

ка эффективна лишь для относительно тонких слоев нелинейной среды ($L \ll 1$). На малых длинах ширина пучка практически не изменяется. Поэтому в (8) полагаем ширину пучка в первом приближении $f_1 \approx 1$, после чего находим

$$\vartheta_{0, \text{опт}}^{(1)} = L\alpha_{\text{нл}} / (1 + L^2\alpha_{\text{нл}}). \quad (9)$$

Во втором приближении, подставляя (9) в выражение для безразмерной ширины f , имеем $f_{\text{II}}^2|_{c=L} = (1 + L^2\alpha_{\text{нл}})^{-2} + L^2(1 + \alpha_{\text{нл}})$. Отсюда, используя (8), получим вторую аппроксимационную формулу

$$\vartheta_{0, \text{опт}}^{(2)} = L\alpha_{\text{нл}} / [(1 + L^2\alpha_{\text{нл}})^{-2} + L^2(1 + \alpha_{\text{нл}})^2 + L^2\alpha_{\text{нл}}]. \quad (10)$$

Сравнение результатов численных расчетов $\vartheta_{0, \text{опт}}$ со значениями $\vartheta_{0, \text{опт}}^{(2)}$, полученными из выражения (10), дает хорошее соответствие. На рис. 3б представлены изолинии полной расходимости $\vartheta^2(\vartheta_{0, \text{опт}})$ как функции L и $\alpha_{\text{нл}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1978. Т. 42. № 12. С. 2547.
2. Харди Дж. У. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 6. С. 31
3. Адаптивная оптика // Сб статей / Под ред. Витриченко Э. А. — М.: Мир, 1980.
4. Freeman R. H., Pearson J. E. // Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 585.
5. Glaser J. // Opt. Commun. 1982. V. 40. P. 161.
6. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // УФН. 1967. Т. 93. № 1. С. 19.
7. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн — М.: Наука, 1979.
8. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 8. С. 1617.
9. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. // Квантовая электроника. 1984. Т. 14. № 4. С. 663.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
5 ноября 1987 г.

УДК 539.3

О СОБСТВЕННЫХ ФОРМАХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Р. А. Дудник, В. В. Тамойкин, Э. А. Фияксель

Анализу вибрационных характеристик тонких цилиндрических оболочек (ЦО) с неоднородностями типа присоединенная масса посвящен целый ряд работ [1, 2], где определены собственные частоты низших форм колебаний оболочки. В работе [2] исследованы как низкочастотные, так и высокочастотные спектры собственных колебаний ЦО, найдены только симметричные собственные функции системы, кроме того, не рассмотрены вопросы об ортогональности этих функций. Отметим, что для практических приложений, в первую очередь для изучения особенностей звукоизлучения неоднородной ЦО, представляет интерес построение полной ортогональной системы собственных функций колебаний неоднородной ЦО, которая позволяла бы наглядно проиллюстрировать влияние неоднородности как на изменение собственных частот ЦО, так и на распределение собственных форм колебаний нормальной составляющей вибрационной скорости ЦО.

С этой целью в настоящей работе рассмотрена модель ЦО неограниченной длины, вдоль образующей которой (при $\varphi = \pi$) жестко закреплена неоднородность, имеющая локальные размеры по азимуту и характеризуемая погонными массой m_0 и моментом инерции I_0 относительно поворота вокруг нормали к поверхности оболочки. Данная простейшая модель позволяет провести анализ низкочастотных азимутальных колебаний оболочки и получить выражения для собственных чисел задачи в аналитическом виде.

