

УДК 537.533

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ПРИ ТРОЙНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

В. М. Вяткин, В. В. Новиков

Исследуется трансформация волн в неоднородной магнитоактивной плазме в областях, где совпадают три корня квартики Букера. Показано, что падающая на область взаимодействия необыкновенная волна расщепляется на идущие в том же направлении обыкновенную и необыкновенную волны и отраженную обыкновенную волну. Дошедшая до точки тройного вырождения обыкновенная волна целиком переходит в необыкновенную.

Проблеме линейного взаимодействия — одной из важнейших в теории плазмы — посвящено большое число оригинальных работ и ряд обзоров (см., например, [1, 2] и указанную там литературу).

В последнее время интенсивно велись исследования линейной трансформации волн в области критической плотности ($v = \omega_0^2 / \omega^2 \simeq 1$, ω_0 — плазменная частота электронов, ω — частота поля) неоднородной магнитоактивной плазмы. Как известно [3], эффективное преобразование мод возможно при падении из вакуума под углом, близким к критическому θ_k (см. ниже п. 5, формула (34)), и распространении в плоскости векторов ∇n и H_0 (n — концентрация электронов, H_0 — постоянное внешнее магнитное поле). При малом отклонении угла падения от θ_k трансформация носит характер туннельного эффекта. В статье [4] коэффициент прозрачности оценивался в геометрооптическом приближении. В работах [5, 6] система, описывающая поле в области взаимодействия $v \simeq 1$ при малой ширине поглощающего слоя, сводилась к уравнению Вебера, которое интегрируется точно. Наконец, в [7] определены коэффициенты трансформации волн при наклонном падении и малых углах χ между градиентом неоднородности ∇n и H_0 .

Как в [4–7], так и большинстве других подобных задач исследовался случай двукратного вырождения корней квартики Букера. В настоящей работе мы рассмотрим этот вопрос при тройном вырождении, которое имеет место при распространении в плоскости векторов ∇n и H_0 . В частности, при падении волны из вакуума на плазменный слой вдоль направления H_0 в области $v = 1$ совпадут три корня квартики Букера [8].

1. Будем предполагать, что градиент неоднородности направлен вдоль оси z декартовой системы координат, а постоянное магнитное поле лежит в плоскости xz . Коэффициенты трансформации волн, представляющие наибольший интерес в этой задаче, можно найти из решения получаемой из уравнений Максвелла при зависимости от времени $\exp(-i\omega t)$ системы для вектор-столбца $e = \text{col}(E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y)$ [8, 9]:

$$\frac{de}{d\xi} = i\hat{T}e, \quad (1)$$

элементами которого являются тангенциальные компоненты напряженностей электрического (E_x, E_y) и магнитного (H_x, H_y) полей; $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ — характеристический импеданс вакуума, $\xi = kz$, $k = \omega(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$ — волновое число вакуума. Решение уравнения (1) пред-

ставляется в виде разложения по собственным векторам \mathbf{u}_p матрицы \hat{T} :

$$e(\xi) = \sum_{p=1}^4 f_p(\xi) \frac{\mathbf{u}_p(\xi)}{\sqrt{N_p}}, \quad (2)$$

где N_p — нормировочные множители, \mathbf{u}_p определяются из уравнения $\hat{T}\mathbf{u} = q\mathbf{u}$, а собственные значения q — из уравнения, совпадающего с кватрикой Букера. Из разложения (2) и уравнения (1) получается система уравнений для функций $f_p(\xi)$:

$$\frac{df_p}{d\xi} - iq_p f_p = \sum_{r=1}^4 \Gamma_{pr} f_r, \quad p = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

Выражения для \mathbf{u}_p , N_p , Γ_{pr} через элементы матрицы \hat{T} приведены в [9].

