

УДК 533.95

## УСИЛЕНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ ВОЛНЫ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. Я. Давыдовский, Е. Н. Погорелов, В. Г. Сапогин, А. С. Уколов

Рассмотрен режим усиления электромагнитной волны электронным потоком в продольном электростатическом поле в отсутствие замедляющей структуры. Связанная с потоком конвективная волна при этом ускоряется. Получено приближенное решение самосогласованной задачи, обладающее высокой точностью, что подтверждается результатами численного решения. Обсуждается устойчивость рассмотренного режима. Приведены результаты численного моделирования.

В [1, 2] было показано, что электромагнитную волну можно усиливать электронным потоком в продольном электростатическом поле. При этом предполагалось наличие замедляющей структуры, реализовать которую для высококачественных полей затруднительно.

В этой связи представляет интерес ситуация, когда роль замедляющей структуры играет поток электронов, несущий электромагнитную волну. При распространении такой конвективной [3] (или кинематической [4, 5]) волны вдоль статического силового поля, ускоряющего частицы, волна не только ускоряется, но и усиливается, причем эти два эффекта являются с необходимостью одновременными в силу наличия у волны конечной плотности массы. Процесс усиления волны может быть длительным, если обеспечено необходимое ускорение электронов, при котором устойчивость системы не нарушается. Отметим, что устойчивость поперечной конвективной волны исследовалась в [6]. Ниже будет показано, что обсуждаемый здесь процесс усиления сопровождается улучшением устойчивости.

Рассмотрим следующую модель.

Пусть в свободном пространстве, равномерно заполненном электронами, возбуждены стационарные токи

$$j_x = j_0 \cos k'z', \quad j_y = j_0 \sin k'z', \quad j_z = 0, \quad j_0 = \text{const}, \quad k' = \text{const}. \quad (1)$$

Магнитное поле этих токов имеет вид [6]

$$A(z') = \frac{4\pi e}{mck'^2} j(z'), \quad B \equiv \text{rot } A = \frac{4\pi e}{mck'} j, \quad (2)$$

здесь векторный потенциал поделен на  $mc^2/e$ , а длины и скорости — на  $c$ , далее используется система единиц, в которой заряд электрона  $e$ , его масса  $m$  и скорость света в вакууме  $c$  положены равными единице.

В системе отсчета, движущейся с некоторой скоростью —  $v_{\phi}$  н вдоль оси  $z$  (будем считать эту систему отсчета лабораторной), поле (2) представляет собой плоскую электромагнитную циркулярно-поляризованную волну, переносимую бесконечным в поперечном направлении электронным потоком:

$$A_x = A_H \cos \psi, \quad A_y = -A_H \sin \psi,$$

$$\psi = \omega t - k_H z, \quad \omega/k_H = v_{\phi} < 1, \quad k_H = k'(1 - v_{\phi, H}^2)^{-1/2}, \quad (3)$$

$$A_{\perp}(\psi) = \frac{4\pi e^2}{mc^3(k_H^2 - \omega^2)} j_{\perp}(\psi).$$

Индексом «н» отмечены начальные значения параметров при  $z \leq 0$ . Такую волну можно возбудить, пропустив, например, прямолинейный электронный поток через резонатор с вращающимся с частотой  $\omega$  поперечным электрическим (или магнитным) полем. Далее, при  $z > 0$  включено ускоряющее продольное электростатическое поле  $E_z(z)$ .

В этом случае, как и при наличии внешнего замедления [1, 2], электроны выталкиваются полем  $E_z(z)$  в тормозящую фазу волны, и взаимодействие потока с волной приводит к ее ускорению и одновременно увеличению амплитуды. Таким образом, в области  $z > 0$  возникает стационарная волна с зависящими от продольной координаты  $z$  амплитудой и волновым числом:

$$A_x = A(z) \cos \psi, \quad A_y = -A(z) \sin \psi, \quad \psi = \omega t - \int k(z) dz, \quad (4)$$

$$\omega / (k(z)) < 1.$$

Задача, рассматриваемая здесь, состоит в нахождении эволюции самосогласованной системы полей и токов в области  $z > 0$  при начальных ( $z \leq 0$ ) условиях (3). Показано — и это является основным результатом работы, — что усиление электромагнитной волны потоком электронов в электростатическом поле можно, в принципе, осуществить без какой бы то ни было внешней замедляющей структуры, и доля энергии, переданной волне, при определенных условиях может быть заметной.

