

УДК 535.12

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ОБЪЕМЫ МОД В МНОГОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДАХ

А. Л. Вировлянский, А. Г. Костерин

Обсуждаются понятия зон Френеля и френелевских объемов для мод, возбужденных точечным монохроматическим источником в многомодовом плоскостром волноводе.

При решении многочисленных задач теории волн, связанных с изучением дифракции на регулярных и случайных неоднородностях среды, широко используются понятия зон Френеля [1, 2] и френелевских объемов лучей (см., например, [3, 4]). В работе [5] показано, что в многомодовых волноводах аналогичные понятия могут быть введены и для мод. Там, в частности, выяснено, что для заданной моды в каждом сечении волновода имеются зоны «повышенной чувствительности». При появлении в таких зонах крупномасштабных неоднородностей показателя преломления среды амплитуда моды меняется гораздо сильнее, чем при появлении тех же неоднородностей в других местах. Как с формальной, так и с физической точек зрения данная ситуация очень похожа на ту, которая возникает при описании влияния неоднородностей среды на амплитуды лучей.

Настоящая работа посвящена детальному обсуждению вопросов, связанных с введением понятий зон Френеля для мод и возможностью их использования при анализе волновых явлений. Близкие вопросы рассматривались ранее в работах [6, 7].

Для простоты ограничимся рассмотрением двумерной задачи. В плоскостром многомодовом волноводе введем декартову систему координат (x, z) , причем ось z совместим с направлением изменения показателя преломления n . Будем полагать, что зависимость $n(z)$ имеет единственный максимум на оси волновода — прямой $z = 0$ ($n(0) = 1$). Поле (речь здесь идет только о скалярных полях) монохроматического точечного источника, расположенного в точке $(0, z_0)$, в модовом представлении имеет вид (временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем)

$$p(x, z) = \sum_m A_m \varphi_m(z) \exp(ika_m|x|), \quad (1)$$

где k — волновое число на оси волновода, $\varphi_m(z)$ и a_m — собственные функции и собственные значения соответствующей краевой задачи, $A_m = i(ka_m)^{-1} \varphi_m(z_0)$ — амплитуда моды [8].

В соответствии с принципом Гюйгенса—Френеля, математическим выражением которого является метод Кирхгофа (см., например, [1, 2]), поле $p(x, z)$ в произвольной точке полуплоскости $x > x_0$ (x_0 — точка на полуоси $x > 0$) есть результат интерференции волн, порожденных вторичными источниками на прямой $x = x_0$. В рамках этого подхода амплитуда m -й моды связана с распределением вторичных источников $p(x_0, z)$ соотношением

$$A_m = \exp(-ika_m x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dz p(x_0, z) \varphi_m(z). \quad (2)$$

Используя (1) и свойство ортонормированности собственных функций

$\varphi_m(z)$, легко найти точное значение интеграла, равное, разумеется, $i(ka_m)^{-1}\varphi_m(z_0)$. Данная величина определяется суперпозицией вкладов всех вторичных источников. Однако последние, вообще говоря, неравноправны. Часто можно указать сравнительно небольшие участки на прямой $x=x_0$, где расположены вторичные источники, играющие основную роль в формировании поля m -й моды.

Для исследования этого вопроса преобразуем (2) с использованием ВКБ-приближений функций $\varphi_m(z)$ [6]:

$$\varphi_m(z) = \varphi_m^+(z) + \varphi_m^-(z), \quad (3)$$

где

$$\varphi_m^\pm(z) = \left[\frac{a_m}{D(a_m)\gamma(z, a_m)} \right]^{1/2} \exp\{\pm ikJ(z, a_m) \mp i\pi/4\}, \quad (4)$$

$$\gamma(z, a_m) = \sqrt{n^2(z) - a_m^2}, \quad J(z, a_m) = \int_z^{z_{\max}} \gamma(z, a_m) dz.$$

Здесь $D(a_m)$ — длина цикла луча, соответствующего m -й моде. Выражения (3) и (4) применимы между точками заворота моды z_{\max} и z_{\min} , определяемыми из соотношений $\gamma(z_{\max}, a_m) = \gamma(z_{\min}, a_m) = 0$. Собственные значения a_m задаются условиями

$$kI(a_m) = 2\pi(m+1/2), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $I(a_m) = 2J(z_{\min}, a_m)$ — лучевой инвариант. Функции $\varphi_m^\pm(z) \times \exp(ika_mx)$ описывают волны Бриллюэна, образующие m -ю моду.

