

УДК 537.874

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДИФРАКЦИИ ВОЛН В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Ю. М. Айвазян, В. А. Созинов

Предложено феноменологическое описание многоволновой дифракции на периодических и неоднородных структурах без потерь с использованием представления матрицы рассеяния S в форме, которая позволяет в явном виде выделить аналитические особенности (корневые ветвления, полюсы и нули). Показано, что формализм K -матрицы Гайтлера дает возможность рассматривать качественно суперпозицию пороговых и резонансных особенностей при дифракции волн без решения граничных задач.

1. Как известно, амплитуды и фазы электромагнитных или акустических волн при дифракции на периодических или неоднородных структурах (дифракционные решетки, слоистые среды и др.) испытывают резкие изменения в некоторых достаточно узких спектральных или угловых интервалах. К наблюдаемым особенностям относятся а) пороговые (рэлеевские) особенности, соответствующие образованию или исчезновению спектров однородных волн [1, 2], и б) резонансные, связанные с переотражением волн в элементах периодической структуры в условиях множественного рассеяния [3-5]. Особенности второго типа могут быть также связаны с возникающими вблизи поверхности структуры комплексными волнами или поверхностными плазмонами [6]. В зависимости от конкретных условий (геометрии структуры, ее диэлектрических свойств и др.), эти особенности могут быть как разделены по частоте или углу падения волны, так и почти совпадать.

Пороговые и резонансные явления связаны с аналитическими особенностями амплитуд и фаз дифрагированных волн на комплексной плоскости частоты или угла падения волны, а именно с корневыми ветвлениями и простыми полюсами. В ряде случаев большое влияние на наблюдаемые явления оказывают нули комплексных амплитуд. Суперпозиция отмеченных выше особенностей может привести к более сложному поведению амплитуд и фаз дифрагированных волн, нежели изолированные пороговые или резонансные особенности, например, когда один из полюсов или нулей находится вблизи от пороговой точки.

В настоящей работе показано, что применение методов, аналогичных используемым в теории многоканальных ядерных реакций, позволяет качественно правильно описать все особенности в дифракции волн без решения граничных задач. При таком подходе используются соотношения общего характера, такие, как унитарность, взаимность, аналитические свойства матрицы рассеяния, существование пороговых параметров, периодические и асимптотические свойства решений. Подобное описание оказывается полезным при рассмотрении особенностей комплексных амплитуд волн, рассеянных структурами без потерь. Например, использование феноменологических методов позволило предсказать возможность полного отражения энергии в одну из двух пространственных гармоник спектра эшелетта без применения режима автоколлимации [7].

2. Для описания дифракционных явлений может быть использовано представление матрицы рассеяния S в форме, которая позволяет в явном виде выделить аналитические особенности матричных элементов (корневые ветвления, полюсы и нули) [8-10]. Для системы без потерь, в которой при данных условиях (заданных значениях частоты или угла падения волны) распространяющимися являются N волн (имеется N открытых каналов); блок матрицы S , связанный с однородными волнами, унитарен и имеет порядок $N \times N$. Он может быть представлен в виде

$$S = \zeta^{1/2} R \zeta^{-1/2} = (1 - i\zeta^{1/2} K \zeta^{1/2}) (1 + i\zeta^{1/2} K \zeta^{1/2})^{-1}, \quad (1)$$

где ζ — действительная диагональная матрица порядка $N \times N$, составленная только из корневых пороговых параметров открытых каналов. Например, в случае дифракции плоских электромагнитных волн на одномерной отражательной дифракционной решетке диагональные элементы матрицы ζ имеют вид $\zeta_n = \sqrt{k_0^2 - \kappa_n^2}$ ($\kappa_n^2 < k_0^2$), где $\kappa_n = k_0 \sin \theta_i + 2\pi n/d$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$, $k_0 = 2\pi/\lambda$, d — период решетки, θ_i — угол падения волны, λ — длина волны в свободном пространстве, R — матрица коэффициентов трансформации падающих на периодическую структуру волн в уходящие волны, K — эрмитова матрица порядка $N \times N$, не имеющая корневых особенностей. При представлении в виде (1) матрица S автоматически оказывается унитарной и имеет правильные аналитические свойства при переходе через порог. Когда S -матрица симметрична (например, при дифракции на решетках с симметричным профилем штрихов), K -матрица также симметрична и действительна.