В плоской волне сохраняется обобщенный поперечный импульс  $C_{\perp} = p_{\perp} + A_{\perp}$  частицы; движение частицы описывается уравнением

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{\omega A C_{\perp}}{p_z} \sin \varphi + E_z, \quad (5)$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $C_{\perp}$  и  $A_{\perp}$ , удовлетворяющий соотношению

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\psi}{dz} = \frac{\omega}{v_z} - k, \quad (6)$$

$v_z$  — продольная скорость электрона,  $\gamma$  — его энергия,  $p_z$  — продольный импульс.

Уравнение для волны имеет вид [2]

$$\frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial z^2} = \omega_{0n}^2 \int v_{\perp} f d\Omega v_{zn} / v_z, \quad (7)$$

где  $\omega_{0n} = (4\pi N_n e^2 / m)^{1/2}$  — начальная плазменная частота потока,  $f$  — функция распределения электронов в фазовом пространстве  $\{t, \mathbf{r}_{\perp},$

$(U - \gamma), C_{\perp}\}$ , для которого  $z$  играет роль времени,  $U = \int_0^z E_z dz$  — напря-

жение,  $d\Omega = d(U - \gamma) dC_{\perp}$ . Можно показать, что функция распределения  $f$ , выбранная так, что в плоскости  $z = \text{const}$  отсутствует разброс по величинам  $C_{\perp}$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ , — удовлетворяет уравнению Лиувилля.

При указанном выборе  $f$ , подставляя (4) в (7), получаем

$$\frac{d}{dz} (kA^2) = -\omega_{0n}^2 \frac{AC_{\perp} \sin \varphi}{p_z} v_{zn}; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + (\omega^2 - k^2)A = \omega_{0n}^2 \frac{A - C_{\perp} \cos \varphi}{p_z} v_{zn}. \quad (9)$$

Уравнения (5) и (8) дают закон сохранения энергии

$$\gamma - U + \frac{k_n}{\omega_{0n}^2} kA^2 = \text{const}. \quad (10)$$

Используя относительные величины  $a = A/A_H$ ,  $\kappa = k/k_H$ ,  $C = C_{\perp}/A_H$  и введя обозначения  $\beta = (\omega_{0H}/k_H)^2$ ,  $\varepsilon = E_z/k_H$ , самосогласованную систему уравнений (6), (8)–(10) можно записать в виде

$$\gamma = \gamma_H + U + A_H^2 (1 - \kappa a^2) / \beta; \quad (11)$$

$$\varepsilon (a\kappa' + 2\kappa a') = -\beta v_{zH} C \sin \varphi / p_z; \quad (12)$$

$$\varepsilon \varepsilon' a' + \varepsilon^2 a'' = (\kappa^2 - v_{zH}^2) a + \beta v_{zH} (a - C \cos \varphi) / p_z; \quad (13)$$

$$\varepsilon \varphi' = v_{zH} \gamma / p_z - \kappa. \quad (14)$$

Штрихи здесь означают дифференцирование по напряжению  $U$ . В системе (11)–(14) неизвестными функциями являются  $a$ ,  $\kappa$ ,  $\varphi$  и  $\gamma$ . Продольный импульс выражается через эти функции:

$$p_z = i[\gamma^2 - A_H^2 (C^2 + a^2 - 2aC \cos \varphi) - 1]^{1/2}.$$

Начальные условия для системы (11)–(14) имеют вид

$$U = 0, \quad \varphi = 0, \quad \kappa = a = 1, \quad (15)$$

$v_{zH}$ ,  $A_H$ ,  $C$  предполагаются заданными, а  $\beta$  выражается из (13):

$$\beta = (1 - v_{zH}^2)^{1/2} [1 + A_H^2 (C - 1)^2]^{1/2} / (C - 1). \quad (16)$$

Значение  $\varepsilon = 1$  соответствует падению напряжения 3,2 МВ на длине волны, поэтому для высокочастотных волн  $\varepsilon \ll 1$ . При этом из (12) следует  $|\varphi| \ll 1$ . Случай  $|\varphi| \sim 1$  соответствует экзотически сильным поперечным токам.

Наличие малых параметров  $\varepsilon$  и  $\varphi$  позволяет решать систему (11)–(14) методом последовательных приближений. При этом для не слишком неоднородного продольного поля следует считать  $\varepsilon' \ll \varepsilon$ .

