

УДК 537.876.23

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В БЛИЗИ ВЕРХНЕГО ГИБРИДНОГО РЕЗОНАНСА ($\omega_r < 2\omega_H$)

И. В. Еремина, Ю. Я. Яшин

Исследована линейная трансформация волн при поперечном распространении в магнитоактивной плазме в окрестности верхнего гибридного резонанса. Найдены и оценены коэффициенты трансформации волн при прохождении ими плазменной неоднородности, внутри которой выполнено условие пространственного синхронизма. Рассмотрение проведено в асимптотическом приближении с сохранением главных членов асимптотики для случаев наличия внутри плазменной неоднородности одной и двух точек синхронизма (при наличии и в отсутствие точек поворота).

Учет влияния взаимной трансформации электромагнитных плазменных волн при распространении в неоднородной плазме представляет интерес при анализе ряда важных физических процессов (нагрев плазмы в лабораторных установках [1, 2], возникновение ионосферных неоднородностей и интерпретация их тонкой структуры [3], наблюдение радиоэха с аномально большими задержками [4] и др. [12]). При рассмотрении указанных задач используется, как правило, приближение квазиэлектростатики [1, 5, 6].

В данной работе анализируется вопрос о взаимной трансформации волн при поперечном распространении в магнитоактивной плазме в окрестности верхнего гибридного резонанса:

$$\omega \approx \omega_r = (\omega_p^2 + \omega_H^2)^{1/2},$$

где ω_p — ленгмюровская частота, ω_H — гирочастота электронов. Причем здесь приближение квазиэлектростатики не используется.

Найдены и оценены коэффициенты трансформации волн при прохождении ими плазменной неоднородности, внутри которой выполнено условие пространственного синхронизма $n_1 - n_2 = 0$ ($n_{1,2}$ — показатели преломления плазменной и электромагнитной волн). Показано, что волны могут достаточно эффективно возбуждать друг друга.

1. Рассмотрение проведем обычным образом на основе квазигидродинамического подхода. Исходная линеаризованная система уравнений имеет вид [7, 8]

$$-mi\omega v = eE + (e/c)[vH_0] - \xi\kappa T \nabla N_1/N_0, \quad (1)$$

$$-i\omega N_1 + \operatorname{div} N_0 v = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = (\omega^2/c^2) E + 4\pi i\omega j/c^2,$$

где m , e , v — масса, заряд, скорость движения электронов, связанная с возмущением*, N_0 и N_1 — концентрация равновесной плазмы и возмущение ее, E — напряженность электрического поля, j — плотность тока, ω — частота волны, κ — постоянная Больцмана, T — температура. Внешнее магнитное поле H_0 направлено вдоль оси z , изменение электронной концентрации — вдоль оси x . Считаем, что возмущенные вели-

* Рассматриваются высокочастотные волны, и движением ионов можно пренебречь.

чины изменяются по закону $\exp(-i\omega t)$, а волна распространяется вдоль оси x . Предполагаем также, что столкновительного затухания нет (пренебрегаем соударениями) и отсутствует бесстолкновительное затухание (волна распространяется в направлении, перпендикулярном магнитному полю). Воспользовавшись (1) и выражением $\mathbf{j} = -eN_0\mathbf{v}$, получаем систему уравнений для E_x, E_y :

$$\begin{aligned}\xi \beta^2 \frac{d^2 E_x}{dx^2} + k_0^2 [(1-u-v)E_x + iv\sqrt{u}E_y] &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dx^2} + k_0^2 [-i\sqrt{u}E_x + (1-v)E_y] &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\beta^2 = v_T^2/c^2$ (v_T — тепловая скорость электронов), $k_0 = \omega/c$, $v = \omega_p/\omega^2$, $u = \omega_H^2/\omega^2$. Коэффициент ξ при слагаемом, учитывающем тепловое движение в (1), может быть найден из сравнения с кинетическим рассмотрением. Для интересующего нас случая $\omega \approx \omega_r$ при поперечном распространении имеем $\xi = 3v/(1-4u)$ при $1-4u < 0$, $1 \neq 4u$ [7].

