

УДК 533.9.550.388

## ВОЗМУЩЕННАЯ ЗОНА ВБЛИЗИ СФЕРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ И ЕЕ ЕМКОСТЬ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ ЧАСТОТАХ, ЛЕЖАЩИХ МЕЖДУ ПЛАЗМЕННЫМИ ЧАСТОТАМИ ИОНОВ И ЭЛЕКТРОНОВ

С. А. Горбунов, Т. Л. Потапова

Исследуется структура возмущенной зоны вблизи поверхности сферической антенны, находящейся в бесстолкновительной плазме, в предположении, что частота изменения потенциала на поверхности сферы лежит между плазменными частотами ионов и электронов. При этом изменение потенциала слабо влияет на движение ионов, а электроны находятся в квазистатическом электрическом поле, что позволяет получить простые выражения для концентраций частиц плазмы. Для случаев, когда радиус сферы является большим и малым по сравнению с дебаевским радиусом плазмы, найден потенциал поля в ее окрестности. Определены значения статической и динамической емкости такой антенны.

**Введение.** Исследование возмущенной зоны вблизи сферического электрода, помещенного в плазму, и определение величины его емкости представляет значительный интерес. Это обусловлено тем, что такие электроды широко используются в настоящее время для измерения электрических полей и флуктуаций концентрации и температуры плазмы.

Распределение поля в ближней зоне электрических антенн, помещенных в плазму, а также зависимости их импедансных характеристик от плазменных параметров и частоты излучения в линейном приближении в настоящее время достаточно полно исследованы [1, 2]. Однако, как показано теоретически и экспериментально [3-5], основным эффектом, определяющим емкость таких антенн в бесстолкновительной плазме, является образование пограничного слоя у поверхности, которое не описывается в линейном приближении.

Исследование возмущенной зоны в окрестности сферического электрода и его импедансных характеристик при частотах, меньших плазменной частоты ионов, проведено в [6, 7]. В настоящей работе рассмотрен случай, когда частота лежит между плазменными частотами ионов и электронов. Для сферы с радиусом, большим или малым по сравнению с дебаевским радиусом плазмы  $D$ , проведены расчеты потенциала поля и определены значения статической и динамической емкости.

**Постановка задачи.** Рассмотрим сферическую антенну, находящуюся в бесстолкновительной плазме, состоящей из положительных ионов и электронов с концентрацией  $N_0$ . Распределение частиц по скоростям вдали от антенны, где плазма не возмущена, примем максвелловским с температурой  $T$ . На поверхности антенны все налетающие электроны поглощаются, а ионы нейтрализуются.

Ближняя зона антенны может быть описана в квазистатическом приближении. Потенциал электрического поля  $\phi$  при этом определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\phi = -4\pi e(N_i - N_e), \quad (1)$$

которое должно решаться одновременно с кинетическими уравнениями

для функций распределения частиц, определяющих концентраций ионов и электронов  $N_{i,e}$ . Граничные условия к (1) очевидны:

$$\varphi(r_0) = \varphi_0, \quad \varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0,$$

где  $r$  — расстояние от центра сферы,  $r_0$  — ее радиус,  $\varphi_0$  — значение потенциала на поверхности антенны в данный момент времени.

Рассмотрим случай, когда частота  $\omega$ , с которой происходит изменение потенциала, удовлетворяет условию  $\omega_{Li} \ll \omega \ll \omega_{Le}$ , где  $\omega_{Li,e}$  — плазменные частоты электронов и ионов (более точные условия, определяющие диапазон частот в случаях сферы большого и малого радиуса, получены далее). При этом изменение потенциала слабо влияет на движение ионов, а электроны находятся в квазистатическом поле. Будем считать, что потенциал поверхности антенны  $\varphi_0$  всегда отрицателен и изменяется по отношению к некоторому фиксированному значению  $\varphi_n$ . Такое предположение обусловлено тем, что металлическое тело, находящееся в плазме, ввиду разницы тепловых скоростей ионов и электронов приобретает потенциал  $\varphi_n$ , который отрицателен.

