

УДК 534.26+535.43

## ВОЗБУЖДЕНИЕ БОКОВЫХ ВОЛН НА ШЕРОХОВОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

О. А. Годин

Рассматривается рассеяние плоских и сферических звуковых волн на границе раздела с малыми и пологими неровностями. Показано, что шероховатости могут приводить к ослаблению или усилению боковой волны (БВ) в среднем поле в зависимости от соотношения параметров сред и частоты звука. На шероховатой границе БВ возбуждается даже при падении плоской волны. Найдена интенсивность флуктуаций БВ. Рассматриваются случаи, в которых средняя интенсивность БВ велика по сравнению с интенсивностью БВ в отсутствие неровностей.

Боковые волны несут важную информацию о среде распространения и при определенных условиях могут вносить основной вклад в поле сосредоточенного источника [1]. Теория этих волн хорошо изучена для случая, когда БВ распространяется вдоль плоской границы раздела [2-4]. При использовании БВ для решения прикладных задач в океанологии, геофизике и при неразрушающем контроле материалов важно знать, как сказываются неровности границы на волновом поле. Случай слабо искривленной поверхности раздела проанализирован в [5-8]. Настоящая работа посвящена боковым волнам вблизи шероховатой поверхности с малыми по сравнению с длиной волны и пологими неровностями.

Мы ограничимся случаем скалярных волновых полей и рассмотрим акустические БВ, возбуждаемые на случайной границе раздела  $z = \eta(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \{x, y\}$  двух однородных жидкостей. Скорость звука и плотность верхней среды ( $z > \eta$ ) обозначим  $c_1$  и  $\rho_1$ , нижней ( $z < \eta$ ) —  $c_2$  и  $\rho_2$ . Предполагается, что величины  $m \equiv \rho_1/\rho_2$  и  $n \equiv c_2/c_1$  порядка единицы, причем  $n < 1$ , т. е. скорость звука в нижней среде больше, чем в верхней. Функцию  $\eta(\mathbf{r})$  будем считать статистически однородной,  $\langle \eta(\mathbf{r}) \rangle = 0$ . Мы предполагаем, что  $k_{1,2}\sigma \ll 1$ ,  $\langle (\nabla_{\perp} \eta)^2 \rangle \simeq \sigma^2/l^2 \ll 1$ , где  $k_{1,2} = \omega/c_{1,2}$  — волновое число звука при  $z > \eta$  и  $z < \eta$ ,  $\nabla_{\perp} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$ ,  $\sigma = \langle \eta^2 \rangle^{1/2}$ ,  $l$  — радиус корреляции неровностей.

Для описания звукового поля применим метод малых возмущений (ММВ). Представим акустическое давление в виде  $p_j = p_j^{(0)} + p_j^{(1)} + p_j^{(2)} + \dots$ , где  $|p_j^{(l)}| \sim \sigma^l$ ,  $j = 1$  в верхней среде,  $j = 2$  — в нижней;  $p_j^{(l)}$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца  $\Delta p_j^{(l)} + k_j^2 p_j^{(l)} = 0$ . Снос граничных условий на плоскость  $z = 0$  для первого приближения ММВ дает [9]

$$p_1^{(1)} - p_2^{(1)} = (m - 1) \eta (\partial p_1^{(0)} / \partial z), \quad z = 0; \quad (1)$$

$$m \partial p_1^{(1)} / \partial z - \partial p_2^{(1)} / \partial z = (m - 1) \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} p_1^{(0)}) + (m k_1^2 - k_2^2) \eta p_1^{(0)}, \quad z = 0. \quad (2)$$

Для второго приближения граничные условия имеют вид

$$p_1^{(2)} - p_2^{(2)} = \eta^2 \left[ \frac{1}{2} (k_2^2 - k_1^2) p_1^{(0)} + (m - 1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} p_1^{(0)} \right] + (m - 1) \eta \times \\ \times \left[ \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial z} \nabla_{\perp} \eta \nabla_{\perp} p_1^{(0)} \right], \quad z = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 m \partial p_1^{(2)} / \partial z - \partial p_2^{(2)} / \partial z = \eta^2 [ (m/2 - 1) (k_2^2 - k_1^2) (\partial p_1^{(0)} / \partial z) - \\
 - (m - 1) (\partial^3 p_1^{(0)} / \partial z^3) ] + (m k_1^2 - k_2^2) \eta p_1^{(1)} + (m - 1) \times \\
 \times [ \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} p_1^{(1)}) + 3 (\partial p_1^{(0)} / \partial z) \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \eta) ], \quad z = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим среднее поле, возникающее при падении сферической волны  $p_{\text{in}}$  на случайную поверхность. Источник звука расположен в точке  $\mathbf{R}_0 = (0, 0, z_0)$  в верхней среде. Разлагая падающую волну на плоские [2], § 26, и используя принцип суперпозиции, получаем

