

УДК 621.371.332.4

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ШВИНГЕРА В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НЕОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ С ШЕРОХОВАТЫМИ ГРАНИЦАМИ

Ф. Г. Басс, А. И. Тимченко

Рассмотрено применение вариационного метода Швингера к решению задач о рассеянии электромагнитного излучения слоем с объемными флуктуациями диэлектрической проницаемости и шероховатыми границами. Найден функционал для интенсивности излучения, вышедшего из слоя. Показано, что использование в качестве пробных функций первого приближения итерационного метода дает достаточно хорошую точность решения и позволяет проводить адекватное сопоставление теоретических расчетов с экспериментом. В качестве примера рассмотрено радиолокационное зондирование травяного покрова, находящегося под слоем снега.

Задачи распространения электромагнитного излучения в случайно-неоднородных слоях, толщины которых велики по сравнению с длиной волны, можно решать с помощью теории переноса.

При произвольном рассеянии и поглощении неоднородных слоев распространение электромагнитных волн в рамках этой теории описывается системой интегродифференциальных уравнений [1–3]. Однако если рассеяние от первичного источника преобладает над обратным процессом, то возможно существенное упрощение задачи [4]. В этом случае система сводится к системе интегральных уравнений.

В значительном количестве реальных физических ситуаций изложенная трактовка процесса рассеяния достаточно адекватно описывает данные эксперимента. К таким ситуациям относятся радиолокационное зондирование в СВЧ диапазоне подстилающей поверхности, покрытой слоем снега, исследования ледников, пресноводных ледяных покровов, наблюдение подповерхностных объектов сквозь сухие песчаные грунты и т. п. [5–8].

Имеющиеся в настоящее время попытки интерпретации экспериментальных данных рассеяния электромагнитных волн слоистыми природными объектами сводятся либо к численному расчету соответствующих характеристик рассеяния [3], либо к получению эмпирических зависимостей для этих характеристик [9]. Такие методы не дают возможности провести анализ вклада отдельных механизмов в процесс рассеяния. Аналитические способы решения системы представлены методом итерации, однако из-за громоздкости выражений в конкретных расчетах приходится ограничиваться лишь одним членом разложения [3]. Для большинства рассматриваемых задач такое приближение оказывается недостаточным.

В то же время весьма мощным способом решения неоднородных линейных уравнений являются вариационные методы. Среди них метод Швингера представляется наиболее подходящим для класса задач, в которых необходимо нахождение значений интенсивности излучения, вышедшего из неоднородного слоя.

Вариационный принцип Швингера весьма эффективно использовался в теории дифракции [10–12] и для решений кинетических уравнений [13]. Настоящая статья посвящена применению принципа Швингера к задаче о рассеянии на слое с объемными флуктуациями диэлектрической проницаемости, ограниченном шероховатыми поверхностями.

В первом разделе построен функционал для интенсивности рассеянного излучения, доказаны его основные свойства. На основе формализма принципа Швингера сформулирован вариационно-итерационный метод решения интегрального уравнения. Во втором разделе приведены решения интегральных уравнений теории переноса, полученные для случая, когда в качестве пробных функций выбирались выражения, вычисленные итерационным методом. В качестве примера рассмотрено обратное рассеяние от слоя, образованного снежным покровом на снежковатой подстилающей поверхности.

1. Основная идея метода Швингера формулируется следующим образом. Пусть имеется функция x , которая удовлетворяет неоднородному, линейному, в частности интегральному, уравнению

$$\langle \hat{K} x \rangle = S. \quad (1)$$

Здесь \hat{K} — линейный оператор, x — заданная функция, а скобки обозначают интегрирование по всем переменным, от которых зависят \hat{K} и x .

Искомая функция z описывается линейным, например интегральным, функционалом

$$z = \langle V, x \rangle, \quad (2)$$

где V — заданная величина.

Введем функцию \tilde{x} , удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\langle \hat{K} \tilde{x} \rangle = V, \quad (3)$$

\hat{K}

\tilde{x} — транспонированный оператор.

Оказывается, что для искомой функции z можно записать функционал

$$J_z [x, \tilde{x}] = \frac{\langle V, x \rangle \langle S, \tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x}, \hat{K} x \rangle}, \quad (4)$$

который удовлетворяет следующим требованиям: а) функционал стационарен относительно независимого варьирования x и \tilde{x} вблизи точных решений, б) экстремум функционала дает точное значение искомой функции z , в) при независимом варьировании по x и \tilde{x} получаются, соответственно, уравнения (2) и (3), а x и \tilde{x} — их решения являются экстремумами функционала.