Подробное решение кинетических уравнений для частиц в центрально-симметричном поле приведено в [8,9], откуда для относительной концентрации электронов  $n_e = N_e/N_0$ , являющихся в данном случае отталкивающимися частицами, имеем

$$n_e = \frac{1}{2} e^{-\psi} \left\{ 1 + \Phi \left( \sqrt{\frac{\psi_0 - \psi}{\xi^2 - 1}} \right) + \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \exp \left( \frac{\psi_0 - \psi}{\xi^2 - 1} \right) \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{\psi_0 - \psi}{1 - \xi^2}} \right) \right] \right\}, \quad (2)$$

где введены безразмерные переменные  $\xi = r/r_0$ ,  $\psi = -e\varphi/T$ , а

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

— интеграл вероятностей.

Так как быстро изменяющееся электрическое поле не влияет на движение ионов, их концентрация будет определяться выражениями в окрестности сферы с фиксированным потенциалом на поверхности  $\varphi_n$ . Такие выражения, в общем случае весьма громоздкие, получены в [8,9]. Для простоты дальнейшего изложения мы ограничимся случаем, когда  $\varphi_n$  удовлетворяет условию  $|e\varphi_n| \ll T$ . При этом  $n_i = N_i/N_0$  определяется тем же выражением, что и для нейтральных частиц с учетом поглощения на поверхности:

$$n_i(\xi) = (1/2) [1 + (1 - 1/\xi^2)^{1/2}]. \quad (3)$$

Отметим, что излагаемые далее методы решения для случаев сферы большого и малого радиусов применимы и при  $|e\varphi_n| \gtrsim T$ . При этом в случае сферы малого радиуса изменение решения сводится к нахождению другого значения коэффициента  $\psi_\infty$ , а в случае большого радиуса — к численному (вместо аналитического) решению обыкновенного дифференциального уравнения, не имеющего особенности при  $D/r_0 = 0$ .

Отметим также, что возможно действие высокочастотного электрического поля на ионы через стрикционную силу, что может привести к изменению распределения ионов. Этот эффект наиболее сильно должен проявляться в случае сферы большого радиуса, когда потенциал переменного поля быстро изменяется в пограничном слое вблизи поверхности. Однако проведенная далее оценка показывает, что действием этой силы в рассматриваемом случае не слишком высоких потенциалов поверхности сферы  $\psi_0 \ll r_0/D$  можно пренебречь.

После определения концентраций частиц задача сводится к решению уравнения (1), в безразмерных переменных имеющего вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = \left( \frac{r_0}{D} \right)^2 (n_i - n_e), \quad (4)$$

где  $D = (T/4\pi e^2 N_0)^{1/2}$  — дебаевский радиус плазмы.

Решение (4) при произвольных  $r_0/D$  может быть получено лишь численными методами. Мы рассмотрим наиболее важные для практических приложений случаи, когда радиус сферы является большим или малым по сравнению с дебаевским. В этих случаях решение (4) может быть получено асимптотическими методами.

**Сфера большого радиуса.** В случае  $r_0 \gg D$  (4) представляет собой уравнение с малым параметром перед старшей производной. Решение его всюду, где

$$\left| \frac{d\psi}{d\xi} \right| \ll \frac{r_0}{D} \psi, \quad (5)$$

с точностью до малых членов порядка  $(D/r_0\psi)^2 (d\psi/d\xi)^2$  совпадает с решением уравнения квазинейтральности [9]

$$n_i(\xi, \psi) = n_e(\xi, \psi). \quad (6)$$

**Область квазинейтральности.** Подставляя (2), (3) в (6), получим уравнение для потенциала  $\psi$  в области квазинейтральности

$$\psi = -\ln \left\{ \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right)^{1/2} \right] \left[ 1 + \Phi(\sqrt{\psi_0 - \psi}) + \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left( \frac{\psi_0 - \psi}{\xi^2 - 1} \right) \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{\psi_0 - \psi}{1 - \xi^{-2}}} \right) \right] \right]^{-1} \right\}. \quad (7)$$

Решение (7) легко может быть получено методом итераций. В качестве нулевого приближения удобно выбрать при  $\psi_0 > 1$

$$\psi_{(0)} = -\ln \left\{ \frac{1}{2} [1 + (1 - 1/\xi^2)^{1/2}] \right\}$$

и  $\psi_{(0)} = \psi_0$  при  $\psi_0 < 1$ . Для нахождения значения  $\psi$  в любой точке достаточно нескольких итераций.

