

**ГЕНЕРАЦИЯ СУБГАРМОНИК И ХАОС  
В КЛАССИЧЕСКОЙ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ МОДЕЛИ ВЫНУЖДЕННОГО  
КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ**

A. A. Голубков, B. A. Макаров, A. B. Матвеева

Процесс вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) заключается в том, что за счет оптического возбуждения внутримолекулярных колебаний вещество излучает на частотах  $\omega_n \pm \omega_a$ , где  $\omega_n$  — частота накачки,  $\omega_a$  — частота молекулярных колебаний. Для качественного объяснения физики ВКР используется простая модель, описывающая взаимодействие слабой сигнальной волны и волны накачки со средой с помощью системы двух связанных нелинейных уравнений осцилляторного типа [1-3]

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + x - xy &= A_n \cos \omega_n t + A_c \cos \omega_c t, \\ \ddot{y} + \alpha_2 \dot{y} + \omega_a^2 y &= x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  — обобщенные координаты, характеризующие электронные и ядерные колебания, все частоты нормированы на собственную частоту электронных колебаний,  $\alpha_{1,2}$  определяются шириной электронного и ядерного резонансов,  $A_n$ ,  $A_c$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_a$  — безразмерные амплитуды и частоты накачки и слабого сигнала.

Система (1) не имеет точного аналитического решения. Приближенные методы дают хорошие результаты только при малых нелинейностях или, что эквивалентно этому, при малых амплитудах внешнего воздействия [1-3]. В данной работе методом численного интегрирования впервые исследован характер решения (1) в случае сильно-нелинейного локального отклика среды. Показано, что при определенных соотношениях между параметрами излучения и среды возможно появление в спектрах ядерных и электронных колебаний ( $S_n$  и  $S_a$ ), соответственно, субгармоник вида  $\omega_{k,n} = \omega_a/(k \cdot 2^n)$  ( $k = 1, 3, 5; n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $\omega_n \pm \omega_{k,n}$ , а также хаотического отклика на регулярное воздействие. Численными методами найдены границы областей сложных динамических режимов (деление частоты, хаос) и предложен приближенный метод нахождения порога их возникновения.

Характерная форма областей параметров, в которых имеют место режимы умножений периода колебаний и хаотическое изменение  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $\omega_n \ll 1$  и  $\omega_c = \omega_n - \omega_a$ , показана на рис. 1 штриховкой ( $\omega_a = 0,1$ ,  $\omega_n = 0,5$ ). На рис. 1а эта область изображена в пространстве  $A_n$ ,  $\alpha_1$  ( $\alpha_2 = 0,5$ ,  $A_c = 6 \cdot 10^{-3}$ ). При уменьшении значения  $\alpha_1$  уменьшаются ее ширина и значения  $A_n$ , начиная с которых возникает сложное динамическое поведение решения. При  $\alpha_1 < \alpha_{1,kp}$  для любых  $A_n$   $x(t)$  и  $y(t)$  меняются только периодически.

Аналогичная картина имеет место и в пространстве параметров  $A_n$ ,  $\alpha_2$  (рис. 1б,  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $A_c = 6 \cdot 10^{-3}$ ). Области сложного динамического поведения решений при  $\alpha_{1,2} = 0,5$  показаны на рис. 1в. При уменьшении  $A_c$  ширина интервала  $A_n$  увеличивается.

