3. Shan T., Kailath T. // Proc. ICASSP. 1984. P. 335.
4. Reddi V. U. et al. // IEEE Trans. 1987. V. ASSP-35. № 7. P. 927.
5. Джонсон Д. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 126.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 4 марта 1988 г.

УДК 621.378

ЭВОЛЮЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Ф. Х. Абдуллаев, С. А. Дарманян

В настоящей работе мы изучим эволюцию случайного начального поля в нелинейных диспергирующих средах в условиях, когда задача описывается интегрируемым нелинейным волновым уравнением. В этом случае эффективным для ее решения является метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1]. Как известно, МОЗР сводит решение задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных к изучению линейного интегрального уравнения. Такой подход оказывается весьма эффективным при анализе эволюции случайных полей. Это связано с тем, что вместо решения нелинейного уравнения в частных производных со случайным начальным условием анализируется спектр линейной задачи со случайным потенциалом.

Так, на основе этого подхода была изучена эволюция шумовых импульсов в нелинейных средах со слабой дисперсией [2] (на основе уравнения КдВ), эволюция случайных волн в бессолитонном секторе для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [3], а также дискретного спектра для НУШ, когда начальный импульс имеет случайную фазовую модуляцию [4]. Мы же исследуем эволюцию случайных полей в системах, описываемых уравнением sin-Гордон (СГ) и НУШ, в случае, когда начальное условие имеет вид, близкий к односолитонным решениям этих уравнений. Рассмотрим уравнение НУШ

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x, t=0) = q_s(x)\,(1 + \varepsilon_1(x))\,e^{i\varepsilon_2(x)}, \tag{2}$$

где $q_s(x)$ — односолитонное решение НУШ,

$$q_s(x) = 2\eta\,\operatorname{sech} 2\eta\,(x - x_0)\exp[-2i\xi x - i\theta_0] \tag{3}$$

и ε_i являются случайными функциями ($i=1,2$), причем $\langle\varepsilon_i\rangle=0$, $\langle\varepsilon_i(x)\varepsilon_i(y)\rangle = B_i(x-y, l_i)$, $\sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle} \ll 1$. Для исследования эволюции начального условия (2) применим МОЗР. Согласно схеме МОЗР решение задачи Коши сводится к исследованию спектральных данных линейной задачи Захарова—Шабата. Существование в выражении (2) членов со случайной добавкой ($\varepsilon_i \neq 0$) приводит к тому, что при рассеянии на потенциале $q(x)$ возникает отраженная волна, что соответствует генерации шумовых волн. Кроме того, появляются случайные добавки к параметрам дискретного спектра, вследствие этого параметры образующихся солитонов также будут флуктуировать.

Для того чтобы найти изменения параметров непрерывного спектра, необходимо вычислить коэффициент Иоста $b(\lambda)$. Используем с этой целью выражение для его вариационной производной [1]

$$\delta b(\lambda)/\delta q = i\varphi^{(1)}\psi^{(2)*}, \tag{4}$$

где φ и ψ — функции Иоста. Отсюда находим, что

$$b(\lambda) = \frac{i\eta^2 e^{2i\theta_0}}{(\lambda-\xi)^2+\eta^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta q(x)\,\operatorname{sech}^2 2\eta\,(x-x_0)\,e^{4i\xi x - 2i\lambda x}.$$

Далее, предполагая, что корреляционная функция случайного процесса имеет вид

$$B_i(x-y, l_i) = B_{0i}\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{l_i^2}\right], \tag{5}$$

получим следующее выражение для среднего значения квадрата модуля коэффициента $b(\lambda)$:

$$\langle |b|^2\rangle = \frac{\sqrt{\pi}\,\eta^4}{[\eta^2+(\lambda-\xi)^2]^2}\sum_i B_{0i}\,l_i\exp\left[-\frac{l_i^2(\lambda-\xi)^2}{4\eta^2}\right], \tag{6}$$

