ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1989*

УДК 621.371.162

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Г. В. Рожнов

В рамках макроскопической электродинамики рассмотрено рассеяние электромагнитных волн произвольным образом гофрированной (в том числе и шероховатой) границей раздела однородных изотропных сред Задача сведена к исследованию стандартного квантово-механического уравнения для T-матрицы рассеяния, итерационное решение которого приводит к модифицированной теории возмущений по амплитуде профиля поверхности h и математически корректно в любом порядке по возмущению. В качестве примера получены выражения для индикатрис рассеяния и коэффициентов отражения и преломления в квадратичном по h приближении, которые удовлетворяют закону сохранения энергии для всех углов падения, при любом состоянии поляризации падающей волны и любом характере спектра шероховатости поверхности

Задача о дифракции электромагнитных (ЭМ) волн на неровной границе раздела однородных сред является классической задачей оптики шероховатых поверхностей. Однако ее удовлетворительное решение до сих пор отсутствует. Так, например, в [1] получены коэффициенты отражения от статистически неровной границы раздела сред, которые можно характеризовать импедансными граничными условиями, в [2] — для «мягких» сред с близкими значениями диэлектрической проницаемости, в [3–5] — для любых сред, в то же время в [3, 4] отсутствуют выражения для перекрестных значений коэффициентов отражения r_{sp} и r_{ps}, а выражения для r_{pp} не согласуются с результатом [5]. В [6, 7] приведен тензор эффективного импеданса, при этом результаты [6] и [7] не совпадают друг с другом. В [8] при итерационном решении уравнений возникают математически некорректные выражения уже в первом порядке по амплитуде шероховатости (см. также обзор [9]).

В настоящей работе дается новая формулировка задачи о дифракции ЭМ волн на произвольным образом гофрированной границе раздела однородных изотропных сред, которая математически корректна в любом порядке по возмущению. Решение приводится в областях, расположенных вне гофрированного слоя, в виде ряда модифицированной теории возмущений, каждый член которого является нелинейной функцией профиля поверхности. В качестве примера получены выражения для индикатрис рассеяния и коэффициентов отражения и преломления в квадратичном приближении по амплитуде шереховатости, которые удовлетворяют закону сохранения энергии при всех углах падения. Проведено сравнение с известными решениями.

1. Обозначения. Пусть на границу раздела $z=h(\rho)$, $\rho = (x, y)$ однородных изотропных сред, характеризуемых диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_1\theta(z-h(\rho))+\varepsilon_2\theta(h(\rho)-z)$, где $\theta(z)$ — единичная ступенчатая функция, из среды 1 на среду 2 (ниже индекс среды $j=1, 2$ однозначно связывается со значением диэлектрической проницаемости $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\omega)$) падает плоская монохроматическая волна. Из общих требований линейности, ковариантности и условия излучения на бесконечности решение для поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega t)$ в областях, расположенных вне гофрированного слоя $h_{\min}\leqslant z\leqslant h_{\max}$, может быть представлено в виде

$$E(r) = C_{0s}\exp(ib_0\rho)[\exp(-i\eta_{10}z) + r_{s0}\exp(i\eta_{10}z)]\hat{s}_0 +$$
$$+ C_{0p}\exp(ib_0\rho)[\hat{p}^0_{1+}\exp(-i\eta_{10}z) + r_{p0}\hat{p}^0_{1-}\exp(i\eta_{10}z)] + \tag{1}$$
$$+ i\int \frac{d^2b}{2\eta_1}\exp(ik_{1+}r)\sum_{\alpha,\beta=s,p}\hat{e}_{1\alpha}E^{11}_{\alpha\beta}(b, b_0)C_{0\beta}$$

при $z > h_{\max}$ и

$$E(r) = (C_{0s}t_{s0}\hat{s}_0 + C_{0p}t_{p0}\hat{p}^0_{2+})\exp[i(b_0\rho - \eta_{20}z)] +$$
$$+ i\int\frac{d^2b}{2\eta_2}\exp(ik_{2-}r)\sum_{\alpha,\beta=s,p}\hat{e}_{2\alpha}E^{21}_{\alpha\beta}(b, b_0)C_{0\beta} \tag{2}$$

— при $z < h_{\min}$, где C_{0s}, C_{0p} — независимые постоянные, определяющие состояние поляризации падающей волны; $\hat{e}_{1s} = \hat{e}_{2s} = \hat{s} \equiv \hat{b}\times\hat{z}$, $\hat{e}_{1p} = \hat{p}_{1-}$, $\hat{e}_{2p} = \hat{p}_{2+}$, $\hat{p}_{j\pm} = (b\hat{z} \pm \eta_j\hat{b})/k_j$ — орты поляризации дифрагированной волны, распространяющейся в направлении волнового вектора $k_{j\pm} = b \pm \eta_j z$; $\hat{s}_0$, $\hat{p}^0_{j\pm}$ — орты поляризации падающей, отраженной и прошедшей волн на плоской границе раздела сред; $k_j = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_j}$, $\eta_j = (k_j^2 - b^2)^{1/2}$, $\eta_{j0} = (k_j^2 - b_0^2)^{1/2}$ (Re, Im η_j, $\eta_{j0} \geqslant 0$) — нормальные составляющие волновых векторов; $r_{\alpha0} = r_\alpha(b_0)$, $t_{\alpha0} = t_\alpha(b_0)$ — коэффициенты отражения и преломления Френеля на плоской границе раздела,