Поле точечного источника, заданное соотношением (1), представим в виде суммы двух слагаемых:

$$p(x, z) = p^+(x, z) + p^-(x, z), \quad (5)$$

где

$$p^\pm(x, z) = i \sum_m (ka_m)^{-1} \varphi_m^\pm(z_0) \varphi_m(z) \exp(ika_mx). \quad (6)$$

Физический смысл функций $p^+(x, z)$ и $p^-(x, z)$ заключается в том, что асимптотически (при больших k) они описывают волны, вышедшие из источника соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z . Величину A_m также представим в виде суммы двух слагаемых:

$$A_m = i(ka_m)^{-1} [B_m^+ \varphi_m^+(z_0) + B_m^- \varphi_m^-(z_0)], \quad (7)$$

причем новые величины B_m^+ и B_m^- определим соотношениями

$$B_m^\pm = \int dz \Delta_m^\pm(x_0, z), \quad (8)$$

где

$$\Delta_m^\pm(x_0, z) = [\varphi_m^\pm(z_0)]^{-1} \varphi_m(z) \exp(-ika_mx_0) p^\pm(x_0, z) (ka_m/i). \quad (9)$$

Совокупность равенств (5) — (9), очевидно, является просто другой формой соотношения (2). Смысл выполненного преобразования будет ясен из дальнейшего.

Воспользуемся лучевым представлением компонент поля $p^+(x_0, z)$ и $p^-(x_0, z)$ [8]:

$$p^\pm(x_0, z) = i \sum_N \sum_{j=1}^2 \left[2\pi k \gamma(z_0, a_{N,j}^\pm) \gamma(z, a_{N,j}^\pm) \times \left| \frac{\partial R_{N,j}^\pm}{\partial a} \right|_{a=a_{N,j}^\pm} \right]^{-1/2} \exp\{i\Psi_{N,j}^\pm(x_0, z_0, z, a_{N,j}^\pm)\}, \quad (10)$$

где

$$\Psi_{N,j}^{\pm}(x_0, z_0, z, a_{N,j}^{\pm}) = k[a_{N,j}^{\pm}x_0 + NJ(a_{N,j}^{\pm}) \pm J(z_0, a_{N,j}^{\pm}) + \alpha_j J(z, a_{N,j}^{\pm})] - N\pi - (\pi/4) \left[a_j \pm 1 + \text{sign} \left[\frac{\partial R_{N,j}^{\pm}}{\partial a} \right]_{a=a_{N,j}^{\pm}} \right]. \quad (11)$$

Каждое слагаемое в (10) определяет вклад в суммарное поле соответствующего луча, приходящего в точку (x, z) . Константы α_j ($\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$) показывают знаки углов приходов лучей (знаки углов выходов из источника определены верхними индексами «+» и «-»). Значения так называемых лучевых параметров $a_{N,j}^{\pm}$ находятся из решения уравнений для траекторий геометрооптических лучей

$$x_0 = R_{N,j}^{\pm}(z_0, z, a); \quad (12)$$

$$R_{N,j}^{\pm}(z_0, z, a) = ND(a) \pm D(z_0, a) + \alpha_j D(z, a). \quad (13)$$

Смысл функции

$$D(z, a) = a \int_z^{z_{\max}} \gamma^{-1}(z, a) dz$$

ясен из рис. 1. Используемая в (4) и (13) функция $D(a)$ связана с $D(z, a)$ соотношением $D(a) = 2D(z_{\min}, a)$. Суммирование в (10) идет по всем целым неотрицательным N , для которых уравнения (12), (13) имеют решения.

