

УДК 531.12/.13:530.12

ХАОС И СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНСАМБЛЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

О. А. Дружинин, А. С. Михайлов

Исследованы процессы синхронизации и хаотического поведения ансамбля из вероятностных клеточных автоматов. Показано, что поведение ансамбля таких автоматов во времени может быть приближенно описано с помощью точечного отображения с малым мультипликативным внешним гауссовым шумом. Приведены результаты численного моделирования этой системы.

Для моделирования процессов в различных физических, биологических и компьютерных системах в последнее время широко используется метод теории клеточных автоматов (см. [1-7]). Сеть из клеточных автоматов — это набор из связанных между собой элементов, способных менять свои состояния со временем. Состояние отдельного элемента i в момент времени n задается дискретной переменной A_i^n , а состояние всей сети — совокупностью переменных $\{A_i^n\}$. Задать сеть из клеточных автоматов — значит указать правила, определяющие отображение

$$\{A_i^n\} \rightarrow \{A_i^{n+1}\} \quad (1)$$

и позволяющие найти состояние сети в следующий дискретный момент времени $n+1$ по ее состоянию в предыдущий момент времени n . Отображение (1) может быть детерминированным либо иметь вероятностный характер. В последнем случае говорят, что клеточные автоматы являются вероятностными (см. [3-6]).

В статье рассмотрен конкретный пример ансамбля из вероятностных клеточных автоматов, где несмотря на отсутствие детерминированных взаимодействий между элементами осуществляется синхронизация режима всей системы и она совершает сложные (периодические и нерегулярные) колебания.

Пусть состояние отдельного элемента задается переменной A_i^n , принимающей всего два значения. Если $A_i^n = 0$, то элемент находится в состоянии покоя, если же $A_i^n = 1$, то он пребывает в активном состоянии. Определим полную активность ансамбля как величину

$$M_n = \sum_{i=1}^N A_i^n. \quad (2)$$

Правило перехода между состояниями зададим следующим образом. Если элемент i находился в n -й момент времени в состоянии покоя ($A_i^n = 0$), то он перейдет в момент времени $n+1$ в состояние активности ($A_i^{n+1} = 1$) с вероятностью ω^+ , не зависящей от состояния других элементов ансамбля. Если же этот элемент в момент n был в активном состоянии, то вероятность ω^- его перехода в состояние покоя будет зависеть от полной активности ансамбля в n -й момент времени, т. е. $\omega^- = \omega^-(M_n)$. Мы предполагаем, что зависимость $\omega^-(M)$ дается функцией

$$\omega^- = \left[\exp\left(\frac{b-x}{a}\right) + 1 \right]^{-1}, \quad (3)$$

где $x=M/N$, а N — полное число автоматов в рассматриваемом ансамбле.

1. Связь с точечным отображением. Рассмотрим изменение со временем суммарной активности M . Обозначим в качестве $P_n(M)$ вероятность того, что в n -й момент времени система имела активность M , а $W(M|M')$ — вероятность того, что в $n+1$ -й момент времени активность станет равной M при условии, что в n -й момент времени она равнялась M' . По тому, как задан алгоритм переходов, видно, что изменение M со временем — это стационарный марковский случайный процесс. Следовательно, эволюция распределения $P_n(M)$ описывается уравнением

$$P_{n+1}(M) = \sum_{M'=0}^N W(M|M') P_n(M'). \quad (4)$$

При больших числах автоматов в системе ($N \gg 1$) уравнение (4) приближенно может быть записано в виде

$$P_{n+1}(x) = \int_0^1 N W(x|x') P_n(x') dx', \quad x=M/N. \quad (5)$$

Найдем вероятности перехода $W(M|M')$ и $W(x|x')$. Пусть для определенности $M' < M$. За один шаг по времени полное число активных элементов может измениться за счет их перехода в состояние покоя и, кроме того, за счет перехода в состоянии активности тех элементов, которые находились ранее в состоянии покоя. Учитывая два типа вкладов, получаем

$$W(M|M') = \sum_{k=0}^{N-M} (\omega^+)^{M-M'+k} (1-\omega^+)^{N-M-k} \frac{(N-M')!}{(N-k-M)!(M-M'+k)!} \times \\ \times (\omega^-)^k (1-\omega^-)^{M'-k} \frac{M'!}{k!(M'-k)!}. \quad (6)$$