$$\begin{aligned}
 \langle p_1(\mathbf{R}) \rangle - p_{\text{in}}(\mathbf{R}) = \frac{i}{2\pi} \int d\xi v_1^{-1} \exp[i\xi \mathbf{r} + i v_1(z + z_0)] \bar{V}(\xi), \\
 v_j = (k_j^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \text{Im } v_j \geq 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$ ,  $\bar{V}$  — когерентный коэффициент отражения волны с горизонтальным волновым вектором  $\xi$ . Первое приближение ММВ не дает вклада в  $\bar{V}$ , поскольку  $\langle p_1^{(1)} \rangle = 0$ . Считая  $p_1^{(0)}$  суперпозицией падающей и отраженной плоских волн и вычисляя  $p_1^{(2)}$ , после простых, хотя и громоздких выкладок находим из (1) — (4)

$$\begin{aligned}
 \bar{V}(\xi) = V(\xi) \left\{ 1 - 2v_1 v_2 \sigma^2 - \frac{2v_1 \sigma^2}{m^2 v_1^2 - v_2^2} \int d\xi' \frac{\tilde{W}(\xi' - \xi)}{m v_1' + v_2'} \times \right. \\
 \left. \times [m b^2 + (m - 1) v_2 b (v_2' - m v_1') - (m - 1) v_1' v_2' v_2^2] \right\}, \\
 b \equiv m k_1^2 - k_2^2 - (m - 1) \xi' \xi', \quad v_j' \equiv v_j(\xi').
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $V(\xi) = (m v_1 - v_2) / (m v_1 + v_2)$  — френелевский коэффициент отражения,

$$\tilde{W}(\xi) = (2\pi)^{-2} \int \exp(-i\xi \mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad W(\mathbf{r}) \equiv \sigma^{-2} \langle \eta(\mathbf{r}_1) \eta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle \tag{7}$$

— энергетический спектр неровностей и их функция корреляции. В общем случае анизотропных неровностей  $\bar{V}$ , в отличие от  $V$ , зависит не только от величины, но и от направления вектора  $\xi$ . Отметим, что формулу (6) можно получить также на основе результатов работы [10]. В дальнейшем будем предполагать, что  $\tilde{W}(\xi)$  — гладкая функция.

Перейдем к цилиндрическим координатам:  $\mathbf{r} = \{r \cos \varphi, r \sin \varphi\}$ ,  $\xi = \{\xi \cos \psi, \xi \sin \psi\}$ . Как функция  $\xi$   $V$  имеет точку ветвления  $\xi = k_2$ , обусловленную величиной  $v_2$  в (6). Боковой волной, как известно, называют вклад точки ветвления  $\xi = k_2$  в асимптотику интеграла (5) при  $k_1 |\mathbf{R} + \mathbf{R}_0| \gg 1$ . Разложим  $\bar{V}$  в ряд Фурье по  $(\psi - \varphi)$ :

$$\bar{V}(\xi) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} v_q(\xi) \exp[-iq(\psi - \varphi)]. \tag{8}$$

Тогда, используя тождество [11]

$$u^q \left( \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \right)^q J_0(u) = \frac{\exp(iq\pi/2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iu \cos \theta - iq\theta) d\theta, \quad q = 0, 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\langle p_1 \rangle - p_{\text{in}} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\pi |q|/2) \int_0^{\infty} r^{1+q} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{|q|} J_0(\xi r) v_q(\xi) \xi d\xi. \tag{9}$$

Вклад точки ветвления в асимптотику каждого члена ряда оценивается так же, как поле БВ при отражении от слоистой среды с коэффициентом отражения  $v_q(\xi)$  [2, 4, 12]. В результате для БВ в среднем поле над шероховатой границей имеет вид

$$\bar{p}_i(\mathbf{R}) = \frac{-m}{2} \dot{p}_{i0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (v_1 \partial v_q / \partial v_2)_{v_2=0} \equiv Q \dot{p}_{i0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0), \quad (10)$$

$$Q = \frac{-m}{2} \left( v_1 \frac{\partial \bar{V}}{\partial v_2} \right)_{\xi=\xi_b},$$

где  $\xi_b = k_2 r / r$ ,  $\delta = \arcsin n$ ,

$$p_{i0}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{2in \exp[ik_2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + ik_1 |z + z_0| \cos \delta]}{mk_1 \cos^2 \delta [|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| L^3(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)]^{1/2}}, \quad (11)$$

$$L(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - (z + z_0) \operatorname{tg} \delta.$$