$$r_s(b) = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2},\quad r_p(b) = \frac{\varepsilon_2\eta_1 - \varepsilon_1\eta_2}{\varepsilon_2\eta_1 + \varepsilon_1\eta_2},\quad t_s(b) = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2},$$
$$t_p(b) = \frac{2\eta_1(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{1/2}}{\varepsilon_2\eta_1 + \varepsilon_1\eta_2}. \tag{3}$$

Интегральные слагаемые в (1), (2) задают амплитуду дифрагированной волны. В приближении плоской границы раздела $h(\rho) = 0$ они обращаются в нуль. Неизвестными величинами являются компоненты дифрагированного поля $E^{ij}_{\alpha\beta}(b, b_0)$, которые, как ниже показано (см. (7)), имеют смысл амплитуд перехода падающей волны с состоянием поляризации β и проекцией b_0 волнового вектора на плоскость $z = 0$ из среды с индексом j в дифрагированную волну в среде с индексом i. состоянием поляризации волны α и проекцией волнового вектора на плоскость $z = 0$ — b.

2. Постановка и решение задачи. Уравнения макроскопической электродинамики для поля $E(r)$ запишем в виде

$$(\nabla\times\nabla\times - k_0^2\varepsilon_z)E(r) = v(r)E(r), \tag{4}$$

где $k_0 = \omega/c$ — постоянная распространения в вакууме, $\varepsilon_z = \varepsilon_1\theta(z) + \varepsilon_2\theta(-z)$ — невозмущенная диэлектрическая проницаемость системы,

$$v(r) = k_0^2\Delta\varepsilon(r) = k_0^2(\varepsilon(r) - \varepsilon_z) = (k_2^2 - k_1^2)[\theta(z) - \theta(z - h(\rho))] \tag{5}$$

— возмущение задачи.

Используя решение уравнения

$$(\nabla\times\nabla\times - k_0^2\varepsilon_z)\overleftrightarrow{G}(r, r') = \overleftrightarrow{1}\delta(r - r')$$

для функции Грина $\overleftrightarrow{G}(r,r')$ среды с плоской границей раздела [8, 10, 11], уравнение (4) преобразуется к интегральной форме

$$E(r) = E_0(r) + \int d^3r' \overleftrightarrow{G}(r, r')\, v(r')\, E(r')\,. \qquad (6)$$

Однако это уравнение мало пригодно для решения задачи. Например, при итерационном решении по степеням амплитуды профиля $h(\rho)$, как это делается, например, в [8], из-за сингулярного поведения функции Грина при $r = r'$ и разрывного при $z = 0$ поведения полей, из которых она составлена, возникают математически некорректные выражения уже в линейном по $h(\rho)$ приближении [9].

С целью исключения указанных трудностей выделим в функции Грина сингулярный член в явном виде и преобразуем (6). В результате для компонент дифрагированного поля $E^{ij}_{\alpha\beta}(b, b_0)$ получим решение

$$E^{ij}_{\alpha\beta}(b, b_0) = t^i_\alpha(b)\, t^j_\beta(b_0) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 (X^-_{i\alpha}(b, z_1)\, \overleftrightarrow{T}(b, b_0, z_1, z_2) X^+_{j\beta}(b_0, z_2))\,, \qquad (7)$$

где $\overleftrightarrow{T}$ — оператор рассеяния, удовлетворяющий уравнению

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}(b, b_0, z_1, z_2) &= v(b - b_0, z_1)\, \delta(z_1 - z_2)\, \overleftrightarrow{1} + \\ &+ \int d^2b' dz_3\, v(b - b', z_1)\, \overleftrightarrow{G}_0(b', z_1, z_3)\, \overleftrightarrow{T}(b', b_0, z_3, z_2)\,, \end{aligned} \qquad (8)$$

или в символической операторной записи

$$\overleftrightarrow{T} = v\overleftrightarrow{1} + v\overleftrightarrow{G}_0\overleftrightarrow{T}\,. \qquad (9)$$