Вдали от точек связи решения (3) описывают независимо распространяющиеся в плазме характеристические волны: $f_p(\xi) = a_p \exp(i \int_{\xi_0}^{\xi} q_p d\xi)$. В окрестности точек вырождения функции f_p и коэффициенты системы (3) имеют особенности. Поведение собственных чисел q_p в окрестности тройной точки вырождения $\xi = \xi_0$ ($v(\xi_0) = 1$), в которой $q_1 = q_2 = q_3 = q_0 = C$, $q_4 = -C$ [8], $C = \cos \theta$, θ — угол, под которым волна вводится в плазму, определяется разложением

$$q_j - q_0 = \alpha_j A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{1/3} + \alpha_j^2 A^{2/3} B_1 (\xi - \xi_0)^{2/3} + \alpha_j^3 A (B_2 - B_1^2) (\xi - \xi_0) + \dots, \quad (4)$$

где $A = -\frac{1}{2S^2 C u} \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0}$, $S = \sin \theta$, $u = \omega_H^2 / \omega^2$, ω_H — гирочастота электронов, $B_1 = \frac{1}{3} \left(4C - \frac{1}{2C} \right)$, $B_2 = \frac{2}{3} \left[2C^2 (1-u) + 1 \right]$, $j = 1, 2, 3$, $\alpha_j = 1, \exp(i2\pi/3), \exp(i4\pi/3)$.

Выражение (4) приведено для бесстолкновительной плазмы. При учете соударений тройное вырождение имеет место на уровне $v = 1 + is$ ($s = v/\omega$, v — эффективное число соударений электронов с ионами и нейтральными частицами), и точка вырождения $\xi = \xi_0$ смещается в комплексную плоскость ξ .

2. Следуя методике, предложенной в [9], нетрудно построить преобразование, приводящее систему уравнений для $f_p(\xi)$ к системе с регулярными в окрестности точки связи коэффициентами. Указанное преобразование имеет вид

$$\mathbf{f} = \hat{U} \boldsymbol{\varphi}, \quad (5)$$

где

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & b^{1/3} & b^{-1/3} & 0 \\ \eta_2 & \eta_2 \alpha_2 b^{1/3} & \eta_2 \alpha_2^{-1} b^{-1/3} & 0 \\ \eta_3 & \eta_3 \alpha_3 b^{1/3} & \eta_3 \alpha_3^{-1} b^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$b^{1/3} = (1/3)(\alpha_1^{-1} q_1 + \alpha_2^{-1} q_2 + \alpha_3^{-1} q_3)$, $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор-столбец из четырех новых функций. Кроме того, при написании \hat{U} учтено, что поскольку при $\xi \rightarrow \xi_0$

$\alpha_1^{-2} N_1 \simeq \alpha_2^{-2} N_2 \simeq \alpha_3^{-2} N_3$, то $\sqrt{N_2} \simeq \eta_2 (\alpha_2/\alpha_1) \sqrt{N_1}$, $\sqrt{N_3} \simeq \eta_3 (\alpha_3/\alpha_1) \sqrt{N_1}$, и числа η_2 и η_3 равны $+1$ или -1 в зависимости от соотношения между $\sqrt{N_1}$ и $\sqrt{N_{2,3}}$ в окрестности точки вырождения.

Тогда система (3) приводится к виду

$$\varepsilon \frac{d\varphi}{d\zeta} = i \begin{pmatrix} q_+ & \mu b & 1 & 0 \\ 1 & q_+ & \mu & 0 \\ \mu b & b & q_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix} \varphi + \varepsilon \hat{\Gamma}_1 \varphi. \quad (7)$$

Здесь $q_+ = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 q_j$, $\mu b^{2/3} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \alpha_j q_j$, $\zeta = \varepsilon \xi$, $\varepsilon = (kL)^{-1} \ll 1$. L —

масштаб неоднородности среды, $\hat{\Gamma}_1$ — неособенная матрица. Поведение b и μ в окрестности $\zeta = \zeta_0$ легко определяется из указанных обозначений и разложения (4). В частности, $b \simeq A(\zeta - \zeta_0)$.