Эволюция системы в нулевом приближении представляет собой квазистатический процесс. Равновесное состояние системы меняется вследствие изменения параметра  $U$ , входящего в точное уравнение (11):

$$\gamma_0 = \Pi_0 \left[ \frac{v_{zH}^2 a_0^2}{\beta^2 (C - a_0)^2} + \frac{1}{\Pi_0} \right]^{1/2}; \quad (17)$$

$$\kappa_0 = \left[ v_{zH}^2 + \frac{\beta^2 (C - a_0)^2}{a_0^2 \Pi_0} \right]^{1/2}; \quad (18)$$

$$U = [A_H^2 C (C - a_0) + 1] \left[ \frac{v_{zH}^2 a_0^2}{\beta^2 (C - a_0)^2} + \frac{1}{\Pi_0} \right]^{1/2} - \gamma_H - \frac{A_H^2}{\beta}; \quad (19)$$

$$\gamma_H = \left[ \frac{1 + A_H^2 (C - 1)^2}{1 - v_{zH}^2} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

где  $\Pi_0 = A_H^2 (C - a_0)^2 + 1 = p_{\perp 0}^2 + 1$ . Отметим, что для существования равновесных состояний, как это видно из уравнения (13), необходимо  $C_{\perp} > A_H$ .

В первом приближении для угла  $\varphi$  получаем

$$\varphi_1 = -\varepsilon \frac{(C - a_0) \Pi_0 [2a_0^2 v_{zH}^2 \Pi_0^2 + \beta^2 (C - a_0)^2 \Pi_0 - \beta^2 a_0 (C - a_0)]}{\beta a_0 C [v_{zH}^2 C \Pi_0^3 - \beta^2 A_H^2 (C - a_0)^3]}. \quad (21)$$

При естественных ограничениях на начальные параметры системы, состоящих в требовании однозначности функции  $a_0 = a_0(U)$ , поправки первого порядка к величинам  $a$ ,  $\kappa$  и  $\gamma$ , как нетрудно показать, обращаются в нуль, причем достаточные условия имеют вид

$$C > \frac{v_{zn} + 1}{2v_{zn}}; \quad (22)$$

$$\left| A_n - \frac{4v_{zn}^2 C}{1 - v_{zn}^2} \right| < \left[ \frac{16v_{zn}^4 C^2}{(1 - v_{zn}^2)^2} - \frac{1}{(C - 1)^2} \right]^{1/2}. \quad (23)$$

Неравенства (22), (23) справедливы для широких диапазонов параметров. Так для  $C=10$ ,  $v_{zn}=0,8$  (23) дает  $8,7 \cdot 10^{-5} < A_n < 140$ . Из (17)—(23) далее следует, что разложения  $\gamma$ ,  $a$  и  $\kappa$  содержат только четные степени  $\varepsilon(U)$ , а разложение угла  $\varphi$  — только нечетные.

Рассмотрим решение задачи в первом приближении — оно определяется уравнениями (17)—(21) — и отметим некоторые свойства этого решения. Во-первых,  $a_0 < C$ ,  $a_0 \rightarrow C - 0$  при  $U \rightarrow \infty$ , т. е. процесс усиления конвективной волны обладает насыщением. Во вторых, решение не зависит от структуры продольного поля  $\varepsilon(U)$ , которая проявляется лишь во втором порядке.

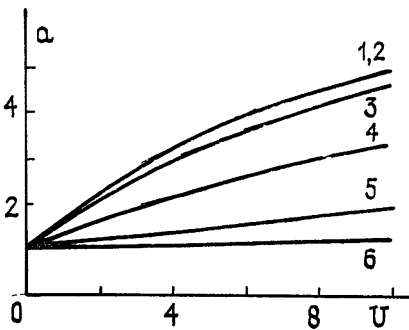


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость амплитуды волны от ускоряющего напряжения.

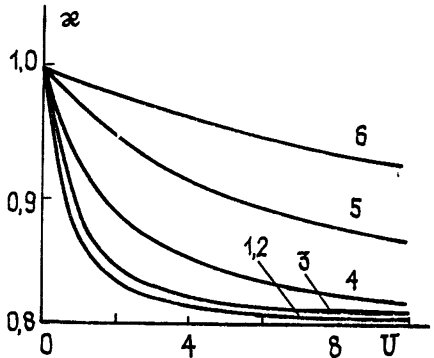


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость волнового числа от ускоряющего напряжения.