Рассмотрим применение вариационного принципа Швингера к решению стационарного уравнения переноса. С учетом граничных условий для рассеянной и прошедшей волн на границах раздела и в случае слабого рассеяния внутри слоя задача сводится к системе интегральных уравнений [4].

Индикаторы рассеяния внутри неоднородного слоя в общем случае зависят от ϕ и θ (ϕ — азимутальный, θ — вертикальный углы). Однако в дальнейшем для простоты будем рассматривать эффективную функцию распределения по углам θ , полученную в результате интегрирования полного распределения в азимутальной плоскости [4]. Таким образом, задача сводится к двумерной, что дает возможность упростить дальнейшие вычисления. Обобщения на трехмерный случай легко восстанавливаются из приведенных ниже выражений.

С учетом изложенного для функции распределения интенсивности внутри слоя $J_2(\theta)$ можно записать уравнение [4]

$$J_2(\theta) = \int d\theta' P(\theta, \theta') J_2(\theta') + S(\theta), \quad (5)$$

где

$$P(\theta, \theta') \equiv \int d\theta'' D_2^{(2)}(\theta, \theta'') D_1^{(2)}(\theta', \theta'') \exp \left[-vL \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta'} \right) \right],$$

$$S(\theta) \equiv \int d\theta' D_2^{(2)}(\theta, \theta') \exp \left[-vL \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta'} \right) \right] \int d\theta'' D_1^{(1)}(\theta', \theta'') S_1(\theta'').$$

$D_k^{(i)}$ — вероятность отражения и прохождения излучения на шероховатых границах, верхний индекс $i=1, 2$ обозначает прохождение и отражение, нижний индекс — номер границы, v — коэффициент, учитывающий ослабление излучения за счет поглощения и рассеяния, L — толщина слоя, $S_1(\theta'')$ — функция распределения интенсивности источника в верхней среде.

В большинстве задач рассеяния искомой величиной является интенсивность излучения, вышедшего из слоя и распространяющегося в верхней полуплоскости $J_1(\theta)$:

$$J_1(\theta) = \int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') J_2(\theta'). \quad (6)$$

Чтобы найти для $J_1(\theta)$ стационарный функционал, введем функцию $\tilde{J}_2(\theta, \theta')$, которая определяется уравнением

$$\tilde{J}_2(\theta, \theta') = \int d\theta'' P(\theta, \theta'') \tilde{J}_2(\theta', \theta'') + D_1^{(1)}(\theta, \theta'). \quad (7)$$

Тогда выражение для функционала $L\{J_2, \tilde{J}_2\}$ можно записать в виде

$$L\{J_2, \tilde{J}_2\} = \frac{\int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') J_2(\theta') \int d\theta' S(\theta') \tilde{J}_2(\theta, \theta')}{\int d\theta' J_2(\theta') \tilde{J}_2(\theta, \theta') - \int d\theta' \tilde{J}_2(\theta, \theta') \int d\theta'' P(\theta', \theta'') J_2(\theta'')} . \quad (8)$$

Убедимся, что соотношение (8) удовлетворяет основным свойствам. Для этого умножим уравнение (5) на $\tilde{J}_2(\theta, \theta')$, а (7) — на $J_2(\theta)$, проинтегрируем их и вычтем одно из другого. В результате получим следующие два равенства:

$$\int d\theta' \tilde{J}_2(\theta, \theta') S(\theta') = \int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') J(\theta'); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int d\theta' \tilde{J}_2(\theta, \theta') J_2(\theta') - \int d\theta' \tilde{J}_2(\theta, \theta') \int d\theta'' P(\theta', \theta'') J_2(\theta'') = \\ = \int d\theta' \tilde{J}_2(\theta, \theta') S(\theta'). \end{aligned} \quad (10)$$

Если $J_2(\theta)$ и $\tilde{J}_2(\theta, \theta')$ — точные решения (5) и (7), то (8) сводится к (6). Используя (9), (10), легко показать, что

$$L\{J_2 + \epsilon\varphi, \tilde{J}_2 + \epsilon\tilde{\varphi}\} = J_1[1 + O(\epsilon^2)]. \quad (11)$$

Таким образом, доказательство применимости полученного соотношения (8) в качестве функционала по существу основывается на том, что в (7) используется линейный оператор, транспонированный

к оператору, являющемуся ядром исследуемого интегрального уравнения. В задачах, сформулированных в рамках теории переноса, возможность построения транспонированного оператора обеспечивается выполнением теоремы взаимности для вероятностей рассеяния [14].