Рабочие уравнения задачи о собственных колебаниях ЦО получены с помощью принципа наименьшего действия в приближении технической теории оболочек [3] без учета тангенциальных сил инерции оболочки, эти уравнения приведены в работе [4]. Для низкочастотных азимутальных форм колебаний можно получить следующие со-

отношения для симметричных $\Psi_q^{(1)}(\varphi)$ и антисимметричных $\Psi_q^{(2)}(\varphi)$ нормированных собственных функций:

$$\Psi_q^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{D_q^{(1)}}} \left(\cos \frac{\gamma\varphi}{\pi} + \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma\varphi}{\pi} \right),$$

$$\Psi_q^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{D_q^{(2)}}} \left(\sin \frac{\gamma\varphi}{\pi} - \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \operatorname{sh} \frac{\gamma\varphi}{\pi} \right),$$
(1)

где $\gamma = \gamma_q^{(i)}$ — собственные значения — являются корнями характеристических уравнений соответственно для симметричных ($i=1$) и антисимметричных ($i=2$) собственных функций:

$$1 + \alpha \frac{\gamma}{2} [\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{cth} \gamma] = 0 \quad \text{для } i=1,$$
(2)

$$1 + \kappa \frac{\gamma^3}{2\pi^2} [\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{cth} \gamma] = 0 \quad \text{для } i=2,$$

здесь $q=2, 3, 4, \dots$ — номера корней, собственные частоты ЦО равны $\xi_q^{(i)} = \omega_q^{(i)} / \omega_1 = (\gamma_q^{(i)} / \pi)^2$, где $\omega_1 = \omega_0 \beta$, ω_0 — частота пульсирующих колебаний оболочки радиуса a , толщины h , $\beta = h/a\sqrt{12}$ — известный параметр в теории оболочек [3], $\alpha = m_0/M_{об}$ — параметр неоднородности, равный отношению погонных масс неоднородности m_0 и оболочки радиуса a , $\kappa = I_0/M_{об}a^2$ — параметр, характеризующий момент инерции неоднородности. Собственные функции являются ортогональными в смысле выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_q^{(1)}(\varphi) \Psi_r^{(1)}(\varphi) d\varphi + 2\pi\alpha \Psi_q^{(1)} \Big|_{\varphi=-\pi} \Psi_r^{(1)} \Big|_{\varphi=\pi} = \delta_{qr},$$
(3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_q^{(2)}(\varphi) \Psi_r^{(2)}(\varphi) d\varphi + 2\pi\kappa \frac{\partial \Psi_q^{(2)}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} \frac{\partial \Psi_r^{(2)}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi} = \delta_{qr},$$

где δ_{qr} — символ Кронекера. Условия (3) определяют и нормы собственных функций $D_q^{(i)}$ (1). Соотношения (1) — (3) определяют полную ортонормированную систему собственных функций неоднородной ЦО, которая может быть использована в дальнейшем при решении задачи о вынужденных колебаниях и излучении неоднородной ЦО в окружающую упругую среду.

Отметим характерные особенности этой системы. При малых значениях параметров неоднородности $\alpha \ll 1$, $\kappa \ll 1$ решения характеристических уравнений (2) имеют вид

$$\gamma_q^{(1)} \simeq q\pi \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \quad \gamma_q^{(2)} \simeq q\pi \left(1 - \frac{\kappa}{2} q^2 \right).$$
(4)

В пределе $\alpha \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 0$, когда $\sin \gamma = 0$ и $\gamma q^{(i)} \rightarrow q\pi$, имеем $\xi_q^{(1)} = \xi_q^{(2)} = q^2$, $\Psi_q^{(1)} = \cos q\varphi/\sqrt{\pi}$, $\Psi_q^{(2)} = \sin q\varphi/\sqrt{\pi}$. Таким образом, наличие неоднородности приводит к снятию вырождения собственных значений для ЦО, когда собственным функциям типа $\cos q\varphi$ и $\sin q\varphi$ однородной ЦО соответствуют одинаковые собственные частоты. Из соотношений (1) — (4) следует, что масса неоднородности (параметр α) оказывает влияние преимущественно на симметричные формы колебаний, а момент инерции неоднородности (параметр κ) — на антисимметричные; при этом происходит снижение значений собственных частот системы $\xi_q^{(1)} \neq \xi_q^{(2)} < q^2$.