К системе (7) применим метод расщепления [10], позволяющий перейти к двум несвязанным системам уравнений, одна из которых описывает взаимодействие мод в окрестности исследуемой точки вырождения. Именно, существует такая неособенная матрица $\hat{V}(\zeta, \varepsilon)$, допускающая разложение $\hat{V}(\zeta, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \hat{V}_m(\zeta)$ (причем $\hat{V}_0 = \hat{I}$, \hat{I} — единичная матрица), что заменой

$$\varphi = \hat{V}(\zeta, \varepsilon) \Phi \quad (8)$$

система (7) сводится к двум несвязанным уравнениям с регулярными коэффициентами:

$$\varepsilon \frac{d}{d\zeta} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \\ \tilde{\Phi}_3 \end{pmatrix} = \left[i \begin{pmatrix} q_+ & \mu b & 1 \\ 1 & q_+ & \mu \\ \mu b & b & q_+ \end{pmatrix} + \varepsilon \hat{H}_1(\zeta) + \varepsilon^2 \hat{H}_2(\zeta) + \dots \right] \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \\ \tilde{\Phi}_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

и

$$\varepsilon \frac{d\Phi_4}{d\zeta} = [iq_4 + \varepsilon^2 h_2(\zeta) + \varepsilon^3 h_3(\zeta) + \dots] \Phi_4.$$

Полагая в (9)

$$\tilde{\Phi}_j = \Phi_j \exp(i\varepsilon^{-1} \int q_+ d\zeta), \quad j=1, 2, 3, \quad (10)$$

запишем систему укороченных уравнений для функций Φ_j в виде

$$\varepsilon \frac{d\Phi_1}{d\zeta} = i\mu b \Phi_2 + i\Phi_3, \quad \varepsilon \frac{d\Phi_2}{d\zeta} = i\Phi_1 + i\mu \Phi_3, \quad \varepsilon \frac{d\Phi_3}{d\zeta} = i\mu b \Phi_1 + ib \Phi_2. \quad (11)$$

Система (11) сводится к одному уравнению третьего порядка для функции Φ_2 , которое, в свою очередь, заменой

$$\Phi_2 = (1 - \mu^3 b)^{1/3} i \varepsilon^{-3/4} (dy/d\zeta)^{-1} W[y(\zeta)],$$

где $y = \left\{ \frac{4}{3} i \varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} [b(1 + \mu^3 b)]^{1/3} d\zeta \right\}^{3/4}$, в главном приближении по ε приводится к модельному уравнению

$$\frac{d^3 W}{dy^3} - yW = 0, \quad (12)$$

определяющему поведению системы (11) в окрестности точки вырождения $\xi = \xi_0$. Уравнение (12) подробно исследовано в [11], где приведены асимптотические и степенные разложения его решений.

3. Для определения коэффициентов трансформации волн необходимо найти асимптотические представления решений (11) слева ($\xi < \xi_0$) и справа ($\xi > \xi_0$) от точки вырождения. Проведем на плоскости ξ из точки $\xi = \xi_0$ разрез вдоль вещественной оси на $+\infty$. Будем осуществлять переход через точку вырождения так, чтобы нумерация мод при этом не менялась (не пересекался бы разрез). Если учесть, что при введении потерь точка вырождения смещается в верхнюю полуплоскость ξ , то следует выбрать

$$\arg(\xi - \xi_0) = \begin{cases} -\pi & \text{при } \xi < \xi_0, \\ 0 & \text{при } \xi > \xi_0. \end{cases} \quad (13)$$