Система уравнений (11)—(14) решалась на ЭВМ при входных параметрах

$$v_{zn} = 0,5 \div 0,95, \quad A_n = 3 \cdot 10^{-5} \div 3, \quad C = 1,05 \div 70 \quad (24)$$

и максимальном напряжении  $U_{\max} = 10 (= 5,11 \text{ МВ})$ . Электростатическое поле предполагалось однородным с  $\varepsilon = 10^{-2}$ , длина ускоряющего промежутка  $L = 10^3 \lambda_{\text{н}} / (2\pi)$ . На рис. 1, 2 приведены зависимости  $a(U)$ ,  $\kappa(U)$  для  $v_{zn} = 0,8$ ,  $C = 10$  при различных  $A_n$ . Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям  $A_n = 10^{-3}; 10^{-2}; 0,1; 0,3; 1; 3$ . Сравнение (18), (19) с численным решением показывает, что приближения  $a_0(U)$ ,  $\kappa_0(U)$  обладают высокой точностью; начиная со значений  $U \sim 2$  ошибка не превышает  $(4 \div 5) \cdot 10^{-3}$  практически во всем диапазоне параметров (24). Графики приближенного и точного решений в масштабах рис. 1 и 2 практически совпадают. Между тем, отличие  $a_0(U)$ ,  $\kappa_0(U)$  от точного решения принципиально и состоит в том, что (18), (19) не учитывают колебаний в системе волна—поток, они проявляются в высших порядках приближенного решения. Реализовать «плавное» усиление волны можно только специальным подбором зависимости  $\varepsilon(U)$ . В нашем случае мгновенного (при  $z=0$ ) включения продольного поля колебания, во всяком случае в начале ускоряющего промежутка, должны быть существенными. Это хорошо видно на рис. 3. График  $\varphi(U)$ , типичный для всего диапазона параметров (24), построен для значений  $v_{zn} = 0,8$ ,  $C = 10$ ,  $A_n = 0,02512$ . Плавная кривая соответствует функции  $\varphi_1(U)$ , которая, очевидно, описывает эволюцию квазиравновесного состояния электрона. Колебания частицы относительно этого состояния, как видно из графика  $\varphi(U)$ , затухают, период их растет. В приближении заданного поля с  $a(U)$ ,  $\kappa(U)$ , определяемы-

ми из (18) и (19), эволюцию нелинейных фазовых колебаний можно, в принципе, описать, используя адиабатический инвариант, приведенный в [2]:

$$I_1 = \frac{1}{x^2 - v_{zn}^2} \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_{20}} [(Y_1 - \varepsilon\varphi)^2 - (x^2 - v_{zn}^2)] \times \\ \times [1 + A_n^2 (C^2 + a^2 - 2aC \cos \varphi)]^{1/2} d\varphi \approx \text{const},$$

где  $Y_1 = \kappa\gamma - v_{zn} p_z + \varepsilon\varphi$ ,  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{20}$  — точки поворота, величины  $Y_1$ ,  $a$ ,  $\kappa$  при интегрировании должны считаться постоянными. Однако в данном случае можно обойтись качественными соображениями. В самом деле, имеются налицо все условия, приводящие к бесстолкновительной релаксации фазовых колебаний: углубление потенциальной ямы для частицы (рост амплитуды волны), разбегание стенок ямы (ускорение волны) и связанное с этим последним обстоятельством увеличение релятивистской массы, которое приводит также к росту периода колебаний [7]. Таким образом, в процессе усиления волны устойчивость движения электронов улучшается, что подтверждается рис. 3.

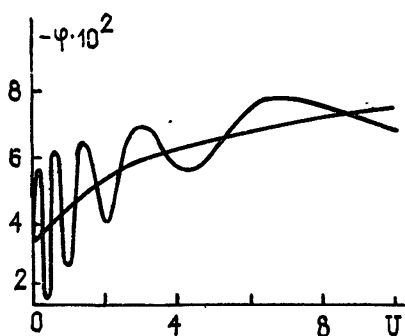


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость угла  $\varphi$  между векторами  $C_{\perp}$  и  $A_{\perp}$  от ускоряющего напряжения.