$p_{i0}$  — это поле БВ в точке  $\mathbf{R}$ , возбужденное источником в точке  $\mathbf{R}_0$  в отсутствие неровностей;  $L(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  — длина трассы БВ в нижней среде (см. [2]). Мы предполагаем, что точка  $\mathbf{R}$  не близка к границе области наблюдения БВ, вблизи которой последняя ответвляется от геометрооптической компоненты поля, т.е.  $L^2 \gg (z + z_0)/k_1$  [2, 4]. Только при этом условии выделение БВ в звуковом поле над плоской границей раздела имеет физический смысл. При выводе (10) предполагалось, что  $\bar{V}$  является медленно меняющейся функцией по сравнению с экспонентой в (5).  $\bar{V}$  существенно меняется при изменении  $\xi$  на величину порядка  $\min(k_1, 1/l)$ . Максимальным масштабом изменения экспоненты служит  $(k_1/|\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}|)^{1/2}$ . Поэтому полученным выражением для  $\bar{p}_i$  можно пользоваться, если  $k_1 |\mathbf{R} + \mathbf{R}_0| \gg 1 + k_1^2 l^2$ . Согласно (10)  $\bar{p}_i$  зависит только от значений  $\bar{V}$  при  $\varphi \approx \psi$ ,  $v_2 \approx 0$ . Физически это было очевидно заранее, поскольку соответствующий БВ дифракционный луч [2], § 30, падает на границу под углом  $\delta$  и не выходит из вертикальной плоскости, содержащей источник и приемник.

Для фактора  $Q$ , описывающего влияние шероховатостей на БВ, из (6) находим с точностью до членов  $O(\sigma^4)$

$$Q = \exp\left\{\sigma^2 v_1^2 - 2\sigma^2 m^{-1} \int d\xi' \tilde{W}(\xi' - \xi)(m v_1' + v_2')^{-1} b[b/v_1 - (m-1)v_2']\right\}. \quad (12)$$

Если неровности изотропны, то  $Q$  не зависит от положения источника и приемника. Рассмотрим предельные случаи мелкомасштабных и крупномасштабных неровностей. Пусть сначала  $k_1 l \gg 1$ . При  $l \rightarrow \infty$ , согласно (7),  $\tilde{W}(\xi) \rightarrow \delta(\xi)$ . Главный член разложения показателя экспоненты в (12) по степеням  $1/k_1 l$  получим, заменяя  $\tilde{W}$  на  $\delta$ -функцию:  $Q = \exp(-k_1^2 \sigma^2 \cos^2 \delta)$ . Таким образом, при рассеянии на крупномасштабных неровностях БВ ослабляется по сравнению со случаем плоской границы. Однако в условиях применимости ММВ ослабление мало.

Более интересные результаты получаются в случае мелкомасштабных неровностей ( $k_1 l \ll 1$ ): Представим  $v_{1,2}$  в виде

$$v_j = ix[1 + (2x\xi - v_j^2)/2x^2 - (x\xi)^2/x^4] + O(k_1^2/x^2), \quad x \equiv \xi' - \xi. \quad (13)$$

Малая область  $x \leq k_1 \ll 1/l$ , где неприменимо разложение  $v_j$  по степеням  $v_j/x$  и  $\xi/x$ , дает пренебрежимо малый вклад в интеграл в (12).

Сохраняя только главные члены разложений по степеням  $k_1 l$ , из (12) и (13) находим

$$Q = \exp \left\{ k_1^2 \sigma^2 \cos^2 \delta \frac{3m-1}{m+1} + \frac{i k_1 \sigma^2 \cos \delta}{m(m+1)l} [\alpha_1 m k_1^2 l^2 + \alpha_2 (m-1)^2 \operatorname{tg}^2 \delta] \right\}, \quad (14)$$

где  $\alpha_{1,2}$  — безразмерные коэффициенты порядка единицы,

$$\alpha_1 = l^{-1} \int d\mathbf{x} x^{-1} \tilde{W}(\mathbf{x}), \quad \alpha_2 = 2l \int d\mathbf{x} x^{-1} (\mathbf{x}\xi/\xi)^2 \tilde{W}(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Отметим, что при  $m > 1/3$   $|Q| > 1$ , т. е. неровности усиливают боковую волну, в то время как зеркально отраженная компонента среднего поля при любых  $m$  ослабляется неровностями. Возможность усиления БВ обусловлена тем, что ее амплитуда пропорциональна модулю производной коэффициента отражения, а амплитуда геометроакустической компоненты поля пропорциональна  $|\bar{V}| \ll |V|$ . Если  $m=1$ , то поправка к фазе БВ мала по сравнению с  $|Q| - 1$ . При  $m \neq 1$ , наоборот,  $\operatorname{arg} Q \simeq k_1 \sigma^2 / l \cos \delta \gg ||Q| - 1|$ . При малом различии скоростей звука в верхней и нижней средах поправка к фазе БВ  $p_{10}$  может иметь заметную величину.

