

УДК 533.9.01

**ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ  
В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ**

*С. И. Зайцев*

Определяется поле включающегося постоянного электрического диполя в движущейся с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  изотропной плазме в двух случаях: в отсутствие и при наличии внешнего магнитного поля.

Хорошо известно, что поле элементарного статического диполя в однородной среде спадает с расстоянием пропорционально  $\sim r^{-3}$ ; такое же соотношение справедливо и в движущейся среде без дисперсии (в том числе и при наличии эффекта Черенкова) [1]. Однако в диспергирующей движущейся среде результат может качественно измениться. Рассмотрим этот вопрос на примере холодной бесстолкновительной плазмы, диэлектрическая проницаемость которой в отсутствие движения равна  $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , где  $\omega_p$  — плазменная частота электронов. Известно, что статическое поле в такой среде экранируется на расстоянии дебаевского радиуса от источника, т. е. в неподвижную плазму не проникает. Если же плазма движется как целое со скоростью  $\mathbf{v}$ , то одна из ветвей дисперсионного уравнения, соответствующая волнам пространственного заряда, имеет вид (см., например, [2])

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 = \omega_p^2 \gamma^2, \tag{1}$$

где  $\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$ ,  $c$  — скорость света в вакууме. Уравнение (1) допускает решение с  $\mathbf{k} \neq 0$  при  $\omega = 0$ ; это обстоятельство, вообще говоря, приводит к возможности возбуждения источником соответствующих пространственных возмущений, спадающих медленнее, чем  $\sim r^{-3}$ . Для анализа динамики установления таких возмущений представляется полезным рассмотреть поле диполя, включаемого в некоторый момент времени.

Возьмем точечный источник, электрический дипольный момент которого меняется по закону

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = p\delta(\mathbf{r})U(t), \tag{2}$$

где  $p$  — постоянная величина,  $\delta(\mathbf{r})$  —  $\delta$ -функция Дирака,  $U(t)$  — функция включения, равная нулю при  $t < 0$  и единице при  $t \geq 0$ . Источнику (2) соответствует плотность сторонних токов

$$\mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = p\delta(\mathbf{r})\delta(t). \tag{3}$$

Будем рассматривать поле источника (3) в движущейся с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  однородной электронной бесстолкновительной холодной плазме в двух случаях:

- 1) плазма без внешнего магнитного поля,
- 2) плазма находится в бесконечно сильном магнитном поле  $\mathbf{B}^{\text{ext}}$ , направленном по скорости движения среды (замагниченная плазма).

**1. Плазма без внешнего магнитного поля.** Исходим непосредственно из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ext}}, \tag{3a}$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля,  $\mathbf{D}$  — вектор индукции, учитывающий через интегральное соотношение все индуцированные в плазме токи. Применим к системе уравнений (3а) преобразование Фурье. Выражая из полученной при этом алгебраической системы уравнений фурье-компоненту поля  $\mathbf{E}$  и воспользовавшись далее обратным преобразованием Фурье, после вычислений для электрического поля излучения аналогично [3] можно получить

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \left\{ \nabla(\rho\nabla) - \rho \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} E_1 + \quad (4)$$

$$+ \frac{\omega_p^2}{4\pi^3} \left\{ \beta(\rho\beta) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{c} [\nabla(\rho\beta) + \beta(\rho\nabla)] \frac{\partial}{\partial t} + \nabla(\rho\nabla) \right\} E_2,$$

где  $\beta = \mathbf{v}c^{-1}$ , а величины  $E_1$  и  $E_2$  (с учетом (3)) имеют интегральные представления:

$$E_1 = 2\pi^2 r^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-1} \exp\left(-i\omega t + i \frac{r}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\right) d\omega; \quad (5)$$

$$E_2 = i\pi \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-1} T(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega; \quad (6)$$

$$T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(izk_z + i\rho\sqrt{\omega^2 c^2 - \omega_p^2 c^2 - k_z^2})}{\sqrt{\omega^2 c^2 - \omega_p^2 c^2 - k_z^2} [(\omega - vk_z)^2 - \gamma^2 \omega_p^2]} dk_z. \quad (7)$$

При получении интегралов (5)–(7) использована цилиндрическая система координат  $(z, \rho, \theta)$ , ось  $z$  которой направлена вдоль скорости плазмы. В дальнейших вычислениях будем применять метод перевала [4], позволяющий определить поле излучения в дальней от источника зоне ( $r \gg \lambda$ , где  $\lambda$  — наибольшая длина излучаемой волны).