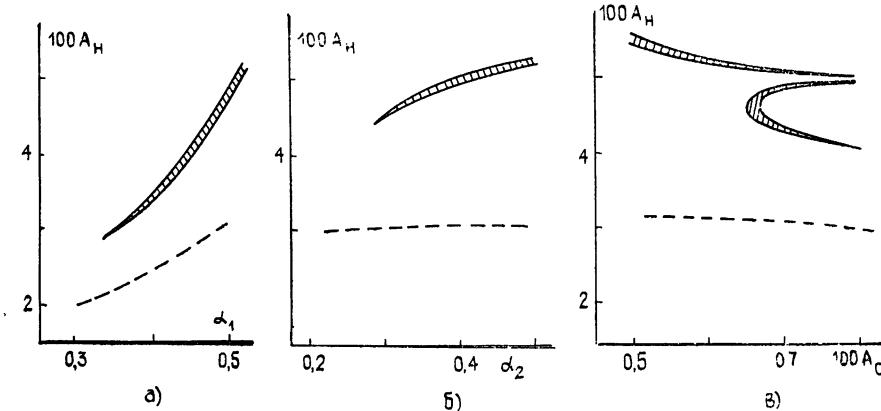


Рис. 1

Размеры областей, их расположение, значения критических параметров весьма чувствительны к изменению  $\omega_a/\omega_n$ . Так, например, при  $\omega_n = 0,6$ ,  $\omega_a = 0,3$   $\alpha_{1,kp}$  уменьшается почти на порядок, а интервал значений  $A_n$  (при фиксированном  $\alpha_2$ ) возрастает более чем в десять раз по сравнению со случаем, изображенным на рис. 1б.

Рассмотрим подробно динамику перехода к хаосу и его дискретную структуру при увеличении  $A_n$  ( $\alpha_1 = 0,3535$ ,  $\alpha_2 = 0,5$ ,  $\omega_a = 0,1$ ,  $\omega_n = 0,5$ ,  $A_c = 6 \cdot 10^{-3}$ ). На рис. 2 (а — в соответствуют  $A_n = 3,013 \cdot 10^{-2}$ ;  $3,018 \cdot 10^{-2}$ ;  $3,019 \cdot 10^{-2}$ ) изображены спектры  $y(t)$ ,  $x(t)$  ( $S_n$  и  $S_a$ ). При малых  $A_n$  спектр решения соответствует привычному спектру ВКР, в котором присутствуют пики на основной частоте  $\omega_n$ , стоксовой и анти-

стоковой, их комбинационные частоты и высшие гармоники. В этом случае амплитуды комбинационных частот и высших гармоник малы. Однако, при увеличении  $A_n$  (вблизи заштрихованной области), они растут (рис. 2а).

При возрастании  $A_n$  внутри заштрихованной области в  $S_{\text{я}}(\omega)$  сначала появляются субгармоники на  $\omega_n/2$  и  $3\omega_n/2$ , а в  $S_3(\omega)$  — составляющие на частотах  $\omega_n \pm \omega_n/2$ ,  $\omega_n \pm 3\omega_n/2$ ,  $\omega_n \pm 5\omega_n/2$ , ... Дальнейший рост  $A_n$  сопровождается появлением в  $S_{\text{я}}(\omega)$  субгармоник  $\omega_n/4$ ,  $\omega_n/8$ , ...,  $\omega_{1,n}$ , после чего решение становится хаотическим. Характерный спектр для случая хаотического изменения  $x(t)$ ,  $y(t)$  представлен на рис. 2б. При дальнейшем увеличении  $A_n$  внутри области хаоса обнаружены узкие интервалы устойчивого периодического решения (1), при котором в  $S_n$  и  $S_3$  присутствуют, соответственно, субгармоники вида  $\omega_n$  и  $\omega_n \pm \omega_n$ . Так, на рис. 2в приведен режим колебаний  $y(t)$  с субгармониками  $\omega_n/3$ ,  $2\omega_n/3$ . При этом в электронном спектре появляются составляющие на частотах  $\omega_n \pm \omega_n/3$ ,  $\omega_n \pm 2\omega_n/3$ ,  $\omega_n \pm 5\omega_n/3$ .

