

УДК 534.1

О СИНХРОНИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Н. Н. Веричев, А. Г. Максимов

На примере двух связанных параметрических возбуждаемых нелинейных осцилляторов исследуется явление синхронизации стохастических колебаний, обсуждаются вопросы экспериментальной регистрации данного явления.

1. Явление стохастической синхронизации обнаружено в [1] при экспериментальном (аналоговом) исследовании динамики двух связанных параметрических генераторов,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \quad \dot{y}_1 = k_1 y_1 - x_1 (1 + q \cos \theta + x_1^2) - C_1 (y_1 - y_2), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \quad \dot{y}_2 = -k_2 y_2 - x_2 (1 + q \cos \theta + x_2^2) + C_2 (y_1 - y_2), \quad \theta = \omega, \end{aligned} \quad (1)$$

индивидуально (при $C_1 = C_2 = 0$) обладающих стохастической динамикой при определенных значениях параметров. Здесь k_1, k_2 — коэффициенты диссипации, q, ω — амплитуда и частота накачки, $C_1, C_2 > 0$ — параметры связи. Было обнаружено, что при увеличении параметра связи ($C_1 = C_2 = C$) от нуля эволюция свойств стохастических колебаний генераторов происходит подобно эволюции колебаний взаимодействующих автономных генераторов с одной степенью свободы. То есть имеются все характерные атрибуты того, что называют «синхронизацией».

С точки зрения фазового пространства, здесь, подобно рождению на двумерном торе устойчивого предельного цикла, соответствующего синхронизации периодических колебаний, с увеличением связи, при $C = C^*$ имеет место рождение некоторого странного аттрактора A^* внутри аттрактора связанной системы. Колебания генераторов, соответствующие аттрактору A^* , являются стохастическими и синхронизованными. В частности, последнее регистрируется одновременным наблюдением движений изображающей точки в проекции на «парциальные фазовые плоскости» генераторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Все выше изложенное относится и к случаю принудительной синхронизации одного генератора другим, стохастическим генератором. В [1] дано математическое определение стохастической синхронизации, суть которого состоит в том, что проекции аттрактора A^* на парциальные подпространства взаимодействующих подсистем $\pi_1(A^*)$ и $\pi_2(A^*)$ топологически эквивалентны.

Справедливость математического определения показана в работе [2]. В ней, на примере двух взаимодействующих систем Лоренца, в первом приближении по малому параметру C^{-1} найдено отображение g , переводящее $\pi_1(A^*)$ в $\pi_2(A^*)$.

Настоящая работа посвящена обсуждению вопросов, связанных с экспериментальной регистрацией эффекта стохастической синхронизации по результатам численного исследования системы (1). Рассматривается случай простой взаимной и принудительной синхронизации.

2. Размерностные и спектральные свойства колебаний генераторов в режиме стохастической синхронизации. В силу сложности образа

стохастической синхронизации (странный аттрактор), установление факта ее существования в эксперименте (натурном, численном) через установление существования отображения g , представляет собой весьма непростую задачу. Однако если допустить, что требуемое отображение g существует, то следствием этого является равенство размерностей проекций аттрактора $\pi_1(A^*)$ и $\pi_2(A^*)$.

Это свойство синхронизации исследовалось в численном эксперименте. Эволюция размерности аттрактора A изображена на рис. 1. Здесь, начиная со значения параметра связи $C=4$, размерность аттрактора A стабилизируется (рождение аттрактора A^*) и остается практически постоянной при $C > 4$. При этом $\dim \pi_1(A^*) = \dim \pi_2(A^*) = \dim A^*$. С другой стороны, если отображение g удовлетворяет более жесткому, чем в [1], требованию — является непрерывно дифференцируемым, то спектры колебаний генераторов, например $x_1(t)$, $x_2(t)$, также должны удовлетворять этому

свойству. На рис. 2 изображены спектры мощности реализаций $x_1(t)$ и $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Действительно, в режиме стохастической синхронизации спектры, в том числе и в «мелких деталях», являются подобными, что указывает на существование отображения g , близкого к тождественному.

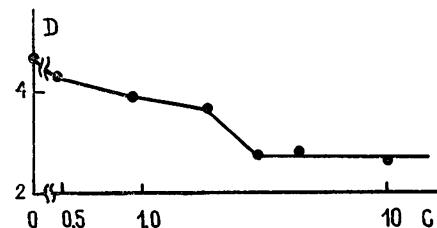


Рис. 1.