Раскрытие аргументов при действии операторов однозначно определяется сравнением (8) и (9). Уравнение (9) имеет стандартный вид уравнений для $\overleftrightarrow{T}$ — матрицы рассеяния квантовой механики, способы решения которого известны [12]. В (7), (8) введены обозначения: $v(q_\perp, z)$ — фурье-образ возмущения $v(r)$:

$$v(q_\perp, z) = \int \frac{d^2\rho}{(2\pi)^2} \exp(-iq_\perp \rho)\, v(r)\,,$$

$\overleftrightarrow{G}_0(b, z_1, z_2)$ — преобразованная несингулярная функция Грина:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{G}_0(b, z_1, z_2) &= \frac{i}{2\eta_1} \sum_{\gamma = s, p} t_\gamma(b)\, [X^+_{2\gamma}(b, z_1)\, X^-_{1\gamma}(b, z_2) \times \\ &\times \theta(z_1 - z_2) + X^+_{1\gamma}(b, z_1)\, X^-_{2\gamma}(b, z_2)\, \theta(z_2 - z_1)]\,. \end{aligned} \qquad (10)$$

Запись (10) дана в диадных обозначениях, $t^i_\alpha(b)$ — коэффициенты преломления Френеля при падении волны из среды с индексом i, при этом $t^1_\alpha(b) = t_\alpha(b)$, $t^2_\alpha(b) = (\eta_2/\eta_1)\, t_\alpha(b)$, где $t_\alpha(b)$ заданы (3).

Функции $X^\pm_{j\gamma}(b, z)$, входящие в (7), (10), являются преобразованными решениями однородного уравнения (4) с нулевой правой частью. Если последние обозначить через $E_{j\gamma}(b, z)$, где индекс $j = 1, 2$ указывает среду, в которой задана падающая волна, $\gamma = s, p$ — состояние ее поляризации, b — проекция ее волнового вектора на плоскость $z = 0$, то

$$X^\pm_{js}(b, z) = E_{js}(b, z)\,, \qquad X^\pm_{jp}(b, z) = \frac{\varepsilon_z}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{1/2}} E_{jz}(b, z) \pm E_{jb}(b, z)\,, \qquad (11)$$

где E_{jz}, E_{jb} — $\hat{z}$- и $\hat{b}$- составляющие решения $E_{jp}(b, z)$ для p-поляризованной волны $E_{jp} = E_{jz} + E_{jb}$.

Записи (7), (10) отвечает выбор нормировки функций $E_{j\gamma}(b, z)$ на единицу при $z = -0$ для $j=1$ и $z=+0$ для $j=2$, т. е.

$$E_{js}(b, 0) = \hat{s}, \quad E_{1p}(b, -0) = \hat{p}_{2+}, \quad E_{2p}(b, +0) = \hat{p}_{1-},$$

при этом для $X^{\pm}_{j\gamma}(b, 0)$ получим

$$X^{\pm}_{js}(b, 0) = \hat{s}, \quad X^{\pm}_{1p}(b, 0) = \frac{b}{k_1}\hat{z} \pm \frac{\eta_2}{k_2}\hat{b}, \quad X^{\pm}_{2p}(b, 0) = \frac{b}{k_2}\hat{z} \mp \frac{\eta_1}{k_1}\hat{b}. \tag{12}$$

В отличие от исходных функций $E_{j\gamma}(b, z)$, которые входят в исходную постановку задачи (6) и разрывны при $z=0$, преобразованные функции $X^{\pm}_{j\gamma}(b, z)$, входящие в решение (7) и преобразованную постановку (8), непрерывны при $z=0$, что непосредственно следует из непрерывности компонент поля E_{js}, E_{jb} и $D_{jz} = \varepsilon_z E_{jz}$, входящих в (11). Поэтому знаковый индекс $\pm$ в аргументе при $z=0$ в (12) опущен.

Базисная система функций с непрерывными на границе $z=0$ компонентами поля использовалась также в работах [11, 13–15]. При этом выбор системы функций заранее фиксировался, уравнения теряли симметрию и ковариантность формы записи, что сильно усложняло и загромождало последующие выкладки. В рассматриваемом подходе выбор базисной системы функций (11) заранее не фиксировался и получен естественным образом в результате преобразования исходной системы уравнений при переходе от (6) к (7), (8). Полученная система базисных полей (11) входит в решение (7) и функцию Грина (10) симметричным образом, а уравнение (8), к решению которого сведена задача, имеет ковариантную форму записи.

В процессе перехода от (4) к (7), (8) не делалось каких-либо предположений о характере рельефа, степени малости или пологости профиля поверхности. Совокупность выражений (7), (8) полностью эквивалентна исходным уравнениям (4), но определяет поле согласно (1), (2) только в области вне гофрированного слоя в отличие от (4), которое определяет поле также и внутри этой области при $h_{\min} < z < h_{\max}$.

Решая (9), например, итерациями

$$\overleftrightarrow{T} = v\overleftrightarrow{1} + v\overleftrightarrow{G}_0 v + v\overleftrightarrow{G}_0 v\overleftrightarrow{G}_0 v + \ldots \tag{13}$$

и подставляя результат в (7), получим формально точное итерационное решение для компонент дифрагированного поля в виде ряда по степеням возмущения диэлектрической проницаемости (5), а не по степеням амплитуды профиля $h(\rho)$, традиционно используемое в случае слабошероховатых поверхностей [1–8, 16–19]. Каждый член ряда (13) является нелинейной функцией h, и учет, например, только первого члена разложения (13) эквивалентен суммированию бесконечной подпоследовательности диаграмм в традиционном подходе.