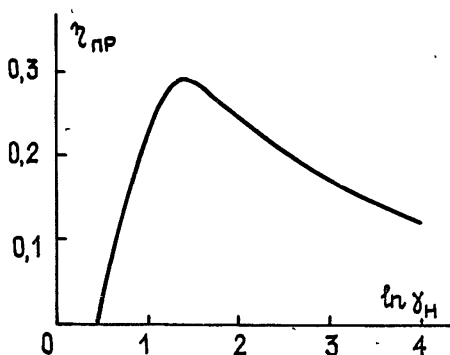


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость предельного электронного КПД от начальной энергии электронов.

Используемый здесь метод последовательных приближений применим, пока

$$S(\varepsilon^2) \ll (x^2 - v_{zn}^2) a, \quad (25)$$

где  $S(\varepsilon^2)$  — сумма слагаемых, содержащих производные, в уравнении (13). Для ультрарелятивистского потока, если  $1 - v_{zn}^2 \ll \varepsilon^2$ , оценка (25) может оказаться не выполненной уже при  $z=0$ . Для  $\varepsilon \sim 10^{-2}$  это соответствует энергиям частиц  $\gamma_n \gtrsim 50$  МэВ, здесь такая область энергий не рассматривается. При выполнении (25) в начале ускоряющего промежутка это неравенство, на первый взгляд, может нарушаться на каком-то этапе эволюции системы, поскольку  $\gamma_0(U) \rightarrow v_{zn}$  и  $a_0(U)$  ограничено. Однако уменьшение  $\gamma_0$  сопровождается уменьшением производных в (13), поэтому, во всяком случае для слабо неоднородного продольного поля ( $\varepsilon' \ll \varepsilon$ ), приближенные решения уравнений (18), (19) с хорошей точностью описывают эволюцию волны на всех ее этапах.

До сих пор рассматривалась конвективная волна и ее взаимодействие с продольным электрическим полем. Преобразование этой волны в электромагнитные колебания можно, в принципе, осуществить, поставив на выходе пространства взаимодействия резонатор, аналогичный входному, причем схема полученного таким образом устройства отличалась бы от гирокона [8] наличием ускоряющего электрического

поля между резонаторами. Мы рассмотрим другой способ, при котором излучение электромагнитной волны происходит при осаждении электронов на коллектор, — имея в виду подчеркнуть факт отсутствия жесткой связи между электронным потоком и переносимой им волной, что, собственно, и обуславливает возможность усиления волны в продольном электростатическом поле.

Будем предполагать, что симметрия поля в процессе осаждения электронов не меняется: поле по-прежнему имеет вид (4) (выполнение неравенства  $\omega/k < 1$  не обязательно). В рамках плоской симметрии задачи следует положить, что в некотором слое  $z_1 \leq z \leq z_2$  ( $z_1 > 0$ ) имеются стоки электронов, причем при  $z < z_1$  поток частиц постоянен, а при  $z > z_2$  электроны отсутствуют.

Поперечные токи пропорциональны плотности потока частиц. В области  $(z_1, z_2)$  уравнения поля сводятся к виду (8), (9), в которых, однако, следует положить

$$\omega_{0H}^2 v_{zH} \rightarrow \omega_0^2(z) v_z(z), \quad (26)$$

где функция  $\omega_0^2(z)$  определяется распределением стоков. С учетом (26) перепишем (8) в виде

$$\frac{d}{dz} (kA^2) = -\omega_0^2(z) \frac{AC_{\perp} \sin \varphi}{\gamma}. \quad (27)$$

Отсюда для величины  $\Delta \equiv k(z_2)A^2(z_2) - k(z_1)A^2(z_1)$  имеем

$$\Delta = - \int_{z_1}^{z_2} \omega_0^2(z) \frac{AC_{\perp}}{\gamma} \sin \varphi dz. \quad (28)$$

Очевидно, что если электроны осаждаются на коллектор при  $|\varphi| \ll 1$ , то плотность потока энергии волны практически не изменяется (разумеется,  $(z_2 - z_1)$  не слишком велико):

$$|\Delta| \ll k(z_1)A^2(z_1). \quad (29)$$

Оценка (29) справедлива и в том случае, когда число электронов в слое  $(z_1, z_2)$  достаточно мало. В самом деле,

$$|\Delta| \leq C_{\perp} A_{\max} \int_{z_1}^{z_2} \omega_0^2(z) dz,$$

где  $A_{\max}$  — максимальная амплитуда волны в слое  $(z_1, z_2)$ . Учитывая, что  $A_{\max} \sim A(z_1)$ , получим, что неравенство

$$\Delta N \equiv \frac{m}{4\pi e^2} \int_{z_1}^{z_2} \omega_0^2(z) dz \ll \frac{m}{4\pi e^2} \frac{k(z_1)A(z_1)}{C_{\perp}}$$

