

УДК 538.56

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ ОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Е. Н. Васильев, В. Ф. Маккавеева, В. В. Солодухов

Метод интегральных уравнений применяется для решения двумерной задачи дифракции плоской волны на двух диэлектрических бесконечных цилиндрах: круговом и цилиндре произвольного поперечного сечения. Влияние кругового цилиндра учитывается путем введения специальной функции Грина, что приводит к значительной экономии машинного времени и памяти.

1. Постановка задачи. Для решения задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле (ДТ) может быть использован метод интегральных уравнений (ИУ) [1, 2]. При этом применяются как ИУ, составленные относительно неизвестных эквивалентных поверхностных токов [1] и содержащие двумерные (поверхностные) интегралы, так и уравнения с трехмерными (объемными) интегралами относительно токов поляризации [2]. Последний подход приводит, как правило, к вычислительным методам тем более сложным и громоздким, чем выше размерность пространства, в котором проводится решение. Поэтому для однородных ДТ целесообразно использовать уравнения относительно поверхностных токов.

Метод ИУ можно применять также для системы, состоящей из нескольких тел с различными электродинамическими параметрами [3]. При этом неизвестными считаются поверхностные токи на каждом ДТ, а под областью интегрирования надо понимать совокупную поверхность всех тел в системе. При применении численных методов решения системы ИУ [1] увеличение области интегрирования приводит к увеличению размерности задачи.

Рассмотрим для определенности задачу возбуждения системы двух ДТ. Если одно из них имеет простую форму, например шар, бесконечный круговой цилиндр (однородные или многослойные), бесконечная пластина или плоскостная среда и т. п., можно точно решить задачу возбуждения такого тела и построить специальную (иногда довольно сложную) функцию Грина, удовлетворяющую граничным условиям на нем. Тогда ИУ составляются только относительно токов на ДТ произвольной формы [1]. При этом размерность задачи сохраняется такой же, как для уединенного тела.

Если оба тела в системе имеют простую форму, то специальная функция Грина может удовлетворять граничным условиям на любом из них в зависимости от конкретных требований.

В данной работе решена двумерная задача дифракции плоской E -поляризованной волны на двух диэлектрических цилиндрах (ДЦ): круговом и ДЦ с произвольным поперечным сечением.

2. Интегральные уравнения задачи. Пусть тело 1 — круговой ДЦ с коэффициентом преломления материала $\kappa_1^2 = \epsilon_1/\epsilon_0$, а тело 2 — ДЦ с произвольной, но достаточно гладкой формой поперечного сечения и $\kappa_2^2 = \epsilon_2/\epsilon_0$, где ϵ_0 — проницаемость среды, окружающей систему. Область, занимаемую телом 1, обозначим через S_1 , телом 2 — S_2 , а область, внешнюю по отношению к ДЦ 1 и 2, обозначим через S_0 .

Введем обобщенную цилиндрическую систему координат u, v, z , где u — нормаль к поверхности тела, а v — касательная (рис. 1). Кроме этого используется декартова система x, y, z и цилиндрическая ρ, φ, z . Точки наблюдения « p » обозначаются нештрихованными координатами, а точки интегрирования « q » — штрихованными, E — поляризованная плоская волна падает на систему из области S_0 перпендикулярно оси z и под углом α к оси x .

Используя формулу Грина, запишем интегральные представления для продольных составляющих электрического поля в областях S_0 и S_2 . В области S_0 выделим первичное поле $E_{z_0}^n(p)$ и поле, отраженное от тела $2 E_{z_0}(p)$, в интегральных представлениях которых используем функцию Грина $G_2^k(p, q)$, удовлетворяющую граничным условиям на круговом ДЦ:

$$0 = - \int_{\Gamma_2} \left[E_{z_0}^n(q) \frac{\partial G_0^k(p, q)}{\partial u'} - G_0^k(p, q) \frac{\partial E_{z_0}^n(q)}{\partial u'} \right] dv', \quad p \in S_0; \quad (1)$$

$$E_{z_0}(p) = \int_{\Gamma_2} \left[E_{z_0}(q) \frac{\partial G_0^k(p, q)}{\partial u'} - G_0^k(p, q) \frac{\partial E_{z_0}(q)}{\partial u'} \right] dv', \quad p \in S_0, \quad (2)$$