При выводе из (7), (13) формул для дифрагированного поля в линейном $\sim h$ и квадратичном $\sim h^2$ приближениях по амплитуде шероховатости использовать разложение возмущения (5) по степеням профиля поверхности

$$v(r) = (k_2^2 - k_1^2)\left[h(\rho)\delta(z) - \frac{h^2(\rho)}{2}\frac{d}{dz}\delta(z) + \ldots\right], \tag{14}$$

как это делается, например, в [8, 20], можно только в линейном приближении. При этом существенно, что система базисных функций (11) непрерывна при $z=0$. В квадратичном приближении из-за разрывного поведения производных $dX^{\pm}_{j\gamma}(b, z)/dz$ при $z=0$ в подходе (14) появляются математически некорректные выражения типа произведения функций $\delta(z)\,(d/dz)\,X^{\pm}_{j\gamma}(b, z)$. Правильная процедура, из которой естественным образом следует область применимости разложения решения по степеням h, показана ниже.

3. **Линейное по $h(\rho)$ приближение.** Ограничиваясь в решении для $\overleftrightarrow{T}$ первой итерацией $\sim v$ и в возмущении v линейным слагаемым $\sim h$, из (13), (14) в развернутой записи получим

$$\overleftrightarrow{T}(b, b_0, z_1, z_2) = (k_2^2 - k_1^2)\delta(z_1)\delta(z_2)h_{b-b_0}\overleftrightarrow{1}, \qquad (15)$$

где $h_{q_\perp}$ — фурье-образ профиля

$$h_{q_\perp} = \int \frac{d^2\rho}{(2\pi)^2} \exp(-iq_\perp\rho)h(\rho).$$

Подставляя (15) в (17), в том же приближении получим

$$E_{\alpha\beta}^{ij}(b, b_0) = (k_2^2 - k_1^2)t_\alpha^i(b)t_\beta^j(b_0)\langle X_{i\alpha}^-(b, 0)X_{j\beta}^+(b_0, 0)\rangle h_{b-b_0}. \qquad (16)$$

Выражение (16) совместно с (1), (2) и условием нормировки (12) совпадает с известными решениями в линейном приближении [17–20]. Вычисляя затем плотность потока электромагнитной энергии и усредняя ее по ансамблю шероховатых поверхностей, с учетом

$$\langle h_{q_1} h_{q_2}^*\rangle = \delta(q_1 - q_2)S(q_1), \qquad (17)$$

где $\langle\ldots\rangle$ — среднее по ансамблю, $S(q_\perp)$ — спектральная плотность, для углового спектра рассеянной статистически неровной поверхностью мощности, нормированной на z-компоненту падающей мощности P_{0z}, получим

$$\frac{1}{P_{0z}}\frac{dP}{d\Omega_1} = \frac{k_1^2}{4\eta_1\eta_{10}}|k_2^2 - k_1^2|^2\left\{|t_s|^2\left|(\hat{s}\hat{s}_0)t_{s0}C_{0s} + (\hat{s}\hat{b}_0)\frac{\eta_{20}}{k_2}t_{p0}C_{0p}\right|^2 + |t_p|^2\left|-(\hat{b}\hat{s}_0)\frac{\eta_2}{k_2}t_{s0}C_{0s} + \left(\frac{bb_0}{k_1^2} - \frac{\eta_2\eta_{20}}{k_2^2}(\hat{b}\hat{b}_0)\right)t_{p0}C_{0p}\right|^2\right\}S(b - b_0) \qquad (18)$$

при $z > h_{\max}$ и

$$\frac{1}{P_{0z}}\frac{dP}{d\Omega_2} = \frac{k_2^2}{4\eta_2\eta_{10}}|k_2^2 - k_1^2|^2\left\{\left|\frac{\eta_2}{\eta_1}t_s\right|^2\left|(\hat{s}\hat{s}_0)t_{s0}C_{0s} + (\hat{s}\hat{b}_0)\frac{\eta_{20}}{k_2}t_{p0}C_{0p}\right|^2 + \left|\frac{\eta_2}{\eta_1}t_p\right|^2\left|(\hat{b}\hat{s}_0)\frac{\eta_1}{k_1}t_{s0}C_{0s} + \frac{bb_0 + \eta_1\eta_{20}(\hat{b}\hat{b}_0)}{k_1k_2}t_{p0}C_{0p}\right|^2\right\}S(b - b_0) \qquad (19)$$

