ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 4 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 537.876.23

ПРИБЛИЖЕНИЕ КВАЗИСЛОИСТОЙ СРЕДЫ И УРАВНЕНИЯ ПОГРУЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

А. Г. Бугров

Трехмерная краевая задача о поле точечного источника в слое неоднородной квазислоистой среды сведена к приближенному одномерному интегральному уравнению, учитывающему эффект обратного рассеяния и нелокальность зависимости поля от значений неоднородностей. На основе метода погружения получена эквивалентная система одномерных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Обсуждены обоснованность приближенного подхода и его качественные особенности.

Изучению процессов распространения волн в неоднородных средах посвящено большое число монографий и оригинальных работ. В значительной части этих работ рассматривается распространение волн различной природы в слоистых средах. Важным шагом вперед является рассмотрение трехмерных неоднородных сред, соответствующих реально существующим.

Многомерность уравнений и краевой характер задач распространения вызывает существенные трудности при численном моделировании и анализе их методами статистической теории случайных процессов, в связи с чем целый ряд работ посвящен развитию и применению к вышеупомянутой задаче приближенных методов. Так, например, в [1] исследованы статистические характеристики коэффициента отражения случайно-неоднородной среды, близкой к слоистой, методом малых возмущений, в [2] случайно-неоднородный волновод рассмотрен в рамках параболического уравнения при использовании борновского приближения. Известен также метод поперечных сечений или адиабатическое приближение (см., например, [3]).

Всем этим приближенным методам присущ недостаток: они предполагают исключение из рассмотрения какого-либо важного эффекта при рассеянии волны или свойства рассеянного поля. Метод малых возмущений или борновское приближение применим к описанию сред с очень малыми флуктуациями параметров; параболическое уравнение не учитывает такой существенный эффект, как обратное рассеяние; адиабатическое приближение исключает из рассмотрения процессы взаимодействия распространяющихся нормальных мод.

В настоящей работе предложен способ приближенного решения задачи о распространении волн в слое трехмерной неоднородной квазислоистой среды. При этом на основе метода погружения в рамках описания решения с помощью обычных одномерных дифференциальных уравнений первого порядка предпринята попытка учесть вышеупомянутые важнейшие свойства рассеянного поля.

1. Рассмотрим задачу о поле точечного источника, расположенного в точке (x_0, ρ_0) слоя $L_0<x<L$ неоднородной среды с показателем преломления $\varepsilon(\mathbf{r})$ $(\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, \rho)$, $\rho = \rho\ (y, z)$ — горизонтальные координаты). Внутри слоя поле точечного источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k^2(1 + \varepsilon(\mathbf{r}))\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \qquad (1)$$

с условиями непрерывности G и $\partial G/\partial x$ на границах слоя. Пусть вне слоя среда однородна, т. е. $\varepsilon(\boldsymbol{r})=0$, тогда эта краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$G(x, x_0; \rho, \rho_0)=G_0(x-x_0, \rho-\rho_0)-k^2\int_{L_0}^{L} dx' \int d\rho'\, G_0(x-x', \rho-\rho')\times$$
$$\times\varepsilon(x', \rho')\, G(x', x_0; \rho', \rho_0). \tag{2а}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число,

$$G_0(x-x_0, \rho-\rho_0)=\frac{1}{8i\pi^2}\int d\varkappa\, \frac{\exp(i\sqrt{k^2-\varkappa^2}|x-x_0|)}{\sqrt{k^2-\varkappa^2}}\times$$
$$\times\exp[i\varkappa(\rho-\rho_0)] \tag{2б}$$

— функция Грина однородного пространства.