$G_0^k(p, q)$ является решением задачи возбуждения кругового ДЦ синфазной нитью z -го электрического тока, параллельной его оси [4]:

$$G_0^k(p, q) = G_0(p, q) + G_1(p, q) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)} \left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) - \frac{1}{4i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} F_n^{\text{отр}} H_n^{(2)}(\rho) H_n^{(2)}(\rho'), \quad (3)$$

$$F_n^{\text{отр}} = \frac{\chi_1 J_n(a) J_{n+1}(\chi_1 a) - J_{n+1}(a) J_n(\chi_1 a)}{\chi_1 H_n^{(2)}(a) J_{(n+1)}(\chi_1 a) - H_{n+1}^{(2)}(a) J_n(\chi_1 a)}.$$

Здесь и далее все линейные размеры умножены на волновое число свободного пространства k_0 . Электрическое поле в области S_2 $E_{z_2}(p)$ представлено с помощью функции Грина однородного пространства с параметрами второго тела:

$$E_{z_2}(p) = - \int_{\Gamma_2} \left[E_{z_2}(q) \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial u'} - G_2(p, q) \frac{\partial E_{z_2}(q)}{\partial u'} \right] dv', \quad p \in S_2, \quad (4)$$

$$G_2(p, q) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\chi_2 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}).$$

Граничные условия, необходимые для составления ИУ, в случае E -поляризации имеют вид (полагаем $\mu_2 = \mu_0$)

$$E_{z_2} = E_{z_0} + E_{z_0}^n \quad (5)$$

на Γ_2 .

$$\frac{\partial E_{z_2}}{\partial u} = \frac{\partial E_{z_0}}{\partial u} + \frac{\partial E_{z_0}^n}{\partial u} \quad (6)$$

Для получения представления поля, справедливого в областях S_0 и S_2 , поле в S_0 , умноженное на ϵ_0 , сложим с полем в S_2 , умножен-

ным* на ε_2 , с учетом граничных условий (5) и (6) и того, что в S_2 $E_{z0}(p) \equiv 0$, а в $S_0 - E_{z2}(p) \equiv 0$ и $E_{z0}^n(p) \equiv 0$:

$$E_{z0}(p) = \int_{\Gamma_1} \left\{ E_{z2}(q) \left[\frac{\partial G_0^k(p, q)}{\partial u'} - \varkappa_2^2 \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial u'} \right] - \frac{\partial E_{z2}(q)}{\partial u'} \right\} \times \\ \times [G_0^k(p, q) - \varkappa_2^2 G_2(p, q)] d\sigma', \quad p \in S_0. \quad (7)$$

Продифференцируем интегральные представления полей в областях S_0 и S_2 по нормали в точке $p \in S_0$ и сложим с учетом граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial u} E_{z0}(p) = \frac{\partial}{\partial u} \int_{\Gamma_1} \left\{ E_{z2}(q) \left[\frac{\partial G_0^k(p, q)}{\partial u'} - \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial u'} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial E_{z2}(q)}{\partial u'} [G_0^k(p, q) - G_2(p, q)] \right\} d\sigma', \quad p \in S_0. \quad (8)$$

Выражения в квадратных скобках (8) непрерывны, поэтому операцию дифференцирования можно внести под знак интеграла. Опуская точку « p » на границу тела 2 и переходя в (7) и (8) к прямым значениям (при этом в (7) выделяется внеинтегральный член), с использованием граничных условий (5) и (6) в левых частях, получим систему ИУ относительно неизвестных $E_{z2}(p)$ и $\partial E_{z2}(p)/\partial u$, которые при $p \in \Gamma_2$ имеют смысл эквивалентных поверхностных токов:

$$E_{z2}(p) = J_{\nu}^m(p), \quad \partial E_{z2}(p)/\partial u = iW_0 J_z^s(p),$$

где W_0 — волновое сопротивление свободного пространства. Обозначая

$$J_{\nu n}^m(p) = J_{\nu}^m(p)/W_0, \quad J_{\nu n}^{m.n}(p) = E_{z0}^n(p)/W_0, \quad iW_0 J_z^{s.n} = \partial E_{z0}^n(p)/\partial u,$$

