

УДК 538.874

ТЕПЛОЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕЙ

Н. П. Жук, О. А. Третьяков, И. М. Фукс, А. Г. Яровой

Приведены результаты численного исследования излучательной способности и степени поляризации излучения однородного диэлектрического полупространства со статистически однородными изотропными шероховатостями границы.

Расчет теплового излучения среды, ограниченной статистически неровной поверхностью, — одна из ключевых теоретических задач, возникающих при интерпретации результатов дистанционного исследования Земли и других небесных тел [1, 2]. В данной работе на основе статистико-волнового подхода [3] рассмотрено влияние малых и пологих случайных неровностей — шероховатостей — на тепловое радиоизлучение однородного и равномерно нагретого диэлектрического полупространства. Сходное рассмотрение, проведенное в [4, 5], относится к частному случаю хорошо проводящей среды, неровную границу которой можно считать импедансной.

1. Пусть область $-\infty < z < \zeta(\mathbf{r})$, $-\infty < x, y < \infty$ трехмерного пространства x, y, z заполнена диссипативной диэлектрической средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon'(1 + i\delta)$, а смежная с ней область является свободной. Здесь ε' — вещественная часть диэлектрической проницаемости, δ — тангенс угла диэлектрических потерь. Случайная функция $\zeta(\mathbf{r})$ описывает пологие неровности границы $z=0$, характерная высота которых значительно меньше длины волны излучения. Считается, что $\langle \zeta(\mathbf{r}) \rangle = 0$, $\langle \zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}') \rangle = B(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, где $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций ζ .

Расчет теплового излучения нагретого тела, как известно [6], связан с решением задачи дифракции на этом теле плоской монохроматической электромагнитной волны. Пусть на описанную выше диэлектрическую среду в направлении вектора $\mathbf{l}_i = (\cos \varphi_i \sin \alpha_i, \sin \varphi_i \sin \alpha_i, -\cos \alpha_i)$ падает плоская волна (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен):

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}) = \exp(ikl_i \cdot \mathbf{R})(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{n}A_p + \theta_i A_s), \tag{1}$$

$$\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{R}) = \exp(ikl_i \cdot \mathbf{R})(\theta_i A_p - \mathbf{z}_0 \times \mathbf{n}A_s).$$

Здесь $\mathbf{R} = (x, y, z)$, $\mathbf{n} = (\cos \varphi_i, \sin \varphi_i, 0)$, α_i и φ_i — угол падения и азимутальный угол распространения волны соответственно: $0 \leq \alpha_i < 90^\circ$, $0 \leq \varphi_i < 360^\circ$, \mathbf{z}_0 — орт оси z , θ_i — единичный вектор, лежащий в плоскости падения и ортогональный вектору \mathbf{l}_i : $\theta_i = \mathbf{z}_0 \sin \alpha_i + \mathbf{n} \cos \alpha_i$; $k = \omega/c$, c — скорость света в вакууме, A_s и A_p — амплитуды вертикально (s) и горизонтально (p) поляризованных составляющих электрического поля падающей волны.

В силу случайной природы неровностей дифрагированное поле $\mathbf{E}^{(d)}$, $\mathbf{H}^{(d)}$ состоит из статистически средней — когерентной — и флуктуационной компонент. Когерентная компонента, отраженная в свободное пространство, полностью описывается набором коэффициентов когерентного отражения $R_{\mu\nu}(\alpha_i, \varphi_i)$ с помощью формул [7, 8]

$$\langle E^{(d)}(\vec{R}) \rangle = \exp(ikl_r \cdot \vec{R}) [(z_0 \times n R_{pp} - \theta_r R_{sp}) A_p + (\theta_r R_{ss} - z_0 \times \vec{n} R_{ps}) A_s], \quad (2)$$

$$\langle H^{(d)}(\vec{R}) \rangle = \exp(ikl_r \cdot \vec{R}) [(\theta_r R_{pp} + z_0 \times n R_{sp}) A_p + (\theta_r R_{ps} - z_0 \times n R_{ss}) A_s].$$