Связь K -матриц порядков $(N-1) \times (N-1)$ и $N \times N$, соответственно, до и после порога открытия N -го канала осуществляется через приведенную матрицу K_r [10]. Запишем матрицы S , K , ζ в виде

$$S = \begin{pmatrix} S_\alpha & S_\beta \\ \tilde{S}_\beta & S_\gamma \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_\alpha & K_\beta \\ \tilde{K}_\beta & K_\gamma \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_\alpha & 0 \\ 0 & \zeta_\gamma \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где индекс α относится к открытым каналам, а γ — к закрытым, причем $\text{Im } \zeta_\alpha = 0$, $\zeta_\gamma = i|\zeta_\gamma|$. Для $N-1$ открытых каналов S_α -матрица порядка $(N-1) \times (N-1)$, S_β и \tilde{S}_β — $(N-1)$ -мерные вектор-столбец и вектор-строка, S_γ — скаляр (знак тильды над вектором означает операцию транспонирования, а знак «+» — операцию эрмитова сопряжения). Для L закрытых каналов S_α -матрица порядка $(N-L) \times (N-L)$, S_β -матрица порядка $(N-L) \times L$, S_γ -матрица порядка $L \times L$. То же самое относится и к порядкам ζ - и K -матриц. Поскольку соотношение унитарности справедливо только для открытых каналов ($S_\alpha^+ S_\alpha = 1$), из (1) и (2) для S_α найдем

$$S_\alpha = \zeta_\alpha^{1/2} R_\alpha \zeta_\alpha^{-1/2} = (1 - i\zeta_\alpha^{1/2} K_r \zeta_\alpha^{1/2}) (1 + i\zeta_\alpha^{1/2} K_r \zeta_\alpha^{1/2})^{-1}, \quad (3)$$

где K_r — приведенная K -матрица для случая $N-1$ открытых каналов. Эта K_r -матрица имеет тот же порядок, что и матрица K_α , и связана с полной K -матрицей, которая относится как к открытым, так и к закрытым каналам следующим образом:

$$K_r = K_\alpha - iK_\beta \zeta_\gamma (1 + iK_\gamma \zeta_\gamma)^{-1} \tilde{K}_\beta. \quad (4)$$

Приведенная K_r -матрица ниже порога открытия N -го канала ($\zeta_\gamma^2 < 0$) действительна: $K_r = K_\alpha + K_\beta |\zeta_\gamma| (1 - K_\gamma |\zeta_\gamma|)^{-1} \tilde{K}_\beta$, а выше порога ($\zeta_\gamma^2 > 0$) — комплексна. Матрица K_r не имеет непрерывной производной на пороге открытия нового канала, когда $\zeta_\gamma = 0$, так как при переходе через порог $i|\zeta_\gamma|$ переходит в ζ_γ .

Из (1) и (3) следует, что поведение S -матрицы выше порога открытия N -го канала определяется матрицей ζ (ζ содержит корневой пороговый параметр ζ_ν). Ниже порога поведение матрицы S определяется приведенной K_r -матрицей. При этом полная K -матрица вещественна, она является функцией ζ_ν^2 на всей действительной оси и не имеет корневых пороговых особенностей (разрыв на разрезе дается только мнимой частью матрицы). Зная аналитическое поведение элементов K -матрицы выше порога открытия N -го канала, с помощью соотношений (3), (4) и аналитического продолжения элементов K -матрицы в область ниже порога можно найти значения элементов S -матрицы на всей действительной оси.

Как следует из (1), все матричные элементы S имеют одни и те же точки ветвлений и одни и те же полюсы (когда $\det(1 + i\zeta^{1/2}K\zeta^{1/2}) = 0$), но нули различных матричных элементов S могут быть различными.

Отметим, что резонансные особенности в многоканальной системе, связанные с полюсами S -матрицы, могут определяться как полюсами полной K -матрицы при некоторых действительных значениях частоты или угла падения волны, общими для всех элементов K , так и полюсами приведенной K_r -матрицы, причем в K_r -матрице появляются дополнительные полюсы ($\det(1 + iK_r\zeta_\nu) = 0$), которые связаны с возникновением резонансов в закрытых каналах («виртуальные резонансы»). Механизм образования таких резонансов связан с возникающими вблизи поверхности структуры комплексными волнами или поверхностными плазмонами, поле которых при их распространении вдоль периодической структуры экспоненциально убывает вследствие потерь энергии на излучение.