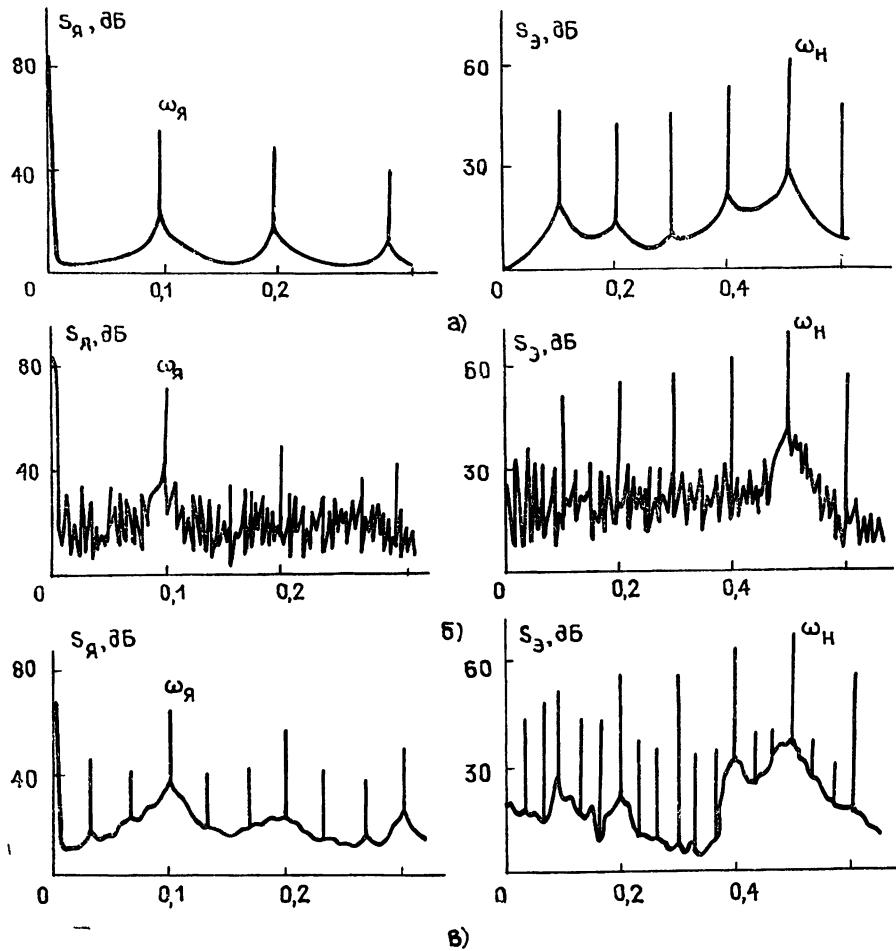


Рис. 2.

Продолжая увеличивать  $A_n$ , мы наблюдали критическое возрастание  $x(t)$  и  $y(t)$  (притягивающей точкой становилась бесконечность), соответствующее выходу из заштрихованной области. Корректное описание физики явления в этом случае требует учета нелинейных членов более высокого порядка в разложении потенциала электронно-ядерного взаимодействия [4].

Полное численное исследование (1) наталкивается на ряд трудностей. Они вызваны тем, что для правильного анализа изучаемых процессов требуется расчет очень длительных реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$  с большой точностью, а также наличием в (1) шести независимых параметров. Все это приводит к необходимости проведения предварительных аналитических оценок положения границ областей хаотического поведения решения системы в шестимерном пространстве параметров, ускоряющих процедуру численного исследования. Однако единственный существующий для многомерных диссипативных колебательных систем с внешней силой строго обоснованный способ их получения [5] не применим к (1). В то же время можно предположить, что в нелинейных квазигамильтоновых системах уравнений (соответствующие гамильтоновы системы которых имеют сепаратрису) хаотические решения появляются при значениях  $A_n$ ,  $A_c$ ,  $\omega_c$ ,  $\alpha_{1,2}$ , близких к тем, при которых происходит пересечение сепаратрисных по-

верхностей, соединяющих особые точки гиперболического типа, с фазовой поверхностью, задаваемой приближенным решением квазигамильтоновой системы. Последнее в нашем случае удобно искать методом гармонического баланса.