Мы обозначили через l_r и θ_r единичные векторы, определяющие соответственно направление зеркального отражения и ортогональное ему направление в плоскости падения: $l_r = (\cos \varphi_i \sin \alpha_i, \sin \varphi_i \sin \alpha_i, \cos \alpha_i)$, $\theta_r = z_0 \sin \alpha_i - n \cos \alpha_i$; $R_{\mu\nu}$ — коэффициент когерентного отражения ν -поляризованной плоской волны в плоскую волну μ -й поляризации ($\mu, \nu = s, p$). Из характеристик рассеяния падающей волны во флуктуационную компоненту нам понадобится альбеда $S_\nu(\alpha_i, \varphi_i)$ — поток в свободное пространство энергии флуктуационной компоненты, возникающей при падении из свободного пространства в направлении l_i ν -поляризованной плоской волны ($\nu = s, p$), нормированный на плотность потока энергии падающей волны в направлении l_i и на площадь шероховатого участка. Размеры последнего при подсчете S_ν считаются конечными [3].

Примем, что диэлектрическая среда равномерно нагрета до термодинамической температуры T . В соответствии с известной схемой [6], использующей флуктуационно-диссипационную теорему, для яркостной температуры $T_{b\nu}(\alpha, \varphi)$ и излучательной способности $e_\nu(\alpha, \varphi)$ шероховатой поверхности среды на ν -й поляризации получаются формулы [9]

$$T_{b\nu}(\alpha, \varphi) = e_\nu(\alpha, \varphi) T, \quad (3)$$

$$e_\nu(\alpha, \varphi) = 1 - S_\nu(\alpha, \varphi) / \cos \alpha - \sum_{\mu=s, p} |R_{\mu\nu}(\alpha, \varphi)|^2.$$

Здесь и далее точке наблюдения, расположенной в свободном пространстве, сопоставлены угол визирования α , который отсчитывается от надира, и азимутальный угол φ : $0 \leq \alpha < 90^\circ$, $0 \leq \varphi < 360^\circ$.

2. Коэффициенты когерентного отражения находятся из решения задачи для когерентной компоненты, импедансная формулировка которой предложена в [8, 10]. Результат ее решения таков [7, 11]:

$$R_{ss}(\alpha_i, \varphi_i) = \Delta_{se} / \Delta_e, \quad R_{pp}(\alpha_i, \varphi_i) = \Delta_{pe} / \Delta_e, \quad (4)$$

$$R_{sp}(\alpha_i, \varphi_i) = -R_{ps}(\alpha_i, \varphi_i) = 2\rho \cos \alpha_i / \Delta_e;$$

$$\Delta_{se} = [\alpha_e(\mathbf{x}) \cos \alpha_i + 1][\cos \alpha_i - \beta_e(\mathbf{x})] + \rho^2(\mathbf{x}) \cos \alpha_i,$$

$$\Delta_{pe} = [\alpha_e(\mathbf{x}) \cos \alpha_i - 1][\cos \alpha_i + \beta_e(\mathbf{x})] - \rho^2(\mathbf{x}) \cos \alpha_i, \quad (5)$$

$$\Delta_e = [\alpha_e(\mathbf{x}) \cos \alpha_i + 1][\cos \alpha_i + \beta_e(\mathbf{x})] - \rho^2(\mathbf{x}) \cos \alpha_i.$$

