

УДК 539.2

ПОЛИСТАБИЛЬНОСТЬ ФРОНТА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В БИСТАБИЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ю. Д. Калафати, Ю. А. Ржанов

Обсуждаются возможности распространения автоволн в периодически неоднородной среде. Аналитически и численно показано, что в отличие от однородной по параметрам (гомогенной) среды скорость распространения фронта переключения в среде с неоднородностями обращается в нуль в целой области параметров накачки. В случае среды с периодической негомогенностью обнаружено явление полистабильности фронта — существование устойчивых неподвижных фронтов, различающихся формой, при одних и тех же параметрах системы.

Описанные явления могут быть обнаружены в матрицах элементов на основе материалов с S- и N-образной вольт-амперной характеристикой и бистабильных композитных материалах.

Распространение фронта в активных кинетических системах — один из наиболее часто встречающихся автоволновых процессов [1]. Впервые задача о распространении фронта была исследована в связи с изучением распространения эпидемий и генов в биологии [2] и процессов горения в физике [3]. К настоящему времени можно говорить о создании качественной теории, описывающей распространение фронта в гомогенной однокомпонентной системе. В ряде случаев удалось получить аналитические выражения для скорости фронта. Однако в реальных системах существуют неоднородности, которые могут определяющим образом влиять на характер автоволновых процессов. Известно, например, что на локальных неоднородностях возможно образование уединенных структур, стабилизация фронта [4]. Целью этой работы является рассмотрение задачи о распространении фронта в негомогенной среде, в которой неоднородности распределены периодически. Примером такой системы в биологии могут служить коллективы клеток, взаимодействующих со своим ближайшим соседом и способных находиться в двух разных устойчивых состояниях (синцитии) [5]. Аналогичный пример в физике — матрицы бистабильных элементов, связанных диффузией [6].

Распространение фронта переключения в бистабильной среде описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = P(T, S, z) + \frac{\partial}{\partial z} D(T, z) \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (1)$$

где T — кинетическая переменная (например температура или концентрация), t — время, z — координата, D — коэффициент диффузии, $P(T, S, z)$ — нелинейная функция «источника», зависящая от кинетической переменной, внешних условий (описываемых параметром «накачки» S) и координаты.

Система бистабильна, если в некоторой области параметра S уравнение

$$P(T, S, z) = 0 \quad (2)$$

имеет три корня ($T_1 \leq T_2 \leq T_3$) при любом z . В случае гомогенной системы два корня (T_1 и T_3) соответствуют устойчивым однородным состояниям, корень T_2 — неустойчивому, а характерный вид скорости

фронта переключения между T_1 и T_3 показан на рис. 1. Знак скорости определяется знаком интеграла

$$M = \int_{T_1}^{T_3} P(T, S) dT. \quad (3)$$

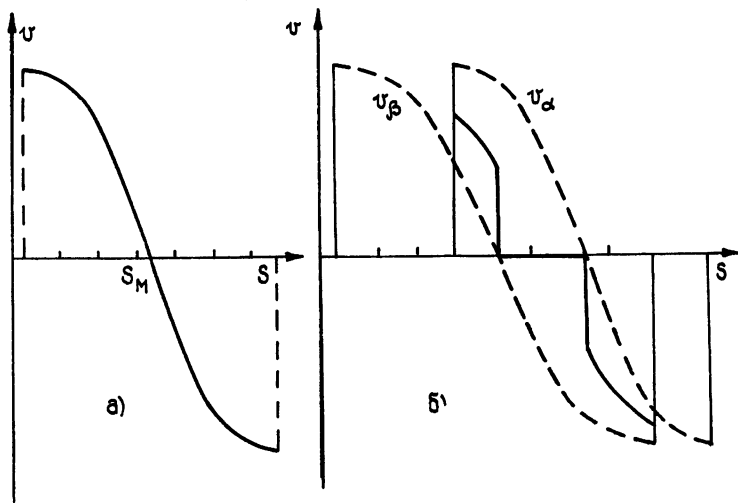


Рис. 1. а) Зависимость скорости распространения фронта в гомогенной бистабильной среде от параметра накачки S . б) Зависимость скорости фронта от S для зерен типа α и β (штриховые линии); средняя скорость фронта в зернистой среде с $L_\alpha, L_\beta \gg l$ (сплошная линия).