Поведение элементов матрицы рассеяния S вблизи от пороговой точки $\zeta_\nu = 0$ можно найти, проводя разложение S по малой ветвящейся величине ζ_ν . Из соотношения (3) для матрицы S_α получим

$$S_\alpha = S^{(0)} - i|\zeta_\nu|S^{(0)}B/2 \quad \text{до порога,}$$

$$S_\alpha = S^{(0)} \quad \text{на пороге,}$$

$$S_\alpha = S^{(0)} - \zeta_\nu S^{(0)}B/2 \quad \text{после порога,}$$

где $S^{(0)} = (1 - i\zeta_\alpha^{1/2}K_\alpha\zeta_\alpha^{1/2})(1 + i\zeta_\alpha^{1/2}K_\alpha\zeta_\alpha^{1/2})^{-1}$ — значение матрицы S на пороге (при $\zeta_\nu = 0$). Матрица B имеет вид $B = \zeta_\alpha^{-1/2}\tilde{R}_\beta^{(0)} + \tilde{R}_\beta^{(0)}\zeta_\alpha^{-1/2}$, где $\tilde{R}_\beta^{(0)} = -2i\tilde{K}_\beta\zeta_\alpha^{1/2}(1 + i\zeta_\alpha^{1/2}K_\alpha\zeta_\alpha^{1/2})^{-1}\zeta_\alpha^{1/2}$ — вектор, состоящий из коэффициентов трансформации волн из открытых каналов α во вновь открывающийся канал с индексом β на пороге. Достаточным условием для появления корневых особенностей является отличие матрицы $S^{(0)}B$ от нуля. В случае близкого расположения одного из полюсов матрицы рассеяния S_α от пороговой точки $\zeta_\nu = 0$ характер поведения всех элементов матрицы коэффициентов трансформации волн вблизи порога открытия нового канала также является корневым.

Отметим, что в представлении (1) матрицу K можно записать в более общем виде: $K = \zeta^l K' \zeta^l$, где матрица K' также действительна и симметрична, а $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Элементы K -матрицы для каждого конкретного случая, в принципе, можно найти в явном виде, решая граничные задачи дифракции.

3. Применим представление (1) к случаю двух открытых каналов, т. е. к системам, которые являются четырехполюсниками. Рассмотрим, например, падение плоской ТЕ-поляризованной электромагнитной волны (электрический вектор перпендикулярен плоскости падения) на однородный диэлектрический слой толщины h с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , расположенный между двумя полупространствами с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 . Матрица рассеяния S в (1) является двухрядной, а матрицы ζ и K для волны, падающей из сре-

ды с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 под углом θ_i относительно нормали к поверхности слоя, имеют вид

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \quad K = (\zeta_2 \sin(\zeta_2 h))^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\zeta_2 h) & 1 \\ 1 & \cos(\zeta_2 h) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\zeta_i = \sqrt{k_0^2 \epsilon_i - \kappa^2}$, $i=1, 2, 3$, $\kappa = k_0 \epsilon_1 \sin \theta_i$ — проекции волновых векторов на плоскости границ раздела сред. В случае ТМ-поляризации ζ_i следует заменить на ζ_i/ϵ_i . Из (5) видно, что матрица K симметрична, является функцией ζ_3^2 и не имеет пороговой особенности при переходе через порог полного внутреннего отражения, когда $\zeta_3=0$. Приведенная матрица K_r содержит один элемент и имеет вид

$$K_r = \frac{\zeta_2 - i\zeta_3 \operatorname{tg}(\zeta_2 h)}{\zeta_2 (\zeta_2 \operatorname{tg}(\zeta_2 h) + i\zeta_3)}. \quad (6)$$

Из (3) и (6) для энергетического коэффициента отражения волны от слоя R_{TE} до порога полного внутреннего отражения ($\zeta_3=0$) найдем

$$R_{TE} = |S_\alpha|^2 = \frac{\zeta_2^2 (\zeta_1 - \zeta_3)^2 + (\zeta_1 \zeta_3 - \zeta_2^2)^2 \operatorname{tg}^2(\zeta_2 h)}{\zeta_2^2 (\zeta_1 + \zeta_3)^2 + (\zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2^2)^2 \operatorname{tg}^2(\zeta_2 h)}.$$

После порога величина ζ_3 становится мнимой и $R_{TE}=1$. Зависимость величины R_{TE} от $\sin \theta_i$ для $\epsilon_1=4$, $\epsilon_2=3$, $\epsilon_3=2,8$ показана на рис. 1.