В этих формулах \mathbf{x} — горизонтальная компонента волнового вектора падающей плоской волны: $\mathbf{x} = kn \sin \alpha_i$; α_e , β_e и ρ — коэффициенты, определяющие диаду эквивалентного импеданса шероховатой границы. В приближении Бурре теории многократного рассеяния они найдены в [8, 12] и в применяемых здесь обозначениях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_e(\mathbf{x}) &= m^{-1} + (k\sigma)^2 m^{-1} (\varepsilon - 1) + m^{-2} (\varepsilon - 1)^2 k^4 \int dt \tilde{B}(\mathbf{x} - kt) \times \\ &\quad \times [(n \cdot n')^2 / \Delta_p - (n \times n')^2 gh / \Delta_s], \\ \beta_e(\mathbf{x}) &= m\varepsilon^{-1} + (k\sigma)^2 m\varepsilon^{-1} (1 - \varepsilon^{-1}) [\varepsilon - (\varepsilon + 1) \sin^2 \alpha_i] + \\ &\quad + (1 - \varepsilon^{-1})^2 k^4 \int dt \tilde{B}(\mathbf{x} - kt) [(e t^2 \sin^2 \alpha_i + (\varepsilon g - h) \times \end{aligned} \quad (6)$$

$$\times mtn \cdot n' \sin \alpha_i - m^2 h(n \cdot n')^2 / \Delta_s - m(n \times n')^2 / \Delta_p],$$

$$\rho(\mathbf{x}) = (\varepsilon - 1)^2 k^2 \int dt \tilde{B}(\mathbf{x} - kt) z_0 \cdot n \times n' [g(tm^{-1} \sin \alpha_i - h\varepsilon^{-1}) / \Delta_s - n \cdot n' / \Delta_p].$$

Здесь интегрирование по $t = (t_x, t_y, 0)$ производится по всей плоскости (t_x, t_y) , \tilde{B} и σ — пространственный спектр и среднеквадратичная высота неровностей: $\tilde{B}(\mathbf{q}) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{r} B(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$, $\sigma^2 = B(0)$ ($\mathbf{q} = (q_x, q_y, 0)$);

$$g = \sqrt{1 - t^2}, \quad h = \sqrt{\varepsilon - t^2}, \quad m = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha_i} \quad (7)$$

$$(\text{Im } \sqrt{} \geq 0); \quad \Delta_s = \varepsilon g + h, \quad \Delta_p = g + h.$$

Выражения для альbedo легко получаются из формул работы [11] для индикатрис рассеяния шероховатостей границы одноосного диэлектрического полупространства. Эти формулы учитывают отличие когерентной компоненты от невозмущенного поля над ровной поверхностью и приводят к следующему результату:

$$S_s(\alpha_i, \varphi_i) = 4 \cos^2 \alpha_i |1 - \varepsilon|^2 |\cos \alpha_i / \beta_e(\mathbf{x}) + 1|^{-2} k^4 \times \\ \times \int_{t_x^2 + t_y^2 < 1} dt g \tilde{B}(\mathbf{x} - kt) [|t \sin \alpha_i / \beta_e(\mathbf{x}) + h n \cdot n'| / \Delta_s]^2 + |n \times n' / \Delta_p|^2], \quad (8)$$

$$S_p(\alpha_i, \varphi_i) = 4 \cos^2 \alpha_i |1 - \varepsilon|^2 |\cos \alpha_i + 1 / \alpha_e(\mathbf{x})|^{-2} k^4 \times$$

$$\times \int_{t_x^2 + t_y^2 < 1} dt g \tilde{B}(\mathbf{x} - kt) (t \sin \alpha_i n \cdot n' \Delta_p / l^2 + |h n \times n' / \Delta_s|^2).$$

Выражения (3), (4), (8) являются основными при численном исследовании излучательной способности однородного диэлектрического полупространства с шероховатой границей. Ниже рассмотрена простейшая ситуация, когда неровности статистически изотропны: $B(\mathbf{r}) = B(r)$. При этом $\rho = R_{sp} = R_{ps} = 0$; R_{ss} , R_{pp} , S_s , S_p , а значит, и излучательная способность не зависят от азимутального угла φ : $e_v(\alpha, \varphi) = e_v(\alpha)$. Шероховатости считаются коррелированными по гауссову закону: $B(r) = \sigma^2 \exp(-r^2/l^2)$ (l — интервал корреляции). Требования малости и пологости неровностей налагают условия $k\sigma \ll 1$, $\sigma/l \ll 1$, которые считаются выполненными.