При $N \gg 1$ формула (6) может быть приближенно представлена как

$$W(x|x') = \int_0^{1-x} \frac{dy}{2\pi} [x'(1-x')\omega^+(1-\omega^+)\omega^-(1-\omega^-)]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{N}{2} \left[\frac{(x-x'+y-(1-x')\omega^+)^2}{(1-x')\omega^+(1-\omega^+)} + \frac{(y-x'\omega^-)^2}{x'\omega^-(1-\omega^-)} \right] \right\}. \quad (7)$$

Интеграл в (7) можно взять по методу перевала. Окончательно мы получаем

$$W(x|x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} [(1-x')\omega^+(1-\omega^+)+x'\omega^-(1-\omega^-)]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{N}{2} \frac{(x-[x'+(1-x')\omega^+-\omega^-x'])^2}{\omega^+(1-x')(1-\omega^+)+x'\omega^-(1-\omega^-)} \right\}. \quad (8)$$

Для случая $M' > M$, рассуждая аналогично, нетрудно найти

$$W(M|M') = \sum_{k=0}^M (\omega^-)^{M'-M+k} (1-\omega^-)^{M-k} \frac{M'!}{(M-k)!(M'-M+k)!} \times \\ \times (\omega^+)^k (1-\omega^+)^{N-M'+k} \frac{(N-M')!}{k!(N-M'+k)!}. \quad (9)$$

Переходя в (9) к интегральной записи и вычисляя затем интеграл при $N \gg 1$ приближенно по методу перевала, мы вновь приходим к выражению (8).

Итак, изменение активности M со временем описывается марковским отображением (5) с вероятностью перехода $\tilde{W}(x|x')$, определяемой выражением (8). Нельзя ли представить это вероятностное отображение как точечное отображение с малым внешним гауссовым шумом?

Рассмотрим точечное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) + g(x_n)\xi_n, \quad (10)$$

где ξ_n — случайная некоррелированная по n величина с гауссовым распределением

$$P(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_n^2\right). \quad (11)$$

Обозначим как $P_n(x)$ распределение вероятности для величины x в момент времени n . Поскольку случайные силы ξ_n в разные моменты времени некоррелированы, случайный процесс марковский и мы имеем

$$P_{n+1}(x) = \int \tilde{W}(x|x') P_n(x') dx'. \quad (12)$$

Попытаемся так подобрать функции $f(x)$ и $g(x)$ в (10), чтобы выполнялось равенство

$$N\tilde{W}(x|x') = \tilde{W}(x|x'). \quad (13)$$

Очевидно, что при выполнении условия (13) точечное отображение (10) будет соответствовать найденному выше отображению для суммарной активности ансамбля из N клеточных автоматов.

Найдем функцию $\tilde{W}(x|x')$ при заданных $f(x)$ и $g(x)$ в (10). Величина $\tilde{W}(x|x') dx$ есть вероятность того, что x_{n+1} окажется лежащим в интервале $x < x_{n+1} < x + dx$ при выполнении условия $x_n = x'$. Выразив ξ_n из (10) и обозначив $x_n = x'$, $x_{n+1} = x$, получим

$$\xi = (x - f(x')) / g(x'). \quad (14)$$

Поскольку распределение для ξ нам известно, из (11) и (14) мы находим

$$\tilde{W}(x|x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{g(x')} \exp\left\{-\frac{[x - f(x')]^2}{2g^2(x')}\right\}. \quad (15)$$