Результаты расчета потенциала поля в области квазинейтральности  $\psi(\xi)$  при значении потенциала поля на поверхности антенны  $\psi_0 = 0,5$  изображены на рис. 1 (кривая 1) и близки к найденным в [6] для статического случая.

Как видно из рис. 1, на границе области квазинейтральности (при  $\xi \rightarrow 1$ ) потенциал поля  $\psi$  имеет значение не  $\psi_0$ , а некоторое  $\psi_1$ , являющееся решением (7) при  $\xi \rightarrow 1$ . Такая ситуация с «потерей» одного из пограничных условий характерна для асимптотических решений уравнений с малым параметром перед старшей производной [10]. Как известно, это соответствует образованию пограничного слоя с резким изменением величины  $\psi$  в нем. Зависимость потенциала на границе области квазинейтральности  $\psi_1$  от потенциала на поверхности антенны  $\psi_0$  дана в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость величины потенциала на границе области квазинейтральности  $\psi_1$  и величины  $\psi_\infty$ , определяющей значение потенциала на больших расстояниях, от потенциала на поверхности  $\psi_0$

$\psi_0$	0,25	0,5	0,75	1,0	2,0	3,0
$\psi_1$	0,207	0,349	0,447	0,516	0,642	0,680
$\psi_\infty$	0,080	0,129	0,162	0,186	0,230	0,244

При малых потенциалах на поверхности антенны  $\psi_0 \rightarrow 0$ , используя представление  $\Phi(x) |_{x \rightarrow 0} \simeq 2(x/\pi)^{1/2}$ , из уравнения (6) получаем для  $\psi_1$

$$\psi_1 \Big|_{\psi_0 \rightarrow 0} = \psi_0 - \frac{\pi}{4} \psi_0^2. \quad (8)$$

На больших расстояниях от антенны  $\xi \gg 1$ , учитывая, что  $\psi \ll 1$ , из (7) имеем

$$\psi \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = \psi_{\infty}/\xi^2, \quad \psi_{\infty} = \frac{1}{2} \left[ \psi_0 - \left( \frac{\psi_0}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\psi_0} + \left( \frac{1}{2} - \psi_0 \right) \Phi(V\overline{\psi_0}) \right]. \quad (9)$$

Значения  $\psi_{\infty}$  в зависимости от  $\psi_0$  представлены также в табл. 1.

Область двойного слоя. Условие (5) не выполняется вблизи поверхности антенны — в двойном слое, толщина которого в рассматриваемых условиях порядка дебаевского радиуса. В этой области необходимо решать полное уравнение (4).

С учетом того, что вблизи антенны можно пренебречь кривизной ее поверхности, запишем выражение для концентрации электронов в двойном слое [9]:

$$n_e(\psi) = \frac{1}{2} e^{-\psi} [1 + \Phi(\sqrt{\psi_0 - \psi})].$$

Для ионов в этой области имеем  $n_i = 1/2$ .

Потенциал в двойном слое описывается уравнением

$$\frac{d^2 \psi}{d\zeta^2} = f(\psi), \quad f(\psi) = n_i - n_e(\psi), \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\psi \Big|_{\zeta=0} = \psi_0, \quad \psi \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = \psi_1,$$

где введена безразмерная переменная  $\zeta = (r - r_0)/D$ .

Решением этого уравнения в неявном виде является

$$\zeta = \int_{\psi}^{\psi_0} \left[ 2 \int_{\psi_1}^{\psi} f(\psi) d\psi \right]^{-1/2} d\psi. \quad (11)$$

Зависимость  $\psi(\zeta)$  при  $\psi_0 = 0,5$  представлена на рис. 1 (кривая 2).

Для напряженности электрического поля на поверхности сферы  $\mathcal{E}_0$  из (11) имеем  $\mathcal{E}_0 = E_0 \mathcal{E}$ , где

$$E_0 = \left[ 2 \int_{\psi_1}^{\psi_0} f(\psi) d\psi \right]^{1/2}, \quad (12)$$

а  $\mathcal{E} = T/eD$  — напряженность характерного электрического поля в плазме.

Оценим действие стрикционной силы на распределение ионов в двойном слое. Безразмерный потенциал этой силы определяется выражением

$$\psi_c = \left( \frac{\omega_{Li}}{2\omega} \frac{d\psi}{d\zeta} \right)^2.$$

Из рис. 1 видно, что в двойном слое  $d\psi/d\zeta \leq 1$  и в рассматриваемом случае  $\omega_{Li} \ll \omega$  действием стрикционной силы можно пренебречь.