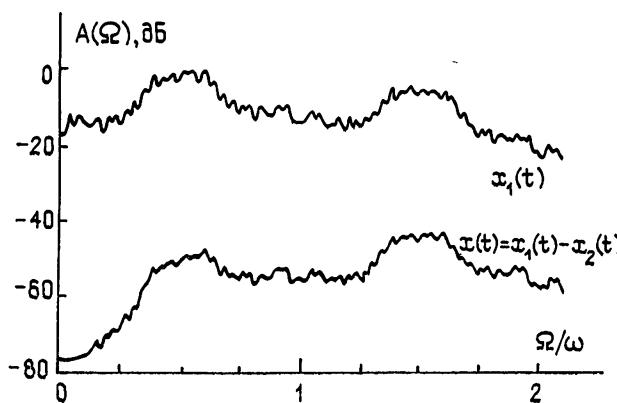


Рис. 2.

3. Область захвата и удержания стохастической синхронизации. По аналогии с синхронизацией периодических колебаний, под областью захвата стохастической синхронизации будем понимать область параметров, для точек которой режим стохастической синхронизации реализуется при любых начальных условиях системы, т. е. аттрактор A^* является устойчивым в целом, а под областью удержания — область параметров, для которых данный режим существует и устойчив (в общем случае локально). Решение традиционных задач теории синхронизации (определение областей ее захвата и удержания) через анализ размерности аттракторов и спектров колебаний затруднено вследствие громоздкости счета и также достаточно невысокой точности вычисления этих характеристик. В этом отношении наиболее прост подход к стохастической синхронизации как к предельному случаю синхронизации периодических колебаний.

Рассмотрим простую принудительную синхронизацию одного из генераторов (Γ_1) другим (Γ_2) ($C_2=0$). При изменении параметра k_2 в воздействующем генераторе реализуется цепочка бифуркаций удвоения периода периодического движения. При каждом k_2 , соответствую-

щем предельному циклу периода 2^nT , $T=2\pi/\omega$ вычисляется $C_1^* = \min C_1$, соответствующее исчезновению однократной неподвижной точки отображения:

$$(x_1(t), y_1(t)) \rightarrow (x_1(t+2^nT), y_1(t+2^nT))$$

— простой синхронизации периодических колебаний генератора Γ_1 .

Эксперимент показывает, что кривая $C_1^*(k_2)$ (граница области удержания простой синхронизации периодических колебаний) явно имеет асимптоту $C_1 = C^*$, рис. 3. Таким образом, C^* — нижняя граница области удержания простой принудительной стохастической синхронизации. В эксперименте при $C_1 = C^*$ режим стохастической синхронизации реализуется при различных, произвольно выбираемых начальных условиях. Этот факт дает основание предполагать, что области захвата и удержания стохастической синхронизации в данном случае совпадают и определяются неравенством $C_1 > C^*$ (k_1, k_2^*, q, ω), где k_2^* — значение коэффициента k_2 , соответствующее рождению в фазовом пространстве Γ_2 аттрактора Фейгенбаума.

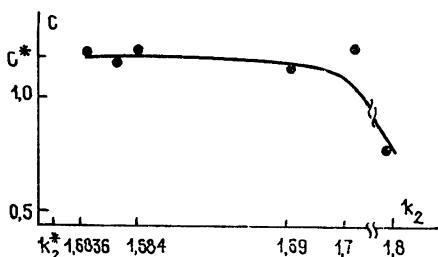


Рис. 3.

Аналогичный подход к определению границы области удержания стохастической синхронизации может быть развит и в случае взаимосвязанных генераторов.

4. Описание стохастической синхронизации генераторов с помощью введения формальных фаз. Введем формально, по аналогии с осциллятором, «фазы» колебаний генераторов как углы наклона проекций вектора фазовой скорости системы (1) на плоскости (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

$$\varphi_{1,2} = \arccos \frac{\dot{y}_{1,2}}{\sqrt{\dot{x}_{1,2}^2 + \dot{y}_{1,2}^2}}$$

и разность фаз

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t).$$

Будем также рассматривать отображение $\bar{\Delta\varphi} = T^\tau(\Delta\varphi)$, где T^τ — отображение разности фаз, определяемое отображением сдвига по траекториям системы (1). В случае периодических колебаний в несвязанном состоянии $\varphi_{1,2}$ — действительно и не что иное, как индивидуальные фазы этих периодических движений. При введении связи, в случае простой синхронизации последних, упомянутое отображение имеет однократную устойчивую неподвижную точку (при $\tau=T$, где T — период цикла). При этом, очевидно, $\Delta\varphi(t)$ — периодическая функция времени, играющая ту же самую роль, что и функция $\alpha(t)$ в определении синхронизации в [1]. Далее допустим, что при изменении какого-либо параметра системы, например ω , имеет место цепочка бифуркаций удвоения периода цикла синхронизации. Тогда для каждого цикла периода 2^nT отображение разности фаз при $\tau=T$ будет иметь 2^nT -тактный цикл, а при $n \rightarrow \infty$, в случае синхронизации стохастических колебаний, — странный аттрактор, область диссипации которого будет ограничена некоторой окрестностью однократной неподвижной точки. Область диссипации странного аттрактора в плоскости $(\Delta\varphi, \bar{\Delta\varphi})$ должна стягиваться к неподвижной точке (в начале координат) при возрастании параметра связи, поскольку в этом случае отображение стремится к тождественному. При полном отсутствии синхронизации, т. е. при полной некоррелированности стохастических коле-