По-видимому, впервые возможность усиления БВ в среднем поле неровностями для одного специального случая была отмечена в [13]. Этот вывод был сделан исходя из выражения для  $\bar{V}$ , пригодного, как утверждается в [13], как для пологих, так и для крутых неровностей. Однако это выражение для пологих неровностей не переходит в результат ММВ (6) и, следовательно, ошибочно.

Перейдем к анализу флуктуаций поля. В пренебрежении боковой волной они были исследованы в [9], откуда мы заимствуем методику расчета. Рассмотрим сначала задачу о рассеянии плоской волны:  $p_1^{(0)} = \exp(i\xi \mathbf{r}) [\exp(-iv_1 z) + V(\xi) \exp(iv_1 z)]$ . Разлагая  $p_1^{(1)}$  по плоским волнам, из граничных условий (1), (2) находим

$$p_1^{(1)}(\mathbf{R}) = -i \int d\xi' \tilde{\eta}(\xi' - \xi) [1 + V(\xi)] (m v_1' + v_2')^{-1} \times \\ \times \left( \frac{m-1}{m} v_1 v_1' + b \right) \exp(i\xi' \mathbf{r} + iv_1' z), \quad (16)$$

где  $\tilde{\eta}$  — спектральная компонента неровностей,

$$\tilde{\eta}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{r} \eta(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{x}\mathbf{r}). \quad (17)$$

Будем предполагать, что рассеивающая площадка  $\Omega$ , за пределами которой шероховатости отсутствуют, заключена в круге  $r < a$ ,  $a \gg l$ .

Тогда минимальный масштаб изменения  $\tilde{\eta}(\mathbf{x})$ , согласно (17), имеет порядок  $1/a$ .

Пусть точка наблюдения  $\mathbf{R}$  находится в зоне Фраунгофера относительно  $\Omega$ , т. е.  $R \gg a(1+k_1 a)$ , и  $k_1 R \gg 1$ . Тогда в (16) предэкспоненциальный множитель является медленно меняющимся по сравнению с экспонентой. Аналогично выводу соотношения (10) получаем из (16) поле боковой волны:

$$p_{11}(\mathbf{R}) = Q_1 p_{10}(\mathbf{R}, 0), \quad Q_1 = \pi \tilde{\eta} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} k_2 - \xi \right) k_1^2 \frac{1-m}{m} [1 + V(\xi)] \times \\ \times \left[ \frac{m-n^2}{m-1} - n \frac{r\xi}{rk_1} - \cos \delta \sqrt{n^2 - \frac{\xi^2}{k_1^2}} \right]. \quad (18)$$

$\rho_{11}$  пропорционально той компоненте спектра неровностей, на которой происходит перерасеяние падающей волны под углом  $\delta$  к вертикали в плоскости, содержащей ось  $Oz$  и точку наблюдения.

Мы видим, что на шероховатой границе раздела (в отличие от плоской границы) БВ возникает даже при падении плоской волны. Это легко было предвидеть, рассматривая рассеяние на поверхности как результат действия распределенных по плоскости  $z=0$  источников звука, сила которых зависит от  $\eta(\mathbf{r})$ , контраста между параметрами сред и звукового поля  $p_1^{(0)}$  вблизи границы. Каждый источник возбуждает парциальные БВ, которые интерферируя, дают  $\rho_{11}$ . В случае  $k_1 l \gg 1$  возбуждение БВ плоской волной допускает также лучевую интерпретацию. Для возникновения БВ над плоской границей необходимо, чтобы фронт падающей волны имел конечную кривизну [2]. Можно показать, что в лучевом приближении существенно только относительная кривизна фронта и границы. Она отлична от нуля при падении плоской волны на неровную границу, что приводит к возникновению БВ.

С точностью до  $O(\sigma^3)$  интенсивность флуктуаций БВ равна  $\langle |p_{11}(\mathbf{R})|^2 \rangle = \langle |Q_1|^2 \rangle |p_{10}(\mathbf{R}, 0)|^2$ . Учитывая, что  $\langle \tilde{\eta}(\mathbf{x}) \tilde{\eta}^*(\mathbf{x}) \rangle = \sigma^2 \tilde{W}(\mathbf{x}) S$  [9], где  $S$  — площадь рассеивающей площадки, из (18) находим

$$\langle |Q_1|^2 \rangle = \left| \frac{1-m}{2m} \right| \left| 1 + V(\xi) \left[ \frac{m-n^2}{m-1} - n \frac{\xi}{k_1 r} - \cos \delta \sqrt{n^2 - \frac{\xi^2}{k_1^2}} \right] \right|^2 \times \quad (19)$$