Сращивание асимптотических разложений. Приведенное выше рассмотрение в области квазинейтральности и двойном слое представляет собой по сути построение асимптотических (при  $r_0 \gg D$ ) разложений, пригодных в этих областях. Как известно [10], такие асимптотические разложения можно сращивать, строя, таким образом, приближение, равномерно пригодное для всей области изменения переменных. Проводя сращивание, получим первый член равномерно пригодного приближения

$$\psi = \psi_{\text{нв}} + \psi_{\text{дв}} - \psi_1, \quad (13)$$

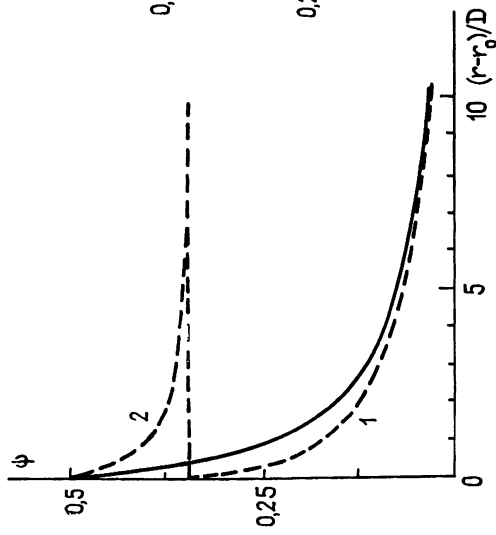


Рис. 1.

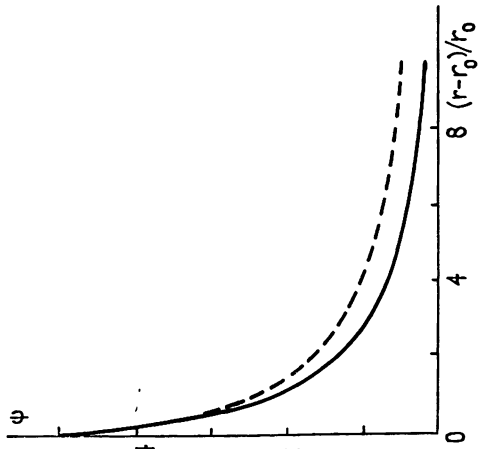


Рис. 2.

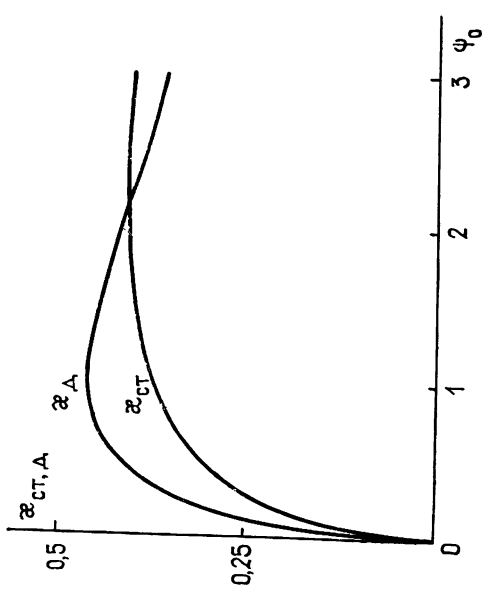


Рис. 3.

где  $\psi_{\text{кв}}$  и  $\psi_{\text{дв с}}$  — решения соответственно уравнений (7) и (10). Выражение (13) представляет собой приближенное решение (4) при  $r_0 \gg D$  с точностью до членов, пропорциональных  $(D/r_0)^2$ .

Равномерно пригодное приближение в случае  $r_0/D = 10$  и  $\psi_0 = 0,5$  представлено на рис. 1. Для сравнения пунктиром нанесены решения уравнений (7) (кривая 1) и (10) (кривая 2). Горизонтальная линия соответствует значению  $\psi_1$ .

Отметим, что нахождение потенциала поля методом построения равномерно пригодного асимптотического разложения упрощает численные расчеты по сравнению с непосредственным решением уравнения Пуассона, а также обладает тем преимуществом, что для данного  $\psi_0$  достаточно провести один раз расчеты в области квазинейтральности и двойном слое, после чего решение при любых больших отношениях строится элементарно.