Отметим, что методы, использованные для получения формул (4) — (6), (8), вполне обоснованы при выполнении добавочного условия $k\sigma\sqrt{|\varepsilon|} \ll 1$. При $|\varepsilon| \gg 1$ следует пользоваться иным методом, исходящим из импедансного приближения [4, 5]. Мы, однако, включили в рассмотрение и такие ситуации, когда $k\sigma\sqrt{|\varepsilon|} \gtrsim 1$ и, стало быть, $|\varepsilon| \gg 1$. Оправданием этому служит то обстоятельство, что при $|\varepsilon| \gg 1$ формулы (4) — (6), (8) переходят в тот же результат, что и даваемый импедансным приближением.

3. Рассмотрим величины $e_{s,p}(\alpha)$, а также разность $\Delta e_v(\alpha)$ излучательной способности шероховатой (e_v) и гладкой (e_{0v}) границ на v -й поляризации: $\Delta e_v = e_v - e_{0v}$. Последняя величина, как известно [6], дается выражениями

$$e_{0s}(\alpha) = 1 - |R_s(\alpha)|^2, \quad e_{0p}(\alpha) = 1 - |R_p(\alpha)|^2, \quad (9)$$

где $R_s(\alpha_i) = (\varepsilon \cos \alpha_i - m) / (\varepsilon \cos \alpha_i + m)$, $R_p(\alpha_i) = (\cos \alpha_i - m) \times (\cos \alpha_i + m)^{-1}$ — френелевские коэффициенты отражения плоской вол-

ны надлежащей поляризации от ровной поверхности. В результате расчетов на ЭВМ были установлены следующие закономерности.

Излучение в надир ($\alpha = 0$). В этом случае $e_s(0) = e_p(0) = e$, $\Delta e_s(0) = \Delta e_p(0) = \Delta$. Шероховатости всегда приводят к возрастанию излучательной способности по сравнению с гладкой границей: $\Delta > 0$. Зависимость $\Delta = \Delta(\epsilon')$ при $\sigma = \text{const}$ представлена на рис. 1. Кривые 1 и 2 отвечают значениям тангенса угла потерь, равным 1,0 и 0,01; считается $k\sigma = 0,09$, $kl = 1,0$. Видно, что $\Delta(\epsilon')$ максимально, когда вещественная часть диэлектрической проницаемости лежит в пределах от 8 до 30. Уменьшение Δ при $\epsilon' \leq 8$ связано с уменьшением энергии рассеянного шероховатостями поля, а при $\epsilon' \geq 30$ обусловлено «вытеснением» рассеянного поля из среды в свободное пространство. Увеличение δ при $\epsilon' = \text{const}$ заметно влияет на значение Δ , когда $\delta > 0,3$, и приводит к возрастанию Δ при $1 < \epsilon' \leq 8$ и убыванию при $\epsilon' \geq 30$.

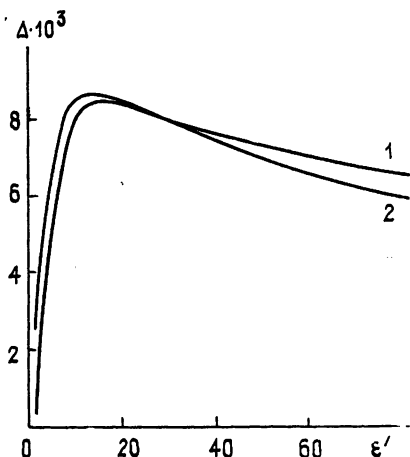


Рис. 1.