На основе этого выражения мы можем вычислить вклад непрерывного спектра в интегральные инварианты НУШ. Найдем, например, поправку к интегральному инварианту J_1:

$$J_1 = J_1^d + J_1^c = \int_{-\infty}^{\infty} |l|^2 dx \approx 4\,\mathrm{Im}\,\lambda_1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, |b(\lambda)|^2 . \qquad (7)$$

Из (7) и (6) получаем следующий результат для вклада непрерывного спектра:

$$J_1^c = \sum_i \eta^2 l_i B_{0i}\,[2\eta l_i + \sqrt{\pi}\, e^{\eta^2 l_i^2}(1 - 2\eta^2 l_i^2)\,(1 - \mathrm{erf}\,(\eta l_i))]. \qquad (8)$$

В частном случае при $l_i\eta \ll 1$ имеем

$$\langle J_1^c\rangle = \sqrt{\pi}\,\eta^2 (B_{01} l_1 + B_{02} l_2). \qquad (9)$$

Найдем также изменения параметров дискретного спектра $\Delta\lambda = \Delta\xi + i\Delta\eta$. Используя выражение для вариационной производной коэффициента Иоста $a(\lambda)$ [1], получим, что

$$\langle(\Delta\xi)^2\rangle \approx \eta^3 B_{02} l_2, \qquad \langle(\Delta\eta)^2\rangle \approx \eta^3 B_{01} l_1. \qquad (10)$$

Таким образом, амплитуды, скорости и фазы образующихся солитонов меняются случайным образом со среднеквадратичными значениями, определяемыми из (10). Как уже отмечалось, изменение данных дискретного спектра при случайной фазовой модуляции ($\varepsilon_2(x) \neq 0$) рассматривалось Элджином [4]. Расчет в первом порядке теории возмущений показал, что случайным образом меняется только скорость солитона.

В работе [5] выполнено численное моделирование НУШ с начальными условиями вида (2). Регулярный импульс выбирался таким, что при $\varepsilon_i = 0$ из него развивается солитон. Численное моделирование показало, что при наличии шума в фазе имеются заметные флуктуации скорости солитона. Этот результат согласуется с (10), а также с результатами работы [4].

Полученные результаты представляют интерес для ряда физических задач, например, для изучения распространения частично-когерентного интенсивного импульса в световоде. Уравнение для огибающей электрического поля имеет в этом случае вид НУШ. Оценим часть энергии начального светового импульса, уходящую на образование непрерывного компонента. Используя формулы (7), (9), найдем

$$\frac{\langle J_1^c\rangle}{\langle J_1^d\rangle} = \sqrt{\pi}\, 0{,}25\eta\,(B_{01} l_1 + B_{02} l_2).$$

Для значений параметров $\eta = 1$, $l_{1,2} = 0{,}1$, $B_{01,2} = 10^{-2}$ это отношение равно $\sim 10^{-3}$, т. е. $\sim 0{,}1\%$ начальной энергии уходит на возбуждение шумового фона.

В нелинейной оптике представляет интерес также исследование эволюции начального условия в уравнении СГ:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0.$$

Рассмотрим случай околосолитонного случайного начального условия

$$u_t(x, t=0) = u_{st}(x, t=0)\,(1 + \varepsilon(x)).$$

Здесь u_s — односолитонное решение уравнения СГ,

$$u_s = 4\,\mathrm{arctg}\,\exp(\alpha z), \qquad z = \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$\alpha = \pm 1$ отвечает солитону и антисолитону соответственно, ε — случайная функция. Поступим так же, как мы это делали в случае НУШ, и рассчитаем значение коэффициента $b(\lambda)$. Используя с этой целью выражение для вариационной производной по потенциалу [1]

$$\delta b/\delta u_t = \frac{i}{4}(\tilde{\psi}_1 \varphi_1 - \tilde{\psi}_2 \varphi_2),$$