В практически важном случае больших значений параметров $\alpha \gg 1$, $\kappa \gg 1$ решения уравнений (2) имеют вид

$$\gamma_q^{(1)} \simeq \left(q - \frac{1}{4} \right) \pi \left[1 + \alpha^{-1} \pi^{-2} \left(q - \frac{1}{4} \right)^{-2} \right],$$
(5)

$$\gamma_q^{(2)} \simeq \left(q - \frac{3}{4} \right) \pi \left[1 + \beta^{-1} \pi^{-2} \left(q - \frac{3}{4} \right)^{-4} \right].$$

Как показывают соответствующие расчеты, эти асимптотические выражения определяют собственные значения $\gamma_q^{(1)}$, $\gamma_q^{(2)}$ с погрешностью менее 5% для $q=2$ и менее 1%

для $q \gg 3$ в области изменения параметров $\alpha > 0,3$, $\kappa \geq 0,3$ соответственно, что делает их удобными при проведении наглядных расчетов.

Отметим, что влияние тангенциальных сил инерции оболочки приводит к уменьшению собственных значений для симметричных колебаний [2] по сравнению с (4), (5). Так, при $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ это различие составило менее 10% для $q=3$ и менее 5% — для $q=4$; при $\alpha=1$ соответственно 13% и 7%. С ростом номеров q это расхождение уменьшается.

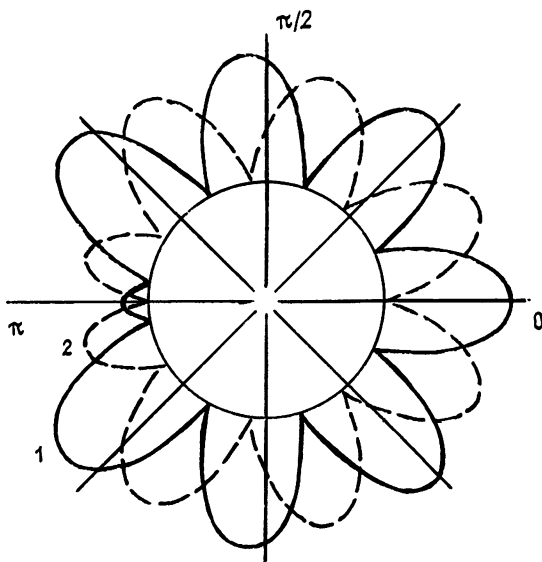


Рис. 1. Собственные формы колебаний неоднородной цилиндрической оболочки при $\alpha = 0,5$, $\kappa = 8 \cdot 10^{-3}$:

1 — симметричная четвертая форма колебаний, 2 — антисимметричная четвертая форма колебаний.

В качестве иллюстрации характера изменения собственных форм колебания под действием неоднородности на графиках рис. 1 приведены модули зависимостей $\psi_{q\zeta}^{(1)}$ (кривая 1) и $\psi_q^{(2)}$ (кривая 2) при $\alpha=0,5$, $\kappa=8 \cdot 10^{-3}$ для $q=4$. Видно, что влияние неоднородности приводит к деформации собственных функций $\psi_q^{(i)}(\varphi)$, по сравнению с однородной ЦО происходит уменьшение расстояний между узлами $\psi_q^{(i)}$ в окрестности неоднородности и снижение амплитуды пучности в точке закрепления массы для $\psi_q^{(1)}(\varphi=\pi)$, а для $\psi_q^{(2)}$ — уменьшение значений производной в точке $\varphi=\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В. М., Шаринов И. А. // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. — М.: Наука, 1966. С. 350.
2. Иванов В. С., Плахов Д. Д. // Инженерный журн. 1963. Т. 3. Вып. 3. С. 482.
3. Вибрации в технике / Под ред. В. В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. Т. 1.
4. Дудник Р. А., Музычук О. В., Фияксель Э. А. // Акуст. журн. 1988. № 5. С. 834.

Горьковский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
26 октября 1987 г.

УДК 538.56

ПРОНИКНОВЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СЕТЧАТУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

Ю. Б. Журавлев, А. В. Тюттин

В отличие от обстоятельно изученных плоских сетчатых экранов сетки сложной