В окрестности $\xi = \xi_0$ $y \simeq \left(\frac{4}{3} i \varepsilon^{-1} \int b^{1/3} d\xi\right)^{3/4} = \varepsilon^{-3/4} (i)^{3/4} A^{1/4} (\xi - \xi_0)$ и, следовательно, $\arg y = -3\pi/8 + \delta$ ($\delta > 0$) при $\xi < \xi_0$ и $\arg y = 5\pi/8 - \delta$ при $\xi > \xi_0$. При $\arg y = -3\pi/8 + \delta$ в качестве решений (12) следует взять те, которые имеют асимптотики в виде одной экспоненты, т. е. согласно [11]

$$W = E_1(W_1 + W_2 + W_3) + E_2W_2 + E_3W_3. \quad (14)$$

Асимптотика решения (14) при переходе к трехкомпонентному вектору $\Phi = \text{col}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ предстанет в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/4} & \varepsilon^{1/4} & \varepsilon^{1/4} \\ \varepsilon^{1/4} \alpha_1^{-1} b^{-1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_2^{-1} b^{-1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_3^{-1} b^{-1/3} \\ \varepsilon^{1/4} \alpha_1 b^{1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_2 b^{1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_3 b^{1/3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \exp[i(3/4) \varepsilon^{-1} \alpha_1 A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{4/3}] \\ E_2 \exp[i(3/4) \varepsilon^{-1} \alpha_2 A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{4/3}] \\ E_3 \exp[i(3/4) \varepsilon^{-1} \alpha_3 A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{4/3}] \end{pmatrix} \quad (15)$$

для $\xi - \xi_0 < 0$ и $|\xi - \xi_0| < \text{const}_1 \varepsilon^x$.

Асимптотическое представление (15) может быть продолжено через точку вырождения, для чего в (14) надо подставить асимптотики W_j , справедливые при $\arg y = 5\pi/8 - \delta$. Так что при $\xi > \xi_0$ будем иметь

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/4} & \varepsilon^{1/4} & \varepsilon^{1/4} \\ \varepsilon^{1/4} \alpha_1^{-1} b^{-1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_2^{-1} b^{-1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_3^{-1} b^{-1/3} \\ \varepsilon^{1/4} \alpha_1 b^{1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_2 b^{1/3} & \varepsilon^{1/4} \alpha_3 b^{1/3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \exp[i(3/4) \varepsilon^{-1} \alpha_1 A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{4/3}] \\ (E_2 + E_3) \exp[i(3/4) \varepsilon^{-1} \alpha_2 A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{4/3}] \\ (E_1 + E_2) \exp[i(3/4) \varepsilon^{-1} \alpha_3 A^{1/3} (\xi - \xi_0)^{4/3}] \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Кроме того, для системы (11) можно построить в приближении ВКБ решение в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^{-1} b^{-1/3} & \alpha_2^{-1} b^{-1/3} & \alpha_3^{-1} b^{-1/3} \\ \alpha_1 b^{1/3} & \alpha_2 b^{1/3} & \alpha_3 b^{1/3} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} D_1 \exp \left[i\varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\alpha_1 b^{1/3} + \alpha_1^{-1} \mu b^{2/3}) d\zeta \right] \\ D_2 \exp \left[i\varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\alpha_2 b^{1/3} + \alpha_2^{-1} \mu b^{2/3}) d\zeta \right] \\ D_3 \exp \left[i\varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\alpha_3 b^{1/3} + \alpha_3^{-1} \mu b^{2/3}) d\zeta \right] \end{pmatrix},$$

справедливое в области $|\zeta - \zeta_0| > \text{const}_2 \varepsilon^{3/4}$. Поэтому, сшивая (17) в перекрывающихся областях с (15) слева и с (16) справа от точки связи, получим

$$E_1 = D_1^< \varepsilon^{-1/4}, \quad E_2 = D_2^< \varepsilon^{-1/4}, \quad E_3 = D_3^< \varepsilon^{-1/4}, \\ E_1 = D_1^> \varepsilon^{-1/4}, \quad E_2 + E_3 = D_2^> \varepsilon^{-1/4}, \quad E_1 + E_3 = D_3^> \varepsilon^{-1/4},$$