где φ и ψ — соответствующие функции Иоста, и выбирая корреляционную функцию в виде (5), получим

$$\langle |b^2\rangle = \frac{\sqrt{\pi}\, v^2 l B_0}{6(1-v)^{3/2}}\left[3(1 - v) + l^2 - \frac{l^2(1 + 12\nu^2) + 32(1 - v)\,\nu^2}{4(\lambda^2 + \nu^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\nu^2\,[16\nu^2(1 - v) + l^2 + 4\nu^2]}{2(\lambda^2 + \nu^2)}\right], \qquad (11)$$

где $\hat{2}\nu = (1+v)^{1/2}(1-v)^{-1/2}$. Используя (11), мы можем вычислить, например, вклад непрерывного спектра в гамильтониан:

$$\langle H^c \rangle \approx \frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \left(1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right) \langle |b|^2 \rangle .$$

Из этого выражения следует, что среднее значение спектральной плотности энергии равно

$$\frac{d\langle H^c \rangle}{dk} = \frac{d\langle H^c \rangle}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \approx \frac{4}{\pi} \langle |b(\lambda)|^2 \rangle \Big|_{\lambda = \frac{1}{2}(k + \sqrt{1+k^2})} . \tag{12}$$

При l, $v \ll 1$ мы получим из (12), что спектральная плотность энергии имеет максимум при $k \sim 1$ и что $\langle H^c \rangle \approx \pi v^2 B_0$. В случае же больших скоростей $v \to 1$, $\langle |b^2| \rangle \approx$ $\approx l B_0 \nu^{1/2} \exp(-k^2 l^2)$ и среднее значение энергии излученных шумовых волн равно

$$\langle H^c \rangle = B_0 (1-v)^{-1/2} + O(l^2).$$

Используя выражение для энергии солитона $H = 8(1-v^2)^{-1/2}$, находим отношение средних энергий излучения и солитона:

$$\langle H^c \rangle \approx 0{,}2 B_0 \langle H^d \rangle .$$

Поправка к дискретному спектру имеет вид

$$\Delta\nu = \frac{\nu v}{\sqrt{1-v^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varepsilon(x) \operatorname{sech}^2 z ,$$

что дает для δ-коррелированного шума

$$\langle (\Delta\nu)^2 \rangle = 4 B_0 \nu^2 v^2 / 3\sqrt{1-v^2} . \tag{13}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. и др Теория солитонов. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
2. Абдуллаев Ф. Х., Дарманян С. А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 2. С. 265.
3. Басс Ф. Г., Кившарь Ю. С., Конотоп В. В. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. № 2. С. 433.
4. Elgin J. N. // Phys. Lett. 1985. V. 110. № 9. P. 441.
5 Маныкин Э. А. и др // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1986. Т. 50. № 8. С. 1474.

Отдел теплофизики
АН УзССР

Поступила в редакцию
22 декабря 1987 г.

УДК 533.951

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОДУЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С МЕДЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

В. А. Балакирев, А. О. Островский

Настоящая работа посвящена нелинейной и нестационарной динамике черенковского возбуждения медленной электромагнитной волны модулированным электронным пучком (периодической последовательностью сгустков). В работе [1] рассмотрена нелинейная стадия стационарного усиления плазменной волны электронным потоком, который модулирован на частоте волны. В отличие от указанной работы ниже основное внимание уделено исследованию случая, когда частота модуляции пучка не совпадает с частотой возбуждаемой волны. Показано, что в этом случае стационарное состояние системы не устанавливается. В области взаимодействия амплитуда волны совершает со временем регулярные осцилляции. Отметим, что задача о возбуждении модулированным электронным пучком медленных волн, в частности, в плазменных волноводах, представляет интерес для коллективных методов ускорения заряженных частиц [2, 3].

Рассмотрим электронный пучок с начальной энергией $W = mc^2(\gamma_0 - 1)$, $\gamma_0 =$ $= (1-\beta_0^2)^{-1/2}$, $\beta_0 = V_0/c$ (V_0 — начальная скорость пучка), плотность которого на