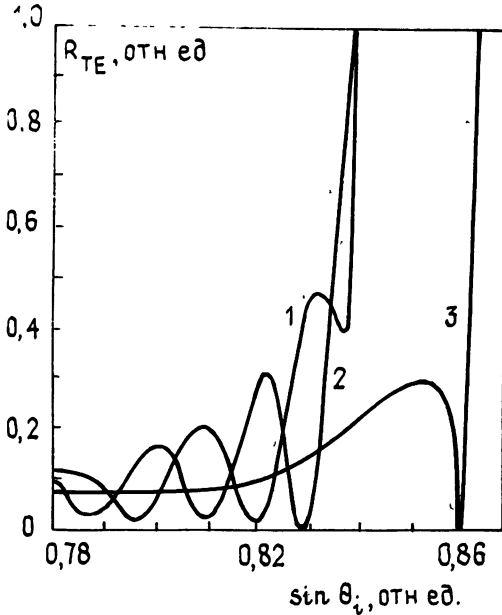


Рис. 1.

График зависимости величины R_{TE} от $\sin \theta_i$ для $\epsilon_1=4$, $\epsilon_2=3$, $\epsilon_3=2,96$, $h/\lambda=1,2$ приведен на рис. 1 (кривая 3).

4. Примером случая N -волновой дифракции, допускающим решение граничной задачи в замкнутой форме, является рассеяние плоских монохроматических электромагнитных волн на одномерной идеально проводящей отражательной решетке с прямоугольным профилем штрихов [3, 4]. Матрицу $R_{n'n}$ -коэффициентов трансформации волн, падающих на решетку под углами $\sin \theta_n = \sin \theta_i + n\lambda/d$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в дифрагированные волны порядка n' можно привести к виду

$$R = (1 - iK\zeta)(1 + iK\zeta)^{-1} = -1 + 2(\zeta + iK')^{-1}\zeta, \quad K' = \zeta K \zeta. \quad (7)$$

Диагональная матрица ζ построена из нормальных к плоскости решет-

ки постоянных распространения волн $\xi_{n'n} = \xi_n \delta_{n'n}$, где $\xi_n = \sqrt{k_0^2 - x_n^2}$, $|\sin \theta_n| \leq 1$ для однородных волн и $\xi_n = i|\xi_n|$, $|\sin \theta_n| > 1$ — для неоднородных волн. Элементы матрицы K' имеют вид

$$K'_{n'n} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}^* C_m A_{mn}, \quad (8)$$

где

$$A_{mn}^{(TM)} = \begin{cases} \frac{2}{d} (-1)^{m/2} \sin\left(\frac{x_n a}{2}\right) \frac{x_n \cos(\xi_m h)}{x_n^2 - (m\pi/a)^2}, & m=2k \\ \frac{2i}{d} (-1)^{(m+1)/2} \cos\left(\frac{x_n a}{2}\right) \frac{x_n \cos(\xi_m h)}{x_n^2 - (m\pi/a)^2}, & m=2k+1 \end{cases},$$

$$A_{mn}^{(TE)} = \begin{cases} \frac{2i}{d} (-1)^{m/2} \sin\left(\frac{x_n a}{2}\right) \frac{(m\pi/a) \sin(\xi_m h)}{x_n^2 - (m\pi/a)^2}, & m=2k \\ \frac{2}{d} (-1)^{(m+1)/2} \cos\left(\frac{x_n a}{2}\right) \frac{(m\pi/a) \sin(\xi_m h)}{x_n^2 - (m\pi/a)^2}, & m=2k+1 \end{cases},$$

$k=0, 1, 2, \dots$, $\xi_m = \sqrt{k_0^2 - (m\pi/a)^2}$, $m\lambda/2a \leq 1$ и $\xi_m = i|\xi_m|$, $m\lambda/2a > 1$, h и a — соответственно глубина и ширина штрихов решетки. Величины C_m действительны и имеют смысл импеданса для поля в штрихах решетки:

$$C_m = \begin{cases} -\xi_m \operatorname{tg}(\xi_m h) & \text{— ТМ-поляризация,} \\ \xi_m \operatorname{ctg}(\xi_m h) & \text{— ТЕ-поляризация.} \end{cases}$$

Энергетические коэффициенты отражения волны, падающей на решетку под углом θ_i , в дифрагированные волны порядка n определяются квадратами матричных элементов S : $|S_{n,0}|^2 = (\xi_n/\xi_0) |R_{n,0}|^2$.