Полагая среду плавнонеоднородной ($k_0 L \gg 1$, L — характерный масштаб неоднородности среды), будем отыскивать асимптотическое решение исходной задачи с точностью до членов $1/k_0$ (см. [10]) в виде

$$E = E_1 \exp(ik_0\varphi_1) + E_2 \exp(ik_0\varphi_2), \quad (3)$$

где $\varphi_{1,2} = \int n_{1,2}(x) dx$ — эйконалы медленной и быстрой волн, $E_{1,2}$ — амплитуды их полей. Отыскание полей в этом приближении проводится с геометрооптической точностью, т. е. справедлив закон сохранения потока энергии полного поля в лучевой трубке («геометрическая оптика взаимодействующих волн»). Если вне областей трансформации ($\Delta n \sim n_{1,2}$) геометрическая оптика справедлива ($\lambda_0/L \ll 1$), то очевидно, что внутри областей трансформации используемое приближение тем более оправдано, поскольку $\lambda = \lambda_0/n \ll \lambda_0$ в силу $n \gg 1$.

Показатели преломления волн $n_{1,2}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}n_{1,2} &= \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_{11} - b_{22}}{2}\right)^2 + b_{12}b_{21}}, \\ b_{11} &= (1-u-v)/\gamma, \quad b_{22} = 1-v, \quad b_{12} = iv\sqrt{u}/\gamma, \\ b_{21} &= -i\sqrt{u}, \quad \gamma = \xi\beta^2 = 3v\beta^2/(1-4u).\end{aligned}\quad (4)$$

Амплитуды полей представим в виде $E_{1,2} = \Phi_{1,2} f_{1,2}$, где для $f_{1,2}$ справедливо

$$\frac{f_{1,2}(x)}{b_{12}} = f_{1,2}(y) \left[\frac{b_{22} - b_{11}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_{22} - b_{11}}{2}\right)^2 + b_{12}b_{21}} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Дальнейшая процедура аналогична [10, 11]. Подстановка в (2) соотношений (3) для попутных волн с разложенными в асимптотические ряды по $1/k_0$ амплитудными множителями в различных приближениях по $1/k_0$ дает системы уравнений для полей нулевого, первого и т. д. приближений. Система нулевого приближения с учетом (4), (5) удовлетворяется тождественно, а из условий совместности уравнений первого приближения получаем систему связанных уравнений для амплитудных множителей:

* Компонента E_z отвечает обыкновенной волне, не имеет особенностей [9] и ниже не рассматривается.

$$\frac{dA_1}{dx} - A_2 \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{f_{1(y)} f'_{2(y)}}{f_{2(y)}(n_1^2 - n_2^2)} \exp[-ik_0(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dA_2}{dx} + A_1 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \frac{f_{2(y)} f'_{1(y)}}{f_{1(y)}(n_1^2 - n_2^2)} \exp[ik_0(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0,$$

$$A_1 = \Phi_1 \gamma \sqrt{n_1} f_{1(y)} (n_1^2 - n_2^2), \quad A_2 = \Phi_2 \gamma \sqrt{n_2} f_{2(y)} (n_1^2 - n_2^2).$$

Уравнения (6) пригодны в областях как квазистатики, так и волновых полей, т. е. позволяют описать непрерывный переход волновых полей через резонансную область без привлечения дополнительной процедуры квазистатического рассмотрения с неизбежным сшиванием волновых и квазистатических полей в промежуточной области. Уравнения (6) описывают амплитуды полей (2) с точностью до членов $1/k_0$. Поэтому, отыскивая ниже решения (6) с указанной точностью ($1/k_0$), мы с той же точностью получаем решение исходной задачи (2).