Будем интересоваться случаем, когда при произвольной зависимости ε от x свойства среды медленно меняются вдоль горизонтальных координат ρ. Если ввести двумерный спектр неоднородностей

$$\varepsilon(x, \sigma)=\int d\rho\varepsilon(x, \rho)e^{i\sigma\rho}, \quad \varepsilon(x, \rho)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma\varepsilon(x, \sigma)e^{-i\sigma\rho},$$

где σ_0 — характерная ширина спектра ε, и выполнить в (2а) преобразование Фурье по ρ, то для пространственных фурье-гармоник поля получим интегральное уравнение

$$G(x, x_0; q, \rho_0)=G_0(x-x_0, q)\exp(iq\rho_0)-\frac{k^2}{4\pi^2}\times$$
$$\times\int_{L_0}^{L} dx'\, G_0(x-x', q)\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma\varepsilon(x', \sigma)G(x', x_0; q-\sigma, \rho_0). \tag{3а}$$

Здесь q — горизонтальный волновой вектор,

$$G_0(x-x_0, q)=\frac{\exp(i\sqrt{k^2-q^2}\,|x-x_0|)}{2i\sqrt{k^2-q^2}}.$$

Принципиальной особенностью уравнения (3а) является его незамкнутость относительно данной фурье-гармоники, поскольку внутренний интеграл по σ описывает взаимодействие гармоник с волновыми числами, лежащими внутри спектрального интервала $(q-\sigma_0,\ q+\sigma_0)$.

Для вывода более простого приближенного уравнения введем в (3а) параметр p, заменив в подынтегральном выражении аргумент q функции G_0 на p. Уравнение (3а) примет вид

$$G(x, x_0; q, \rho_0; p)=G_0(x-x_0, q)\exp(iq\rho_0)-\frac{k^2}{4\pi^2}\times$$
$$\times\int_{L_0}^{L} dx' G_0(x-x', p)\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma\varepsilon(x', \sigma)G(x', x_0; q-\sigma_0, \rho_0; p-\sigma). \tag{4}$$

где параметр p включен в качестве аргумента функции G. При этом для $p=q$ (4) точно переходит в уравнение (3а), т. е.

$$G(x, x_0; q, \rho_0; p)|_{p=q}=G(x, x_0; q, \rho_0).$$

2. Суть предлагаемого метода состоит в следующем. В правой части уравнения (4) будем пренебрегать, учитывая малость σ_0, зависимостью от σ в последнем аргументе функции G, т. е. положим в (4)

$$G(x, x_0; q-\sigma, \rho_0; p-\sigma) \approx G(x, x_0; q-\sigma, \rho_0; p).$$

Тогда вместо уравнения (4) получим приближенное уравнение вида

$$G(x, x_0; q, \rho_0; p) = G_0(x-x_0, q)\exp(iq\rho_0) - \frac{k^2}{4\pi^2} \times \int_{L_0}^{L} dx' G_0(x-x', p) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma \varepsilon(x', \sigma) G(x', x_0; q-\sigma, \rho_0; p). \tag{5a}$$

Обратное преобразование Фурье по q сводит теперь уравнение (5а) к одномерному интегральному уравнению

$$G(x, x_0; R, \rho_0; q) = G_0(x-x_0, R-\rho_0) - k^2 \int_{L_0}^{L} dx' G_0(x-x', q) \times \varepsilon(x', R) G(x', x_0; R, \rho_0; q), \tag{6}$$

в котором $p=q$, а R — новая вспомогательная переменная. Смысл полученных уравнений (5а) и (6) заключается в том, что при определенных условиях выполняется приближенное равенство

$$G(x, x_0; q, \rho_0) \approx G(x, x_0; q, \rho_0; p)|_{p=q} = \int dR G(x, x_0; R, \rho_0; q) e^{iqR}, \tag{7}$$

позволяющее описывать исходную задачу уравнением (5а) вместо (3а) или (4), которое сводится к более простому одномерному уравнению (6).