Заметим, что можно сформулировать стационарный функционал Швингера непосредственно для функции, определяемой интегральным уравнением второго рода, т. е., например, находить функцию распределения излучения внутри слоя. Для этого по аналогии с (6) запишем

$$J_2(\theta) = \int d\theta' J_2(\theta') \delta(\theta - \theta'), \quad (12)$$

где $\delta(\theta - \theta')$ — дельта-функция. Тогда соответствующий функционал примет вид

$$\begin{aligned} L_1 \{J_2, \tilde{J}_2\} &= J_2(\theta) \int d\theta' S(\theta') \tilde{J}'_2(\theta, \theta') / \left\{ \int d\theta' \tilde{J}'_2(\theta, \theta') J_2(\theta') - \right. \\ &\quad \left. - \int d\theta' \tilde{J}'_2(\theta, \theta') \int d\theta'' P(\theta', \theta'') J_2(\theta'') \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функция $\tilde{J}'_2(\theta, \theta')$ определяется из уравнения

$$\tilde{J}'_2(\theta, \theta') = \int d\theta'' P(\theta, \theta'') \tilde{J}'_2(\theta', \theta'') + \delta(\theta - \theta'). \quad (14)$$

Выражение (13) дает возможность для решения задач рассеяния организовать итерационно-вариационный процесс, т. е., выбирая в качестве пробных функций J_2, \tilde{J}'_2 , найденные с помощью соответствующих функционалов, получать следующие приближения для $J_2(\theta)$. Сходимость этого процесса существенно выше, чем обычного метода итерации.

Функционал для $\tilde{J}'_2(\theta, \theta')$ имеет вид

$$\begin{aligned} L_2 \{\tilde{J}'_2, \tilde{J}'_2\} &= [\tilde{J}'_2(\theta, \theta')]^2 / \left\{ \int d\theta'' \tilde{J}'_2(\theta, \theta'') J'_2(\theta', \theta'') - \right. \\ &\quad \left. - \int d\theta'' J'_2(\theta', \theta'') \int d\theta''' P(\theta'', \theta''') I'_2(\theta''', \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

2. Уравнение Фредгольма второго рода допускает решение методом итерации, которое является особенно эффективным, если перед интегралом имеется малый коэффициент.

Выберем в качестве пробных функций первый член разложения, т. е.

$$J_2(\theta) = S(\theta), \quad \tilde{J}'_2(\theta, \theta') = D_1^{(1)}(\theta, \theta'). \quad (16)$$

Тогда $L \{J_2, \tilde{J}_2\}$ примет вид

$$\begin{aligned} L \{J_2, \tilde{J}_2\} &= \left\{ \int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') S(\theta') \right\}^2 / \left\{ \int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') S(\theta') - \right. \\ &\quad \left. - \int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') \int d\theta'' P(\theta', \theta'') S(\theta'') \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

или, учитя, что в знаменателе (17) первый член больше второго, получаем

$$L \{J_2, \tilde{J}_2\} = \left[\int d\theta' D_1^{(1)}(\theta, \theta') S(\theta') \right] \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{\int d\theta' D_l^{(1)}(\theta, \theta') \int d\theta'' P(\theta, \theta'') S(\theta'')}{\int d\theta' D_l^{(1)}(\theta, \theta') S(\theta')} \right\}^l.$$

В общем случае из (18) после несложных преобразований можно записать

$$L\{J_2, \tilde{J}_2\} = \left[\int d\theta' D_l^{(1)}(\theta, \theta') J_2(\theta') \right] \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{\int d\theta' J_2(\theta, \theta') [S(\theta') - J_2(\theta') + \int d\theta'' P(\theta', \theta'') J_2(\theta'')]}{\int d\theta' S(\theta') J_2(\theta, \theta')} \right\}^l. \quad (19)$$

Таким образом, (18) и (19) представляют собой суммы бесконечных убывающих прогрессий.

Заметим, что если функции сравнения вычисляются с помощью решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода итерационным методом, то первые $N=mn+1$ членов прогрессии совпадают с итерационным решением. Здесь n, m обозначают n -е и m -е приближения для $J_2(\theta)$ и $\tilde{J}_2(\theta, \theta')$. Однако точность нахождения функции распределения излучения, вышедшего из слоя, выше, чем N -е приближение метода итерации, что видно и при конкретных расчетах.