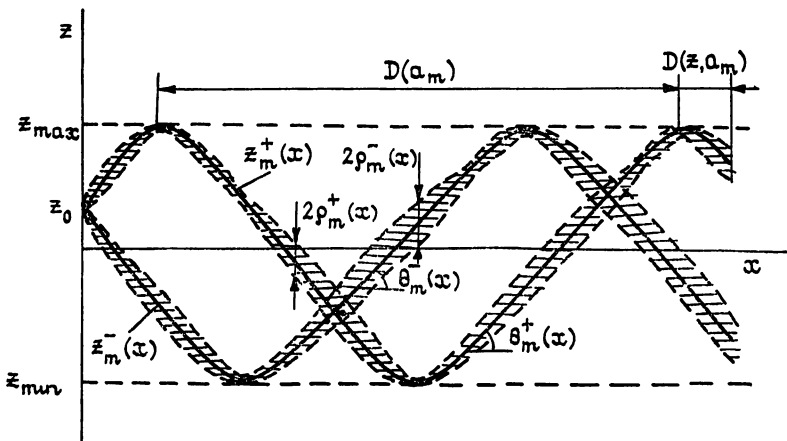


Рис. 1.

Используя (3), (4), представим множитель при $p^{\pm}(x_0, z)$ в (9) в виде

$$\sum_{j=1}^2 \left[\frac{\gamma(z_0, a_m)}{\gamma(z, a_m)} \right]^{1/2} \exp(-i\Phi_{m,j}^{\pm}(x_0, z_0, z)), \quad (14)$$

где

$$\Phi_{m,j}^{\pm}(x_0, z_0, z) = k[a_m x_0 \pm J(z_0, a_m) + \alpha_j J(z, a_m)] - (\pi/4)(\alpha_j + 1).$$

Амплитуды в (10) и (14) являются медленными функциями своих аргументов. «Быстрая» зависимость от переменной z перенесена в фазы $\bar{\Psi}^{\pm}(x_0, z) \equiv \Psi_{N,j}^{\pm} - \Phi_{m,j}^{\pm}$ компонентов функций $\Delta_m^{\pm}(x_0, z)$, что позволяет вычислять интегралы (8) методом стационарной фазы. В этом заключается смысл разбиений (3), (5), (7).

Обозначим через $z_m^{\pm}(x_0)$ координаты точек стационарной фазы, в которых

$$(d/dz)[\bar{\Psi}^{\pm}(x_0, z)] \equiv (d/dz)[\Psi_{N,j}^{\pm} - \Phi_{m,j}^{\pm}] = 0.$$

Выполнив дифференцирование, получаем

$$\alpha_j \sqrt{n^2(z_m^\pm(x_0)) - (a_{N,j}^\pm)^2} = \alpha_j \sqrt{n^2(z_m^\pm(x_0)) - a_m^2}. \quad (15)$$

Условие (15) должно быть дополнено уравнениями (12), (13), поскольку величина $a_{N,j}^\pm$, в отличие от a_m , является функцией координат x_0 и z . Из этих уравнений следует, что стационарные точки есть места пересечений прямой $x=x_0$ лучевыми траекториями $z_m^+(x)$ и $z_m^-(x)$, заданными соотношениями (12), (13) со значением лучевого параметра a , равным a_m . Кривые $z_m^+(x)$ и $z_m^-(x)$ выходят из источника в полуплоскости $z > z_0$ и $z < z_0$ соответственно. Определенные таким образом траектории будем называть модовыми лучами (см. рис. 1).

Основной вклад в интегралы (8) дадут слагаемые подынтегральных выражений, имеющие точки стационарной фазы. Для каждой из функций $\Delta_m^+(x_0, z)$ и $\Delta_m^-(x_0, z)$ имеется по одному такому слагаемому. Вкладами остальных членов суммы (10) пренебрежем. (Об условия применимости такого приближения см. ниже.) Поскольку предэкспоненциальные множители в (10) и (14) плавно зависят от z , наибольшие вклады в интегралы (8) вносят окрестности стационарных точек, в пределах которых фазы $\Psi^\pm(x_0, z)$ отличаются от стационарных фаз $\Psi^\pm(x_0, z_m^\pm(x_0))$ не более чем на π . По аналогии с лучевой теорией назовем указанные окрестности стационарных точек $z_m^\pm(x_0)$ первыми зонами Френеля моды, а совокупность таких зон, нанизанных на модовые лучи $z_m^\pm(x)$, френелевскими объемами моды.