Обычные известные приближения получаются из (5а) таким же образом, как и из точного уравнения (3а). Для перехода, например, к слоистой среде положим $\varepsilon(x, \sigma) = (2\pi)^2 \varepsilon(x)\delta(\sigma)$ в уравнении (5а), которое при $p=q$ примет вид

$$G(x, x_0; q, \rho_0) = G_0(x-x_0, q)\exp(iq\rho_0) - k^2 \int_{L_0}^{L} dx' \times G_0(x-x', q)\varepsilon(x') G(x', x_0; q, \rho_0). \tag{8}$$

Отметим, что (7) для слоистой среды является точным равенством. Несколько иначе можно перейти к приближению слоистой среды, если в (5а) использовать дополнительное соотношение, исключая зависимость от σ и во втором аргументе функции G:

$$G(x, x_0; q-\sigma, \rho_0; p) \approx G(x, x_0; q, \rho_0; p)\exp(i\sigma\rho_0).$$

При этом в правую часть уравнения (8) в качестве $\varepsilon(x)$ будет входить $\varepsilon(x, \rho_0)$, т. е. значение ε в фиксированной плоскости $\rho=\rho_0$.

Если ε не фиксировать в плоскости $\rho=\rho_0$, то можно перейти к следующему уравнению, описывающему поле в плавно меняющейся по ρ среде:

$$G(x, x_0; q, \rho_0; \rho) = G_0(x-x_0, q)\exp(iq\rho_0) - k^2 \int_{L_0}^{L} dx' G_0(x-x', q) \times \varepsilon(x', \rho) G(x', x_0; q, \rho_0; \rho). \tag{9}$$

Это уравнение соответствует так называемому адиабатическому приближению, смысл которого заключается в том, что все фурье-гармоники поля G распространяются независимо друг от друга, трансформируясь вдоль горизонтальных координат благодаря параметрической зависимости от ρ через функцию $\varepsilon(x, \rho)$.

В более строгом виде это приближение используется, например, в [3], для описания распространения нормальных волн в почти слоистом волноводе. В теории волн в случайно-неоднородных средах при рассмотрении квазиоднородных полей подобная параметрическая зависимость достигается путем введения в формулы или уравнения для статистических характеристик поля медленно меняющихся функций, характеризующих плавные изменения свойств среды [4,5].

Для более ясного понимания физического смысла предложенного в работе приближенного метода рассмотрим итерационные ряды (борновские разложения по кратности рассеяния) для уравнений (3а) и (5а) при $p=q$ соответственно (для краткости опустим зависимость функций от аргументов x, x_0):

$$
\begin{gathered}
G(q, \rho_0) = G_0(q)\exp(iq\rho_0) - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{L_0}^{L} dx_1\, G_0(q) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma\, \varepsilon(\sigma)\, G_0(q-\sigma) \times \\
\times \exp[i(q-\sigma)\rho_0] + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4 \int_{L_0}^{L} dx_1 G_0(q) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_1 \varepsilon(\sigma_1) \int_{L_0}^{L} dx_2 \underline{G_0(q-\sigma_1)} \times \\
\times \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_2\, \varepsilon(\sigma_2)\, G_0(q-\sigma_1-\sigma_2)\exp[i(q-\sigma_1-\sigma_2)\rho_0] - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^6 \times \\
\times \int_{L_0}^{L} dx_1 G_0(q) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_1 \varepsilon(\sigma_1) \int_{L_0}^{L} dx_2 \underline{G_0(q-\sigma_1)} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_2 \varepsilon(\sigma_2) \times \\
\times \int_{L_0}^{L} dx_3\, \underline{G_0(q-\sigma_1-\sigma_2)} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_3\, \varepsilon(\sigma_3)\, G_0(q-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3) \times \\
\times \exp[i(q-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\rho_0] + \dots;
\end{gathered}
\tag{3б}
$$

$$
\begin{gathered}
G(q, \rho_0; q) = G_0(q)\exp(iq\rho_0) - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{L_0}^{L} dx_1\, G_0(q) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma\, \varepsilon(\sigma) \times \\
\times G_0(q-\sigma)\exp[i(q-\sigma)\rho_0] + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4 \int_{L_0}^{L} dx_1\, G_0(q) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_1 \varepsilon(\sigma_1) \times \\
\times \int_{L_0}^{L} dx_2 \underline{G_0(q)} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_2\, \varepsilon(\sigma_2)\, G_0(q-\sigma_1-\sigma_2)\exp[i(q-\sigma_1-\sigma_2)\rho_0] - \\
- \left(\frac{k}{2\pi}\right)^6 \int_{L_0}^{L} dx_1 G_0(q) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_1 \varepsilon(\sigma_1) \int_{L_0}^{L} dx_2 \underline{G_0(q)} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma_2 \times
\end{gathered}
\tag{5б}
$$