Потребовав выполнения равенства (13), получаем

$$f(x) = x + (1-x)\omega^+ - \omega^-(x)x; \quad (16)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} [(1-x)\omega^+(1-\omega^+) + x\omega^-(x)(1-\omega^-(x))]^{1/2}. \quad (17)$$

Как видно из (17), $g(x) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, и поэтому в пределе $N \rightarrow \infty$ вместо вероятностного мы приходим к детерминированному точечному отображению

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (18)$$

с функцией $f(x)$, даваемой выражением (16). Если же число автоматов N велико, но все же конечно, то на это детерминированное отображение накладывается (мультипликативный) малый шум $g(x_n)\xi_n$. Типичный вид точечного отображения, получающегося при выборе в качестве $\omega^-(x)$ функции (3), показан на рис. 1.

Таким образом, при больших N собственный шум, связанный со случайным законом действия отдельного автомата, эффективно эквивалентен для полной активности ансамбля некоторому гауссову внешнему шуму с малой интенсивностью.

2. Численное моделирование. Влияние внешнего шума на детерминированное точечное отображение с бифуркациями удвоения уже исследовалось в литературе (см., например, [8]). В нашем случае, однако, сведение к такому отображению является лишь приближительным. Интересно поэтому провести численное моделирование непосредственно для ансамбля из N вероятностных клеточных автоматов.

При проведении численных экспериментов мы предполагали, что в начальный момент времени ($n=0$) все элементы находятся в состоянии покоя. Моделирование проводилось при различном выборе параметров b , a и ω^+ в формуле (3), а также для разного числа элементов в ансамбле.

Мы наблюдали три качественно различных типа поведения активности системы со временем.

а) Отсутствие синхронизации. С течением времени активность быстро возрастает до некоторого среднего значения и затем испытывает на его фоне лишь малые случайные отклонения (рис. 2а). В этом режиме переходы между состояниями в отдельных элементах независимы друг от друга, т. е. осцилляции отдельных автоматов не синхронизованы между собой. Последовательные точки отображения группируются (рис. 2б) в окрестности стационарной точки детерминированного отображения, получаемого в пределе $N \rightarrow \infty$.

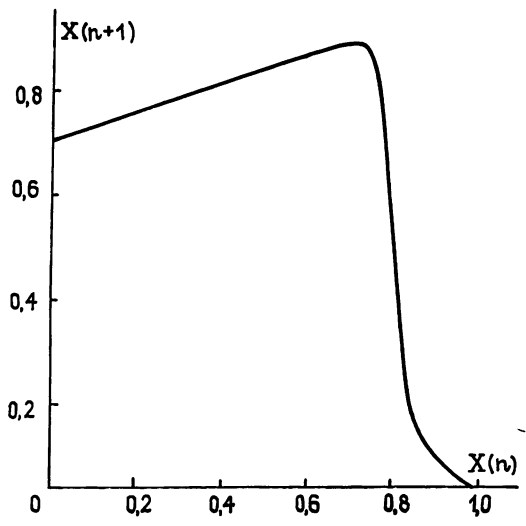


Рис. 1. Вид функции детерминированного точечного отображения. Значения параметров: $\omega^+=0,7$, $b=0,8$, $a=0,01$.