где

$$J_z^{s.n}(p) = \cos(\theta - \alpha) e^{ip \cos(\varphi - \alpha)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi - \alpha)} i^n F_n^{\text{отр}} \left[H_{n-1}^{(2)}(\rho) e^{-i(\theta - \varphi)} + H_{n+1}^{(2)}(\rho) e^{i(\theta - \varphi)} \right], \\ J_{\nu n}^{m.n}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi - \alpha)} i^n [J_n(\rho) - F_n^{\text{отр}} H_n^{(2)}(\rho)]$$

— поверхностные токи, соответствующие первичному полю на контуре Γ_2 , θ — угол между осью x и внешней нормалью в точке « p » на контуре Γ_2 , окончательно получим следующую систему ИУ:

$$2J_z^s(p) + 2 \int_{\Gamma_1} \left\{ J_z^s(q) \left[\frac{\partial G_0^k(p, q)}{\partial u} - \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial u} \right] + \right. \\ \left. + iJ_{\nu n}^m(q) \left[\frac{\partial^2 G_0^k(p, q)}{\partial u \partial u'} - \frac{\partial^2 G_2(p, q)}{\partial u \partial u'} \right] \right\} d\sigma' = 2J_z^{s.n}(p); \quad (9) \\ (1 + \varkappa_2^2) J_{\nu n}^m(p) + 2 \int_{\Gamma_1} \left\{ iJ_z^s(q) [G_0^k(p, q) - \varkappa_2^2 G_2(p, q)] - \right. \\ \left. - J_{\nu n}^m(q) \left[\frac{\partial G_0^k(p, q)}{\partial u'} - \varkappa_2^2 \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial u'} \right] \right\} d\sigma' = 2J_{\nu n}^{m.n}(p), \quad (10)$$

* Для двумерной задачи это умножение необязательно [3]. В трехмерном случае умножение необходимо для того, чтобы после перенесения точки наблюдения на поверхность тела интегралы имели смысл [3].

Как видно из вышеизложенного, методика составления ИУ отличается от используемой в работе [3] (в случае двух тел) в основном записью поля во внешнем пространстве S_0 через специальную функцию Грина. Поэтому разностные ядра имеют различный вид, а область интегрирования уменьшается до одного контура.

В частном случае $\kappa_1=1$ $F_n^{\text{отр}}=0$ и из системы (9) и (10) получают ИУ для уединенного цилиндра произвольного поперечного сечения [5]. В этой же работе приведены выражения для разностных ядер в виде, удобном для расчетов*, и описаны особенности их вычисления при $p \rightarrow q$. Ядра полученной системы ИУ (9) и (10) отличаются от описанных в работе [5] наличием в (3) слагаемого $G_1(p, q)$ и его нормальных производных.

Исследование сходимости ряда в $G_1(p, q)$ с помощью асимптотических представлений Дебая для функций Ханкеля показало, что соотношение параметров $\rho_{\text{мин}} > n > a$, где n — число членов ряда, выбранное из условия $(n - \kappa_1 a) > n^{1/3}$, обеспечивает сходимость вида $(1/2n)^{2n} (1/\rho) (1/n^2)$. При этом нормальные производные от функции $G_1(p, q)$, вычисленные почленным дифференцированием асимптотического ряда, сходятся не хуже. При $\rho_{\text{мин}} \sim a$, т.е. при очень близких расстояниях между телами, сходимость проверялась численным способом путем наращивания числа членов ряда в $G_1(p, q)$. В силу непрерывности функции $G_1(p, q)$ при $p \rightarrow q$ особенности вычисления $G_0^s(p, q)$ те же, что и для $G_0(p, q)$.