$$\times k_1^4 \sigma^2 S \tilde{W} \left( \frac{r}{r} k_2 - \xi \right).$$

Отметим, что  $\langle |Q_1|^2 \rangle$  зависит не от координат точки наблюдения, а только от ее азимута. Рассмотрим два предельных случая. Если  $k_1 l \gg \gg 1$ , то  $\tilde{W}(\mathbf{x})$  близко к  $\delta(\mathbf{x})$ . В этом случае БВ распространяется в направлении  $\xi$ . Она возбуждается, только если угол падения плоской волны близок к  $\delta$  ( $|\xi/k_1 - n| \leq (k_1 l)^{-1}$ ). В случае  $k_1 l \ll 1$   $\tilde{W}(k_2 r/r - \xi) \approx \tilde{W}(0) \simeq l^2$ . Угловая зависимость  $\langle |Q_1|^2 \rangle$  является медленной и описывается множителем перед  $k_1^4$  в (19). Интенсивность флуктуаций пропорциональна  $\omega^2$ .

Перейдем к исследованию флуктуаций БВ, возбуждаемой точечным источником. Будем искать  $p_1^{(1)}$  в виде суперпозиции полей монопольных и дипольных источников, расположенных в верхней среде вблизи границы раздела:

$$p_1^{(1)}(\mathbf{R}) = \left\{ \int d\mathbf{r}_1 [A_1(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1) + A_2(\mathbf{r}_1) \partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1) / \partial z_1] \right\}_{z_1=+0}. \quad (20)$$

Здесь  $G$  — функция Грина задачи с плоской границей, нормированная условием  $|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1| G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1) \rightarrow 1$  при  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_1, z_1 > 0$ . Определяя  $A_{1,2}$  из граничных условий (1), (2), находим

$$p_1^{(1)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}_1 \left( p_1^{(0)} G k_1^2 \frac{n^2 - m}{m} - \frac{1 - m}{m} \nabla_{\perp} p_1^{(0)} \nabla_{\perp} G + \right. \quad (21)$$

$$\left. + (1 - m) \frac{\partial G}{\partial z_1} \frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial z_1} \right) \eta(\mathbf{r}_1).$$

Вновь предположим, что рассеивающая площадка  $\Omega$  ограничена, но ее размеры велики по сравнению с  $l$ . Будем рассматривать поле в точках  $\mathbf{R}$ , которые не близки к границе области наблюдения боко-

вых волн, возбуждаемых всеми источниками в пределах  $\Omega$  (рис. 1). Можно считать, что на  $\Omega$  находится большое число некогерентных рассеивателей с характерным размером  $l$  каждый. Будем предполагать, что при всех  $r_1 \in \Omega$

$$|R_0 - r_1| \gg (k_1^2 l^2 + 1)/k_1, \quad |R - r_1| \gg (k_1^2 l^2 + 1)/k_1. \quad (22)$$

Эти условия означают, что точки  $R_0$  и  $R$  находятся в зоне Фраунгофера относительно каждого рассеивателя на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны от них.

БВ  $p_{1i}$  может быть найдена суммированием парциальных БВ от элементарных точечных источников, распределенных на  $\Omega$ . Формально  $p_{1i}$  получается из  $p_1^{(1)}$  заменой  $G(R, R_1)$  на  $p_{10}(R, R_1)$  под интегралом (21). Тогда интенсивность флуктуаций БВ равна

$$\langle |p_{1i}(R)|^2 \rangle = \left( \frac{\sigma}{4\pi} \right)^2 \iint_{\Omega} dr_1 dr_2 p_1^{(0)}(r_1) p_{10}(R, r_1) \times \\ \times T(r_1) [p_1^{(0)}(r_2) p_{10}(R, r_2)]^* W(r_1 - r_2); \quad (23)$$

$$T(r) \equiv \left[ k_1^2 \frac{m - n^2}{m} - \frac{m - 1}{m} \frac{\nabla_{\perp} p_1^{(0)} \nabla_{\perp} p_{10}}{p_1^{(0)} p_{10}} + \frac{m - 1}{p_1^{(0)} p_{10}} \frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial z_1} \frac{\partial p_{10}}{\partial z_1} \right]_{z=0}. \quad (24)$$

При рассматриваемой геометрии задачи БВ отделяется от других компонент рассеянного поля своим направлением прихода в точку наблюдения и может быть выделена из суммарного звукового поля при помощи направляемого приемника (антенны).