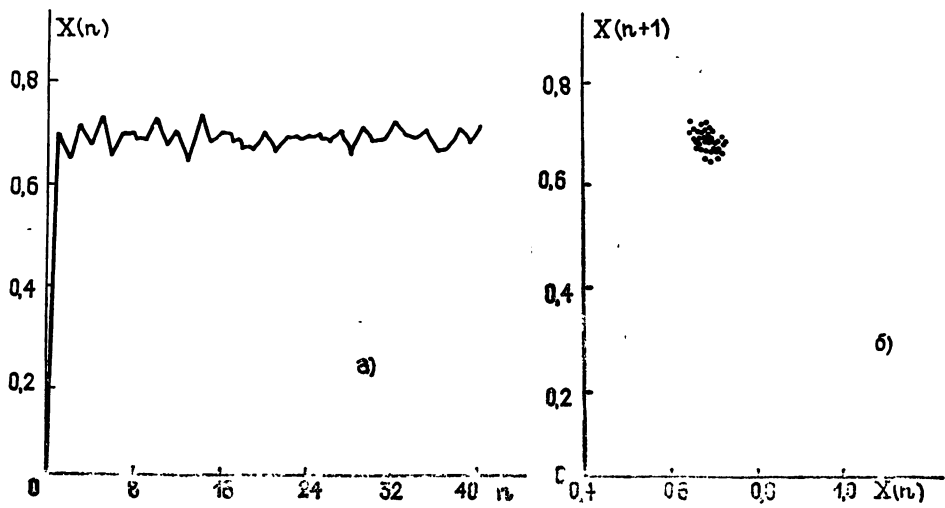


Рис. 2. а) Зависимость средней активности от времени. Точки, соответствующие значениям активности в дискретные моменты времени, для удобства соединены прямыми линиями. Значения параметров: $\omega^+=0,7$, $b=0,8$, $a=0,3$. Число автоматов $N=900$. б) Точечное отображение для средней активности $x_n=M_n/N$. Значения параметров: $\omega^+=0,7$, $b=0,8$, $a=0,3$. Число автоматов $N=900$.

б) *Периодические колебания полной активности.* В этом режиме суммарная активность ансамбля менялась со временем почти периодически (рис. 3а и 4). Это означает, что колебания отдельных автоматов несмотря на их случайный характер оказываются в среднем хорошо синхронизованными. При изменении параметра ω^+ наблюдалась бифуркация удвоения: переход от колебаний с периодом 3 (рис. 3б) к колебаниям с периодом 6 (рис. 4). Случайные отклонения от полной периодичности убывали с ростом числа N элементов в ансамбле; они имели большую величину для режимов с более высокими значениями периода.

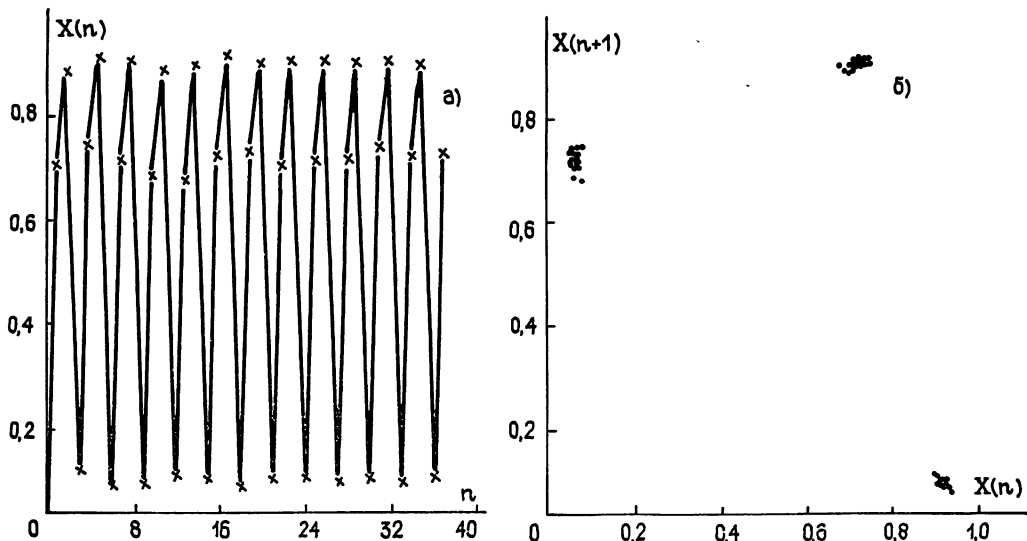


Рис. 3. а) Зависимость средней активности от времени. Значения параметров: $\omega^+=0,7$, $b=0,8$, $a=0,01$. Число автоматов $N=900$. Период 3.