при $z < h_{\min}$. Выражение (19) имеет смысл, только если среда 2 недиссипативна и прозрачна, т. е. при $\varepsilon_2 > 0$. В (18), (19) введены обозначения: $t_\alpha = t_\alpha(b)$, $d\Omega_1 = \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$, $d\Omega_2 = \sin\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2$; θ_j — углы рассеяния в среде j, связанные соотношением $k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2$. Постоянные $C_{0\alpha}$ нормированы условием

$$|C_{0s}|^2 + |C_{0p}|^2 = 1. \qquad (20)$$

4. **Квадратичное по $h(\rho)$ приближение.** Подставим итерационное решение (15) для $\overleftrightarrow{T}$-матрицы в решение (7). В полной записи будем иметь

$$E_{\alpha\beta}^{ij}(b, b_0) = t_\alpha^i(b)t_\beta^j(b_0)\left\{\int dz\,v(b - b_0, z)\langle X_{i\alpha}^-(b, z)X_{j\beta}^+(b_0, z)\rangle + \int d^2b' \times \right.$$
$$\left. \times \int dz_1dz_2v(b - b', z_1)v(b' - b_0, z_2)\langle X_{i\alpha}^-(b, z_1)\overleftrightarrow{G}_0(b', z_1, z_2)X_{j\beta}^+(b_0, z_2)\rangle + \ldots\right\}. \qquad (21)$$

Формально область интегрирования по пространственным переменным z включает весь интервал $(-\infty, +\infty)$. Однако фактически она ограничена областью, в которой $v(\boldsymbol{r}) \neq 0$, т. е. $h_{\min} \leqslant z \leqslant h_{\max}$. Характерный масштаб изменения функций $X^{\pm}_{i\gamma}(\boldsymbol{b}, z)$ по z определяется координатной зависимостью полей $E_{j\gamma}(\boldsymbol{b}, z)$, из которых они в соответствии с (11) составлены. Для полей нулевого приближения с плоской границей раздела этим масштабом являются величины η_j^{-1} $(j=1,2)$. Оценивая $|h_{\substack{\min\\ \max}}| \sim \sigma$, где $\sigma = \langle h^2\rangle^{1/2}$ — средняя квадратичная амплитуда шероховатости, при выполнении условий

$$\eta_{j0}\sigma \ll 1, \quad \eta_j\sigma \ll 1, \quad \eta'_j b \ll 1, \tag{22}$$

где $\eta'_j = (k_j^2 - b'^2)^{1/2}$, $j=1,2$, можно считать зависимость функций $X^{\pm}_{j\gamma}(\boldsymbol{b}, z)$ от z в эффективной области интегрирования $|z| \lesssim \sigma$ медленной и разложить их в ряд по степеням z под знаками интегралов в (21). Принимая во внимание равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz z^{n-1} v(\boldsymbol{r}) = (k_2^2 - k_1^2)\frac{h^n(\rho)}{n},$$

в квадратичном по h приближении в первой итерации (21) необходимо произвести разложение полей $X^{\pm}_{j\gamma}(\boldsymbol{b}, z)$ до линейных слагаемых по z, во второй — ограничиться нулевым членом разложения (12). Усредняя результат по ансамблю шероховатых поверхностей, из (1), (2), (17), (21) окончательно получим следующие выражения для коэффициентов отражения $r_{\alpha\beta}$ и преломления $t_{\alpha\beta}$, где индексы $\alpha, \beta = s, p$ указывают состояние поляризации отраженной или преломленной и падающей волн соответственно:

$$r_{ss}(\boldsymbol{b}_0) = r_{s0}\left\{1 - 2\eta_{10}\eta_{20}\sigma^2 - 2\eta_{10}(k_1^2 - k_2^2)\int \frac{d^2b}{2\eta_1} S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0)\left[t_s - \frac{t_p}{k_1k_2}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{s}}_0)^2\right]\right\}; \tag{23}$$

$$r_{pp}(\boldsymbol{b}_0) = r_{p0}\left\{1 - 2\eta_{10}\eta_{20}\sigma^2 - 2\eta_{10}(k_1^2 - k_2^2)\int \frac{d^2b}{2\eta_1} S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0) \times\right.$$
$$\left.\times\left[t_s - \frac{t_p t_{p0}}{2\eta_{10}}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2\eta_{10} - \varepsilon_1\eta_{20})}\left(\frac{\eta_{20}}{k_2^2}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{b}}_0) + \frac{\eta_1 b_0}{k_1^2}\right)(\eta_{20}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{b}}_0) - \eta_2 b_0)\right]\right\}; \tag{24}$$

$$r_{sp}(\boldsymbol{b}_0) = -r_{ps}(\boldsymbol{b}_0) = \frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{2\eta_{10}k_1k_2^2} t_{s0}\, t_{p0}\int \frac{d^2b}{2\eta_1} S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0) t_p(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{s}}_0)[\eta_{20}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{b}}_0) - \eta_2 b_0]; \tag{25}$$

$$t_{ss}(\boldsymbol{b}_0) = t_{s0}\left\{1 + \frac{\sigma^2}{2}(\eta_{10}-\eta_{20})^2 - \frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{2\eta_{10}} t_{s0}\int \frac{d^2b}{2\eta_1} S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0) \times\right.$$
$$\left.\times\left[t_s - \frac{t_p}{k_1k_2}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{s}}_0)^2\right]\right\}; \tag{26}$$