Для интеграла (5) можно легко найти результат, который обусловлен вкладом перевальной точки:

$$E_1 = 2\pi^2 \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2\pi\omega_p c (c^2 t^2 - r^2)^{-3/2}} \bar{\omega}^{-1} \exp(-i\omega_p \sqrt{t^2 - r^2 c^{-2}}), \quad (8)$$

где  $\bar{\omega}$  — перевальная точка, являющаяся в то же время мгновенной частотой  $\omega_{\text{МГН}}(t)$  решения (8), т. е.

$$\bar{\omega} = \omega_{\text{МГН}}(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\omega_p \sqrt{t^2 - r^2 c^{-2}}) = \omega_p c t (c^2 t^2 - r^2)^{-1/2}. \quad (9)$$

Решение (8) появляется в точке наблюдения в момент

$$t = r/c. \quad (10)$$

При этом отметим, что в рамках метода перевала вклад полюса на нулевой частоте  $\omega=0$  в интеграл (5) по сравнению с (8) экспоненциально мал  $\sim \exp(-\omega_p r c^{-1})$ , т. е. им можно пренебречь.

В результате вычисления интеграла (7) аналогичным способом для  $T(\omega)$  имеем

$$T(\omega) = T_1 + T_2 + T_3, \quad (11)$$

где

$$T_1 = (2\pi\rho)^{1/2} r^{-1} \left[ \left( \omega - \beta \frac{c^2}{r} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \right)^2 - \gamma^2 \omega_p^3 \right]^{-1} \exp\left(i \frac{r}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} - i \frac{\pi}{4}\right) \quad (12)$$

— вклад перевальной точки в (7)\*,

$$T_2 = i\pi \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) [\gamma\omega_p \sqrt{v(\omega_p + \gamma\omega)}]^{-1} \exp\left[i\frac{z}{v}(\omega + \gamma\omega_p) + i\frac{\rho}{v} \sqrt{-(\omega_p + \gamma\omega)^2}\right] \quad (13)$$

— вклад полюса  $k_2 = (\omega + \gamma\omega_p)v^{-1}$  подынтегральной функции в (7),

$$T_3 = -i\pi \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) [\gamma\omega_p \sqrt{v(\omega_p - \gamma\omega)}]^{-1} \exp\left[i\frac{z}{v}(\omega - \gamma\omega_p) + i\frac{\rho}{v} \sqrt{-(\omega_p - \gamma\omega)^2}\right] \quad (14)$$

— вклад полюса  $k_3 = (\omega - \gamma\omega_p)v^{-1}$  подынтегральной функции в (7). Подставляя (11)—(14) в (6), соответственно получим, что  $E_2$  представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$E_2 = E_2^{(1)} + E_2^{(2)} + E_2^{(3)}, \quad (15)$$

где

$$E_2^{(j)} = i\pi \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} T_j \exp(-i\omega t) d\omega, \quad j=1, 2, 3. \quad (16)$$

Интеграл  $E_2^{(1)}$  вычисляется аналогичным с (5) способом, что дает следующее решение при  $t > rc^{-1}$ :

$$E_2^{(1)} = \frac{2\pi^2 \sqrt{2\pi\omega_p c} \exp(-i\pi/4) \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{\omega_p^2 \omega [\rho^2 + (z - vt)^2 \gamma^{-2}]} \exp(-i\omega_p \sqrt{t^2 - r^2 c^{-2}}). \quad (17)$$

Выражения (8) и (17), имеющие одинаковые мгновенные частоты (9), после их подстановки в (4) дадут переходное решение одного вида:

$$E_{\text{пер}} \sim \exp(-i\omega_p \sqrt{t^2 - r^2 c^{-2}}). \quad (18)$$

Переходное решение (18) обусловлено включением источника и, как было отмечено в [4], физически соответствует тому, что в заданную точку наблюдения с течением времени приходят спектральные составляющие сигнала, имеющие все меньшую мгновенную частоту и все меньшую групповую скорость. Ввиду громоздкости выражения коэффициент пропорциональности в (18) не приводится. Здесь отметим лишь одно: при  $t \gg rc^{-1}$  амплитуда переходного решения  $E_{\text{пер}}$  затухает со временем как  $\sim t^{-3/2}$ , т. е. при переходе к установившемуся режиму ( $t \gg rv^{-1}$ ) волна (18) исчезнет.