Остановимся на пределах применимости полученных формул. Основное ограничение ( $\psi_n \ll 1$ ) связано с использованием выражения (3) для концентрации ионов  $n_i$ . Однако это выражение может быть использовано для оценки потенциала поля в области квазинейтральности даже при  $\psi_n \gg 1$ , так как в этой области  $n_i$  слабо зависит от  $\psi_n$  [8].

В двойном слое концентрация ионов более существенно зависит от  $\psi_n$ . Использование (3) возможно в нем при  $\psi_n \leq 1$ . При  $\psi_n > 1$  необходимо численное решение (10) с заданием зависимости  $n_i(\xi)$ .

**Сфера малого радиуса.** При  $r_0 \ll D$  в правой части (4) появляется малый параметр. Ввиду этого пространственный заряд плазмы играет важную роль лишь начиная с расстояний порядка дебаевского радиуса, где производные потенциала малы. На расстояниях же  $r < D$  основную роль в (4) играют производные потенциала и конкретный вид  $n_{i,e}$  несуществен. Решение (4) может быть получено методом «составного уравнения» [11]. При этом простые выражения для  $n_{i,e}$ , верные в области  $r \gg D$  ( $\xi \gg D/r_0 \gg 1$ ), следует использовать во всей области изменения  $r$ . Учитывая, что при  $\xi \gg D/r_0$  возмущения концентраций частиц и потенциала электрического поля малы, имеем

$$n_i - n_e = \psi - \psi_\infty/\xi^2,$$

где  $\psi_\infty$  определено (9). Таким образом, составное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = \left( \frac{r_0}{D} \right)^2 (\psi - \psi_\infty/\xi^2) \quad (14)$$

с граничными условиями  $\psi|_{\xi \rightarrow 1} = \psi_0$ ,  $\psi|_{\xi \rightarrow \infty} = 0$ . Аналогичное уравнение (при замене  $\xi = \xi/\sqrt{2}$ ,  $\psi_\infty^* = \psi_\infty$ ) и его решение приведены в [9]. Имеем

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = \frac{\beta\psi_\infty}{\xi} \{ e^{-\beta\xi} [\text{Ei}(\beta\xi) - \text{Ei}(\beta)] + E_1(\beta\xi)e^{\beta\xi} - E_1(\beta)e^{\beta(2-\xi)} \} + \\ + \frac{\psi_0}{\xi} e^{\beta(1-\xi)}, \quad \beta = r_0/D, \end{aligned}$$

где  $E_1(x)$  и  $\text{Ei}(x)$  — интегральные показательные функции

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \text{Ei}(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Вид потенциала поля при  $\psi_0 = 0,5$  и  $r_0/D = 0,1$  показан на рис. 2. Отметим, что при  $r \ll D$ , как и следовало ожидать, поле в окрестности малой сферы спадает по кулоновскому закону (пунктирная линия на рис. 2) и напряженность электрического поля на поверхности совпадает с ее значением в вакууме.

При использовании выражения (2) предполагалось, что распределение электронов во всей возмущенной области успевает следить за изменением потенциала. Для этого, кроме условия  $\omega \ll \omega_{Le}$ , необходимо, чтобы характерный масштаб поля  $L$  удовлетворял условию  $L \ll v_e/\omega$ , где  $v_e = (T/m)^{1/2}$  — тепловая скорость электронов. Принимая в качестве  $L$  размеры возмущенной области (дебаевский радиус при  $r_0 \ll D$  и  $r_0$  при  $r_0 \gg D$ ), получим, что для малой сферы условие  $\omega \ll \omega_{Le}$  остается в силе, а для сферы большого радиуса необходимо выполнение соотношения между частотами  $\omega \ll \omega_{Le}/(r_0/D)$ .

**Динамическая и статическая емкость.** Расчет электрического поля на поверхности антенны позволяет определить величину ее емкости.