где $D_j^<$ ($D_j^>$) — коэффициенты D_j слева (справа) от точки связи. Таким образом выразим $D_j^>$ через $D_j^<$, а затем, возвращаясь по (10), (8), (5) от Φ к исходным функциям f_p , получим для вектора e (2) выражение.

$$e(\zeta) = e_s(\zeta) + \frac{D_4}{\sqrt{N_4}} u_4 \exp \left(i\varepsilon^{-1} \int_0^{\zeta} q_4 d\zeta \right), \quad (18)$$

где $e_s(\zeta)$ — поле вырождающихся мод, равное

$$e_s = \frac{D_1^{\equiv}}{\sqrt{N_1}} u_1 \exp \left(i\varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_1 d\zeta \right) + \eta_2 \frac{D_2^{\equiv}}{\sqrt{N_2}} u_2 \exp \left(i\varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_2 d\zeta \right) + \\ + \eta_3 \frac{D_3^{\equiv}}{\sqrt{N_3}} u_3 \exp \left(i\varepsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_3 d\zeta \right). \quad (19)$$

Связь $D_j^>$ с $D_j^<$ дается с помощью матрицы $D_j^> = \hat{G} D_j^<$:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

4. Переходя к интерпретации полученных результатов, заметим прежде всего, что в рассматриваемой нами задаче (при падении волны на плазменный слой в направлении внешнего магнитного поля) локализация уровня вырождения ($v(\zeta_0) = 1$) и характер взаимодействия мод одинаковы для $u > 1$ и $u < 1$, т. е. не зависят от того, больше или меньше частота гирорезонанса электронов частоты поля. Для определенности проведем анализ для случая $u > 1$.

На рис. 1 представлены зависимости вещественных (а) и мнимых (б) значений корней кватрики Букера q от v при угле падения $\theta = 30^\circ$ и $u = 4$ без учета соударений ($s = 0$). По установившейся терминологии [3,8] ветвь 1 относят к необыкновенной, а ветвь 2 — к обыкновенной волне. (Нижняя ветвь обыкновенной волны при $v > 1,5$ не показана.)

Для определения нумерации собственных значений q_j в окрестности ζ_0 , т. е. идентификации α_j , изобразим (рис. 2) на плоскости $\Delta q_j = q_j - q_0 = \alpha_j A^{1/3} (\zeta - \zeta_0)^{1/3}$ (см. (4), (13)) секторы, в которые попадают собственные значения вырождающихся мод в окрестности точки

связи. На рисунке линиями со стрелками, входящими в точку $\Delta q_j = 0$ ($\zeta = \zeta_0$), обозначены собственные числа до точки связи ($\zeta < \zeta_0$), а со стрелками, выходящими из нее, — собственные числа за точкой связи ($\zeta > \zeta_0$) для бесстолкновительной плазмы. При учете соударений годографы Δq_j смещаются в заштрихованные сектора. Цифрами в секторах обозначены номера мод.

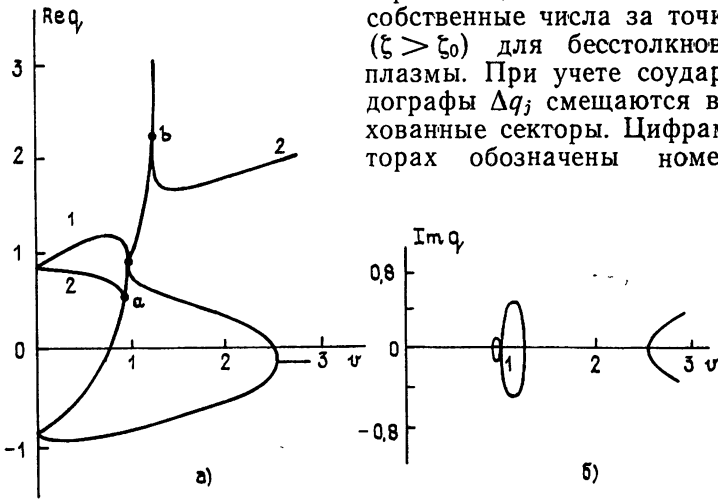


Рис. 1.

