верхностей, соединяющих особые точки гиперболического типа, с фазовой поверхностью, задаваемой приближенным решением квазигамильтоновой системы. Последнее в нашем случае удобно искать методом гармонического баланса.

На рис. 1 пунктирными линиями показаны «приближенные» границы областей возникновения хаоса, полученные из условия пересечения указанных поверхностей (соответствующие формулы из-за громоздкости не приводятся).

Несомненно, что количественное сопоставление результатов данной работы с экспериментом затруднительно, так как рассмотренное модельное приближение чисто качественно описывает ВКР и не учитывает эффектов распространения. Тем не менее полученные результаты дают основание связывать появление в некоторых экспериментах по ВКР значительной шумовой составляющей не с шумами накачки или приборов, а с характером отклика среды на внешнее воздействие.

Авторы благодарны С. А. Ахманову за полезное обсуждение

## ЛИТЕРАТУРА

1. Платоненко В. Т., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ 1964. Т 46. Вып. 6. С. 2126
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М: ВИНИТИ, 1965.
3. Клышко Д. Н. Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
4. Djotyan J. P., Meanasjan L. L. // Opt. Comm. 1984. V. 49. № 2. P 117.
5. Holmes P. J., Marsden J. E. // J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 4. P. 669.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 8 декабря 1987 г.

УДК 621.37: 621.391: 519.216 2· 681.511.4

# ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИТО В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

*А. С. Попов*

Вероятностный анализ нелинейных преобразований случайных процессов (СП) в радиотехнических устройствах является одной из главных задач статистической радиотехники. Известный подход к анализу заключается либо в прямом преобразовании одномерной или многомерной плотности распределения вероятности случайной величины, либо в применении аппарата характеристических функций с целью получения этой плотности распределения [1–4].

В некоторых случаях, таких, например, как статистический синтез оптимальных алгоритмов обработки сигналов и анализ их функционирования, более удобным является задание случайных процессов в виде стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [5, 6]. Поэтому целесообразно рассмотреть нелинейные преобразования СП, заданных в такой форме

Оказывается, что СДУ преобразованного СП может быть найдено с помощью формулы преобразования Ито, определяющего стохастический дифференциал искомой случайной функции Далее по этому СДУ в соответствии с теоремой Дуба [5, 7] можно вычислить локальные характеристики СП, построить по ним уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) и вычислить требуемые вероятностные характеристики полным или частичным его решением.

В более подробном изложении предлагаемый подход реализуется следующим образом.

1. Случайный процесс $\lambda(t)$ со стационарной одномерной плотностью вероятности $P_\lambda[\lambda(t)]$ задается СДУ в форме Ито, т е. [5, 7]

$$d\lambda(t) = f_\lambda(\lambda, t)dt + g_\lambda(\lambda, t)dv(t)\,, \tag{1}$$

где $f_\lambda(\lambda, t) = f_\lambda[\lambda(t), t]$, $g_\lambda(\lambda, t) = g_\lambda[\lambda(t), t]$, $v(t)$ — винеровский процесс с дисперсией $\sigma_v^2(t) = N_0 t/2$.

2. Нелинейное преобразование определяется как $F(\lambda, t) = F[\lambda(t), t]$, тогда процесс после преобразования равен $\xi(t) = F[\lambda(t), t]$.

3. В предположении существования производных $F'_t(\lambda, t) = \partial F(\lambda, t)/\partial t$, $F'_\lambda(\lambda, t) = \partial F(\lambda, t)/\partial\lambda$, $F''_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = \partial^2 F(\lambda, t)/\partial\lambda^2$ уравнение Ито, определяющее стохастический дифференциал $d\xi(t)$, принимает вид [7]

$$dF(\lambda, t) = [F'_t(\lambda, t) + F'_\lambda(\lambda, t) f_\lambda(\lambda, t) + (N_0/4)F''_{\lambda\lambda}(\lambda, t)\times$$

$$\times g_\lambda^{2}(\lambda,t)]dt + F'_\lambda(\lambda,t)g_\lambda(\lambda,t)dv(t)\,. \tag{2}$$