Матрицы R , K' , ξ и связанная с ними матрица рассеяния S бесконечномерны. Блоки S_α и ξ_α матрицы рассеяния S и матрицы ξ , связанные с однородными волнами, имеют порядок $N \times N$, где N — число однородных дифрагированных волн. Элементы матрицы ξ_α действительны, а матрица S_α унитарна и удовлетворяет условию взаимности. Из соотношения (8) следует, что матрица K' действительна и не имеет корневых пороговых особенностей, соответствующих появлению или исчезновению дифрагированных волн. Положение полюсов матрицы S_α определяется уравнением $\det(\xi_\alpha + iK'_\alpha) = 0$, где $K'_\alpha = K'_\alpha - K'_\beta (|\xi_\beta| + K'_\beta)^{-1} \tilde{K}'_\beta$.

На рис. 2 показана траектория движения одного из полюсов матрицы S (порядка 2×2) на плоскости $(\sin \theta_i, \lambda/d)$ в случае, когда имеются две однородные дифрагированные волны ($n = -1, 0$). Штриховая линия — граница области распространения гармоники $n = -2$. Результаты расчета зависимости коэффициентов отражения $|S_{n,0}|^2$ пространственных гармоник порядков $n = -2, -1, 0$ от длины волны при дифракции ТМ-поляризованной волны на решетке с параметрами $h/d = 0,7$, $a/d = 0,43$ приведены на рис. 3. Значения углов θ_i соответствуют положению точек на траектории движения полюса матрицы S_α , когда порог возникновения волны $n = -2$ приближается к резонансной ос-

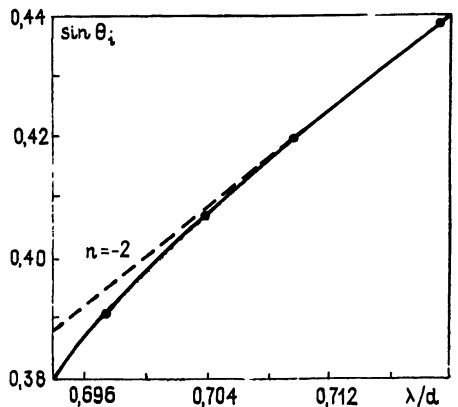


Рис. 2.

бенности. При расчетах бесконечная система уравнений (7) заменена конечной системой ($|n| \leq 10$, $m \leq 10$). Точность полученных решений при этом составляет 10^{-3} . Учет неоднородных пространственных гармоник более высокого порядка не приводит к существенному повышению точности, поскольку переход к большим значениям n и m сопровождается быстрым уменьшением амплитуды пространственных гармоник в направлении нормали к плоскости решетки. Резонансное поведение коэффициентов отражения, связанное с возбуждением интенсивных колебаний электромагнитного поля в элементах периодической структуры, рассматриваемых как открытые резонаторы в условиях множественного рассеяния, определяется резонансным поведением элементов K -матрицы. Вблизи порога появления пространственной гармоники $n = -2$ ширина резонанса не является постоянной, а интенсивность корневой пороговой особенности при резонансе резко возрастает.