$$\times\varepsilon(\sigma_2)\int_{L_0}^{L}dx_3\underline{G_0(q)}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0}d\sigma_3\,\varepsilon(\sigma_3)\,G_0(q-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\times$$
$$\times\exp[i(q-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\rho_0]+\ldots$$

Следует отметить, что ряд, соответствующий адиабатическому приближению, получается из (5б), если оставшиеся под знаком интеграла по σ функции $G_0(q-\sigma_1-\ldots-\sigma_n)$ заменить на $G_0(q)$, а в экспоненте сделать замену $\rho_0\to\rho$.

Непосредственно из вида (5б) следует, что этот ряд, в отличие от адиабатического приближения, правильно описывает один акт рассеяния для любой n-кратно рассеянной фурье-гармоники поля.

Получим далее условие, качественно характеризующее степень малости ширины σ_0 спектра неоднородностей $\varepsilon(x,\ \sigma)$ по сравнению с характерными параметрами задачи.

Из сравнения рядов (3б) и (5б) следует, что при замене в подынтегральных выражениях в (3б) обозначенных чертой сомножителей $G_0(q-\sigma_1)$, $G_0(q-\sigma_1-\sigma_2),\ldots$ на $G_0(q)$ эти ряды совпадут. Используя представление функции Грина G_0 через спектр Фурье (см. (2б)) и разлагая $\sqrt{k^2-(q-\sigma)^2}$ в ряд Тейлора, можно получить условие замены $G_0(q-\sigma)$, $G_0(q)$:

$$\sigma_0\ll(k^2-q^2)/q\,.$$

Очевидно, что для совпадения рядов (3б) и (5б) до n-го члена включительно необходимо потребовать выполнение условия

$$\sigma_0\ll(k^2-q^2)/(n-2)q\,. \tag{10}$$

Относительно высших членов ряда (5б) отметим, что, для того чтобы ряд (5б) давал правильный результат, эти члены должны быть близки к соответствующим членам ряда (3б), что реализуется в случае медленной зависимости ε от ρ, когда вполне естественно предположить рассеяние любой фурье-гармоники в ограниченный спектральный угол $n\sigma_0$.

Как видно из условия (9), уравнение (5а) плохо описывает поведение гармоник, распространяющихся практически горизонтально вдоль слоя с волновыми числами $q\sim k$, что является недостатком всех известных приближенных методов. Однако для ряда задач, описывающих, например, распространение пучков в неоднородном слое под углами, не слишком близкими к скользящим, можно ожидать, что вклад в поле гармоник с такими горизонтальными волновыми числами достаточно мал.

Резюмируя все вышесказанное, следует отметить, что условие (9) не является, конечно, точным, однако приведенные рассуждения позволяют сделать вывод об аналогичности условий применимости уравнения (5а) и адиабатического приближения. При этом, в отличие от последнего, приближенное уравнение (5а) учитывает следующие важнейшие свойства рассеянного поля:

1) взаимодействие между собой фурье-гармоник поля с разными горизонтальными волновыми числами и, как следствие этого, обратное рассеяние гармоник в горизонтальном направлении;

2) нелокальную зависимость поля от значений $\varepsilon(x,\ \rho)$.