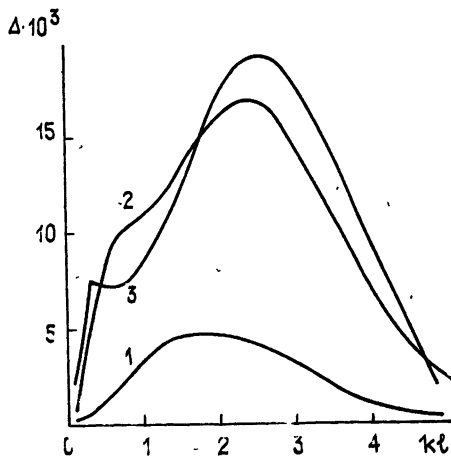


Рис. 2

С ростом горизонтального размера неровностей l при фиксированной среднеквадратичной высоте σ величина Δ монотонно убывает до нуля. Для шероховатой импедансной поверхности это показано ранее в работе [5]. Из приведенных выше формул в случае крупномасштабных ($kl \geq 5$) или мелкомасштабных ($kl \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}$) неровностей трудно получить соответствующие асимптотики:

$$\Delta \sim (kl)^{-2}, \quad \Delta \sim C \frac{k^2}{l} \left| \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \right|^2 \frac{\text{Im } \epsilon}{|1 + \sqrt{|\epsilon|}|^4}, \quad (10)$$

где коэффициент C для принятой функции корреляции неровностей равен $2\sqrt{\pi}$.

В отсутствие частотной дисперсии диэлектрической проницаемости зависимость величины $e = e_{s,p}(0)$ от частоты эквивалентна зависимости от переменного kl при $\sigma/l = \text{const}$, которая изображена на рис. 2. Кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям ϵ , равным $3 + i0,03$, $20 + i0,20$, $80 + i0,80$; $\sigma/l = 0,1$. Частотная зависимость излучательной способности имеет максимумы: два при $|\epsilon| \geq 60$ и один при $|\epsilon| \leq 40$. Первому из двух (второму) максимуму соответствует значение частоты, при котором горизонтальный размер неровностей становится сравнимым с длиной волны излучения в среде (в свободном пространстве). С убыванием $|\epsilon|$ различие между этими двумя частотами уменьшается, и при $|\epsilon| \approx 40$ первый из максимумов исчезает.

Излучение в наклонном направлении ($\alpha \neq 0$). При $\alpha = \text{const}$ зависимость величин $\Delta e_p(\alpha)$ для $0 < \alpha < 90^\circ$ и $\Delta e_s(\alpha)$ для $0 < \alpha \leq 30^\circ$ от ϵ' аналогична зависимости $\Delta = \Delta(\epsilon')$, описанной выше. Для углов визи-

рования, превышающих 60° , величина $\Delta e_s(\alpha)$ как функция ϵ' имеет минимум (отрицательный). Отвечающее ему ϵ' таково, что среда с соответствующей диэлектрической проницаемостью характеризуется квазибрюстеровским углом α_6 , равным углу визирования.

При $\alpha = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ величины $\Delta e_p(\alpha)$ для $0 < \alpha < 90^\circ$ и $\Delta e_s(\alpha)$ для $0 < \alpha \leq 30^\circ$ представляют собой положительные монотонно убывающие до нуля функции переменного l . При этих же условиях величина $\Delta e_s(\alpha)$ для $\alpha \geq 60^\circ$, $|\epsilon| \geq 3$ является отрицательной и монотонно возрастает с ростом l до нуля.

Как и при излучении в надир, при $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ ($\alpha_0 \leq 30^\circ$), $\sigma/l = \text{const}$ зависимость излучательной способности на каждой из поляризацій от переменной kl ($0 < kl \leq 5$) имеет максимумы: два при $|\epsilon| \geq 60$ и один при $|\epsilon| \leq 40$. По сравнению с излучением в надир, максимумы горизонтально поляризованного излучения смещены в сторону более коротких волн, а вертикально поляризованного — в сторону более длинных. Для углов визирования, превышающих 60° , с уменьшением длины волны величина e_p монотонно возрастает в рассматриваемом интервале значений kl ($0 < kl \leq 5$), а e_s — убывает.