В качестве конкретной иллюстрации на рис. 3 показаны результаты численного расчета Δq_j в окрестности точки вырождения без и с учетом соударений ($s=0,001$).

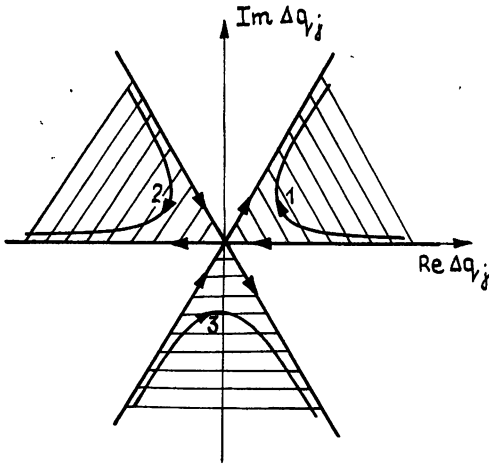


Рис. 2.

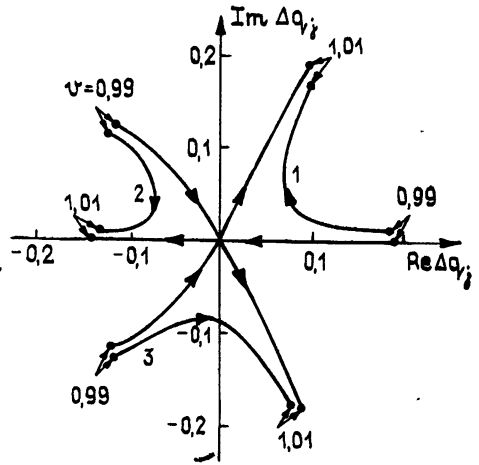


Рис. 3.

Из сопоставления данных, приведенных на рис. 1—3, следует, что мода 1 ($\alpha_1 = 1$) до точки связи соответствует необыкновенной волне, распространяющейся в сторону возрастающих значений ζ , а за точкой связи — обыкновенной волне, идущей в том же направлении. Мода 2 ($\alpha_2 = \exp(i2\pi/3)$) до точки связи соответствует обыкновенной волне, распространяющейся в сторону больших ζ , а за точкой связи — попутной необыкновенной волне. Мода 3 ($\alpha_3 = \exp(i4\pi/3)$) — обыкновенной волне, идущей в сторону уменьшающихся значений ζ . Направление распространения определяется по знаку $\text{Im } q$.

Что касается чисел η_2 и η_3 в (19), то расчет показывает, что при фиксации ветви корня из N_j условием $\text{Re} \sqrt{N_j} > 0$ ($j=1, 2, 3$) при $\zeta < \zeta_0$ $\eta_2 = \eta_3 = -1$, причем $\text{Re} \sqrt{N_3}$ меняет знак при переходе через точку вырождения.

Выпишем соотношения между $D_j^>$ и $D_j^<$, следующие из (20):

$$D_1^> = D_1^<, \quad D_2^> = D_2^< + D_3^<, \quad D_3^> = D_1^< + D_3^<. \quad (21)$$

Исходя из требования убывания поля, необходимо положить в (21) $D_3^> = 0$. Тогда, если на область взаимодействия падает необыкновенная волна ($D_1^< \neq 0, D_2^< = 0$), то из (21) получаем

$$D_1^> = D_1^<, \quad D_2^> = -D_1^<, \quad D_3^< = -D_1^<. \quad (22)$$

Следовательно, падающая необыкновенная волна расщепляется на идущие в том же направлении необыкновенную ($D_2^>$) и обыкновенную ($D_1^>$) волны, а также отраженную обыкновенную ($D_3^<$) волну. Подставив (22) в (19), приходим к выражению

$$e_b = \frac{D_1^<}{\sqrt{N_1}} u_1 \exp\left(i\epsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_1 d\zeta\right) + \frac{D_1^<}{\sqrt{N_3}} u_3 \exp\left(i\epsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_3 d\zeta\right) \quad \text{при } \zeta < \zeta_0 \quad (23)$$

