{\pm}(x) = \sum_N P_m \int_0^x d\xi \int d\eta \mu \left(\xi - \frac{x}{k_m} \eta, \frac{x}{k_m} \xi + \eta \right) \Delta_{m,x}^{\pm}(\xi, \eta, N), \quad (13)$$

где

$$\Delta_{m,x}^{\pm}(\xi, \eta, N) = \rho_y^{-1} \rho_{xN}^{\pm-1} \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \left[1 + \text{sgn} \left(\frac{\partial R_N^{\pm}(z_0, a)}{\partial a} \right) \Big|_{a_m} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp\left(i\pi \frac{\eta^2}{\rho_y^2}\right) \exp\left[i\pi \frac{(\xi - R_N^\pm(z_0, a_m))^2}{\rho_{xN}^2} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial R_N^\pm(z_0, a)}{\partial a}\right)\right]_{a_m}.$$

Фигурирующие здесь функции $R_N^\pm(z_0, a_m)$, ρ_y и ρ_{xN}^\pm определяются следующим образом. Через $R_N^\pm(z_0, a_m)$ обозначены расстояния на плоскости $z=0$ от точки $(0, 0, 0)$ до N -х выходов к подстилающей поверхности так называемых модовых лучей m -й моды [6]. Этим термином обозначаются геометрические лучи (их два для каждого набора (m, κ)), траектории которых начинаются в источнике, лежат в плоскости $y = (\kappa/k_m)x$ и удовлетворяют закону Снеллиуса $n(z) \cos \theta(z) = a = \text{const}$ ($\theta(z)$ — угол скольжения луча по отношению к плоскости $z = \text{const}$) с $a = a_m$. Индекс «+» («-») показывает, что луч вышел из источника в полупространство $z > z_0$ ($z < z_0$). Модовые лучи пересекают плоскости $z = \text{const}$ под теми же углами, что и волны Бриллюэна, отвечающие m -й моде. На рис. 1 схематически изображены траектории модовых лучей в плоскости $y = (\kappa/k_m)x$. Величины ρ_y и ρ_{xN}^\pm определяются соотношениями

$$\rho_y = \sqrt{\frac{2\pi\xi}{k_m}}, \quad \rho_{xN}^\pm = \sqrt{\frac{2\pi}{k} \left(\frac{\partial R_N^\pm(z_0, a)}{\partial a}\right)}_{a_m}. \quad (15)$$

Выражения (13)–(15) показывают, что величины комплексных фаз $X_{m,x}^\pm(x)$ определяются влиянием поверхностных неоднородностей, расположенных в окрестностях точек выходов модовых лучей к подстилающей поверхности. Эффективные размеры каждой такой зоны равны ρ_y по оси y и ρ_{xN}^\pm по оси x . Эти зоны представляют собой сечения плоскостью $z=0$ введенных в [6] френелевских объемов мод (близкое понятие рассматривалось также в работе [11]). Поэтому величину ρ_{xN}^\pm можно назвать «продольным» радиусом первых зон Френеля мод, в отличие от «поперечных» радиусов ρ_y и ρ_z^\pm , рассмотренных в [6]. В (13) суммируются вклады окрестностей всех точек выходов модовых лучей к подстилающей плоскости на трассе длины x .

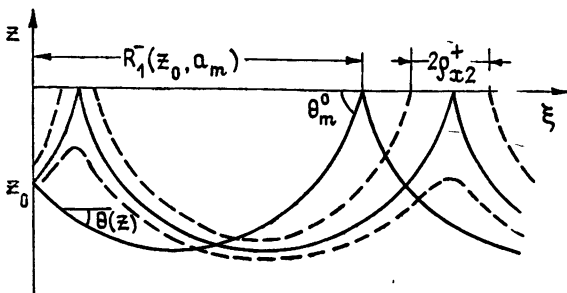


Рис. 1.

То обстоятельство, что взаимодействие мод с поверхностными неоднородностями фактически происходит не непрерывно на протяжении всей трассы, а лишь на указанных выше участках, допускает простую физическую интерпретацию. Флуктуации амплитуды отдельной моды в значительной степени определяются взаимодействием данной моды с соседними. Однако результат этого взаимодействия будет существенным лишь в том случае, если волны при рассеянии на неровной границе имеют не только близкие углы, но и близкие фазы. Как известно [9, 10], соседние моды (точнее волны Бриллюэна) складываются в фазе (конструктивно интерферируют) вдоль модовых лучей. Поэтому рассеяние соседних мод в данную осуществляется с наибольшей эффективностью в местах выходов модовых лучей к поверх-

ности. Именно там происходят основные изменения статистических характеристик амплитуд мод. Масштаб этих изменений по оси x определяется размером первой зоны Френеля ρ_{xN}^{\pm} и с ростом длины трассы растет пропорционально \sqrt{x} (так как $\partial R_{N}^{\pm}/\partial a \sim N(dD/da) \sim \sim (x/D_m)(dD(a)/da)|_{a_m}$).