На рис. 1 пунктирыми линиями показаны «приближенные» границы областей возникновения хаоса, полученные из условия пересечения указанных поверхностей (соответствующие формулы из-за громоздкости не приводятся).

Несомненно, что количественное сопоставление результатов данной работы с экспериментом затруднительно, так как рассмотренное модельное приближение чисто качественно описывает ВКР и не учитывает эффектов распространения. Тем не менее полученные результаты дают основание связывать появление в некоторых экспериментах по ВКР значительной шумовой составляющей не с шумами накачки или приборов, а с характером отклика среды на внешнее воздействие.

Авторы благодарны С. А. Ахманову за полезное обсуждение

## ЛИТЕРАТУРА

1. Платоненко В. Т., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ 1964. Т. 46. Вып. 6. С. 2126
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: ВИНИТИ, 1965.
3. Клышко Д. Н. Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
4. Djotyan J. P., Meanajyan L. L. // Opt. Comm. 1984. V. 49. № 2. P. 117.
5. Holmes P. J., Marsden J. E. // J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 4. P. 669.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
8 декабря 1987 г.

УДК 621.37: 621.391: 519.216 2· 681.511.4

## ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИТО В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

A. C. Попов

Вероятностный анализ нелинейных преобразований случайных процессов (СП) в радиотехнических устройствах является одной из главных задач статистической радиотехники. Известный подход к анализу заключается либо в прямом преобразовании одномерной или многомерной плотности распределения вероятности случайной величины, либо в применении аппарата характеристических функций с целью получения этой плотности распределения [1-4].

В некоторых случаях, таких, например, как статистический синтез оптимальных алгоритмов обработки сигналов и анализ их функционирования, более удобным является задание случайных процессов в виде стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [5, 6]. Поэтому целесообразно рассмотреть нелинейные преобразования СП, заданных в такой форме

Оказывается, что СДУ преобразованного СП может быть найдено с помощью формулы преобразования Ито, определяющего стохастический дифференциал искомой случайной функции. Далее по этому СДУ в соответствии с теоремой Дуба [5, 7] можно вычислить локальные характеристики СП, построить по ним уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) и вычислить требуемые вероятностные характеристики полным или частичным его решением.

В более подробном изложении предлагаемый подход реализуется следующим образом.

1. Случайный процесс  $\lambda(t)$  со стационарной одномерной плотностью вероятности  $P_\lambda[\lambda(t)]$  задается СДУ в форме Ито, т. е. [5, 7]

$$d\lambda(t) = f_\lambda(\lambda, t)dt + g_\lambda(\lambda, t)dv(t), \quad (1)$$

где  $f_\lambda(\lambda, t) = f_\lambda[\lambda(t), t]$ ,  $g_\lambda(\lambda, t) = g_\lambda[\lambda(t), t]$ ,  $v(t)$  — винеровский процесс с дисперсией  $\sigma_v^2(t) = N_0t/2$ .

2. Нелинейное преобразование определяется как  $F(\lambda, t) = F[\lambda(t), t]$ , тогда процесс после преобразования равен  $\xi(t) = F[\lambda(t), t]$ .

3. В предположении существования производных  $F'_\lambda(\lambda, t) = \partial F(\lambda, t)/\partial t$ ,  $F'_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = \partial^2 F(\lambda, t)/\partial \lambda^2$ ,  $F''_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = \partial^2 F(\lambda, t)/\partial \lambda^2$  уравнение Ито, определяющее стохастический дифференциал  $d\xi(t)$ , принимает вид [7]

$$dF(\lambda, t) = [F'_\lambda(\lambda, t) + F'_{\lambda\lambda}(\lambda, t)f_\lambda(\lambda, t) + (N_0/4)F''_{\lambda\lambda}(\lambda, t)] \times$$