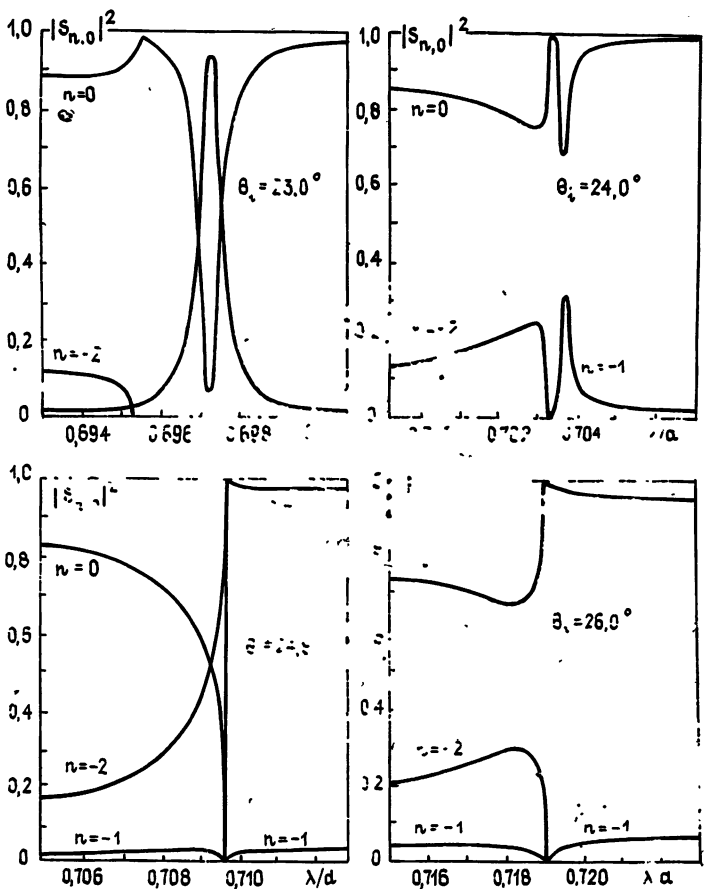


Рис. 3.

Рассмотренное феноменологическое описание пороговых и резонансных особенностей дифракции волн показывает, что комплексные амплитуды однородных волн имеют корневое поведение на пороге появления или исчезновения волны нового порядка также и вблизи резонансной особенности. Приведенные примеры показывают, что элементы K -матрицы не имеют корневых особенностей на порогах, что позволяет находить пороговое поведение элементов S -матрицы, задавая значения матрицы феноменологическими параметрами.

Выше при рассмотрении дифракции электромагнитных волн на неоднородных и периодических структурах не учитывались потери энергии в среде. В случае потерь энергии блок матрицы рассеяния S ,

связанный с однородными волнами, не является унитарным, а K -матрица эрмитовой. Учет поглощения энергии в среде (дифракционные решетки с конечной проводимостью и др.) требует введения новых феноменологических параметров, не имеющих аналогов в теории многоканальных ядерных реакций. Этот вопрос представляет определенный интерес и будет рассмотрен в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б. М., Лебедев А. Н. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. № 10. С. 1349.
2. Айвазян Ю. М., Болотовский Б. М. // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 2. С. 145.
3. Andrewartha J. R., Fox J. R., Wilson I. J. // Optica Acta. 1979. V. 26. № 1. P. 69.
4. Fox J. R. // Optica Acta. 1980. V. 27. № 3. P. 289.
5. Урусовский И. А. // ДАН СССР. 1960 Т. 131. № 4. С. 801.
6. Sheng P., Stepleman R. S., Sanda P. N. // Phys. Rev. B. 1982. V. 26. № 6. P. 2907.
7. Maystre D., Cadilhac M., Chandezon J. // Optica Acta. 1981. V. 28. № 4. P. 457.
8. Heitler W. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1941. V. 37. P. 291.
9. Wigner E. P. // Phys. Rev. 1946. V. 70. P. 15.
10. Далиц Р. Странные частицы и сильные взаимодействия. — М.: ИЛ, 1964. С. 87.
11. Айвазян Ю. М., Созинов В. А. // Тезисы докл. IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси, 1985. Т. 1. С. 266.

Научно-производственное объединение
«Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений»

Поступила в редакцию
20 июля 1987 г.

PHENOMENOLOGICAL DESCRIPTION OF WAVE DIFFRACTION SINGULARITIES IN THE ELECTRODYNAMICS OF PERIODIC AND INHOMOGENEOUS MEDIA

Yu. M. Aivazyan, V. A. Sozinov

A phenomenological description of multiwave diffraction by periodic and inhomogeneous loss-free structures using the scattering-matrix S in the form which allows one explicitly distinguish various analytical singularities (square-root branch points, poles and zeros) is proposed. The Heitler K -matrix formalism makes it possible to consider the superposition of threshold and resonance anomalies without solution of boundary problems.