Сравним размер зоны Френеля ρ_{xN}^{\pm} с длиной цикла модового луча D_m . В работах [12, 13] введен параметр

$$\sigma_m(x) = kD_m^3 / (2\pi x |dD/da|_{a_m}), \quad (16)$$

имеющий важный физический смысл. Величина $\sqrt{\sigma_m(x)}$ является оценкой числа мод, конструктивно интерферирующих с m -й модой вдоль соответствующих модовых лучей на удалении x от источника. Несложно показать, учитывая (15), (16), что

$$\rho_{xN}^{\pm}/D_m = 1/\sqrt{\sigma_m(x)}. \quad (17)$$

Таким образом, если мода конструктивно интерферирует с большим числом своих соседей ($\sqrt{\sigma_m(x)} \gg 1$), то области неровной поверхности, оказывающие существенное влияние на амплитуду данной m -й моды, составляют лишь малую часть длины цикла D_m .

Полученная динамическая связь комплексных фаз $X_{m,x}^{\pm}(x)$ с функцией $\zeta(x,y)$, описывающей рельеф неровностей границы, позволяет с помощью (8), (8а) находить практически любые статистические характеристики амплитуд мод. Если случайные функции $X_{m,x}^{\pm}(x)$ имеют нормальный закон распределения, то статистическое описание флуктуаций мод упрощается, поскольку в этом случае необходимо знать лишь корреляционные функции фазы второго порядка $\langle X_{m,x}^{\varepsilon}(x) X_{m',x'}^{\varepsilon_1}(x) \rangle$ и $\langle X_{m,x}^{\varepsilon}(x) (X_{m',x'}^{\varepsilon_1}(x))^* \rangle$, где индексы ε и ε_1 означают «+» либо «-».

В заключение отметим, что изложенные выше соображения проясняют взаимосвязь лучевого и модового представлений поля в волноводе с неровной границей. Переход от модового представления к лучевому может быть осуществлен путем преобразования выражения (3) с учетом (8), (8а), (13)—(15) с помощью формулы суммирования Пуассона точно так же, как это делается при анализе полей в плоско-слоистом волноводе [9, 10]. Путем такой процедуры, в частности, легко получить выражение, описывающее закон спада среднего значения комплексной амплитуды (когерентной компоненты) луча, вследствие его отражения от случайно-неоднородной поверхности [14]. Вместе с тем, изложенный подход позволяет описывать статистику поля не только в регулярных точках волновода, но и в окрестности каустик, где лучевое представление «не работает».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кратко обсудим условия применимости использованного приближения (11). Ограничимся при этом рассмотрением задач, связанных со статистическим описанием волнового поля. Как и в [6], определим аналоги параметров Дашена (см. [15, 16]) Φ и Λ для случая рассеяния мод на статистически неровной поверхности. В качестве параметра неоднородности Φ используем величину $\Phi^2 = \langle |X_{m,0}^{\pm}|^2 \rangle \simeq P_m^2 N$, где N — число выходов модового луча к поверхности. Дифракционный параметр Λ_x в направлении x зададим соотношением

$$\Lambda_x = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_{xi}}{L_x} \right)^2 \simeq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{D_m}{L_x} \right)^2 / \sigma_m(x),$$

где L_x — характерный масштаб неровностей вдоль оси x ; величина N для больших дистанций x приблизительно равна x/D_m .

Из требования малости по сравнению с π среднеквадратичного значения разности фаз ($X_{m',0}^+ - X_{m,0}^\pm$) для мод, эффективно взаимодействующих на неровностях границы, для случая $\Lambda_x \ll 1$ получим условие

$$\Lambda_x \Phi \ll 1.$$

В противоположном случае $\Lambda_x \gg 1$ велико влияние дифракционных эффектов на рассеяние мод. При этом фазы $X_{m',0}^+$ и $X_{m,0}^\pm$ можно считать некоррелированными для любого соотношения m' и m . Поэтому неравенство (11) выполняется, когда

$$\Phi \ll 1.$$

Аналогичные условия могут быть получены, если учитывать рассеяние мод в направлении оси y .

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности — М.: Наука, 1972.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
3. Долин Л. С., Нечаев А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 11. С. 1337.
4. Нечаев А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25 № 3. С. 291.
5. Зайцев В. Ю., Раевский М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 1. С. 65.
6. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. // Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 4. С. 599.
7. Найфэ А. Х. Методы возмущений: Пер. с англ. / Под ред. Ф. Л. Черноушко. — М.: Мир, 1976.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров — М.: Наука, 1970.
9. Tindle C. T., Guthrie K. M. // J. Acoust Vibr. 1974. V. 34. № 2. P. 291
10. Kamel A., Felsen L. B. // J. Acoust Soc Amer. 1982. V. 71. № 6. P. 1445
11. Кравцов Ю. А., Кузькин В. М., Петников В. Г. // Акуст. журн., 1984. Т. 30. Вып. 3. С. 339.
12. Вировлянский А. Л. Диссертация. Горький. Гос. ун-т, 1986.
13. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. // Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 3. С. 503.
14. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1982.
15. Распространение звука во флуктуирующем океане: Пер. с англ. / Под ред. С. Флатте. — М.: Мир, 1982.
16. Dasher R. // J. Math. Phys. 1979. V. 20. № 5. P. 894.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 марта 1988 г.

ON THE SCATTERING OF THE MODES IN THE ROUGH-SURFACED WAVEGUIDE

A. L. Virovlyanskij, A. G. Kosterin, A. N. Malakhov

In the frame of the small perturbation theory, the approximate expressions for the description of mode amplitude variations along the path in the multimode waveguide are obtained. These relations are convenient for statistical averaging. Various statistical characteristics of mode amplitudes, including intermode correlation, can be calculated with their help.