3. В монографии [6] и работах [7, 8] для краевых задач распространения волн в трехмерных неоднородных средах развит метод погружения, позволяющий переформулировать последние в виде задач с начальными условиями, однако сложный вид результирующих интегро-дифференциальных уравнений предполагает решение трудоемкой проблемы создания эффективного численного алгоритма. В то же время в [6] (см. также библиографию к [6]) полно исследованы точные ре-

шения краевых задач распространения волн в слоистых средах, описываемые одномерным уравнением (8). Интегральные уравнения вида (8) применительно к задачам радиофизики, акустики океана, к теории случайно-неоднородных сред сведены к системе одномерных дифференциальных уравнений погружения первого порядка. Несомненным достоинством такого подхода является отсутствие принципиальных трудностей при численном моделировании и возможность применения стандартных методов теории марковских случайных процессов при рассмотрении полей в случайно-неоднородных слоистых средах.

С целью использования вышеупомянутых преимуществ одномерной теории метода погружения и был предложен в предыдущем пункте настоящей работы способ сведения исходной «квазислоистой» задачи к одномерному интегральному уравнению (6). Благодаря аналогичности структур уравнения (6) и уравнения для слоистой среды (8) для (6) нетрудно выписать эквивалентную систему одномерных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Мы не будем приводить здесь полный вывод уравнений погружения, поскольку он идентичен изложенному в [6], и ограничимся общими положениями метода.

Чтобы получить одномерные уравнения погружения, разложим функцию $G(x, x_0; \mathbf{R}, \rho_0; q)$ в спектр Фурье в точке источника ρ_0:

$$G(x, x_0; \mathbf{R}, \tau; q) = \int d\rho_0\, G(x, x_0; \mathbf{R}, \rho_0; q) e^{i\tau\rho_0}.$$

В качестве параметра погружения рассматривается положение границы слоя L, а уравнения погружения представляют собой дифференциальные уравнения по L для функции $G(x, L; \mathbf{R}, \tau; q)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(x, L; \mathbf{R}, \tau; q) = G_0(x-L, \tau)e^{i\tau R} - k^2 \int_{L_0}^{L} dx' G_0(x-x', q)\varepsilon(x', \mathbf{R}) G(x', L; \mathbf{R}, \tau; q)$$

и описывает задачу, когда источник расположен на границе слоя L, а точка наблюдения внутри слоя, и для функции $G_L \equiv G(L, L; \mathbf{R}, \tau; q)$, описывающей задачу с источником и точкой наблюдения на границе L.

Путем дифференцирования интегральных уравнений для $G(x, L; \mathbf{R}, \tau; q)$ и $G_L(\mathbf{R}, \tau; q)$ и сопоставления полученных соотношений с исходными уравнениями можно получить следующую систему уравнений погружения с начальными условиями:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial L} G(x, L; \mathbf{R}, \tau; q) = i\sqrt{k^2 - \tau^2}\, G(x, L; \mathbf{R}, \tau; q) - \\ - k^2 e^{-iqR} \varepsilon(L, \mathbf{R}) G_L(\mathbf{R}, \tau; q) G(x, L; \mathbf{R}, q; q), \\ G(x, L; \mathbf{R}, \tau; q)|_{L=x} = G_x(\mathbf{R}, \tau; q);\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial L} G_L(\mathbf{R}, \tau; q) = -(i\sqrt{k^2 - q^2} + i\sqrt{k^2 - \tau^2}) G_0(0, \tau) e^{i\tau R} + \\ + (i\sqrt{k^2 - \tau^2} + i\sqrt{k^2 - q^2} - k^2 e^{-iqR} \varepsilon(L, \mathbf{R}) G_L(\mathbf{R}, q; q)) G_L(\mathbf{R}, \tau; q), \\ G_L(\mathbf{R}, \tau; q)|_{L=L_0} = G_0(0, \tau) e^{i\tau R}.\end{gathered} \tag{12}$$

При этом входящие в уравнения (11), (12) функции $G(x, L; \mathbf{R}, q; q)$ и $G_L(\mathbf{R}, q; q)$ определяются той же системой уравнений (11), (12) при $p = q$.