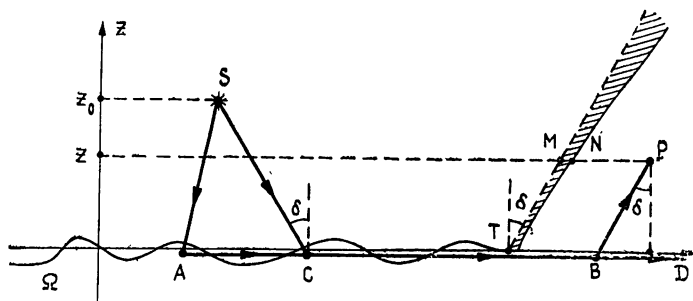


Рис. 1. Геометрия задачи о флуктуациях поля боковой волны;  $S$  — источник,  $P$  — точка наблюдения,  $\Omega$  — рассеивающая поверхность. Заштрихована окрестность границы области наблюдения боковой волны, возбужденной источником в точке  $T$  на границе  $\Omega$ . Ширина окрестности границы области наблюдения  $|MN| \approx \max(k_1^{-1}, (z/k_1)^{1/2})$ ,  $SA$  — один из лучей падающей волны.  $ABP$ ,  $SCD$  — дифракционные лучи.

Будем считать, что источник отстоит от границы на много длин волн:  $k_1 z_0 \gg 1$ . В этом случае  $p_1^{(0)}(r_1, 0) \approx [1 + V(|r_0 - r_1| \times k_1 / |R - r_1|)] |R_0 - r_1|^{-1} \exp(ik_1 |R_0 - r_1|)$  и при вычислении  $T$  (24) допустимо дифференцировать только фазы  $p_1^{(0)}$  и  $p_{10}$ , пренебрегая изменением  $|p_1^{(0)}|$  и  $|p_{10}|$ . Возникновение БВ  $p_{1i}$  можно интерпретировать следующим образом (рис. 1). В точке  $A$  на шероховатой границе падающая волна, идущая по лучу  $SA$ , рассеивается, и часть ее энергии распространяется в нижней среде горизонтально по лучу  $AB$ , не взаимодействующему с неровностями и дающему начало БВ в верхней среде. Другими словами, в рассматриваемом случае  $p_{1i}$  является результатом однократного рассеяния геометрической компоненты поля  $p_1^{(0)}$  в БВ.

Для вычисления  $\langle |p_{1i}|^2 \rangle$  перейдем к переменным  $r_1$  и  $r_2 = r_1 - r_2$

в интеграле (23). Поскольку размеры площадки  $\Omega$  велики по сравнению с  $l$ , интегрирование по  $r_3$  можно вести в бесконечных пределах. В силу неравенств (22) множитель перед  $W$  в (23) является медленно меняющейся функцией  $r_3$  по сравнению с  $W(r_3)$ . Разлагая его по степеням  $r_3$ , после простых выкладок получаем (с точностью до фактора  $1 + O[l(1 + k_1 l)(|R_0 - r_1|^{-1} + |R - r_1|^{-1})]$ )

$$\langle |p_{i1}(R)|^2 \rangle = \sigma^2 \int_{\Omega} dr_1 M(r_1) |R_0 - r_1|^{-2} \tilde{W}(k_1 \alpha + k_2 \beta). \quad (25)$$

Здесь

$$M = |p_{i0}(R, r_1)|^2 |1 + V(k_1 \alpha)|^2 k_1^4 |m - n^2 + (m - 1)(n\alpha\beta - \cos \delta \sqrt{n^2 - \alpha^2})|^2 / 4m^2; \quad (26)$$

$$\alpha = (r_1 - r_0) / |r_1 - R_0|, \quad \beta = (r_1 - r) / |r_1 - r|. \quad (27)$$

Величина, служащая аргументом энергетического спектра неровностей в (25), равна изменению горизонтальной компоненты волнового вектора при рассеянии в точке  $r_1$  на границе. Согласно (25) вклады волн, рассеянных в различных точках  $\Omega$ , в интенсивность флуктуаций БВ аддитивны. Подынтегральное выражение быстро стремится к нулю при  $r_1 \rightarrow \infty$ . Это позволяет применять формулу (25) и к неограниченным рассеивающим площадкам.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Пусть размеры площадки  $\Omega$  настолько малы, что  $|\alpha(r_1) - \alpha(r_2)|$ ,  $|\beta(r_1) - \beta(r_2)| \ll 1 + 1/k_1 l$  при любых  $r_{1,2} \in \Omega$ . Эти условия будут выполнены, если

$$(1 + k_1 l) a \ll \min(|r - r_1|, |R_0 - r_1|), \quad (28)$$

где  $a$  — характерный линейный размер  $\Omega$ . При сделанных предположениях подынтегральное выражение в (25) можно считать константой и вынести из-под интеграла при каком-либо значении  $r_1 \in \Omega$ :

$$\langle |p_{i1}|^2 \rangle = \sigma^2 M \tilde{W}(k_1 \alpha + k_2 \beta) S / |R_0 - r_1|^2. \quad (29)$$