баний, областью притяжения странного аттрактора, естественно, должна являться вся плоскость $(\Delta\phi, \bar{\Delta}\phi)$ (по $\text{mod } 2\pi$). То есть при помощи рассматриваемого отображения может определяться, в частности, характерное время установления стохастической синхронизации как время достижения траекторией отображения заданной окрестности (некоторой точки), область ее захвата и удержания. Вышесказанное, в определенной мере, оправдывает введение «фаз» стохастических колебаний.

Отображение разности фаз стохастических колебаний генераторов исследовалось численно в случае принудительной и взаимной стохастической синхронизации. Результаты исследования приведены на рис. 4 ($k_1 \neq k_2$; рис. 4а: $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$, рис. 4б: $C_1 = C_2 \neq 0$). При задании начальных условий системы вне аттрактора A^* , спустя время переходного процесса, исчисляемого несколькими периодами колебаний накачки, наступает захват стохастической синхронизации, соответствующей движению разности фаз колебаний генераторов на странном аттракторе, имеющем малую область диссипации $\sim 0,1$ рад (см. рис. 4).

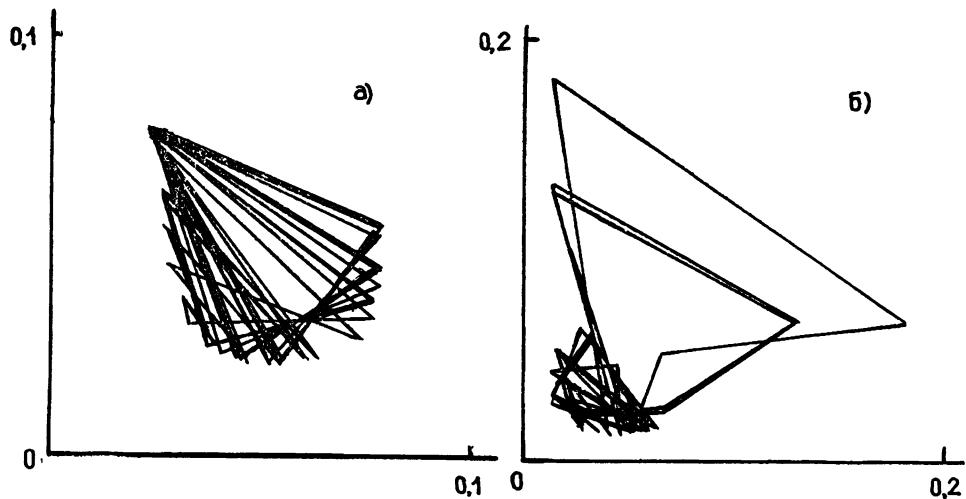


Рис. 4.

Анализ свойств аттракторов отображения фаз показывает, что значение $\langle \Delta\phi(t) \rangle_t = \eta$ не зависит от начальных условий системы. Это дает основание полагать, что временная зависимость разности фаз для любой траектории системы представима в виде $\Delta\phi(t) = \eta + \Delta\phi^*(t)$, где $\langle \Delta\phi^*(t) \rangle_t = 0$. Таким образом, по аналогии с синхронизацией периодических колебаний в данном случае имеет место стохастическая синхронизация в «среднем».

Авторы признательны В. С. Афраймовичу и М. И. Рабиновичу за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. // Изв. вузов. Ра-диофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1050.
2. Веричев Н. Н. // В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений / Под ред. Е. А. Леонтьевич-Андроновой. — Горький: Гос. ун-т, 1986.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 ноября 1987 г.,
после доработки
22 апреля 1988 г.

ABOUT SYNCHRONIZATION OF STOCHASTIC OSCILLATIONS OF PARAMETRICALLY EXITED NONLINEAR OSCILLATORS

N. N. Verichev, A. G. Maksimov

Synchronization of stochastic oscillations is investigated by an example of two coupled parametrically excited oscillators. The questions, connected with experimental registration of this phenomenon are discussed.