2. Выражение под радикалом в (4) с учетом явного вида b_{ij} и приведенных выше неравенств запишется в виде

$$\left[\frac{(1-u-v)(1-4u)}{6v\beta^2} - \frac{1-v}{2} \right]^2 + \frac{u(1-4u)}{3\beta^2} \approx \left[\frac{(1-u-v)(1-4u)}{6v\beta^2} \right]^2 - \frac{(1-u-v)(1-4u)(1-v)}{6v\beta^2} + \frac{u(1-4u)}{3\beta^2}. \quad (7)$$

Наиболее интересной особенностью в зависимости $n_{1,2}^2(v)$ здесь является наличие двух вещественных ветвей в области $v > v_s$ *. Точка $v = v_s$ является точкой трансформации нормальных волн. В области $v_0 < v < v_s$ $\operatorname{Re} n_{1,2}^2 > 0$, а в точке поворота для обеих волн $v = v_0$ $\operatorname{Re} n_{1,2}^2(v_0) = 0$. Наряду с этим в точке $v = v_{\pi}$ нижняя ветвь дисперсионной кривой также имеет точку поворота $n_2^2(v_{\pi}) = 0$.

Рассмотрим неоднородную плазму с минимумом электронной концентрации в точке $v = v_m$. Зависимость $n_{1,2}^2(x)$ для случая $v_s = v_m$ приведена на рис. 1a, а для случая $v_m < v_s$ — на рис. 1б. В этом случае имеются две точки трансформации x_{s1}, x_{s2} , отвечающие значению $v = v_s$ (ниже полагаем, что $v_m > v_0$, т. е. в области $x_{s1} < x < x_{s2}$ нет точки поворота).

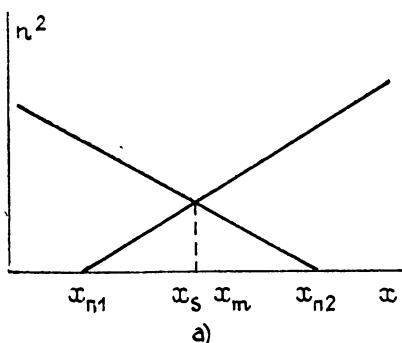
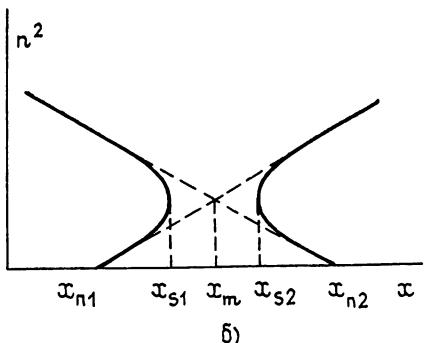


Рис. 1.



Заметим, что вблизи области трансформации электромагнитная волна обладает нормальной, а плазменная аномальной дисперсией.

* На эту особенность впервые указал Гершман [7] (см. также [8, 9]).

Представим параметр v в виде $v=v_m+\Delta$, где $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$, расстройка $\Delta_1=|v_r-v_m|$, v_r определяется из условия $1-u-v_r=0$, а Δ_2 отвечает расстройке v от точки $v=v_r$. При этом выражение (7) можно свести к виду

$$\frac{(1-4u)^2}{36\beta^4 v_m^2} \left[-\frac{2\Delta}{v_m} (1-u-v_m)^2 - 2\Delta(1-u-v_m) + \frac{4\Delta^2}{v_m} (1-u-v_m) \right] \approx \frac{(1-4u)^2}{18\beta^4 v_m^2} \Delta^2.$$
 (7а)

(Здесь учтено, что $\Delta_1 \sim \Delta_2$, $\Delta_1 \gg \Delta_1^2$, $\Delta_2 \gg \Delta_2^2$.)

Случаи, приведенные на рис. 1а, б, могут быть рассмотрены на примере гиперболической зависимости $n^2(v)$. Уравнение гиперболы $y=\pm b\sqrt{x^2/a^2-1}$ в системе координат (v, n^2) (см. рис. 2) имеет вид

$$n^2 = n_0^2 \pm \sqrt{[(b/a)\tilde{v}]^2 - b^2}, \quad (8)$$

где $\tilde{v}=v-v_m$. Записанное выражение соответствует случаю, приведенному на рис. 1б. А случаю, приведенному на рис. 1а, отвечает зависимость

$$n^2 = n_0^2 \pm \sqrt{[(b/a)\tilde{v}]^2 - b^2} = n_0^2 \pm (b/a)\tilde{v}. \quad (9)$$