б) Точечное отображение для средней активности. Значения параметров: $\omega^+=0,7$, $b=0,8$, $a=0,01$. Число автоматов $N=900$. Период 3.

в) *Синхронный хаос.* После нескольких бифуркаций удвоения периода изменение со временем активности ансамбля теряло всякую периодичность (рис. 5а). Как видно из рис. 5б, система посещает при этом с течением времени окрестности почти всех точек на кривой детерминированного отображения (рис. 1). Этот режим особенно интересен, поскольку он сочетает в себе синхронизацию и хаос. Колебания отдельных автоматов довольно хорошо синхронизованы, но происходят совершенно нерегулярно по времени.

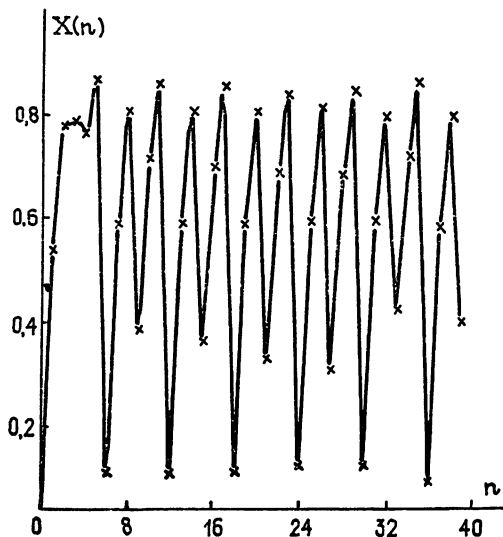


Рис. 4. Зависимость средней активности от времени. Значения параметров: $\omega^+=0,54$, $b=0,8$, $a=0,01$. Число автоматов $N=6400$. Период 6.

В связи с наблюдением хаотического режима необходимо сделать одно замечание. Для ансамбля из конечного числа вероятностных автоматов оказывается трудным провести четкую границу между периодическим режимом с наложенными флуктуациями и хаотическим режимом (также с флуктуациями). Критерий экспоненциального разбегания фазовых траекторий работает не очень надежно, ибо мы не можем осу-

ществить сколь угодно малое возмущение начальных условий (система допускает только дискретный ряд состояний), а отклонение $|x_n - x'_n|$ для двух реализаций довольно быстро оказывается порядка максимально возможного (т. е. порядка единицы). Тем не менее, обычно можно достаточно уверенно определить качественно характер режима по карте последовательных отображений (ср. рис. 3б и 5б).