Рассмотрим применение метода Швингера к вычислению углового распределения интенсивности рассеяния от слоя снега, лежащего на шероховатой подстилающей поверхности. Полагаем, что коэффициент отражения от этой поверхности $R=1$, а верхняя граница слоя является полупрозрачной, так как диэлектрическая проницаемость мало поглощающего снега $\epsilon_2=1.6$.

Вид функций, описывающих распределение неровностей на границах, в выражении (18) не конкретизировался, поэтому (8) пригодно для вычисления рассеяния на любых шероховатых границах.

В реальной экспериментальной ситуации диапазон углов, используемых для получения радиолокационного изображения, часто ограничивается интервалом углов $20-60^\circ$, поэтому воспользуемся описанием рассеяния на границах, приведенным в [15, 16] для мелкомасштабных неровностей поверхности. Будем считать, что распределение неровностей верхней и нижней границ раздела описывается гауссовой функцией [15]. Тогда для вероятностей рассеяния отраженной и прошедшей волн $D_k^{(i)}$ от угла падения θ_a и рассеяния θ' можно записать

$$D_k^{(i)} = 4k^4 h^2 l^2 \cos^2 \theta_a \cos^2 \theta' (\alpha_k^i)^2 \exp[-k^2 l^2 (\sin \theta_a - \sin \theta')^2]. \quad (20)$$

Здесь k — волновое число электромагнитной волны; l, h — характеристические длина и высота неровностей; α_k^i — плавная функция углов θ , диэлектрической проницаемости ϵ_2 и поляризации. Для вертикальной поляризации волны и радиолокационного ($\theta_a = -\theta'$) случая $\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}$ имеют вид

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) [\sin^2 \theta (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_2]}{[\epsilon_2 \cos \theta + (\epsilon_2 - \sin^2 \theta)^{1/2}]^2}, \quad (21)$$

$$\alpha_k^{(2)} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) [(\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta)^{1/2} (\epsilon_2 - \sin^2 \theta)^{1/2} + \sqrt{\epsilon_2 \sin^2 \theta}]}{[(\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta] [\epsilon_2 \cos \theta + (\epsilon_2 - \sin^2 \theta)^{1/2}]}.$$

Так как вероятность рассеяния на границах представляет собой плавно меняющиеся функции угла и экспоненциального члена, то при острой функции распределения неровностей поверхности, описываемой

экспоненциальным членом, возможно решение интегралов, входящих в (8), методом Лапласа. В результате после несложных алгебраических преобразований для углового распределения интенсивности излучения, вышедшего из слоя и распространяющегося в верхней полу-плоскости, получим

$$J_1(\theta_a) = D_1^{(1)}(\theta_a) D_1^{(1)}(\theta_c) D_2^{(2)}(\theta_c) \exp \left[-2vL/\cos\theta_a + \frac{4ab}{a+2b} \sin^2\theta_a \right] \times \\ \times \left\{ 1 - D_1^{(2)}(\theta_a) D_2^{(2)}(\theta_c) \exp \left[-2vL/\cos\theta_a + \frac{4ab(a+b)}{(a+2b)(2a+3b)} \sin^2\theta_a \right] \right\}^{-1}, \quad (22)$$

где $a = (kl_1)^2$, $b = (kl_2)^2$, $\theta_c = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_2} \sin \theta_a)$. С использованием (22) были рассчитаны угловые зависимости сечения обратного рассеяния $\sigma = \sigma(\theta_a)$, приведенные на рис. 1. Кривая 1 представляет собой

угловую зависимость σ_1 от одной (нижней) границы раздела с характерными радиусами корреляции $kl_2 = 0,5$ и средним значением высот $kh_2 = 0,46$. Кривые 2, 3 показывают ход $\sigma(\theta_a)$ для снежного слоя с той же подстилающей поверхностью; $kl_1 = 20$, $kh_1 = 0,46$ — для верхней границы и коэффициентами экстинкции $v = 0,05$ (кривая 2) и $v = 0,5$ (кривая 3). Значения l_1 и h_1 для поверхности снега выбирались в соответствии с характерными величинами этих параметров, приведенными в [8].