Из сравнения выражений (4), (8), (9) с учетом (7 а) имеем

$$\begin{aligned} n_0^2 &= \frac{1-u-v_m}{2\gamma} + \frac{1-v_m}{2} \approx \\ &\approx \frac{(1-u-v_m)(1-4u)}{6\beta^2 v_m}, \\ \frac{b}{a} &= \frac{\sqrt{2}(1-4u)}{6\beta^2 v_m}, \\ b &= \frac{\sqrt{2}(1-4u)}{6\beta^2}. \end{aligned}$$

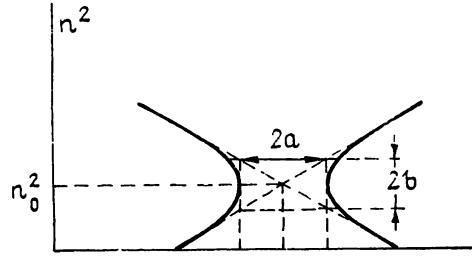


Рис. 2.

Значение $v=v_s$ определяется из равенства нулю соотношения (7). В случае, приведенном на рис. 1а, v_s совпадает с v_m . Для второго случая v_s находится аналогично при некотором заданном значении v_m ($v_0 < v_m < v_s$).

Задавая конкретные зависимости $\Delta(x)$ при учете выражений (4), (5), (7) — (9), можно отыскать решения системы уравнений (6).

3. Вычислим компоненты матрицы трансформации S_{ij} , которая определяется соотношением

$$A_i(x) = S_{ij} A_j(x_n)$$

(где x_n — координата начальной точки выхода волн). Ниже везде полагаем, что $|x_n - x_s| \gg \bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$). Расчет проведем аналогично [11], принимая во внимание, что в точках x_s ($n_1(x_s) = n_2(x_s)$) происходит поляризационное вырождение. В этих точках наряду с наличием точки пространственного синхронизма в показателях экспонент коэффициентов уравнений (6) сами коэффициенты уравнений (6) имеют полюсы.

Рассмотрим случай, приведенный на рис. 1а. Пусть сначала ниж-

ние ветви волны «2» не доходят до точек поворота $x_{\text{п1}}, x_{\text{п2}}$ (либо рассматривается область переменных $x_{\text{п1}} < x < x_{\text{п2}}$, либо считается, что начиная со значений v , удовлетворяющих неравенству $v_m < v < v_{\text{п}}$, сюда становится однородной). Для этого случая в (7а) следует положить $\Delta(x) = \varepsilon(x - x_m)$.

Полюсы в коэффициентах системы (6) имеют первый порядок, и для коэффициентов трансформации находим (см. [11])

$$S_{12} = \frac{\Gamma}{\sqrt{i k_0}} \frac{(1-u)^2 - v_m^2 - v_m(1-u)(\sqrt{2}-1)}{v_m^2} \exp(-ik_0\psi_s) + O_1\left(\frac{1}{k_0}, A_2\right), \quad (10)$$

$$S_{21} = \frac{\Gamma}{\sqrt{-ik_0}} \frac{(1-u)(\sqrt{2}-1) + 3v_m}{v_m} \exp(ik_0\psi_s) + O_2\left(\frac{1}{k_0}, A_1\right),$$

где

$$\psi_s = \varphi_1(x_s) - \varphi_2(x_s), \quad \Gamma = \sqrt{\frac{\pi \beta \varepsilon}{(1-u-v_m)^{3/2}}} \sqrt{\frac{3v_m}{1-4u}}.$$

Рассматривая аналогичный случай (отсутствие точек $x_{\text{п1}}, x_{\text{п2}}$), представленный на рис. 1 б, в (7 а) положим $\Delta(x) = \varepsilon^2(x-x_m)^2$. Тогда, как и в предыдущем случае, полюсы в коэффициентах системы (6) имеют первый порядок, а коэффициенты трансформации $\tilde{S}_{12, 21}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{12} = & [1 + S_{12}(x_{s1}) + S_{12}(x_{s2}) + S_{21}(x_{s1})S_{12}(x_{s2})] \times \\ & \times \exp\left\{k_0 \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \operatorname{Im}[n_1(x) - n_2(x)] dx\right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{21} = & [1 + S_{21}(x_{s1}) + S_{21}(x_{s2}) + S_{12}(x_{s1})S_{21}(x_{s2})] \times \\ & \times \exp\left\{-k_0 \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \operatorname{Im}[n_1(x) - n_2(x)] dx\right\}, \end{aligned}$$