и

$$e_b = \frac{D_1^<}{\sqrt{N_1}} u_1 \exp\left(i\epsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_1 d\zeta\right) + \frac{D_1^<}{\sqrt{N_2}} u_2 \exp\left(i\epsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_2 d\zeta\right) \quad \text{при } \zeta > \zeta_0. \quad (24)$$

Если на область взаимодействия падает обыкновенная волна (просочившаяся за точку отражения через область с комплексным показателем преломления) ($D_1^< = 0, D_2^< \neq 0$), то

$$D_1^> = 0, \quad D_2^> = D_2^<, \quad D_3^< = 0, \quad (25)$$

т. е. мода 2 переходит сама в себя, или, другими словами, достигающая точки тройного вырождения обыкновенная волна трансформируется в необыкновенную, распространяющуюся в том же направлении. Формула (19) с учетом (25) принимает вид

$$e_b = \frac{D_2^<}{\sqrt{N_2}} u_2 \exp\left(i\epsilon^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} q_2 d\zeta\right), \quad \zeta \geq \zeta_0. \quad (26)$$

Таким образом, построено асимптотическое представление решения системы (1) в нулевом приближении по параметру $(kL)^{-1}$, пригодное в окрестности тройной точки вырождения (формулы (18), (23), (24), (26)) и позволяющее определить коэффициенты трансформации волн.

5. Более полное исследование трансформации должно включать построение решения уравнений (3), справедливого в области, содержащей как тройную точку вырождения, так и точки поворота обыкновенной волны. Если точки связи достаточно удалены друг от друга, то можно найти решение в окрестности каждой из них в отдельности, и затем асимптотически сшить полученные решения. Тогда, опираясь на сделанные здесь выводы о характере расщепления волн при тройном вырождении, можно прийти к следующим асимптотическим представлениям для полей.

При падении на плазменный слой необыкновенной волны амплитуды A_1 получим

$$e_b = \frac{A_1}{\sqrt{N_1}} u_1 \exp\left(ik \int_0^z q_1 dz\right) + \frac{A_1}{\sqrt{N_3}} u_3 \exp\left(ik \int_0^{z_0} q_1 dz\right) \exp\left(ik \int_{z_0}^z q_3 dz\right) \quad \text{при } z < z_0 \quad (27)$$

и

$$e_s = \frac{A_1}{\sqrt{N_1}} u_1 \exp\left(ik \int_0^z q_1 dz\right) + \frac{A_1}{\sqrt{N_2}} u_2 \exp\left(ik \int_0^{z_0} q_1 dz\right) \exp\left(ik \int_{z_0}^z q_2 dz\right) \quad \text{при } z > z_0. \quad (28)$$

Из (27), (28) следует, что амплитуда отраженной от области взаимодействия обыкновенной волны пропорциональна

$$|R| = \exp\left(-k \int_{z_0}^{z_1} \text{Im } q_3 dz\right), \quad (29)$$

амплитуда просочившейся через барьер обыкновенной волны пропорциональна

$$|T_{12}| = \exp\left(-k \int_{z_0}^{z_2} \text{Im } q_2 dz\right), \quad (30)$$

а коэффициент трансформации необыкновенной волны в необыкновенную равен единице, $|T_{11}| = 1$. В формулах (29), (30) z_1 и z_2 — координаты точек поворота обыкновенной волны, соответствующие точкам a и b на рис. 1, в которых $dq/dv \rightarrow \infty$, z_0 — координата тройной точки вырождения, где $v(z_0) = 1$.