Из теоремы Гаусса имеем связь между поверхностной плотностью зарядов  $\sigma_0$  и напряженностью поля на поверхности  $\mathcal{E}_0$ :  $\sigma_0 = \mathcal{E}_0/4\pi$ . Для статической и динамической емкости на единицу поверхности

$$c_{ст} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{E}_0}{\varphi_0} = \frac{x_{ст}}{4\pi D}, \quad x_{ст}(\psi_0) = E_0/\psi_0;$$

$$c_d = \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathcal{E}_0}{d\varphi_0} = \frac{x_d}{4\pi D}, \quad x_d(\psi_0) = dE_0/d\psi_0.$$

Зависимость  $x_{ст,д}(\psi_0)$  для случая сферы большого радиуса представлена на рис. 3. Видно, что полная емкость сферы

$$C_{ст,д} = 4\pi r_0^2 c_{ст,д}$$

радиуса  $r_0 \gg D$  в плазме увеличивается примерно на величину  $r_0/D$ .

При малых потенциалах на поверхности антенны  $\psi_0 \rightarrow 0$  из (12) с учетом (8) для напряженности электрического поля на поверхности имеем  $E_0 = (\pi/12)^{1/2} \psi_0^{3/2}$ , и для  $x_{ст,д}$  получим

$$x_{ст} = \left(\frac{\pi}{12}\right)^{1/2} \psi_0^{1/2}, \quad x_d = \frac{3}{2} x_{ст}.$$

Для сферы малого радиуса  $r_0 \ll D$ , так как напряженность поля на поверхности определяется тем же выражением, что и в вакууме, имеем хорошо известное выражение  $C_{ст,д} = r_0$ , т. е. емкость малой сферы в плазме не изменяется.

**Заключение.** В работе учтены основные факторы, определяющие структуру возмущенной области в окрестности сферической низкочастотной антенны — влияние электрического поля на движение частиц и поглощение их на поверхности. В то же время получены достаточно простые выражения, определяющие потенциал и напряженность электрического поля вблизи антенны и ее емкость для случая, когда радиус антенны является большим или малым по сравнению с дебаевским радиусом.

Отметим, что при наличии постоянного магнитного поля полученные результаты применимы лишь в случае, если его влиянием на движение частиц в возмущенной области можно пренебречь, т. е. ларморовские радиусы ионов и электронов велики по сравнению с радиусом сферы и дебаевским радиусом плазмы.

Авторы надеются, что полученные результаты найдут применение при интерпретации импедансных измерений параметров плазмы, проводимых с использованием антенн такого типа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Чугунов Ю. В. // УФН 1975 Т 116. Вып. 4. С. 79.
2. Акиндинов В. В., Еремин С. М., Лишин И. В. // Радиотехника и электроника. 1985. Т 30 № 5. С. 833.
3. Koons H. C., McPherson D. A., Harrindge W. B. // J. Geophys. Res. 1970. V. 75. № 13. P. 2490.

4. Takenico Aso // Planet. Space Sci. 1974 V. 22. № 4. P. 583.
5. Аксенов В. И., Лишин И. В. // Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15. Вып. 4. С. 677.
6. Parrot M. J. M., Storey L. R. O., Parker L. W., Laframboise J. G. // Phys. Fluids, 1982. V. 25. № 12. P. 2388
7. Godard R, Laframboise J. G. // Radio Sci. 1986. V. 21. № 3. P. 421.
8. Гуревич А. В. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1963. Т. 3. Вып. 2. С. 185.
9. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Пятаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме — М.: Наука, 1964
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.

Институт земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн  
АН СССР

Поступила в редакцию  
27 июля 1987 г.

THE DISTURBED ZONE NEAR A SPHERICAL ANTENNA  
AND ITS CAPACITANCE IN A COLLISIONLESS PLASMA WHEN THE  
FREQUENCY LIES BETWEEN PLASMA FREQUENCIES OF IONS  
AND ELECTRONS

*S. A. Gorbunov, T. L. Potapova*

One investigates the structure of a disturbed zone near the surface of a spherical antenna placed into a collisionless plasma. A self-consistent set of equations for the distribution function of particles and an electric field potential is solved. The frequency of a potential variation at the surface of the sphere is assumed to lie between plasma frequencies of ions and electrons. In this case the potential variation exerts a weak influence upon the motion of ions, and the electrons are in a quasistatic electric field. This permits one to obtain expressions for the plasma particle concentrations. One provides computations of a field potential for the cases when the sphere radius is larger or smaller as compared to the Debye length of plasma. The values for a static and dynamic capacitance of such an antenna are determined.

---