причем модули коэффициентов трансформации $S_{12, 21}$ в точках x_{s1} и x_{s2} имеют вид

$$|S_{12}| = \sqrt{\frac{\pi \beta \varepsilon}{k_0}} \sqrt{\frac{3(1-u-v_m)}{(1-4u)2v_m v_s}} \frac{1-u-\sqrt{2}v_s}{4v_s}, \quad (11 \text{ a})$$

$$|S_{21}| = \sqrt{\frac{\pi \beta \varepsilon}{k_0}} \sqrt{\frac{3(1-u-v_m)}{(1-4u)2v_m v_s}} \frac{1-u+\sqrt{2}v_s}{4v_s}.$$

Рассмотрим вариант, когда присутствуют точки $x_{\text{п1}}$ и $x_{\text{п2}}$. Остановимся на случае, приведенном на рис. 1 а. Волна «2», вышедшая из точки $x_{\text{п}}$, частично трансформируется в точке x_m в волну типа «1» (S_{12}^1). Оставшаяся часть доходит до точки $x_{\text{п2}}$, отражается в ней и в точке x_m возбуждает плазменную волну обратного направления (S_{12}^2). Коэффициенты S_{12}^1 и S_{12}^2 с учетом (10) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} S_{12}^1 = S_{12}, \quad S_{12}^2 = & \frac{\Gamma}{\sqrt{i k_0}} \frac{(1-u)^2 - v_m^2 - v_m(1-u)(\sqrt{2}-1)}{v_m^2} \times \\ & \times \exp(-ik_0\psi_s + i\pi). \end{aligned} \quad (12)$$

Для случая, приведенного на рис. 1б, при учете точек $x_{\text{п1}}$ и $x_{\text{п2}}$ получаем

$$S_{12}^1 = [S_{12}(x_{s1}) + S_{12}(x_{s2})] \exp \left\{ ik_0 \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \text{Im}[n_1(x) - n_2(x)] dx \right\},$$

$$S_{12}^2 = [1 + S_{21}(x_{s2}) S_{12}(x_{s1})] [S_{12}^-(x_{s2}) S_{11}^-(x_{s1}) + S_{12}^-(x_{s1}) \times$$

$$\times S_{22}^-(x_{s1})] \exp \left\{ \left[2k_0 \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \text{Im}[n_1(x) - n_2(x)] dx \right] + i\pi \right\}, \quad (13)$$

где $|S_{11}^-| = |S_{22}^-| \approx 1$, S_{12}^- , S_{21}^- определяются соотношениями (11 а) при замене ik_0 на $(-ik_0)$.

Сделаем некоторые замечания. Выражения (10), определяющие коэффициенты трансформации, по параметру асимптотического разложения λ_0/L (или $1/k_0$) имеют порядок $(\lambda_0/L)^{1/2} \gg \lambda_0/L$. Предэкспоненциальные выражения в (10) зависят также от коэффициента $\sqrt{\beta}/(1 - u - v_m)^{3/2}$. Остальные сомножители в (10) порядка единицы. Таким образом, эффект трансформации растет с увеличением температуры как $(\beta^{1/2} \sim \sqrt{v_T/C})$ и с уменьшением $(1 - u - v_m)$, т. е. расстройки частоты волн от «локального» значения частоты верхнего гибридного резонанса» (при этом считается, что расстройка больше ширины области резонансного поглощения). Выражения (10) без нарушения корректности используемого рассмотрения позволяют учитывать значительные трансформации ($|S_{12}|, |S_{21}| \leq 0,3 - 0,5$ при $\lambda_0/L \sim 10^{-1}$). Указанные порядки величин, вытекающие из (10), должны рассматриваться как предельно допустимые (при простой точке синхронизма) в рамках асимптотического рассмотрения (на основе укороченных уравнений для связанных амплитудных множителей при $\lambda_0/L \ll 1$) независимо от способа получения указанной асимптотики (асимптотические приближения точных решений (6) или эквивалентных им в [1, 2, 12, 13], метод фазовых интегралов [1, 2, 12, 13] или метод асимптотических оценок [10, 11]). В этом смысле (10) (а также (11), (12) для соответствующего расположения точек $x_{\text{п1}}, x_{\text{п2}}$) по порядку величин совпадает с соответствующими решениями или их асимптотическими представлениями в [1, 2, 12, 13]. Заметим также в оправдание используемой методики, что полученные указанным в [10, 11] и данной работе способом решения классической задачи Ландау—Зенера полностью совпадают с соответствующими асимптотическими выражениями точных решений [14].