Если в плазму вводится обыкновенная волна, то выражение для поля будет иметь вид

$$e_s = \frac{A_2}{\sqrt{N_2}} u_2 \exp\left(ik \int_0^z q_2 dz\right) + \frac{A_2}{\sqrt{N_3}} u_3 \exp\left(ik \int_0^{z_1} q_2 dz\right) \exp\left(ik \int_{z_1}^z q_3 dz\right) \quad \text{при } z < z_1 \quad (31)$$

и

$$e_s = \frac{A_2}{\sqrt{N_2}} u_2 \exp\left(ik \int_0^z q_2 dz\right) \quad \text{при } z > z_1, \quad (32)$$

где A_2 — амплитуда падающей волны.

Амплитуда прошедшей за точку тройной связи (z_0) необыкновенной волны в (32) содержит экспоненциальный множитель

$$|T_{21}| = \exp\left(-k \int_{z_1}^{z_0} \text{Im } q_2 dz\right), \quad (33)$$

обусловленный прохождением падающей обыкновенной волной барьера, расположенного до точки тройной связи.

Если при распространении в земной ионосфере принять $\omega_H = 8,82 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $dn/dz = 400 \text{ м}^{-4}$, то при $u=4$ и $\theta=30^\circ$ величины $|R|$, $|T_{12}|$, $|T_{21}|$ принимают исчезающе малые значения ($|T_{21}| \sim 10^{-65}$). Этого следовало ожидать, ибо, как известно, заметная трансформация волн друг в друга происходит при падении из вакуума под углом θ , близким к критическому θ_k , значение которого при $u > 1$ определяется из [3]:

$$\sin^2 \theta_k = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u} \pm 1} \sin^2 \chi, \quad (34)$$

где χ — угол, который образует магнитное поле с осью z . Так как в нашем случае $\theta = \chi$, то условие $\theta \simeq \theta_k$ при малых u не выполняется. Однако при убывании частоты ширина зоны непрозрачности (между точками z_1 , z_0 и z_0 , z_2) уменьшается и коэффициенты (29), (30), (33) зна-

чительно возрастают. Так, при $u=100$ ($f=140$ кГц) $|T_{21}|=|R|=0,343$ и $|T_{12}|=0,205$. Если точки связи z_1, z_0, z_2 близки друг к другу, то необходимо находить единое асимптотическое разложение системы (3), учитывающее влияние всех трех точек связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. // УФН. 1973. Т. 109. Вып. 2. С. 225.
2. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 257.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме — М.: Наука, 1967. — 684 с.
4. Budden K. G. // J. Atm. Terr. Phys. 1980. V. 42. № 3. P. 287.
5. Mjølhus E. M. // J Plasma Phys 1984. V. 31. Part 1. P. 7.
6. Токман М. Д. // Физика плазмы. 1985. Т. 11. Вып. 10. С. 1205.
7. Mjølhus E. M. // Proc. of Int. Conf. on Plasma Physics. Cont. Papers. — Kiev. 1987. V. 1. P. 51.
8. Budden K. G. Radio waves in the ionosphere. — Cambridge: Univ. press, 1961. — 542 p.
9. Вяткин В. М., Новиков В. В. Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: Гос. ун-т, 1986. Вып. 20. С. 137.
10. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966. Гл. 3.
11. Бичуцкая Т. И., Новиков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 10. С. 1225.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
24 июля 1987 г.

INTERACTION OF CHARACTERISTIC WAVES IN A PLASMA AT TRIPLE DEGENERATION

V. M. Vyatkin, V. V. Novikov

Wave transformation is investigated in an inhomogeneous magnetized plasma in the regions where the three Booker quartic equation roots are equal. The extraordinary wave incident on the interaction region is shown to split into an ordinary and an extraordinary wave travelling in the same direction and a reflected ordinary wave. The ordinary wave incident on the triple degeneracy point is completely transformed to the extraordinary wave.