обеспечивает выполнение (29). Таким образом, в рассмотренных случаях можно положить при  $z > z_1$

$$\omega_0 \equiv kA^2/\omega = \text{const}, \quad (30)$$

что позволяет оценить предельное значение электронного КПД при определенном напряжении  $U$  на ускоряющем промежутке  $(0, z_1)$ :

$$\eta_{\text{пр}} = \frac{\omega k(U)A^2(U)/(4\pi)}{N_H v_{zH} (mc^2 \gamma_H + eU) + \omega k_H A_H^2(4\pi)}. \quad (31)$$

В формуле (31) все величины выражены в гауссовой системе единиц.

Отметим, что при наличии рекуперации в знаменателе (31) следует положить  $U \rightarrow \alpha_0 U$  ( $\alpha_0 < 1$ ).

На рис. 4 представлен график зависимости  $\eta_{пр}(\gamma_H)$  при фиксированных  $v_{zH}=0,8$ ,  $C=10$ ,  $U=10$ . Максимальное значение  $\eta_{пр}=\eta_{max}=0,295$  достигается при начальных энергиях электронов  $\gamma_H=4,10$ .

Плотность потока энергии электромагнитного поля на выходе системы в принятых предположениях имеет вид

$$S_z^w = \frac{\pi m^2 c^5}{e^2} \left( \frac{A_H^2}{v_{zH}} \right) \frac{1}{\lambda_0^2} \kappa a^2 (\text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})), \quad (32)$$

где  $A_H$ ,  $v_{zH}$  безразмерны,  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме, выраженная в сантиметрах. Ясно, что  $S_z^w = S_z^v / (\kappa a^2)$ . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 1 и 2) величина  $S_z^w$  составляет соответственно 0,6712; 67,07;  $6,122 \cdot 10^3$ ;  $2,913 \cdot 10^4$ ;  $1,016 \cdot 10^5$ ;  $4,817 \cdot 10^5$  (МВт/см<sup>2</sup>) — при  $\lambda_0 = 1$  см. Большие значения  $S_z^v$  обусловлены высокими плотностями электронного потока и большими начальными энергиями поперечного движения электронов. Рост плотности потока энергии поля в пространстве взаимодействия определяется коэффициентом  $K = \kappa a^2$ , который для шести указанных наборов параметров системы равен соответственно 19,55; 19,54; 17,84; 9,428; 2,959; 1,559.

Вычисления показывают, что КПД и коэффициент  $K$  монотонно растут при уменьшении  $v_{zH}$  и при увеличении  $C$ . Однако увеличение  $C$  приводит к росту расстояния, проходимого электронами поперек оси системы, а с уменьшением  $v_{zH}$  растет требуемая для реализации равновесной конвективной волны плотность частиц, определяемая величиной  $\beta$  (см. (16)). Приведем формулу для пересчета плотности в обычные единицы:

$$N_H = 1,132 \cdot 10^{13} (\beta / (\lambda_0^2 v_{zH}^2)) \text{см}^{-3},$$

где  $\lambda_0$  должна быть выражена в сантиметрах. Отсюда видно, что даже для волн малой амплитуды, когда  $\beta \sim (1 - v_{zH}^2)^{1/2} / (C - 1)$ , для реализации приведенной схемы потока частиц должны быть достаточными, если  $C$  не слишком велики.