То обстоятельство, что определяющую роль в формировании поля заданной моды играют вторичные источники, расположенные в окрестностях ее модовых лучей, допускает простую физическую интерпретацию. В работах, посвященных изучению взаимосвязи лучевого и модового представлений поля (см., например, [9, 10]), установлен следующий факт. Каждая волна Бриллюэна складывается в фазе (конструктивно интерферирует) с волнами Бриллюэна соседних мод только вдоль траектории своего модового луча. Поэтому в окрестностях модового луча, в отличие от других участков волновода, структура поля — а, значит, и распределение вторичных источников — повторяет структуру соответствующей волны Бриллюэна. Иначе говоря, вторичные источники, расположенные в данных местах, «согласованы» с полем моды и поэтому эффективно возбуждают ее. Поскольку каждая мода формируется двумя волнами Бриллюэна, ей отвечают два модовых луча и, следовательно, два френелевских объема. Френелевские объемы фиксированной моды показаны на рис. 1 штриховкой.

В качестве величины радиусов зон Френеля $\rho_m^\pm(x)$ моды примем

$$\rho_m^\pm(x) = \sqrt{2\pi \left| \frac{d^2 \Psi^\pm}{dz^2} \right|_{\substack{a=a_m \\ z=z_m^\pm(x)}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{k} \operatorname{tg}^2 \theta_m^\pm(x) \left| \frac{\partial R_{N,j}^\pm}{\partial a} \right|_{\substack{a=a_m \\ z=z_m^\pm(x)}}}. \quad (16)$$

Здесь $\theta_m^\pm(x)$ — углы наклонов модовых лучей по отношению к оси x . Параметры N и j подбираются таким образом, чтобы функция $R_{N,j}^\pm(z_0, z, a_m)$ описывала траектории соответствующих модовых лучей.

Таким образом, несмотря на то, что мода «заполняет» собой весь волновод между своими точками заворота, существуют выделенные области — френелевские объемы, которые отвечают за формирование поля данной моды. В связи с этим представляет интерес сравнение характерных размеров $\rho_m^\pm(x)$ этих объемов в направлении оси z с расстоянием между точками заворота m -й моды. Прежде всего отметим, что в соответствии с (16) величины $\rho_m^\pm(x)$ обращаются в нуль на каустиках ($\partial R_{N,j}^\pm / \partial a = 0$) и в точках заворота модовых лучей ($\theta_m^\pm = 0$). Однако несмотря на то, что выражение (16) в окрестностях этих точек должно быть уточнено (см. Приложение), такое поведение величины

$\rho_m^\pm(x)$ правильно отражает факт сужения френелевских объемов мод в упомянутых областях. Для грубой оценки ширины френелевского объема моды вдали от каустик и точек заворота (эти области рассматриваются в Приложении) на достаточно длинных трассах, где модовый луч успевает совершить много циклов осцилляций, вместо $\partial R_{N,j}^\pm/\partial a$ подставим в (16) $(x/D)(dD/da)$. Пользуясь тем, что $\text{tg } \theta_m^\pm(x) = \partial z_m^\pm(x)/\partial x$, и усредняя эту величину по циклу осцилляций модового луча, находим

$$|\overline{\text{tg } \theta_m^\pm}| = \frac{2\Delta z_m}{D(a_m)}. \quad (17)$$

Черта здесь означает упомянутое выше усреднение, а

$$\Delta z_m = z_{\text{max}}(a_m) - z_{\text{min}}(a_m)$$

— расстояние между точками заворота m -й моды. Подставляя (17) в (16), находим грубую оценку усредненной по циклу эффективной ширины френелевского объема