Скорость положительна, когда область пространства, занятая состоянием T_3 , увеличивается со временем. Случай $M=0$, соответствующий известному правилу Максвелла (неподвижному фронту), реализуется при единственном значении параметра $S = S_M$, если T_2 — монотонная функция S .

Рассмотрим простейшую одномерную модель негетогенной среды, состоящую из чередующихся областей («зерен») двух типов — α и β (каждое зерно гомогенно). Зерна типа α и β имеют размеры L_α и L_β соответственно и отличаются видом нелинейных источников $P_\alpha(T, S)$ и $P_\beta(T, S)$. Коэффициент диффузии D в зернах обоих типов одинаков.

Если L_α, L_β много больше характерной диффузионной длины $l \sim \sqrt{D}$, то задача о распространении фронта по негетогенной системе определяется условиями распространения фронта внутри зерна каждого типа. Функции $v(S)$ для зерен каждого типа изображены на рис. 1б пунктиром. В областях параметра S , где скорости v_α и v_β имеют один знак, фронт распространяется по зернам α и β типа, и его средняя скорость будет находиться по величине между v_α и v_β . (Поскольку форма движущегося фронта изменяется во времени, говорить о скорости фронта можно только в смысле скорости перемещения некоторой точки с «температурой» T , принадлежащей интервалу $[T_1, T_3]$. Определенная таким образом скорость осциллирует во времени, и величина, построенная на рис. 1б, представляет собой ее усредненное значение.) Очевидно также, что когда v_α и v_β имеют разные знаки, фронт будет стабилизироваться на границе между зернами, поскольку с одной стороны от границы реализуется условие $v > 0$, а с другой — $v < 0$. Таким образом, зависимость $v(S)$ для зернистой среды будет иметь вид, представленный на рис. 1б сплошной линией. Скорость фронта в такой среде обращается в нуль не в единственной точке, как в случае гомогенной среды, а в целом интервале значений параметра S .

Случай $L \leq l$ гораздо более интересен. Методами численного мо-

делирования нами обнаружено, что «нулевая полка» в зависимости $v(S)$ сохраняется, уменьшаясь с уменьшением размера зерен. Оказалось также, что в отличие от гомогенной системы в негомогенной форма фронта может быть существенно немонотонной. Более того, обнаружено, что при одном и том же значении параметра S возможно существование нескольких устойчивых фронтов, форма которых различается числом осцилляций «температуры» T . (Надо отметить, что осцилляции существуют только при условии $L \sim l$. С уменьшением отношения L/l' функция $T(z)$ снова становится монотонной, хотя сохраняется немонотонность функции dT/dz .) На рис. 2 для примера приведена форма фронта с двумя осцилляциями.

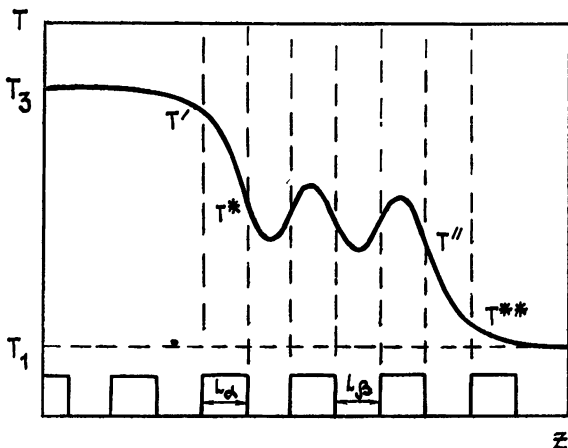


Рис. 2. Стационарная структура на фронте переключения с двумя осцилляциями кинетической переменной — Q_2 . Прямоугольники на оси абсцисс означают области, соответствующие зернам типа α , промежутки между прямоугольниками — зернам типа β .