Положим для определенности  $r_1 = 0$ . Пусть источник удаляется от  $\Omega$  вдоль прямой  $R_0 = z_0(\alpha(1 - \alpha^2)^{-1/2}, 1)$ , где  $\alpha > n$ . При достаточно больших  $z_0$   $|p_{i0}| \approx \text{const}(k_1 z_0^2)^{-1}$ . Согласно (29)  $\langle |p_{i1}|^2 \rangle \approx \text{const}_1 \times \tilde{W} k_1^2 \sigma^2 S / z_0^2 r L^3(R, 0)$ . Следовательно, при достаточно больших  $z_0$

( $z_0^2 \gg r L^3(R, 0) [k_1^4 \sigma^2 S \tilde{W}(k_1(\alpha + n\beta))]^{-1}$ ) интенсивность флуктуаций поля БВ велика по сравнению с интенсивностью БВ в отсутствие рассеивателей, а также с интенсивностью среднего поля БВ.

2) Предположим, что падающая волна является плоской. Чтобы найти интенсивность флуктуаций в этом предельном случае, в (25) нужно отбросить множитель  $|R_0 - r_1|^{-2}$  под интегралом и заменить  $\alpha$  на  $\xi/k_1$ , где  $\xi$  — горизонтальная компонента волнового вектора падающей волны. Если площадка  $\Omega$  мала в смысле (28), то согласно (29)

$\langle |p_{i1}|^2 \rangle = \sigma^2 M \tilde{W}(\xi + k_2 \beta) S$ . Легко убедиться в тождественности этого результата формуле (19). Однако теперь он получен при условии  $|R - r_1| \gg k_1 l a$ , которое значительно менее ограничительно, чем использованное ранее неравенство  $|R - r_1| \gg k_1 a^2$ .

3) При рассеянии на мелкомасштабных неровностях  $\tilde{W}(k_1 \alpha + k_2 \beta)$  в (25) можно заменить на  $\tilde{W}(0) \approx l^2$ . В этом случае согласно (26)  $\langle |p_{i1}|^2 \rangle \sim \omega^2$ .

4) Рассмотрим несколько подробнее рассеяние на крупномасштабных неровностях. Поскольку  $\tilde{W}(x) \approx \delta(x)$ , основной вклад в интеграл

(25) дает окрестность точки  $r_1 = r_{10}$ , являющейся корнем уравнения

$$\alpha(r_{10}) + n\beta(r_{10}) = 0. \quad (30)$$

Физически это объясняется тем, что при рассеянии на плавных неровностях БВ возбуждают лишь падающие волны с такими  $\xi$ , что  $|\xi - k_2\beta| \leq 1/l \ll k_1$ . Отметим, что  $|\alpha + n\beta| \leq 1/k_1l$  при  $|r_1 - r_{10}| \leq |r - r_0|/k_1l$ . Из (27) ясно, что  $r_{10}$  лежит на прямой, соединяющей точки  $r$  и  $r_0$ :  $r_{10} = r_0 + \gamma(r - r_0)$ . Для  $\gamma$  легко находим  $\gamma = z_0 \operatorname{tg} \delta / |r - r_0|$ ,  $\gamma \leq 1$ . Если  $\gamma > 1$ , уравнение (30) не имеет решений.  $r_{10}$  представляет собой точку первого контакта дифракционного луча  $SCB$ , соответствующего волне  $p_{10}(r, R_0)$ , с границей раздела (рис. 1). При  $\gamma > 1$  дифракционный луч не попадает в точку  $r$ . В этом случае, а также если  $r_{10} \in \Omega$ , амплитуда БВ  $p_{11}$  мала. Ниже будем предполагать, что  $r_{10} \in \Omega$  и расстояние от этой точки до границ  $\Omega$  велико по сравнению с  $|r - r_0|/k_1l$ .

Принимая во внимание определения  $\alpha(r_1)$  и  $\beta(r_1)$  (27), нетрудно показать, что  $\delta(k_1\alpha + k_2\beta) = (|r - r_0|\gamma(1 - \gamma)/k_2)^2 \delta(r_1 - r_{10})$ . Подставляя это выражение вместо  $\tilde{W}$  в (25), находим

$$\langle |p_{11}|^2 \rangle = (k_1\sigma \cos^2 \delta)^2 |p_{10}(R, R_0)|^2 (1 - z_0 \operatorname{tg} \delta / |r - r_0|). \quad (31)$$

В отличие от случая мелкомасштабных неровностей, интенсивность флуктуаций не зависит от частоты. Подчеркнем, что формула (31) справедлива и тогда, когда неровности занимают всю плоскость  $z=0$ , поскольку БВ  $p_{11}(R)$  формируется в окрестности точки  $r_{10}$ .