Полученные расчетные данные имеют такие же угловые особенности, как и экспериментальные зависимости $\sigma(\theta_a)$ в [9] для низкорослого травяного покрова без снежного слоя и покрытого слоем снега с различными коэффициентами поглощения.

Рис. 1.

Графические результаты наглядно демонстрируют особенности

рассеяния от неоднородного слоя: при малых коэффициентах поглощения рассеяние от подстилающей поверхности в присутствии снежного слоя имеет большие значения, чем рассеяние от одной границы. Это обстоятельство обусловлено тем фактом, что σ слоя определяется суммарной шероховатостью двух границ, которая оказывается большей, чем от одной поверхности. Поскольку в данном случае степень шероховатости верхней границы невелика, угловой ход кривой 2 обусловлен в основном степенью шероховатости нижней поверхности, а учет следующих членов разложения в (22), описывающих перерассечение излучения на границах, приводит к большему значению $\sigma(\theta_a)$. Заметим, что при радиолокационном картографировании наличие непоглощающего слоя вещества может способствовать лучшему качеству изображения подстилающих поверхностей по сравнению с наблюдением этих поверхностей без неоднородного слоя. С увеличением коэффициента поглощения снега интенсивность рассеянной волны уменьшается (кривая 3), что соответствует экспериментальным зависимостям $\sigma(\theta_a)$ для влажного снега.

Таким образом, задачу рассеяния электромагнитной волны в поглощающем слое с объемными флуктуациями диэлектрической проницаемости и шероховатыми границами, сформулированную в рамках теории переноса, можно решить с помощью вариационного функционала, аналогичного функционалу, предложенному Швингером для за-

дач дифракции. При подходящем выборе функций сравнения этот метод дает достаточно высокую точность решения и позволяет адекватно описывать данные эксперимента.

Так, при использовании в качестве пробных функций первого приближения итерационного метода были рассчитаны угловые зависимости обратного рассеяния от травяного покрова, находящегося под слоем сухого снега. Их сопоставление с результатами радиолокационного зондирования показало хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых и позволило объяснить такие особенности рассеяния в слое, как увеличение интенсивности излучения, вышедшего из слоя, по сравнению с излучением, приходящим от одной границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Синицын Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 6. С. 746.
2. Tsang L., Kong J. A. // Radio Sci., 1978. V. 13. № 5. P. 763.
3. Fung A. K., Eom H. J. // IEEE Trans. Geosci. 1982. V. GE-20. № 4. P. 528.
4. Тимченко А. И., Синицын Ю. А., Ефимов В. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 7. С. 816.
5. Шестопалов В. П., Спиридовон Ю. Т., Калмыков А. И., Пичугин А. П. // ДАН СССР. 1984. Т. 279. С. 835.
6. Elachi C., Roth L., Schaber C. // IEEE Trans. Geosci. 1984. V. GE-22. P. 383.
7. Onstott R. G., Moore R. K., Gogineni S., Delker C. // IEEE J. Ocean Eng. 1982. V. QE-7. № 1. P. 44.
8. Fung A. K., Stiles W. H., Ulaby F. T. — Int. Conf. Commun., Scattle. — Washington. 1980. June 8—11. P. 49. 6. 1.
9. Ulaby F. T., Stiles W. H., Abdelrazik M. // IEEE Trans. Geosci. 1984. V. GE-22. P. 126.
10. Levine H. // J. Acoust. Soc. Amer. 1950. V. 22. № 1. P. 48.
11. Levine H., Schwinger J. // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 958.
12. Schwinger J. // Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 135.
13. Казлаускас П. А., Левинсон И. Б. // ФТТ. 1967. Т. 9. Вып. 12. С. 3504.
14. Чандraseкар С. Перенос лучистой энергии. — М.: Мир, 1953.
15. Valenzuela // IEEE Trans. Ant. Prop. 1967. V. 15. P. 552.
16. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
27 февраля 1987 г.

APPLICATION OF SCHWINGER VARIATIONAL METHOD TO THE SCATTERING PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY INHOMOGENEOUS LAYERS WITH ROUGH SURFACES

F. G. Bass, A. I. Timchenko

Application has been considered of Schwinger variational method to the scattering problem of electromagnetic waves by a layer with bulk fluctuations of dielectric permittivity and rough boundaries. The functional has been obtained for the field intensity out of the layer. The use of the first-order perturbation results is shown to be exact enough and makes it possible to compare adequately the obtained calculations with experimental data. Radar backscattering from the grassy surface the snow layer is considered as an example.