Рассеянное системой поле состоит из поля, отраженного от тела 2 (7) $p \in S_0$, которое определяется по найденным в процессе решения поверхностным токам, и поля, отраженного от кругового ДЦ, которое является решением задачи дифракции плоской волны на уединенном круговом ДЦ. С учетом асимптотики функций Ханкеля в дальней зоне поле имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_0} E_z(p) = & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4} \frac{e^{-i\rho}}{\sqrt{\rho}} \left[F_0^{\text{отр}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\varphi - \alpha)) (-1)^n F_n^{\text{отр}} \right] - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4} \frac{e^{-i\rho}}{\sqrt{\rho}} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_2} [J_z^s(q) [\exp(i(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi))] - \\ & - F_0^{\text{отр}} H_0^{(2)}(\rho') - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \cos(n(\varphi - \varphi')) F_n^{\text{отр}} H_n^{(2)}(\rho')] - \\ & - J_{zn}^s(q) [\exp(i(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)) \cos(\theta' - \varphi) - i F_0^{\text{отр}} H_1^{(2)}(\rho') \times \\ & \times \cos(\theta' - \varphi') + i \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n F_n^{\text{отр}} [H_{n-1}^{(2)}(\rho') \cos(n(\varphi - \varphi') - \\ & - (\theta' - \varphi')) - H_{n+1}^{(2)}(\rho') \cos(n(\varphi - \varphi') + (\theta' - \varphi'))]] d\varphi'. \end{aligned}$$

3. Решение системы интегральных уравнений и анализ численных результатов. С целью исследования эффективности описанного способа решения задачи дифракции на двух ДЦ применялся как предлагаемый алгоритм со специальной функцией Грина, так и алгоритм интегрированием по контурам Γ_1 и Γ_2 с функциями Грина свободного пространства. В первом алгоритме на ДЦ произвольного сечения, а во втором — на обоих телах поверхностные токи аппроксимировались кусочно-постоянными функциями с произвольным расположением узлов. Известный метод Крылова—Боголюбова сводит задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для вычисле-

* Процесс интегрирования ядра, включающего в себя вторые производные, упрощается путем использования волновых уравнений для функций $G_0(p, q)$ и $G_2(p, q)$ и перехода с них помощью от производных по нормали к производным по касательной в области, свободной от источников.

ния коэффициентов матрицы используется метод Симпсона численно-интегрирования.

При одинаковом числе узлов аппроксимации на обоих ДЦ матрица СЛАУ первого алгоритма имеет порядок, в два раза меньший, и занимает объем памяти ЭВМ в четыре раза меньший, чем во втором алгоритме. Время ее обращения уменьшается примерно в восемь раз [1], однако время счета коэффициентов матрицы увеличивается. Проведенные расчеты показали, что предложенный алгоритм сокращает время расчетов примерно в два раза по сравнению с алгоритмом, использующим интегрирование по двум телам при условии одинакового на обоих телах числа узлов аппроксимации. Преимуществом первого алгоритма является также точное удовлетворение граничным условиям на круговом ДЦ.

Точность решения зависит, как обычно, от правильности выбора величины элементарного интервала Δu на контуре интегрирования, от числа этих интервалов и т. п. [6]. Наличие рядов в ядрах ИУ заметно влияет на точность только при очень близких расстояниях между телами ($\rho_{\text{мин}} \sim a$).

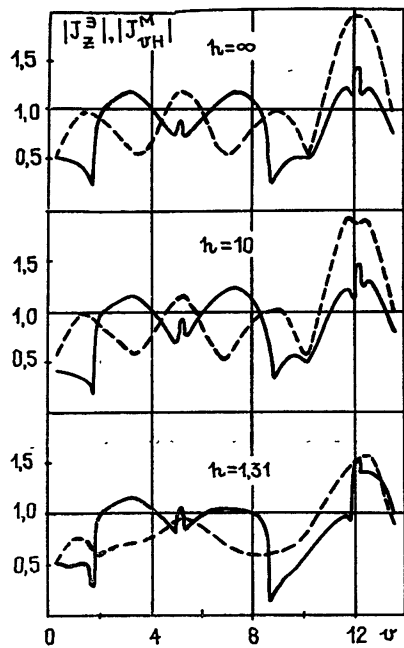
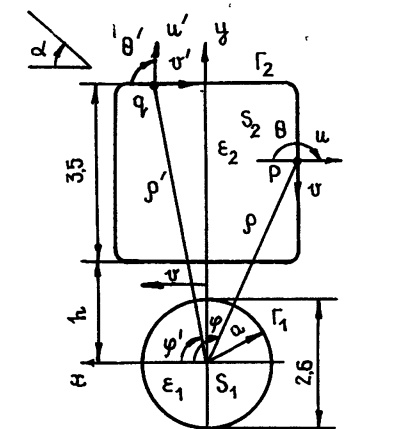


Рис. 1.