При анализе угловых зависимостей теплового излучения мы ограничимся ситуацией, когда $kl \leq 1$, $\sigma/l \geq 0,05$. На горизонтальной поляризации шероховатости границы приводят к возрастанию излучательной способности при всех углах визирования: $\Delta e_p(\alpha) > 0$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), причем в скользящих направлениях ($\alpha \rightarrow 90^\circ$) $\Delta e_p(\alpha) \rightarrow 0$. Величина $\Delta e_p(\alpha)$ при $|\epsilon| \geq 30$ монотонно убывает с ростом α , а для сред с $|\epsilon| \leq 20$ имеет один максимум в области углов $50 - 80^\circ$. Типичные угловые зависимости $\Delta e_p(\alpha)$ приведены на рис. 3, где принято $k\sigma = 0,09$, $kl = 1,0$, $\epsilon = 2 + i0,02$ (кривая 1), $20 + i0,20$ (2) и $80 + i0,80$ (3).

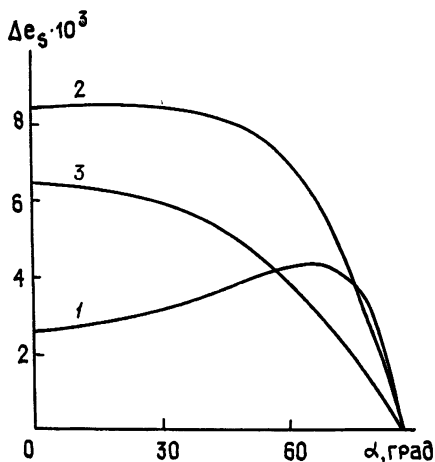


Рис. 3.

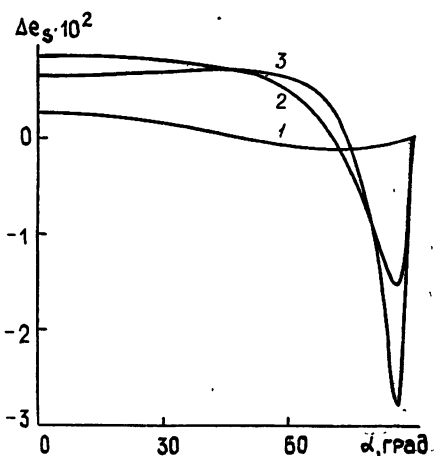


Рис. 4.

На вертикальной поляризации в области углов $0 < \alpha \leq 30^\circ$ излучательная способность шероховатой границы превосходит таковую для ровной поверхности: $\Delta e_s > 0$. При $\alpha = \alpha_6$ и в некоторой окрестности квазибрюстеровского угла имеет место обратное явление: $e_s(\alpha) < e_{0s}(\alpha)$ (для рассмотренных нами значений квазибрюстеровский угол превышал 50°). При некотором $\alpha = \alpha_{\min} > \alpha_6$ величина Δe_s как функция α принимает минимальное (отрицательное) значение. В области углов $0 < \alpha < \alpha_{\min}$ для сред с $|\epsilon| \leq 30$ $\Delta e_s(\alpha)$ монотонно убывает, а для $|\epsilon| \geq 40$ имеет один максимум (положительный). В области $\alpha_{\min} < \alpha < 90^\circ$ для сред с $|\epsilon| > 1$ при $kl \ll 1$ и для сред с $|\epsilon| \geq 3$ при $kl \approx 1$ функция $\Delta e_s(\alpha)$, оставаясь отрицательной, монотонно возрастает до нуля. Для сред с $|\epsilon| \leq 2$ и $kl \approx 1$ функция $\Delta e_s(\alpha)$ вновь становится положительной при скользящих углах визирования. Угловая

зависимость $\Delta e_s(\alpha)$ при $k\sigma=0,09$, $kl=1,0$ проиллюстрирована на рис. 4; кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям $\varepsilon=2+i0,02$, $20+i0,20$ и $80+i0,80$.