Средняя интенсивность поля БВ  $p_i$  при наличии неровностей с точностью до членов  $O(\sigma^3)$  равна  $\langle |p_i|^2 \rangle = |p_{10}|^2 + 2 \operatorname{Re} [p_{10}^* (p_i - p_{10})] + \langle |p_{11}|^2 \rangle$ . Из формул (10) и (31) следует

$$N \equiv \langle |p_{11}|^2 \rangle / 2 \operatorname{Re} [p_{10}^* (\bar{p}_i - p_{10})] = (1 - z_0 \operatorname{tg} \delta / |r - r_0|) \times \\ \times \cos^2 \delta (m+1) / 2(3m-1). \quad (32)$$

Таким образом, при  $k_1l \gg 1$  вклады когерентной и флуктуационной компонент рассеянного поля в изменение интенсивности БВ по порядку величины совпадают. Если  $m \geq 3/5$  или  $m \leq 1/7$ , то  $|N| < 1$ ; при  $m > 1/3$   $\langle |p_i|^2 \rangle / |p_{10}|^2 > 1$ , т.е. рассеяние увеличивает интенсивность БВ.

Отметим в заключение, что в случае источника, расположенного вблизи границы раздела ( $k_1z_0 \leq 1$ ), при расчете  $p_i^{(0)}$  следует учитывать дифракционные поправки [2]. Если среднее поле в верхней среде близко к  $p_i^{(0)}$ , исследование флуктуаций проводится аналогично изложенному выше, однако наряду с рассеянием геометрической компоненты  $p_i^{(0)}$  становится существенным рассеяние боковой волны  $p_{10}(r_1, R_0)$  в боковую волну  $p_{11}(R, r_1)$ .

Автор признателен Л. М. Бреховских и А. Г. Вороновичу за полезное обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Felsen L. In: Electromagnetic wave theory. Proc. Symp Part 1. — London etc.: Pergamon Press, 1967. P. 11.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. Гл. 4.
3. Cerveny V, Ravindra R. Theory of seismic head waves. — Toronto Univ Toronto Press, 1971.
4. Godin O A. // Wave Motion. 1984 V 6. № 2. P. 105.
5. Булдырев В. С., Ланин А. И. // ЖВММФ. 1966 Т. 6. № 1. С. 90.
6. Булдырев В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10 № 5. С. 699.
7. Rulf B // J. Math Phys. 1967 V 8. № 9 P 1785.
8. Lerche I. // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 81. № 3. P. 611.
9. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. Гл. 4.



10. Воронович А. Г. Автореф. диссертации. — М.: Акуст. ин-т, 1987.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. Гл. 9.
12. Годин О. А. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 5. С. 597.
13. Lerche I, Hill N. R. // J. Math. Phys. 1985. V. 26. № 6. P. 1420.

Институт океанологии  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 октября 1987 г.

## LATERAL WAVE GENERATION ON A ROUGH INTERFACE

*O. A. Godin*

Plane and spherical sound wave scattering at a rough boundary of two homogeneous fluids is considered. Heights and slopes of roughness elements are assumed small. It is shown that a roughness of the boundary causes amplification or weakening of the lateral wave (LW) in the mean acoustic field depend on the ratio of media densities and on the frequency of the sound wave. Even a plane incident wave can generate LW over a rough interface. Intensity of LW fluctuations is found. Some cases are discussed in which the mean intensity of LW is large compared with the intensity of LW over the plane boundary.

---

### Аннотации депонированных статей

УДК 537.874.6

#### ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОЛЕМ, РАССЕИВАЕМЫМ ИМПЕДАНСНЫМ ЦИЛИНДРОМ

*А. С. Кондратьев*

Рассматривается двумерная задача управления спектральным составом (амплитудами пространственных гармоник) отраженного от кругового импедансного цилиндра поля, возбуждаемого произвольной системой сторонних источников. Импеданс на поверхности цилиндра считается однородным. Исследуются условия резонанса и обнуления амплитуды заданной гармоник отраженного от цилиндра поля. Показано, что в классе чисто реактивных импедансов амплитуда любой гармоник отраженного поля не превышает амплитуды соответствующей гармоник падающего поля. Задача обнуления какой-либо гармоник отраженного поля в классе чисто реактивных импедансов решается точно. Для случая  $TE$ -волн получены приближенные выражения для значений импеданса в рассмотренных задачах при различных соотношениях радиуса цилиндра и номера гармоник. Показано, что задача формирования заданного спектрального состава отраженного поля для однородного импеданса в общем случае решается только приближенно и сводится к переопределенной системе линейных уравнений. Приведены сравнительные результаты решения задачи формирования в отраженном поле двух низших гармоник заданной амплитуды для случая однородного и неоднородного реактивного импеданса. Отмечено, что степень приближения к заданным значениям гармоник при однородном импедансе и неоднородном с фиксацией всего заданного спектра отраженного поля оказывается примерно одинаковой. Существенного повышения точности решения задачи можно добиться при фиксации лишь части спектра отраженного поля.

*Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 4078-В89. Деп. от 20 июня 1989 г.*