Структуры, возникающие на фронте, можно исследовать аналитически, если зерна чередуются периодически, а функции нелинейного источника для зерна каждого типа имеют кусочно-линейный вид:

$$P_i(T, S) = T_{1i} - T + (T_{3i} - T_{1i})\Theta(T - T_{2i}(S)), \quad (4)$$

где $\Theta(T)$ — функция единичного скачка, а индекс i пробегает два значения α и β . Рассмотрим случай, когда зерна типа α и типа β отличаются только значениями температур T_2 :

$$\begin{aligned} T_{2\alpha} &= S, \\ T_{2\beta} &= (1/2)(T_1 + T_3) + r(S - T_1), \\ T_{1\alpha} &= T_{1\beta} = T_1, \quad T_{3\alpha} = T_{3\beta} = T_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Определенная таким образом периодически негомогенная среда тем не менее имеет два устойчивых состояния, характеризующихся однородным распределением температуры со значениями T_1 и T_3 . Негомогенность среды проявляется при исследовании пространственно-неоднородных состояний из-за того, что зерна разного типа могут переходить из состояния T_1 в T_3 и обратно при разных условиях. Так, если

$$T_1 \leq S \leq (1/2)(T_1 + T_3), \quad (6)$$

$$T_1 \leq S \leq T_1 + (1/2r)(T_3 - T_1),$$

то для температур T_2 выполняется неравенство $T_{2\alpha} < T_{2\beta}$. Это означает, что зерно типа α «легче» переключается из состояния T_1 в состояние T_3 , чем зерно типа β . В дальнейшем, для однозначности, будем считать, что неравенства (6) выполнены.

Остановимся сначала на построении стационарного ($\partial\dot{T}/\partial t=0$) решения, соответствующего фронту с N осцилляциями. Это можно сделать, решая линейные уравнения внутри областей, соответствующих зернам каждого типа, и сшивая решения на границах зерен. Для удобства назовем такую структуру Q_N . Рис. 2, например, изображает структуру Q_2 . Исследование устойчивости структуры Q_N можно провести аналитически. Оно заключается в представлении решения в виде $T(t, z) = T^{st}(z) + e^{\lambda t} \delta T(z)$ (где $T^{st}(z)$ — стационарное решение) и линеаризации уравнения (1) относительно δT и таким образом сводится к исследованию спектра задачи на собственные значения с потенциалом, представляющим собой сумму δ -функций. Однако такой анализ технически сложен, и в данной работе не проводился. Мы предположили, что структура Q_N устойчива, если

$$T_{2\alpha} > T_N^{**}; \quad (7a)$$

$$T_{2\alpha} < T_N''; \quad (7б)$$

$$T_{2\beta} > T_N^*; \quad (7в)$$

$$T_{2\beta} < T_N'. \quad (7г)$$

Смысл величин T' , T'' , T^* , T^{**} легко виден из рис. 2. Выражения для них можно получить аналитически:

$$T_N^{**} = T_1 + \frac{T_3 - T_1}{2} R_\beta \left[\frac{(1 - (R_\alpha R_\beta)^{N+1}) - R_\alpha (1 - (R_\alpha R_\beta)^N)}{1 - R_\alpha R_\beta} \right]; \quad (8a)$$

$$T_N^* = T_1 + \frac{T_3 - T_1}{2} \left[1 + (R_\alpha^{-1} - 1) \left(\frac{1 - (R_\alpha R_\beta)^{N+1}}{1 - R_\alpha R_\beta} - 1 \right) \right]; \quad (8б)$$

$$T_N'' = T_1 + \frac{T_3 - T_1}{2} \left[\frac{(1 - (R_\alpha R_\beta)^{N+1}) - R_\alpha (1 - R_\alpha R_\beta)^N}{1 - R_\alpha R_\beta} \right]; \quad (8в)$$

$$T_N' = T_3 - \frac{T_3 - T_1}{2} R_\alpha \left[1 - (R_\alpha^{-1} - 1) \left(\frac{1 - (R_\alpha R_\beta)^{N+1}}{1 - R_\alpha R_\beta} - 1 \right) \right], \quad (8г)$$

где $R_{\alpha,\beta} = \exp(-L_{\alpha,\beta}/l)$.