4. В случае статистически изотропных шероховатостей излучательная способность границы на круговой поляризации $e_c(\alpha)$ и степень поляризации излучения $d(\alpha)$, как нетрудно показать, равны

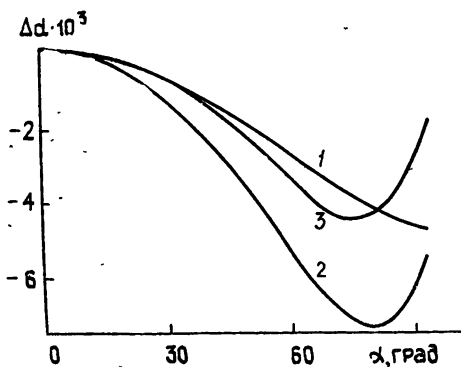


Рис. 5.

(кривая 1), $20+i0,20$ (2) и $80+i0,80$ (3). Видно, что неровности приводят к уменьшению степени поляризации при всех углах визирования: $\Delta d(\alpha) < 0$. Функция $\Delta d(\alpha)$ с ростом α для сред с $|\varepsilon| \leq 5$ монотонно убывает, а для сред с $|\varepsilon| \geq 10$ имеет минимум, лежащий в области углов $\alpha \geq 40^\circ$.

$$[e_s(\alpha) + e_p(\alpha)]/2$$

и

$$[e_s(\alpha) - e_p(\alpha)]/[e_s(\alpha) + e_p(\alpha)].$$

Анализ теплового излучения на круговой поляризации, таким образом, сводится к приведенному выше. Зависимость разности $\Delta d(\alpha) = d(\alpha) - d_0(\alpha)$, где $d_0(\alpha)$ — степень поляризации излучения для гладкой границы, от угла визирования представлена на рис. 5, где принято $k\sigma = 0,09$, $kl = 1,0$, $\varepsilon = 3 + i0,03$

ЛИТЕРАТУРА

1. Богородский В. В., Козлов А. И. Микроволновая радиометрия земных покровов. — Л.: Гидрометеоздат, 1985. — 272 с.
2. Шутко А. М. СВЧ радиометрия водной поверхности и почвопрунгов. — М.: Наука, 1986. — 190 с.
3. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
4. Караваев В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 5. С. 658.
5. Докучаев В. П., Кротиков В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 8. С. 937.
6. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике — М.: Наука, 1967. — 308 с.
7. Данилевич С. Б., Жук Н. П., Третьяков О. А. // Тезисы докл. 14 Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1984. Ч. 2. С. 103.
8. Жук Н. П., Третьяков О. А. Препринт ИРЭ АН УССР № 289. Харьков, 1985.
9. Пузенко А. А., Фукс И. М. // Тезисы докл. 9 Всесоюзного симпозиума по теории дифракции и распространения волн. — Тбилиси, 1985. Ч. 1. С. 209.
10. Жук Н. П., Пузенко А. А., Третьяков О. А., Фукс И. М. // ДАН УССР. Сер. А. 1986. № 3. С. 63.
11. Жук Н. П. // Опт. и спектр. 1986. Т. 61. № 3. С. 560.
12. Жук Н. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 5. С. 592.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 10 сентября 1987 г.

THERMAL RADIO EMISSION OF HOMOGENEOUS HALFSPACE WITH ROUGH BOUNDARY

N. P. Zhuk, O. A. Tretyakov, I. M. Fuks, A. G. Yarovoij

For homogeneous dielectric halfspace with rough boundary the emissivity and degree of polarization of the thermal emission are numerically analysed.