$$\overline{\rho_m^\pm} = 2\Delta z_m / \sqrt{\sigma_m(x)}, \quad (18)$$

где

$$\sigma_m(x) = kD^3 / (2\pi x |dD/da|_{|a=a_m})^{-1}.$$

Параметр $\sigma_m(x)$ имеет важный физический смысл. Можно показать, что $\sqrt{\sigma_m(x)}$ является оценкой количества мод, конструктивно интерферирующих с m -й модой вдоль соответствующих модовых лучей на удалении x от источника [11, 12]. Согласно оценке (18) ширина френелевского объема много меньше расстояния между точками заворота моды при условии $\sigma_m(x) \gg 1$, т. е. когда мода конструктивно интерферирует с большим числом своих «соседей». В противном случае ($\sigma_m(x) \leq 1$) френелевские объемы мод заполняют собой весь волновод между точками заворота моды, и говорить о них не имеет смысла. С формальной точки зрения это означает, что в случае $\sigma_m(x) \leq 1$ при вычислении интеграла (8) нельзя ограничиваться учетом лишь тех слагаемых подынтегрального выражения, которые имеют точки стационарной фазы.

Пользуясь соотношениями (12), (13), зависимость $\rho_m^\pm(x)$ можно представить и в другом виде:

$$\rho_m^\pm(x) = \sqrt{\sigma_m(x)} \left| \frac{\partial z_m^\pm(x)}{\partial m} \right|. \quad (19)$$

Здесь $\partial z_m^\pm/\partial m = z_{m+1}^\pm(x) - z_m^\pm(x)$ — расстояние между соседними модовыми лучами. Полученное равенство свидетельствует о том, что ширина френелевского объема примерно совпадает с шириной пучка модовых лучей, отвечающих модам, конструктивно интерферирующим с данной. Отсюда, в частности, можно заключить следующее. У группы, состоящей примерно из $(1 \div 2)\sqrt{\sigma_m(x)}$ соседних мод, френелевские объемы пересекаются. Поэтому вторичные источники, расположенные в пределах первой зоны Френеля m -й моды, участвуют в формировании около $\sqrt{\sigma_m(x)}$ мод, соседних с m -й.

Сделанные выше приближения сильно упрощают функции $\Delta_m^\pm(x, z)$. С учетом обозначения (16) они приобретают вид

$$\begin{aligned} \Delta_m^\pm(x, z) = [\rho_m^\pm(x)]^{-1} \exp \left\{ i \left[\pi \frac{(z - z_m^\pm(x))^2}{(\rho_m^\pm(x))^2} - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \times \\ \times \text{sign} \left[\theta_m^\pm(x) \frac{\partial R_{N,j}^\pm}{\partial a} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что после подстановки (20) в (8) получаем значения величин B_m^\pm , равные единице. Величина A_m при этом, как и должно быть, оказывается равной $i(ka_m)^{-1}\varphi_m(z_0)$.

Поскольку при выводе выражения (20) были использованы геометрикооптическое приближение поля $p(x, z)$ (10) и ВКБ-асимптотики собственных функций $\varphi_m(z)$ (3), (4), которые несправедливы соответственно в окрестностях каустик и точек заворота z_{\min} и z_{\max} , то формулой (20) нельзя пользоваться в указанных областях. Однако применение более строгих асимптотических представлений соответствующих величин — поля $p(x, z)$ и собственных функций $\varphi_m(z)$ — позволяет найти выражения для функций $\Delta_m^\pm(x, z)$, пригодные и там (см. Приложение).

Как легко видеть, пользуясь формулой (20), можно вводить понятия не только первой, но и высших зон Френеля.

Френелевские объемы мод тесно связаны с френелевскими объемами лучей, о которых идет речь в [3, 4, 7]. Чтобы понять это, рассмотрим ситуацию, «симметричную» описанной выше. Пусть в волноводе в отрицательном направлении оси x из $+\infty$ распространяется всего одна m -я мода. В той точке ($x=0, z=z_0$), где раньше был источник, поместим приемник. В эту точку теперь приходят два модовых луча. Легко показать, что их френелевские объемы [3, 4] в области $x>0$ совпадают с определенными выше френелевскими объемами m -й моды. Этот факт есть проявление теоремы взаимности. Таким образом, с точки зрения теоремы взаимности понятия френелевских объемов мод и модовых лучей являются «дуальными».