$$t_{pp}(\boldsymbol{b}_0) = t_{p0}\left\{1 + \frac{\sigma^2}{2}(\eta_{10}-\eta_{20})^2 - \frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{2\eta_{10}}\int \frac{d^2b}{2\eta_1} S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0) \times\right.$$
$$\left.\times\left[t_s t_{s0} - \frac{t_p t_{p0}}{k_1^2k_2^2}(\eta_{10}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{b}}_0) - \eta_1 b_0)(\eta_{20}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{b}}^0) - \eta_2 b_0)\right]\right\}; \tag{27}$$

$$t_{sp}(\boldsymbol{b}_0) = \frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{2\eta_{10}k_1k_2^2} t_{s0}\, t_{p0}\int \frac{d^2b}{2\eta_1} S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0) t_p(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{s}}_0)[\eta_{20}(\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{b}}_0) - \eta_1 b_0]; \tag{28}$$

$$t_{ps}(b_0) = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{2\eta_{10} k_1^2 k_2} t_{s0} t_{p0} \int \frac{d^2 b}{2\eta_1} S(b - b_0) t_p(b\hat{s}_0) [\eta_{10}(b\hat{b}_0) - \eta_1 b_0]. \qquad (29)$$

Формулы (23)—(29) носят общий характер и справедливы для любых контактирующих однородных сред, характеризуемых в общем случае комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$, произвольных углах падения и любом характере спектра шероховатой поверхности. Область применимости формул ограничена совокупностью неравенств (22) и условием малости поправочных слагаемых $\sim\sigma$ в (23), (24), (26), (27) по сравнению с единицей. Условия (22) имеют ясный физический смысл: характерный поперечный масштаб шероховатости σ должен быть мал по сравнению с характерным поперечным масштабом неоднородности всех полей как в среде 1, так и в среде 2, как для падающей, так и когерентно и диффузионно отраженной и прошедшей волн, и для всех волн в промежуточном состоянии. Из (22), например, следует более жесткое ограничение $\sigma \ll \delta$ (δ — глубина скин-слоя) на область применимости формул (18) и (23)—(25) в случае отражения волн шероховатой металлической поверхностью, чем традиционно используемое условие Рэлея $\left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\cos\theta_0\right)^2 \ll 1$ [1, 16].

Условие $\sigma \ll \delta$ нарушается в предельном случае сред с идеально отражающей границей раздела ($|\varepsilon_2| \to \infty$), так как в этом случае поле в среде 2 нельзя считать медленно меняющейся функцией поперечной координаты z. Однако выражения для коэффициентов отражения (23)—(25) при $|\varepsilon_2| \to \infty$ сохраняют смысл и переходят в соответствующие предельные формулы работ [21, 22]. При $|\varepsilon_2| \to \infty$ возмущение задачи (5) и, соответственно, каждый член итерационного ряда (13) расходятся, но в формулах квадратичного по h приближения (23)—(25) эти расходимости компенсируют друг друга. Вторые слагаемые в (23), (24) происходят из первой итерации (13), третьи, интегральные, — из второй. В результате поправочные слагаемые по параметру ε_2 к предельным формулам идеально отражающих сред оказываются порядка $k_1/k_2 \sim \delta/\lambda$ и не зависят от отношения σ/δ. Анализ общего случая, не ограниченного условием малости h, выходит за рамки статьи, так как требует анализа процесса кардинальной перестройки итерационного ряда (13) в предельном переходе $|\varepsilon_2| \to \infty$. Таким образом, можно предположить, что, возможно, полученные выше формулы в случае металлических сред имеют более широкую область применимости, чем задаваемую условиями (22) $\sigma \ll \delta$.

В общем случае анизотропных шероховатых поверхностей матрицы коэффициентов отражения $r_{\alpha\beta}$ и преломления $t_{\alpha\beta}$ недиагональны, причем выполняется равенство $r_{sp} = -r_{ps}$, но для коэффициентов преломления t_{sp} и t_{ps} аналогичное равенство не выполняется. Для изотропных шероховатых поверхностей, когда спектральная плотность $S(b - b_0)$ зависит только от расстояния $|b - b_0|$ и не зависит от направления $b - b_0$, перекрестные коэффициенты r_{sp}, r_{ps}, t_{sp}, t_{ps} обращаются в нуль. Таким образом, отличие недиагональных составляющих $r_{\alpha\beta}$ и $t_{\alpha\beta}$ от нуля является мерой анизотропии спектра шероховатости поверхностей [6, 7, 21–23].