Чтобы рассмотреть полную краевую задачу об источнике и точке наблюдения внутри слоя, необходимо добавить еще два уравнения погружения:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0; R, \tau; q) = -k^2 e^{-iqR} G(x, L; R, q; q)\varepsilon(L, R) G(L, x_0; R, \tau; q),$$

$$G(x, x_0; R, \tau; q)\Big|_{L=\max(x, x_0)} = \begin{cases} G(x, L; R, \tau; q)\,|_{L=x_0}, & x_0 > x \\ G(L, x_0; R, \tau; q)\,|_{L=x}, & x > x_0 \end{cases}, \tag{13}$$

где функция $G(L, x_0; R, \tau; q)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial L} G(L, x_0; R, \tau; q) = (i\sqrt{k^2 - \tau^2} - i\sqrt{k^2 - q^2}) G_0(L - x_0, \tau) +$$

$$+ (i\sqrt{k^2 - q^2} - k^2 \varepsilon(L, R) e^{-iqR} G_L(R, q; q))\, G(L, x_0; R, \tau; q),$$

$$G(L, x_0; R, \tau; q)\,|_{L=x_0} = G_{x_0}(R, \tau; q). \tag{14}$$

Таким образом, для нахождения искомых фурье-гармоник поля нужно решить систему одномерных дифференциальных уравнений погружения и выполнить соответствующие преобразования Фурье:

$$G(x, x_0; q, \rho_0) \approx \frac{1}{4\pi^2} \int dR \int d\tau G(x, x_0; R, \tau; q) e^{-i\tau\rho_0} e^{iqR}. \tag{15}$$

Сворачивая затем найденные гармоники поля в интеграл Фурье по q, можно вычислить решение исходной краевой задачи $G(x, x_0; \rho, \rho_0)$.

Важно отметить, что подобная процедура использовалась в работе [9] при нахождении поля точечного источника в слое сферически-слоистой атмосферы. В [9] численными методами решалась соответствующая система уравнений погружения для сферических гармоник поля, которые затем суммировались при вычислении пространственной функции Грина. При этом полная краевая задача в слоистой среде описывается тремя уравнениями погружения для $G(x, x_0; q)$, $G(x, L; q)$ и $G_L(q)$, поскольку все функции зависят от $\rho - \rho_0$. В случае трехмерной неоднородной среды приходится разлагать поле G в спектр и в точке наблюдения, и в точке источника, в связи с чем количество уравнений погружения увеличивается. Усложняет задачу и выполнение двух дополнительных преобразований Фурье (15).

4. Систему уравнений погружения (11) — (14) можно существенно упростить, хотя при этом приближенный метод станет более грубым. Для этого рассмотрим вместо исходного уравнения (5а) еще более приближенное уравнение вида

$$G(x, x_0; q, \rho_0; p) = \frac{\exp(i\sqrt{k^2 - p^2}\,|x - x_0|)}{2i\sqrt{k^2 - q^2}} \exp(iq\rho_0) -$$

$$- \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{L_0}^{L} dx' G_0(x - x', p) \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\sigma \varepsilon(x', \sigma) G(x', x_0; q - \sigma, \rho_0; p). \tag{16}$$

Данному уравнению соответствует ряд (5б), в котором в подынтегральных выражениях принято

$$C_0(x - x_0; q - \sigma_1 - \ldots - \sigma_n) \approx \frac{\exp(i\sqrt{k^2 - q^2}\,|x - x_0|)}{2i\sqrt{k^2 - (q - \sigma_1 - \ldots - \sigma_n)^2}}.$$

В свете приведенного выше обсуждения уравнения (5а) такое дополнительное приближение будет соответствовать более слабому взаимодействию фурье-гармоник поля между собой.