Сделаем некоторые простейшие оценки для модулей коэффициентов трансформации, определяемых соотношениями (10). С учетом выражений для u, v_m нетрудно видеть, что

$$|S_{12}| \approx |S_{21}| \approx \sqrt{\lambda_0/L} \beta^{1/2} / |1 - u - v_m|^{3/4}.$$

В ионосфере $\beta \approx 10^{-3}$. Выберем расстройки $1 - u - v_m = 10^{-2}$ и 10^{-3} . В первом случае $|S| \sim \sqrt{\lambda_0/L}$. Во втором случае $|S| \sim 0,2\sqrt{\lambda_0/L}$. Если, например, $\lambda_0/L \sim 10^{-1}$, то пределы изменения $|S| \sim (0,06 - 0,3)$. Если же $\lambda_0/L \sim 10^{-2}$, т. е. L имеет величину порядка характерных масштабов регулярного изменения электронной концентрации в ионосфере, то $|S| \sim (0,02 - 0,1)$.

Как видно из полученных оценок, линейная трансформация волн в неоднородной плазме может быть достаточно эффективной, в первую очередь — на локальных плазменных неоднородностях. Если такие неоднородности имеют область непрозрачности, то возбуждение плазменных волн (при наличии точек $x_{\text{п1}}, x_{\text{п2}}$ — обоих направлений) электромагнитными тоже возможно. Немонотонный ход $n_{1,2}^2(x)$ приводит

также к тому, что возбудившиеся в среде плазменные волны определяют появление по другую сторону неоднородности электромагнитных волн. Это, в свою очередь, может приводить к улучшению прохождения волн в области межслоевых понижений электронной концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голант В. Е., Пилия А. Д. // УФН. 1971. Т. 104. Вып. 3. С. 413.
2. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. // УФН. 1973. Т. 109. Вып. 2. С. 225.
3. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1983. Т. 23. № 5. С. 544.
4. Шлионский А. Г., Яшин Ю. Я. // Геомагнетизм и аэрономия. 1979. Т. 10. № 2. С. 279.
5. Васьков В. В., Пучков В. А. // Физика плазмы. 1985. Т. 11. Вып. 6. С. 655.
6. Пилия А. Д., Федоров В. И. // Сб. Высокочастотный нагрев плазмы.— Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 281.
7. Гершман Б. Н. // Сб. памяти А. А. Андронова.— М.: АН СССР, 1955. С. 599.
8. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме.— М.: Наука, 1984. — 392 с.
9. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967. — 684 с.
10. Яшин Ю. Я., Яшнов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 5. С. 536.
11. Еремина И. В., Яшин Ю. Я. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 12. С. 1590.
12. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 257.
13. Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука, 1982. — 177 с.
14. Zepel C. // Proc. Roy. Soc. 1932. V A137. P. 696.

Горьковский институт инженеров
водного транспорта

Поступила в редакцию
2 июля 1987 г.

ON THE PECULIARITIES OF THE RADIOWAVES PROPAGATION AND TRANSFORMATION NEAR THE UPPER HYBRID RESONANCE POINT ($\omega_r < 2\omega_H$)

I. V. Eremina, Yu Ya. Yashin

The linear transformation is investigated for transverse wave propagation in magnetized plasma near the upper hybrid resonance point. Transformation coefficients are estimated for wave propagation through a plasma inhomogeneity in which the spatial synchronism condition is carried out. An asymptotic analysis is made by a consideration of asymptotic main parts for cases of existence of one or two synchronism points in inner plasma inhomogeneity (for existence and absence of the revers points).