Введенные выше понятия зон Френеля для мод, как и аналогичные понятия для лучей, могут быть использованы для приближенного анализа дифракционных эффектов. В качестве примера рассмотрим задачу о дифракции на отверстии в непрозрачном экране, помещенном в многомодовый волновод. Решение задачи проведем в приближении Кирхгофа, согласно которому в плоскости экрана поле равно нулю всюду за исключением отверстия, а внутри отверстия поле такое же, как и в отсутствие экрана. Рассмотрим волновод, представляющий собой однородный слой с показателем преломления $n=1$, заключенный между двумя отражающими границами: прямыми $z=0$ и $z=H$. Решение уравнения Гельмгольца для такого волновода с граничными условиями

$$p|_{z=0} = \partial p/\partial z|_{z=H} = 0$$

хорошо известно [8]. Несмотря на то, что выше речь шла о чисто дифракционных волноводах, полученные результаты, как легко проверить, остаются в силе и для рассматриваемого здесь примера.

Вычисления амплитуд мод \tilde{A}_m за экраном проводились по формуле

$$\tilde{A}_m = \int_{z_0-L/2}^{z_0+L/2} dz p(x_0, z) \varphi_m(z) \exp(-ika_m x_0), \quad (21)$$

где z_0 — координата центра экрана, имеющего размер L , при следующих значениях безразмерных параметров задачи: глубина волновода $kH=640$, размер отверстия в экране $kL=100$, расстояние от источника до экрана $kx_0=1920$, координата источника $kz_0=320$. В таком волноводе распространяющимися являются 204 моды. Условие $z_0=H/2$ означает, что в отсутствие экрана все моды одинаково возбуждены, т. е. имеют равные невозмущенные амплитуды $|A_m|$.

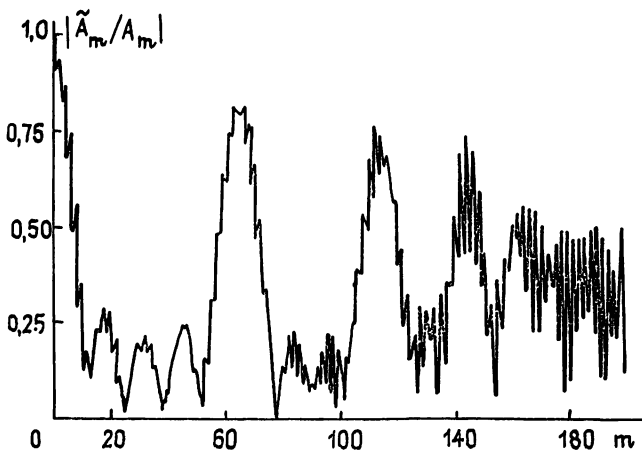


Рис. 2.

На рис. 2 представлен результат расчета, выполненного для случая, когда центр экрана расположен в середине волновода: $ka_0 = 320$. По оси ординат отложена величина $|\tilde{A}_m/A_m|$, по оси абсцисс — номер моды. Изображенная кривая получена интерполяцией дискретных значений, отвечающих первым 200 модам. В соответствии с формулой

$$\tilde{A}_m = i(ka_m)^{-1} [B_m^+ \varphi_m^+(z_0) + B_m^- \varphi_m^-(z_0)]; \quad (22)$$

$$\tilde{B}_m^\pm = \int_{z_0 - L/2}^{z_0 + L/2} dz \Delta_m^\pm(x_0, z), \quad (23)$$

где функции $\Delta_m^\pm(x, z)$ задаются выражениями (20), в результате дифракции менее всего искажаются те моды, модовые лучи которых попадают в отверстие в экране. Соотношения (12), (13) позволяют найти номера соответствующих мод и вычислить траектории отвечающих им модовых лучей. В приводимой ниже таблице указаны номера первых четырех наименее искаженных мод, величины $\sqrt{\sigma_m(x_0)}$ и размеры первых зон Френеля ρ_m .