4. Учитывая равенство $\lambda = F^{-1}(\xi,t)$, первое слагаемое в (2) может быть обозначено — $f_\xi(\xi,t)dt$, а второе — $g_\xi(\xi,t)dv(t)$. Тогда СДУ для процесса $\xi(t)$ может быть представлено выражением

$$d\xi(t) = f_\xi(\xi,t)dt + g_\xi(\xi,t)dv(t)\,. \tag{3}$$

5. В соответствии с теоремой Дуба [5, 7] локальные характеристики процесса $\xi(t)$ в данном случае равны [7]

$$a(\xi,t) = f_\xi(\xi,t), \qquad b(\xi,t) = (N_0/2)g_\xi^2(\xi,t)\,. \tag{4}$$

6. Уравнение ФПК имеет форму [7, 8]

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\xi,t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}[a(\xi,t)P(\xi,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[b(\xi,t)P(\xi,t)]\,, \tag{5}$$

где $P(\xi,t)$ — плотность вероятности значений процесса $\xi(t)$ в момент времени $t$ Решение уравнения (5) позволяет получить все возможные характеристики процесса $\xi(t)$.

В случае, когда локальные характеристики процесса не зависят от времени, т. е $a(\xi,t) = a(\xi)$, $b(\xi,t) = b(\xi)$, его стационарная плотность $P_{st}(\xi)$ при нулевых граничных условиях определяется выражением [7, 8]

$$P_{st}(\xi) = (C/b(\xi))\exp\left(2\int_{\xi'}^{\xi}(a(x)/b(x))dx\right), \tag{6}$$

где постоянная $C$ находится из условия нормировки $\int P_{st}(\xi)d\xi = 1$.

Рассмотрим пример применения изложенной методики

*Пример.* Квадратичное преобразование процесса, имеющего рэлеевскую стационарную плотность вероятности.

Случайный процесс $\lambda(t)$ задается СДУ вида [2, 5, 7]

$$d\lambda(t) = (-\alpha\lambda(t) + (N_0/4\lambda(t)))dt + dv(t), \quad \lambda > 0,$$

где $f_\lambda(\lambda) = -\alpha\lambda + N_0/4\lambda$, $g_\lambda(\lambda) = 1$ Процесс имеет рэлеевскую стационарную плотность вероятности, т. е. $P_{st}(\lambda) = (\lambda/\sigma^2)\exp(-\lambda^2/2\sigma^2)$. Нелинейное преобразование обозначим как $F(\lambda,t) = \lambda^2$ Тогда производные функции $F(\lambda,t)$ по $t$ и $\lambda$ равны $\partial F/\partial t = 0$, $\partial F/\partial\lambda = 2\lambda$, $\partial^2 F/\partial\lambda^2 = 2$ Подставляя эти производные, функции $f_\lambda(\lambda)$ и $g_\lambda(\lambda)$ в (2), приводя подобные члены и заменив $\lambda^2$ и $\lambda$ соответственно на $\xi$ и $\sqrt{\xi}$, получаем $d\xi = f_\xi(\xi)dt + g_\xi(\xi)dv(t)$, где $f_\xi(\xi) = -2\alpha\xi + N_0$, $g_\xi(\xi) = 2\sqrt{\xi}$. Тогда $a(\xi) = f_\xi(\xi)$, $b(\xi) = 2N_0\xi$.

Подставив $a(\xi)$ и $b(\xi)$ в (6), в итоге получим экспоненциальную стационарную плотность вероятности процесса $\xi(t)$, т. е.

$$P_{st}(\xi) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{\xi}{2\sigma^2}\right), \qquad \xi \geqslant 0\,, \tag{7}$$

где $\sigma^2 = N_0/4\alpha$.

Как легко установить, квадратичное преобразование рэлеевской случайной величины также приводит к экспоненциальной плотности вероятности.

По этой же методике были рассмотрены квадратичное, кубичное и экспоненциальное преобразования гауссова процесса $\lambda(t)$ с СДУ вида $d\lambda(t) = -\alpha\lambda(t)dt + \gamma dv(t)$.

Вид одномерных стационарных плотностей вероятностей новых случайных процессов полностью совпадает с видом плотностей вероятностей, полученных прямым преобразованием, что позволяет сделать вывод о непротиворечивости обсуждаемой методики.