Критерии (7) устойчивости структур подтвердились при проведении численного эксперимента. Было также обнаружено, что если при изменении параметра S нарушается критерий (7а), то к структуре «пристраивается» дополнительный максимум, т. е. структура Q_N превращается в Q_{N+1} . Аналогично, нарушение критерия (7б) приводит к превращению $Q_N \rightarrow Q_{N-1}$. Соответственно нарушение критериев (7в) и (7г) приводит к превращениям $Q_N \rightarrow Q_{N-1}$ и $Q_N \rightarrow Q_{N+1}$, но уже за счет исчезновения или образования минимума со стороны, занятой состоянием T_3 .

Если при изменении параметра S величина $T_{2\alpha}$ стремится к значению

$$T_\infty^{**} = T_1 + \frac{T_3 - T_1}{2} R_\beta \frac{1 - R_\alpha}{1 - R_\alpha R_\beta}, \quad (9)$$

получающемуся из (8а) предельным переходом $N \rightarrow \infty$, то возникает состояние, которое в левой полуплоскости монотонно стремится к T_3 , а в правой осциллирует с периодом $L_\alpha + L_\beta$. Аналогично, при стремлении $T_{2\beta}$ к T_∞' , где

$$T_\infty' = T_3 - \frac{T_3 - T_1}{2} R_\alpha \frac{1 - R_\beta}{1 - R_\alpha R_\beta}, \quad (10)$$

возникает состояние, стремящееся в правой полуплоскости к T_1 и осциллирующее в левой. Если же $T_{2\alpha} < T_{\alpha}^{**}$ и $T_{2\beta} > T_{\infty}'$, то вся среда заполняется осцилляциями.

Перейдем теперь к рассмотрению движущихся структур. Если структура Q_{N+1} неустойчива по критерию (7в), т. е. $T_{N+1}^* > T_{2\beta} > T_N^*$, а Q_N неустойчива по критерию (7а), так что $T_{N+1}^{**} > T_{2\alpha} > T_N^{**}$, происходит распространение состояния T_3 по среде, причем на фронте образуется структура то Q_N , то Q_{N+1} . Обозначим такую динамическую структуру $P_{N, N+1}$.

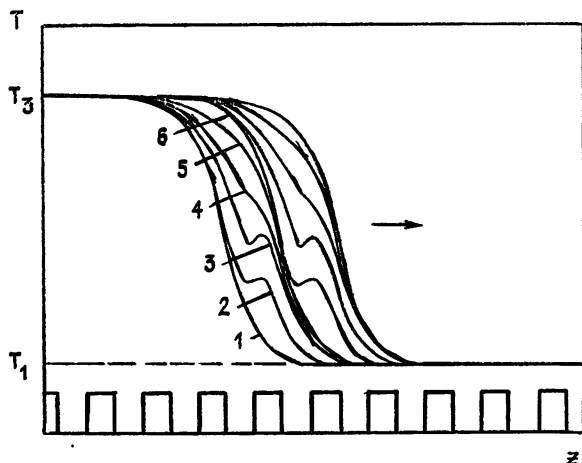


Рис. 3. Динамика распространения фронта со структурой $P_{0,1}$. Цифры у кривых обозначают последовательные моменты времени.