Как и ранее, мы предполагаем выполнение приближенного равенства (7) и при $p=q$ для функции $G(x, x_0; \mathbf{R}, \rho_0; q)$ вместо (6) имеем уравнение

$$G(x, x_0; \mathbf{R}, \rho_0; q) = \exp(i\sqrt{k^2-q^2}\,|x-x_0|)g(\rho_0-\mathbf{R}) - \tag{17}$$
$$-k^2\int_{L_0}^{L} dx'\,G_0(x-x', q)\varepsilon(x', \mathbf{R})G(x', x_0; \mathbf{R}, \rho_0; q),$$

где

$$g(\rho_0-\mathbf{R}) = \frac{1}{2i}\int dq\,\frac{\exp[iq(\rho_0-\mathbf{R})]}{\sqrt{k^2-q^2}}.$$

Тогда для (17) уравнения погружения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial L}G(x, L; \mathbf{R}, \rho_0; q) = i\sqrt{k^2-q^2}\,G(x, L; \mathbf{R}, \rho_0; q) - \tag{18'}$$
$$-k^2(2i\sqrt{k^2-q^2}\,g(\rho_0-\mathbf{R}))^{-1}\varepsilon(L, \mathbf{R})\,G_L(\mathbf{R}, \rho_0; q)\,G(x, L; \mathbf{R}, \rho_0; q),$$
$$G(x, L; \mathbf{R}, \rho_0; q)|_{L=x} = G_x(\mathbf{R}, \rho_0; q);$$

$$\frac{\partial}{\partial L}G_L(\mathbf{R}, \rho_0; q) = 2i\sqrt{k^2-q^2}(G_L(\mathbf{R}, \rho_0; q) - g(\rho_0-\mathbf{R})) - \tag{19}$$
$$-k^2(2i\sqrt{k^2-q^2}\,g(\rho_0-\mathbf{R}))^{-1}\varepsilon(L, \mathbf{R})\,G_L^2(\mathbf{R}, \rho_0; q),$$
$$G_L(\mathbf{R}, \rho_0; q)|_{L=L_0} = g(\rho_0-\mathbf{R}).$$

Поскольку уравнение (19) имеет замкнутый относительно G_L вид, легко выводятся, аналогично тому, как это сделано в [6], соответствующие уравнения погружения для функций, связанных преобразованием Фурье с аналогом коэффициента отражения (в данном случае — это рассеянное поле на границе) и его квадратом модуля. Весьма существенно, что вышеупомянутые уравнения имеют структуру, аналогичную (18), (19), что позволяет применить к ним стандартные методы теории марковских случайных процессов, если среда случайно неоднородна [6], в то время как уравнения (11) — (14) больше подходят для численного анализа.

Качественное сравнение данного приближенного подхода с приближением слоистой среды и адиабатическим проведем на примере одного из уравнений погружения, например, для функции $G(x, L; q, \rho_0)$. В слоистой среде

$$\frac{\partial}{\partial L}G(x, L; q, \rho_0) = i\sqrt{k^2-q^2}\,G(x, L; q, \rho_0) -$$
$$-k^2\exp(-iq\rho_0)\varepsilon(L)\,G_L(q, \rho_0)\,G(x, L; q, \rho_0).$$

Следуя упоминавшемуся выше адиабатическому приближению, в квазислоистой среде это же уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial L}G(x, L; q, \rho_0; \rho) = i\sqrt{k^2-q^2}\,G(x, L; q, \rho_0; \rho) -$$
$$-k^2\exp(-iq\rho_0)\,\varepsilon(L, \rho)\,G_L(q, \rho_0; \rho)\,G(x, L; q, \rho_0; \rho)$$

(ρ входит в аргументы функций как параметр).

В рамках предлагаемого приближенного метода из (18) после преобразования Фурье следует уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, L; q, \rho_0; q) = i\sqrt{k^2 - q^2}\, G(x, L; q, \rho_0; q) -$$

$$-k^2(2i\sqrt{k^2 - q^2})^{-1} \int dR g^{-1}(\rho_0 - R) e^{iqR} \varepsilon(L, R)\, G_L(R, \rho_0; q) G(x, L; R, \rho_0; q),$$

существенно более близкое по своей структуре к соответствующему точному уравнению [6]:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, L; q, \rho_0) = i\sqrt{k^2 - q^2}\, G(x, L; q, \rho_0) -$$

$$- k^2 \int d\rho'\, G(x, L; q, \rho') \varepsilon(L, \rho')\, G_L(\rho', \rho_0).$$