Таблица 1

| m | $\sqrt{\sigma_m}$ | $k \rho_m$ |
|-----|-------------------|------------|
| 0 | 16,5 | 110 |
| 63 | 10,8 | 119 |
| 112 | 8,8 | 145 |
| 143 | 6,9 | 185 |

На рис. 2 хорошо видно, что, как и должно быть, наибольшие амплитуды имеют четыре группы мод, примыкающие к модам с номерами, указанными в таблице. Характерная ширина каждой из таких групп, в соответствии с приведенным выше следствием из формулы (19), составляет величину порядка $(1 \div 2)\sqrt{\sigma_m}$. Для нулевой моды, очевидно, эту оценку следует вдвое уменьшить. Кроме упомянутых, в отверстии попадают модовые лучи, отвечающие некоторым модам с номерами выше 160. Соответствующие максимумы перекрываются и образуют сильно изрезанный рельеф в правой части графика на рис. 2.

На рис. 3 приведена зависимость величины $|\tilde{A}_m/A_m|$ от размера отверстия в экране для 63-й моды. Все вычисления проводились при тех же значениях параметров задачи, что перечислены выше (за исключением, разумеется, kL). Значения амплитуды моды вычислялись двумя способами: по формулам (22), (23) (сплошная кривая) и (21) (точки). Как видим, оба расчета дают близкие результаты, что подтверждает правомерность описания дифракции на экране с отверстием с помощью приближенной формулы (20).

Сформулируем основные результаты. В многомодовых волноводах, так же как для лучей, для мод можно вводить понятия зон Френеля и френелевских объемов. Их физическое содержание заключается в том, что они определяют области формирования моды: экран, помещенный в волновод, не вызывает существенных изменений амплитуды моды, если он не перекрывает ее френелевские объемы. Расположение френелевских объемов моды определяется модовыми лучами. Модовые лучи (их два для каждой моды) представляют собой геометрические места точек, в которых волны Бриллюэна данной

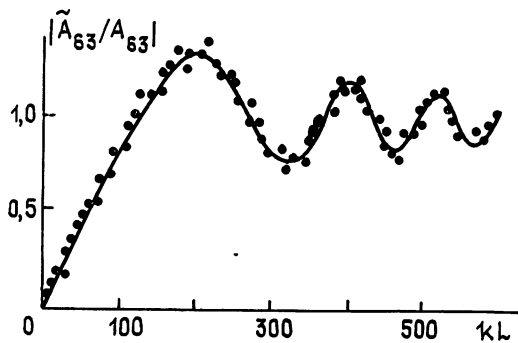


Рис. 3.

моды конструктивно интерферируют с волнами Бриллюэна соседних мод. Ширина френелевских объемов растет по мере удаления от источника. Френелевские объемы имеют смысл рассматривать до тех пор, пока их ширина остается хотя бы в несколько раз меньше расстояния между точками заворота моды, т. е. пока $\sqrt{\sigma_m} > 1$ (см. оценку (18)). В работе [11] показано, что френелевский объем луча меньше расстояния между его точками заворота при том же условии. Таким образом, правомерность использования понятий френелевских объемов как лучей, так и мод в многомодовых волноводах определяется одним и тем же условием $\sigma_m \gg 1$.

Введенные здесь понятия оказываются полезными при решении задач дифракции на регулярных и случайных [5] неоднородностях в многомодовых волноводах.

Если говорить о трехмерном пространстве, то полученные выше выражения для размеров зон Френеля фактически относятся к случаю, когда поле возбуждается бесконечной нитью, расположенной в плоскости, где показатель преломления среды не меняется. Аналогичные выражения для точечного источника приведены в работе [5]. Опираясь на результаты работ [11, 13], введенные понятия можно обобщить на случай более сложных распределенных источников.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Использование асимптотических представлений собственных функций $\Phi_m(z)$ через функции Эйри 1-го рода $\text{Ai}(\xi)$ [8] позволяет найти выражения для функций $\Delta_m^\pm(x, z)$, справедливые в окрестностях точек заворота модовых лучей. Соответствующие формулы для верхней точки заворота z_{\max} , которые приводим без вывода, имеют вид

$$\Delta_m^\pm(x, z) = -k^{2/3} \left[\frac{dn^2}{dz} \right]^{1/3} \text{Ai} \left[-k^{2/3} \left[\frac{dn^2}{dz} \right]^{1/3} (z - z_{\max}) \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{k}{4a_m^2} \left[\frac{dn^2}{dz} \right]^2 \frac{d^2(NI(a) \pm J(z_0, a))}{da^2} \frac{(z - z_{\max})^2}{2} \right\},$$