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что формулы для углового спектра дифрагированной волны (18), (19) и коэффициентов отражения (23)—(25) и преломления (26)—(29) удовлетворяют закону сохранения энергии

$$x_z^c + x_z^d + y_z^c + y_z^d = 1 \qquad (30)$$

при всех углах падения $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi/2$, любом состоянии поляризации падающей волны и любом характере спектра шероховатой поверхности при условии, если среды 1 и 2 недиссипативны ($\mathrm{Im}\,\varepsilon_1 = \mathrm{Im}\,\varepsilon_2 = 0$). В (30) через x_z^c (y_z^c) и x_z^d (y_z^d) обозначена интегральная доля мощности, распространяющейся в направлении нормали к плоскости $z=0$ в области $z>0$ ($z<0$), соответственно, для когерентной и диффузной составляющих дифрагированной волны:

$$x_z^c = |r_{ss}C_{0s}+r_{sp}C_{0p}|^2+|r_{ps}C_{0s}+r_{pp}C_{0p}|^2,$$

$$y_z^c = \frac{\mathrm{Re}(\eta_{20})}{\eta_{10}}\left\{|t_{ss}C_{0s}+t_{sp}C_{0p}|^2+|t_{ps}C_{0s}+t_{pp}C_{0p}|^2\right\},$$

$$x_z^d = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta_1 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \sin\theta_1\cos\theta_1\left(\frac{1}{P_{0z}}\frac{dP}{d\Omega_1}\right),$$

$$y_z^d = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta_2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_2 \sin\theta_2\frac{\mathrm{Re}(\eta_2)}{k_2}\left(\frac{1}{P_{0z}}\frac{dP}{d\Omega_2}\right),$$

где коэффициенты $C_{0\alpha}$ нормированы условием (20) и угловой спектр $dP/d\Omega_j$ задан (18), (19).

В полной форме (30) закон сохранения энергии выполняется для любых углов падения θ_0, только если среда 2 оптически более плотная, $\varepsilon_2>\varepsilon_1>0$.

Если среда 2 оптически менее плотная, $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$, то (30) выполняется только для углов падения, меньших критического, $0\leqslant\theta_0\leqslant\theta_c=\arcsin(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1/2}$. Для углов падения, бóльших критического, $\theta_c\leqslant\theta_0\leqslant\pi/2$, когерентная компонента поля в среде 2 отсутствует, $y_z^c=0$, а диффузная сохраняется и (30) принимает форму

$$x_z^c+x_z^d+y_z^d=1\,. \tag{31}$$

В случае металлической среды без диссипации $\varepsilon_2<0$ отсутствуют как когерентная, так и диффузная составляющие волн в металле при всех углах падения $0\leqslant\theta_0\leqslant\pi/2$. В результате (30) преобразуется к виду

$$x_z^c+x_z^d=1. \tag{32}$$

Разные формы закона сохранения энергии (30)—(32) приведены для случая сред без диссипации, но выражения для углового спектра (18) и коэффициентов отражения (23)—(25) справедливы и в общем случае диссипативных сред. Для последнего случая закон сохранения энергии принимает следующую форму:

$$x_z^c+x_z^d+A=1\,, \tag{33}$$

где A — поглощательная способность. Прямой расчет A по выделению джоулева тепла в среде требует знания поля не только в области (2), свободной от возмущения диэлектрической проницаемости при $-\infty<z<h_{\min}$, но и в области шероховатого слоя при $h_{\min}\leqslant z\leqslant h(\rho)$. Такой расчет показывает, что (33) выполняется при всех углах падения. Таким образом, полученные формулы для x_z^c, x_z^d позволяют получить выражение для поглощательной способности среды, например, металлического зеркала с шероховатой границей раздела с точностью до квадратичных членов по амплитуде шероховатости $A=1-x_z^c-x_z^d$.

Проведенный выше анализ выполнения закона сохранения энергии указывает на взаимосогласованность формул (18), (19) и (23)—(29) и является обобщением результатов работы [21], где рассмотрен случай идеально отражающих сред.

Проведем сравнение выражений (23)—(29) для коэффициентов отражения и преломления с аналогичными результатами других авторов. В [3, 4] получены выражения для r_{ss} и r_{pp} методом «сшивания» полей на шероховатой границе, при этом только r_{ss} согласуется с (23), а r_{pp} не согласуется с (24). Выражения для r_{sp}, r_{ps}, $t_{\alpha\beta}$ в [3, 4] отсутствуют. В [6, 7] получено выражение для тензора эффективного импеданса с точностью до членов $\sim\sigma^2$. Если от коэффициентов отражения (23)—(25) перейти к импедансу, провести разложение по степеням h и удержать члены $\sim h^2$, то воспроизводится результат работы [6]. В формуле (10) работы [7] следует изменить знак перед последним слагаемым на противоположный. В [5] получены выражения для $r_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\beta}$ в случае одноосно анизотропных однородных сред методом эквивалентных граничных условий. Если в работе [5] среды считать изотропными и привести результаты к форме (23)—(29), то выражения $r_{\alpha\beta}$ и t_{sp}, t_{ps} подтверждают результаты (23)—(25), (28), (29), но t_{ss} и t_{pp} не согласуются с (26), (27). Для подтверждения правильности выражений (26), (27) рассмотрим предельный случай крупномасштабных неровностей $k_1 l \gg 1$, где l — длина корреляции. Поскольку σ фиксировано, то этот случай отвечает пологой шероховатой поверхности со средним наклоном $\sim\sigma/l \ll 1$. Для пологих поверхностей модуляции амплитуды дифрагированной волны малы по сравнению с модуляцией фазы. Поэтому независимо от состояния поляризации прошедшей волны имеем $\langle E\rangle \sim \langle \exp[i(\eta_{20}-\eta_{10})h]\rangle = 1-(\sigma^2/2)(\eta_{20}-\eta_{10})^2$. К этому выражению приводят и формулы (26), (27), если в последних в предельном случае $k_1 l \gg 1$ заменить спектральную плотность $S(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0)$ на $\sigma^2\delta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0)$. Формулы же работы [5] для t_{ss}, t_{pp} приводят к нефизическому результату $t_{\alpha\alpha} = t_{\alpha 0}[1+\sigma^2\eta_{20}(\eta_{10}-\eta_{20})]$.