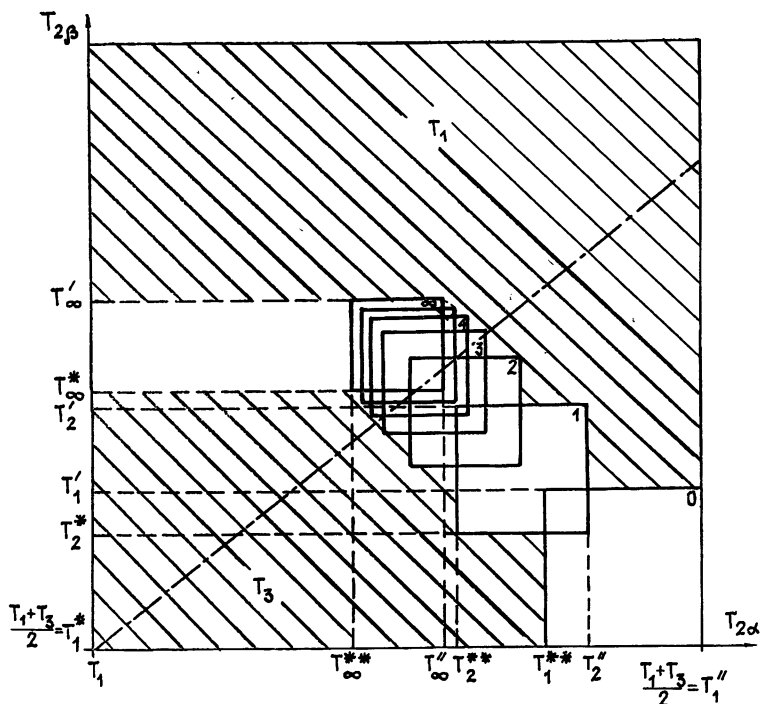


Рис. 4. Области на фазовой плоскости ($T_{2\alpha}$, $T_{2\beta}$), соответствующие устойчивым структурам Q_N (прямоугольники, помеченные цифрами). Штрихпунктирная линия определяет связь между $T_{2\alpha}$ и $T_{2\beta}$ для конкретной среды.

Аналитические выражения (8) позволяют построить на фазовой плоскости ($T_{2\alpha}$, $T_{2\beta}$) области, отвечающие неравенствам (7) (рис. 4). В прямоугольнике 0 реализуется неподвижная структура Q_0 , в прямоугольнике 1 — Q_1 , и т. д. В областях, обозначенных на рисунке T_1 и T_3 , происходит распространение соответствующих состояний. Согласно (5), (6), изменению параметра S будет соответствовать движение точки на плоскости ($T_{2\alpha}$, $T_{2\beta}$) по прямой, описываемой уравнением

$$T_{2\beta} = (1/2)(T_1 + T_3) + r(T_{2\alpha} - T_1) \quad (11)$$

(штрихпунктир на рис. 4). Область параметра S , в которой существуют стационарные структуры, максимальна при $L_\alpha, L_\beta \rightarrow \infty$ и сокращается с уменьшением размера зерен (рис. 5). Очевидно, что при $L_\alpha, L_\beta \rightarrow 0$ «нулевая полка» на зависимости $v(S)$ вырождается в единственную точку, соответствующую условию Максвелла.

Следует отметить аналогию между распространением фронта в периодически негомогенной среде и динамикой этого процесса в гомогенной среде при численном моделировании. Аналогом размера зерен служит при этом величина $\xi = \delta z/l$, где δz — шаг равномерной сетки при пространственной дискретизации. Обратную величину ξ^{-1} можно интерпретировать как количество точек сетки, помещающихся на фронте переключения. Зависимость ширины «нулевой полки» от ξ имеет вид, аналогичный изображенному на рис. 5 (см. также [7]). Из этого следует, что при численном моделировании структуры, неустойчивые в континуальном пределе, могут стать устойчивыми вследствие плохой дискретизации. Особенно важным это становится при моделировании многокомпонентных систем [8], в которых роль параметра накачки играет демпфирующая переменная: При недостаточном количестве точек сетки фронт, движущийся в континуальном случае, стабилизируется.