Вообще говоря, электромагнитная волна в вакууме при  $z > z_2$  оказывается модулированной по амплитуде и фазе, причем эти модуляции связаны законом сохранения (30). Покажем далее, что существует условие, когда такая модуляция отсутствует. Введем величину  $\xi = \omega z$  и положим  $|\varphi| \ll 1$  в области  $(z_1, z_2)$ . В этом случае

$$(A - C_{\perp} \cos \varphi) dA/d\xi \approx (1/2) d(p_{\perp}^2)/d\xi,$$

и, интегрируя уравнение (9), получим

$$\Delta^* \equiv \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dA}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( A^2 + \frac{w_0^2}{A^2} \right) \right] \Big|_{\xi_1 = \omega z_1}^{\xi_2 = \omega z_2} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\omega_0^2(\xi)}{2\omega^2 \gamma} \frac{d(p_{\perp}^2)}{d\xi} d\xi. \quad (33)$$

Выражение в квадратных скобках в (33) удобно интерпретировать как механическую энергию  $E^*$  частицы в яме с потенциальной энергией  $P = (A^2 + w_0^2/A^2)/2$ , для которой  $E_{\min}^* = P_{\min} = w_0$ . При  $z > z_2$  имеем закон сохранения

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dA}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( A^2 + \frac{w_0^2}{A^2} \right) = E_2^* = \text{const}. \quad (34)$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$A^2(\xi) \equiv ((E_2^*)^2 - w_0^2)^{1/2} \sin(2\xi + \tau_0) + E_2^*, \quad (35)$$

где  $\tau_0$  — постоянная. Из (35) следует, что модуляция отсутствует, при  $E_2^* = \omega_0$ , т. е. когда

$$\Delta^* \equiv E_2^* - E_1^* = \omega_0 - E_1^*. \quad (36)$$

В этом случае в области  $z > z_2$

$$A = \omega_0^{1/2}, \quad k = \omega.$$

При  $\Delta^* < \omega_0 - E_1^*$  невозможно сохранение плотности потока энергии волны (30).

Можно показать, что волна с амплитудой (35) и волновым числом, определяемым из (30), представляет собой суперпозицию двух волн постоянной амплитуды (прямой  $A_{\perp}^+$  и обратной  $A_{\perp}^-$ ):

$$A_x^+ = A_0^+ \cos(\omega t - \omega z), \quad A_y^+ = -A_0^+ \sin(\omega t - \omega z),$$

$$A_x^- = A_0^- \cos(\omega t + \omega z + \delta), \quad A_y^- = -A_0^- \sin(\omega t + \omega z + \delta),$$

где

$$A_0^+ = \frac{1}{2} \{ [E_2^* + ((E_2^*)^2 - \omega_0^2)^{1/2}]^{1/2} + [E_2^* - ((E_2^*)^2 - \omega_0^2)^{1/2}]^{1/2} \},$$

$$A_0^- = \frac{1}{2} \{ [E_2^* + ((E_2^*)^2 - \omega_0^2)^{1/2}]^{1/2} - [E_2^* - ((E_2^*)^2 - \omega_0^2)^{1/2}]^{1/2} \},$$

$$\delta = \tau_0 - \pi/2.$$

Таким образом, условие (36) обеспечивает отсутствие обратной волны.

Отметим здесь еще одно обстоятельство. При  $C$ , достаточно близких к единице, полученные численные решения указывали на срыв устойчивого режима усиления конвективной волны, причем это происходило в области значений  $C$ , граница которой с хорошей точностью определяется неравенством (22).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белявский Е. Д. // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16. № 1. С. 208.
2. Андреев Ю. А., Давыдовский В. Я., Погорелов Е. Н. // ЖТФ. 1985. Т. 55. № 12. С. 2382.
3. Хейес У. Д. В кн.: Нелинейные волны. // Сб. статей: Пер. с англ. / Под ред. А. В. Гапонова и Л. А. Островского. — М.: Мир, 1977. С. 13.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. С. 31.
5. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. С. 283.
6. Давыдовский В. Я., Уколов А. С., Филиппов Ю. С. // Изв. Северо-Кавказского научного центра высш. шк. Сер. Естественные науки. 1984. № 2. С. 56.
7. Давыдовский В. Я. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 5. С. 1701.
8. Горнижер Э. И., Карлинер М. М., Козырев Е. В. и др. Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 130.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию  
23 сентября 1987г.,  
в окончательном  
варианте  
12 декабря 1988 г.

#### AMPLIFICATION OF A CONVECTIVE WAVE IN THE LONGITUDINAL ELECTROSTATIC FIELD

*V. Ya. Davydovskij, E. N. Pogorelov, V. G. Sapogin, A. S. Ukolov*

The regime of amplification of an electromagnetic wave by an electron flow without any low-wave structure is considered. The convective wave associated with the flow is accelerated. The approximate solution is received for the self-consistent problem of high precision, that is confirmed by the results of the numerical solution. The stability of the regime considered is discussed. Results of numerical modelling are adduced.