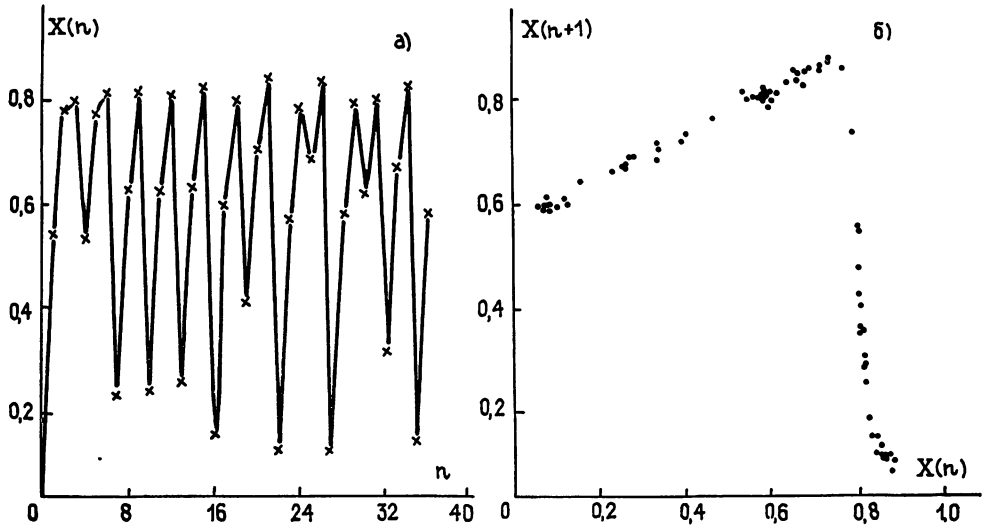


Рис. 5. а) Зависимость средней активности от времени. Значения параметров: $w^+ = 0,53$, $b = 0,8$, $a = 0,01$. Число автоматов $N = 6400$. б) Точное отображение для средней активности. Значения параметров: $w^+ = 0,53$, $b = 0,8$, $a = 0,01$. Число автоматов $N = 6400$.

3. Обсуждение результатов. Данные численного моделирования ансамбля из N автоматов мы сравнивали с результатом, полученным для детерминированного точечного отображения

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = -w^-(x)x + (1-x)w^+ + x, \quad (19)$$

к которому сводится эволюция средней активности ансамбля в пределе $N \rightarrow \infty$. В качестве $w^-(x)$ выбиралась функция (3). Нетрудно убедиться, что в зависимости от значения параметров a , b , w^+ это отображение имеет притягивающую точку, притягивающие циклы с разной кратностью и, наконец, странный аттрактор. Переход от периодических к хаотическому режиму осуществляется путем последовательности бифуркаций удвоения периода.

Поведение ансамбля из N автоматов качественно близко к отображению (19). Отличия связаны с влиянием собственного шума ансамбля из-за случайного характера переходов в отдельных автоматах. Как показано выше, при большом числе N собственный шум можно учесть, добавив к отображению (19) флуктуационный член:

$$x_{n+1} = f(x_n) + g(x_n)\xi_n, \quad (20)$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} [(1-x)w^+(1-w^+) + xw^-(x)(1-w^-(x))]^{1/2}; \quad (21)$$

$$\langle \xi_n \xi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}. \quad (22)$$

Иными словами, *собственный шум ансамбля можно моделировать слабым внешним гауссовым шумом.*

Как известно, для случайного отображения вида (20) переход к хаосу осуществляется после конечного числа бифуркаций удвоения (см. [8]). Аналогичный эффект наблюдался нами при прямом моделировании динамики ансамбля из N автоматов,

В заключение заметим, что при выводе формул (19)—(21) фактический вид функции $\omega^-(x)$ был несуществен. Поэтому указанные результаты имеют широкую применимость и будут справедливы для любых вероятностных автоматов, для которых вероятности переходов ω^+ и ω^- есть какие-то функции от полной активности $x = M/N$.

Авторы благодарны В. А. Твердислову за стимулирующие обсуждения на стадии постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vichniac G. Y. In *Disordered Systems and Biological Organization*. / Eds. E. Bienstock et al. — Berlin, 1986
2. Wolfram S. // *Physica*. 1986. V. 22D. P. 385.
3. Bennett C. H., Grinstein G. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. P. 567.
4. Grinstein G., Jayaprekash C., He Ju. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. P. 311.
5. Domany E., Kinzel W. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 311.
6. Kinzel W. // *Z. Phys.* 1985. V. B58. P. 229.
7. Зыков В. С., Михайлов А. С. // *ДАН СССР*. 1986 Т. 286. С. 241.
8. Deutsch J. M. // *J. Phys. A (GB)*. 1985. V. 48. № 9. P. 1457.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 июня 1987 г.

CHAOS AND SYNCHRONIZATION IN AN ENSEMBLE OF PROBABILISTIC CELLULAR AUTOMATA

O. A. Druzhinin, A. S. Mikhailov

Processes of synchronization and the chaotic behaviour of an ensemble of probabilistic cellular automata are investigated. It is shown, that the time evolution of such an ensemble can be approximately described by a mapping with small multiplicative external Gaussian noise. The results of numeric simulation of this system are given.