5. В заключение проиллюстрируем на простейшем примере качественные особенности предложенного в работе подхода. Для этого рассмотрим следующую одномерную задачу. Пусть вблизи границы раздела L двух однородных полупространств с волновыми числами k_0 $(x>L)$ и $k=k_0(1+\varepsilon_0)$ $(x<L)$ в точке $x_0<L$ расположен источник плоских волн. Поле во всем пространстве удовлетворяет одномерному интегральному уравнению

$$G(x, x_0) = \exp(ik_0|x - x_0|) + \frac{ik}{2} \int dx' \exp(ik_0|x - x'|) \times$$
$$\times\, \varepsilon(x') G(x', x_0), \tag{20}$$

где

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \theta(L - x).$$

Для спектра поля

$$G(q, x_0) = \int dx G(x, x_0) e^{iqx}$$

уравнение (20) примет следующий вид:

$$G(q, x_0) = -\frac{2ik_0}{q^2 - k_0^2} \exp(iqx_0) + \frac{k_0^2}{q^2 - k_0^2} \frac{1}{2\pi} \int d\sigma \varepsilon(\sigma) G(q - \sigma, x_0). \tag{21}$$

Применение предложенного в работе метода (см. переход от (3а) к (5а) и (6)) позволяет найти приближенное выражение для спектра поля:

$$G(q, x_0; q) = -\frac{2ik_0}{q^2 - k^2} \exp(iqx_0) - \frac{i(k^2 - k_0^2)}{(q + k_0)(q^2 - k^2)} \times$$
$$\times \exp[ik_0(L - x_0)]\, e^{iqL}. \tag{22}$$

Из сравнения (22) с точным результатом

$$G(q, x_0) = -\frac{2ik_0}{q^2 - k^2} \exp(iqx_0) - \frac{2ik_0(k - k_0)}{(q + k_0)(q^2 - k^2)} \exp[ik(L - x_0)]\, e^{iqL}$$

видно, что при $k \sim k_0$ оба выражения совпадают, причем структура в обоих случаях одна и та же. Следовательно, выражение (22) дает правильный набор волн по обе стороны от скачка показателя преломления, т. е. качественно правильно описывает решение и, кроме того, при условии малости величины скачка определяет близкие к истинным значения амплитуд отраженной и преломленной волн.

Возвращаясь к разд. 2 настоящей работы, отметим еще один принципиальный аспект. Предложенный в разд. 2 подход является по сути первым приближением более общего метода, основанного на введении вспомогательного параметра p. Приближение второго порядка можно получить, если точное уравнение (3а) проитерировать один раз и рассмотреть в качестве исходного уравнение с ядром и свободным членом в виде однократно рассеянного поля. Переход к одномерному уравнению для функции $G(x, x_0; \boldsymbol{R}, \rho_0; q)$ полностью подобен вышеизложенному, а соответствующий этому уравнению борновский ряд будет правильно учитывать в каждом члене уже два акта рассеяния. Аналогичным образом строятся приближения и более высокого порядка.

Автор благодарен В. И. Кляцкину за постановку задачи, ценные консультации и постоянное внимание к работе, а также Л. Я. Любавину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 2. С. 159.
2. Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М. // Изв. вузов.. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 9. С. 1149.
3. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
4. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
6. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
7. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. // ДАН СССР. 1980. Т. 250. № 5. С. 1112.
8. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 3. С. 310.
9. Кошель К. В. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 12. С. 1372.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
26 мая 1987 г.

QUASI-LAYERED MEDIUM APPROXIMATION AND IMBEDDING EQUATIONS IN A THREE-DIMENSIONAL WAVE PROPAGATION PROBLEM

A. G. Bugrov

A three-dimensional boundary value problem for the point source field in a layer of the inhomogeneous quasi-layered medium is reduced to an approximate one-dimensional integral equation, which considers the back-scattering effect and non-local field dependence upon inhomogeneity values. An equivalent system of one-dimensional differential equations with initial conditions is derived on the basis of imbedding method. The validity of approximate method and its qualitative special features are discussed.