## ЛИТЕРАТУРА


1 Левин Б Р Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1969. Т. 1 — 752 с.
2. Тихонов В. И Статистическая радиотехника. — М. Сов радио, 1966. — 680 с.
3. Тихонов В. И Нелинейные преобразования случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986. — 296 с.
4. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1962. Т. 2. — 832 с.
5 Тихонов В И, Кульман Н. К Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов — М: Сов. радио, 1975 — 704 с
6 Кловский Д Д., Конторович В Я, Широков С М. Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений. — М.: Радио и связь, 1984. — 248 с.

7 Тихонов В И, Миронов М А Марковские процессы — М· Сов радио, 1977. — 486 с
8 Стратонович Р Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике — М, Сов. радио, 1961 — 560 с.

Поступила в редакцию
12 января 1988 г.

---

УДК 530 1+625 375

# ФЛУКТУАЦИИ ФОТООТСЧЕТОВ СУПЕРПОЗИЦИИ ГАУССОВЫХ МОД ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*Ю. П. Вирченко, А С. Мазманишвили*

1. Информацию о статистике оптических полей получают главным образом с помощью фотодетекторов Известно соотношение [1, 2], связывающее статистику оптических фотонов со статистикой фотоотсчетов — электронов, эмиттируемых катодом детектора:

$$P(m) = \left\langle \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega} \right\rangle, \qquad \Omega = \int_0^T dt |\xi(t)|^2 . \tag{1}$$

Здесь $P(m)$ — вероятность зарегистрировать $m$ фотоотсчетов в течение временного интервала $T$, $\xi(t)$ — комплексная амплитуда поля излучения, Вероятность $P(m)$ описывается, таким образом, составным распределением Пуассона, усреднение в (1) необходимо осуществить по всем возможным реализациям $\xi(t)$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$

В настоящей работе мы рассмотрим оптическое поле, являющееся суперпозицией гауссовых мод излучения, $\xi(t) = \sum\limits_n \xi_n(t)$. В общем случае временную динамику поля зададим с помощью многокомпонентного уравнения Ланжевена [3]

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + f(t) . \tag{2}$$

Здесь $A$ — гурвицева матрица размером $N \times N$; $N$ — число оптических мод в суперпозиции; $f(t)$ — $N$-компонентный белый шум, $\langle f_n(t) f^*_m(t') \rangle = D_{nm}\,\delta\,(t-t')$, $D$ — ковариационная матрица.

Приведенное в [1] решение задачи о распределении отсчетов гауссова поля относится к случаю $N=1$ Полученный в [4] аналог решения при $N \geqslant 2$ относится к статистически независимым модам без учета интерференционных явлений при эмиссии и детектировании. Между тем поле излучения заданного тока находится в когерентном состоянии; если же траектория тока испытывает стохастические возмущения, флуктуации отдельных мод будут связаны [5]. В настоящей работе будет рассмотрено оптическое гауссово поле при произвольной степени скоррелированности между модами излучения.

2. Из (1) и (2) вытекает для среднего числа отсчетов

$$\langle m \rangle = \langle \Omega \rangle = T\mathrm{Sp}(LV) , \tag{3}$$

где $V_{nm}=1$; матрица $L$ — решение стационарного уравнения Ляпунова $AL+LA^+=-D$ Более высокие моменты и распределение $P(m)$ можно найти, вычислив производящую функцию отсчетов:

$$Q_\xi(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^T dt(\xi(t), V\xi(t))\right\}\right\rangle . \tag{4}$$

Пусть $K(t,t')$ — корреляционная матрица процесса $\xi(t)$, тогда $\xi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n(t)$; при этом каждый из коэффициентов $x_n$ является независимой нормально распределенной случайной величиной с плотностью распределения вероятностей $\rho_n(x_n) = (\lambda_n/2\pi)\exp(-(1/2)\lambda_n |x_n|^2)$; набор функций $\{\varphi_n(t)\}$ с отвечающей каждой из них собственным значением $\lambda_n$ суть последовательность собственных функций оператора $K(t, t')$ Усредняя $\exp(-\lambda\Omega)$ по всем $x_n$ с весами $\rho_n(x_n)$, получим

$$Q_\xi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+\lambda/2\lambda_n)^{-1} . \tag{5}$$