Выше, в качестве примера, были получены аналитические выражения для коэффициентов трансформации на шероховатой поверхности падающей плоской электромагнитной волны во флуктуационную (18), (19) и когерентную (23) — (29) компоненты дифрагированного поля, которые удовлетворяют закону сохранения энергии для всех углов падения, любом состоянии поляризации и любом характере спектра шероховатой поверхности. Однако основным результатом работы являются выражения (1), (2), (7), (8), которыми задача о дифракции ЭМ волны на неровной границе раздела однородных изотропных сред сведена к известному уравнению для T-матрицы рассеяния квантовой механики, математически корректному в любом порядке по возмущению. Естественное итерационное решение (9) дает решение задачи по степеням возмущения диэлектрической проницаемости (5), а не по степеням амплитуды профиля, при этом каждый член получаемого итерационного ряда является нелинейной функцией амплитуды профиля поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
2. Виноградов А. В., Зорин Н. Н., Кожевников И. В., Якушкин И. Г // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 2124.
3. Антонов В. А., Пшеницын В. И. // Опт. и спектр. 1984. Т. 56. С. 146.
4. Петровский Г. Т., Пшеницын В. И., Антонов В. А. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 290. С. 317.
5. Жук Н. П. // Опт. и спектр. 1986. Т. 61. С. 560.
6. Жук Н. П., Пузенко А. А., Третьяков О. А., Фукс И. М. // ДАН УССР. Сер. А. 1986. № 3. С. 63.
7. Пузенко А. А., Фукс И. М. // Тезисы докл. IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси: Гос. ун-т, 1985. Т. 1. С. 209.
8. Maradudin A. A., Mills D. L. // Phys. Rev. B. 1975. V. 11. P. 1392.
9. Бродский А. М, Урбах М И. // УФН. 1982. Т. 138. С. 413.
10. Mills D. L., Maradudin A. A., Burstein E. // Ann. Phys. 1970. V. 56. P. 504.
11. Bagehi A., Barrera R. G., Rajagopal A. K // Phys Rev. B 1979. V. 20. P. 4824.
12. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969. — 607 с.
13. Бродский А. М., Урбах М. И. // Электрохимия. 1975. Т. 11. С. 905.
14. Hill N. R. // Phys. Rev. B. 1981. V. 24. P. 7112.
15. Кособукин В. А., Самсонов А. М. // ЖТФ. 1984. Т. 54. С. 19.
16. Шмелев А. Б. // УФН. 1972. Т 106. С. 459.
17. Kröger E., Kretschmann E. // Ztsch. Phys. 1970. Bd. 237. S. 1.

18. A g a r w a l G. S. // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. P. 2371.
19. T o i g o F., M a r v i n A., C e l l i V., H i l l N. R. // Phys. Rev. B. 1977. V. 15: P. 5618.
20. M o c h a n W. L., B a r r e r a R. G., F u c h s R. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 5350.
21. Б р ю х о в е ц к и й А. С., Т и г р о в В. М., Ф у к с И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 8. С. 999.
22. Б р ю х о в е ц к и й А. С., Ф у к с И. М. // Тезисы докл. XIV Всесоюзной конф. по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1984. Ч. 2. С. 273.
23. Д а н и л е в и ч С. Б., Ж у к Н. П., Т р е т ь я к о в О. А. // Тезисы докл. XIV Всесоюзной конф. по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1984. Ч. 2. С. 103.

Поступила в редакцию
2 июня 1987 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY ROUGH INTERFACE OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC MEDIA

G. V. Rozhnov

The problem of electromagnetic wave scattering from rough interface of homogeneous isotropic media is reduced to solving the standard quantum mechanical equation for T-matrice of scattering within the framework of macroscopic electrodynamics. Iterational solution of equation for T-matrice of scattering results in modified perturbation theory in terms of amplitude profile surface h and is mathematically correct for every order. As an example, expressions for scattering indicatrices and reflection and transmission coefficients are found out for h quadratic approximation that satisfies the energy conservation law for all incidence angles, incident waves polarization and rough surface spectra.