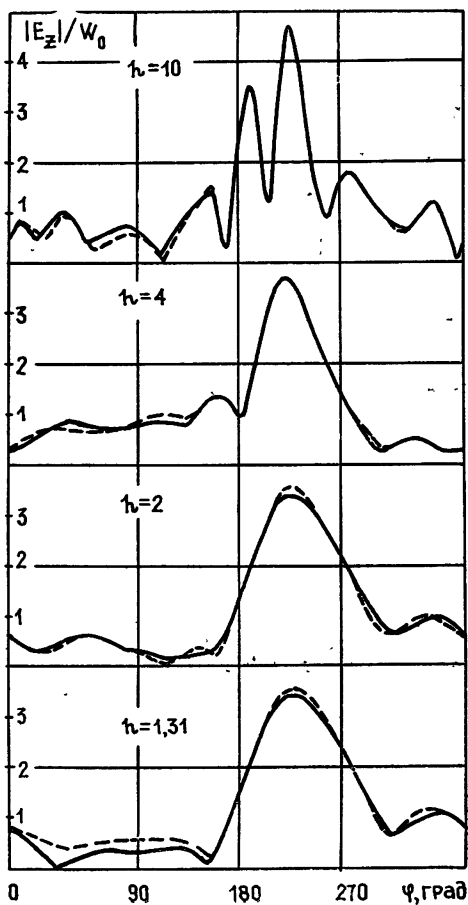


Рис. 2.

С помощью предложенного алгоритма был проведен цикл расчетов для системы, состоящей из ДЦ кругового (тело 1) и квадратного

(тело 2) сечений, с целью выяснения необходимости учета их взаимного влияния при определении поля дифракции. Электрические размеры тел указаны на рис. 1, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,56$. Система возбуждается плоской E -поляризованной волной, падающей под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси x . На том же рис. 1 изображены распределения поверхностных токов $|J_{\text{вн}}^m|$ (пунктирная линия) и $|J_z^s|$ (сплошная линия) на Γ_2 при различных расстояниях между цилиндрами h . При этом $h = \infty$ соответствует уединенному ДЦ квадратного сечения. Из рисунков видно, что влияние на распределение токов невелико за исключением очень близких расстояний.

На рис. 2 представлены отраженные от системы поля $|E_z|$ при различных h . При каждом h задача решалась двояким образом: по предложенному алгоритму (сплошная линия) и без учета взаимного влияния, т. е. распределения токов на ДЦ 2 при всех h были фиксированными и равными токам при $h = \infty$ (пунктирная линия). Из рисунка видно, что учет взаимного влияния необходим только при близких расстояниях между ДЦ.

Анализ результатов расчетов показывает, что в большинстве практически важных случаев при расчете дифракции на системе диэлектрических тел (в том числе и на конечных решетках) с достаточной высокой точностью можно пренебречь их взаимным влиянием и рассчитывать токи на них, как на одиночных рассеивателях. Если же одно или несколько тел находятся в области «тени» других, то приходится рассматривать задачу в полном объеме и предлагаемый метод решения может оказаться весьма эффективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н. // Сб. научно-методических статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1977. Вып. 1. С. 94.
2. Хижняк Н. А. // ЖТФ. 1958. Т. 28. Вып. 7. С. 1592.
3. Захаров Е. В., Котик И. П., Сивов П. Н. // В сб.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Гос. ун-т, 1969. Вып. 13.
4. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983. С. 54.
5. Васильев Е. Н., Солодухов В. В. // В сб.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Гос. ун-т, 1973. Вып. 20. С. 144.
6. Васильев Е. Н., Маккавеева В. Ф., Гореликов А. И. // В сб.: Автоматизированное проектирование устройств и систем СВЧ. — М.: МИРЭА, 1982. С. 68.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
25 января 1988 г.

DIFFRACTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE BY TWO HOMOGENEOUS DIELECTRIC BODIES

V. V. Vasil'ev, V. F. Makkaveeva, V. V. Solodukhov

The method of integral equations is being applied to solve the two-dimensional problem of plane wave diffraction by two infinite dielectric cylinders; a circular cylinder and a cylinder with an arbitrary cross-section. A special Green's function is used to describe the influence of the circular cylinder. As a result essential economy of computer time and memory is achieved.