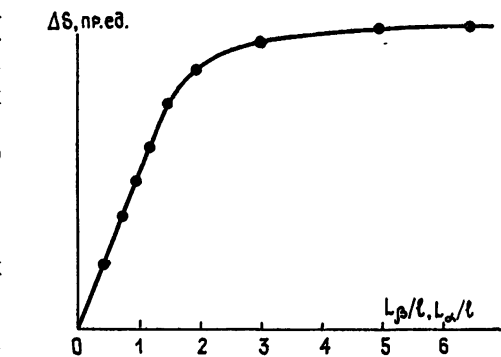


Рис. 5. Зависимость ширины «нулевой полки» по параметру S от размера зерен.

Природа рассмотренных в работе явлений связана с резонансным взаимодействием нелинейной среды с периодическими пространственными неоднородностями. Уравнение (1) в случае стационарных структур ($\partial T/\partial t = 0$) аналогично уравнению для нелинейного маятника, возбуждаемого внешней силой. Известно, что поведение такого маятника во времени может быть очень сложным — вплоть до стохастического. Неудивительно, поэтому, что стационарные пространственные структуры в бистабильной системе также оказываются сложными. Подробное исследование таких структур будет представлено нами в следующей работе.

В заключение отметим, что образование «нулевой полки» в зависимости скорости фронта наблюдалось экспериментально [9], а в [10] высказано предположение о связи «полки» с наличием неоднородностей, хотя прямые данные, свидетельствующие о такой связи, отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. // УФН. 1979. Т. 128. № 4. С. 625.
2. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. В кн.: Вопросы кибернетики. — М.: АН СССР, 1975. Вып. 12. С. 3.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967. С. 491.

4. Гуревич А. В., Минц Р. Г. Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках. — М.: ИВТАН, 1987. — 165 с.
5. Маркин В. С., Пастушенко В. Ф., Чизмаджев Ю. А. Теория возбудимых сред. — М.: Наука, 1981. — 275 с.
6. Richardson H., Abraham E., Firth W. J. // Optics Comm. 1987. V. 63. № 3. P. 199.
7. Пастушенко В. Ф., Чизмаджев Ю. А. В кн.: Колебательные процессы в биологических и химических системах. — Пушино: АН СССР, 1971. Т. 2. — 305 с.
8. Калафати Ю. Д., Ржанов Ю. А. // Тезисы докл. Всесоюзного совещания по самоорганизации в физических, химических и биологических системах «Синергетика-86». — Кишинев: Штиинца, 1986. С. 52.
9. Барелко В. В. Проблемы кинетики и катализа. — М.: Наука, 1981. Т. 18. С. 61.
10. Гуревич А. В., Минц Р. Г., Пухов А. А. // Хим. физика. 1987. Т. 6. № 9. С. 1279.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
25 ноября 1987 г.

POLYSTABILITY OF FRONT SWITCHING IN A BISTABLE PERIODICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

Yu. D. Kalafati, Yu. A. Rzhanov

The selfwaves propagation in periodically inhomogeneous media is considered. It is analytically shown that the velocity of front propagation in the media with inhomogeneities equals zero in the whole region of parameters in contrary to the case of homogeneous media. In the case of media with periodical inhomogeneity the phenomenon of the front multistability is discovered — the existence of various stable motionless fronts with different shapes under the same system conditions. Such phenomena can be observed, for example, in the arrays of elements made of materials with *S*- and *N*-type voltage-current characteristic and composite bistable materials.

Примечание при корректуре. В обозначениях на рис. 4 допущена неточность: следует изменить T_1^* на T_0^* , T_2^* на T_1^* ; T_1' на T_0' , T_2' на T_1' ; T_1'' на T_0'' , T_2'' на T_1'' ; T_1^{**} на T_0^{**} , T_2^{**} на T_1^{**} .