где производные dn^2/dz должны быть вычислены в точке z_{\max} , а параметр a взят равным a_m . Выбор знака «+» или «-», а также величина N определяются тем, какой из двух модовых лучей попадает в данную точку заворота. В окрестностях нижней точки заворота имеет место аналогичное соотношение с заменой z_{\max} на z_{\min} и $\frac{d^2}{da^2}(NI(a) \pm J(z_0, a))$

на $\frac{d^2}{da^2} \left(NI(a) + \frac{1}{2} I(a) \pm J(z_0, a) \right)$.

Пользуясь известными асимптотиками для описания поля $p(x, z)$ в окрестностях неособых точек каустик $z = z_k$ [8], находим следующие выражения для функций $\Delta_m^\pm(x, z)$ в тех местах, где модовые лучи касаются каустик:

$$\Delta_m^\pm(x, z) = \left[-\operatorname{tg}\theta_k \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 R_{N,j}^\pm}{\partial a^2} \right]^{1/3} \right]^{-1} \operatorname{Ai} \left[-(z - z_k) \left/ \left[\operatorname{tg}\theta_k \left[\frac{1}{2k^2} \times \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \times \frac{\partial^2 R_{N,j}^\pm}{\partial a^2} \right]^{1/3} \right] \right] \right].$$

Здесь θ_k — угол наклона модового луча по отношению к оси в точке касания каустики.

Из приведенных выражений видим, что в качестве оценок размеров областей, существенных для интегрирования в (8), в точках заворота можно принять меньшую из двух величин:

$$\rho_1 = 2a \left[\frac{k}{2\pi} \left[\frac{dn^2}{dz} \right]^2 \frac{d^2(NI(a) \pm J(z_0, a))}{da^2} \right]_{a=z_m}^{-1/2}, \quad \rho_2 = \left[k^2 \left| \frac{dn^2}{dz} \right| \right]^{-1/3}.$$

Аналогичная оценка для точек касания каустик равна

$$\rho_3 = |\operatorname{tg}\theta_k| \left[\frac{1}{2k^2} \left| \frac{\partial^2 R_{N,j}^\pm}{\partial a^2} \right| \right]^{1/3}.$$

Данные величины можно рассматривать как размеры френелевских объемов в указанных местах. Сравнивая ρ_2 , ρ_3 и $\rho_m^\pm(x)$ (см. (16)), видим, что при уменьшении длины волны $\lambda = 2\pi k^{-1}$ (для достаточно коротких волн $\rho_2 < \rho_1$) размеры френелевских объемов мод вблизи каустик и точек заворота убывают быстрее, чем в регулярных точках. Это обстоятельство согласуется со сделанным ранее выводом о том, что френелевские объемы мод около каустик и точек заворота сужаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г. П. Мотулевич. — М.: Наука, 1970.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. // УФН. 1980 Т. 132. № 3. С. 475.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред — М.: Наука, 1980.
5. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. // Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 4. С. 599.
6. Кравцов Ю. А., Кузькин В. М., Петников В. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 4. С. 440.
7. Кравцов Ю. А., Кузькин В. М., Петников В. Г. // Акуст. журн. 1984. Т. 30. Вып. 3. С. 339.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
9. Tindle C. T., Guthrie K. M. // J. Sound. Vibr. 1974. V. 34. № 2. P. 291.
10. Felsen L. B. // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. P. 352.
11. Вировлянский А. Л. Диссертация. Горький, Гос. ун-т, 1986.
12. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. // Акуст. журн. 1987 Т. 33. Вып. 3. С. 416.
13. Вировлянский А. Л. Препринт ИПФ АН СССР № 120. Горький, 1985.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
8 июня 1987 г.

FRESNEL VOLUMES OF MODES IN MULTIMODE WAVEGUIDES

A. L. Virovlyanskij, A. G. Kosterin

The concepts of Fresnel zones and Fresnel volumes of modes excited by a point monochromatic source in a multimode planelayered waveguide are introduced.