Вычисление  $E_2^{(2)}$  и  $E_2^{(3)}$  показывает, что перевальной точки нет и вклад в интегралы дает только полюс на частоте  $\omega = 0$  при условии

$$0 < z < vt. \quad (19)$$

В результате имеем следующее: если  $z > vt$ , то  $E_2^{(2)} = E_2^{(3)} = 0$ ; если вы-

\* Данное приближенное (в рамках метода перевала) выражение (12) несправедливо, когда знаменатель  $(\omega - \beta z r^{-1} \gamma \omega^2 - \omega_p^2)^2 - \gamma^2 \omega_p^2$  стремится к нулю, что соответствует совпадению перевальной точки с полюсами подынтегральной функции в (7). В этом случае необходимо пользоваться уточненным представлением [5], приводящим к следующему результату: функция  $T_1$  полюсов по  $\omega$  не имеет, что существенно при дальнейшем интегрировании по  $\omega$ .

полняется (19), то

$$E_2^{(2), (3)} = \mp i \frac{2\pi^3}{\gamma\omega_p} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho v \omega_p}} \exp\left(\pm iz \frac{\gamma\omega_p}{v} - \rho \frac{\omega_p}{v}\right). \quad (20)$$

Учитывая (15), из (20) можно получить

$$E_2^{(2)} + E_2^{(3)} = \frac{2\pi^3}{\gamma\omega_p} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho v \omega_p}} \exp\left(-\rho \frac{\omega_p}{v}\right) \sin\left(z \frac{\gamma\omega_p}{v}\right). \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в (4), имеем еще одну часть поля излучения

$$E_{\text{уст}} = \nabla(\rho \nabla) \left[ \sqrt{\frac{2\pi\omega_p}{\rho v \gamma^2}} \exp\left(-\rho \frac{\omega_p}{v}\right) \sin\left(z \frac{\gamma\omega_p}{v}\right) \right], \quad B_{\text{уст}} = 0, \quad (22)$$

удовлетворяющую дисперсионному соотношению (1). В частности, для продольной ориентации диполя ( $\rho \parallel$  оси  $z$ ) в рассматриваемой цилиндрической системе координат из (22) легко определяются компоненты поля

$$E_z = -\rho\omega_p v^{-1} \sqrt{2\pi\omega_p v^{-1}} \rho^{-3/2} [\omega_p \gamma v^{-1} \rho \sin(z\omega_p \gamma v^{-1})] \exp\left(-\rho \frac{\omega_p}{v}\right), \quad (23)$$

$$E_\rho = -\rho\omega_p v^{-1} \sqrt{2\pi\omega_p v^{-1}} \rho^{-3/2} [(1 + \omega_p \rho v^{-1}) \cos(z\omega_p \gamma v^{-1})] \exp\left(-\rho \frac{\omega_p}{v}\right),$$

$$E_\theta = 0.$$

Таким образом, при  $t \gg rv^{-1}$  в области  $z > 0$  установившееся решение не зависит от времени (т. е. поле статическое) и с ростом  $z$  не спадает, а осциллирует с периодом  $\lambda = 2\pi v (\gamma\omega_p)^{-1}$ . В поперечном по отношению к оси  $z$  направлении оно экспоненциально спадает и имеет эффективную ширину  $\Delta\rho = 2v\omega_p^{-1}$  (на рис. 1 эта область заштрихована).

Остановимся кратко на некоторых энергетических соотношениях. Используя известные феноменологические выражения для плотности потока энергии в среде с пространственной дисперсией (обусловленной в данном случае движением плазмы), непосредственным расчетом нетрудно показать, что при  $t \geq rc^{-1}$  в заданной точке пространства сначала появляется поток энергии, направленный от источника. Затем, при  $t > rv^{-1}$ , по мере перехода к установившемуся режиму этот поток исчезает. Иными словами, возмущение, заполняющее возникающий след (рис. 1), в этой системе отсчета не уносит энергию, за исключением переднего фронта.

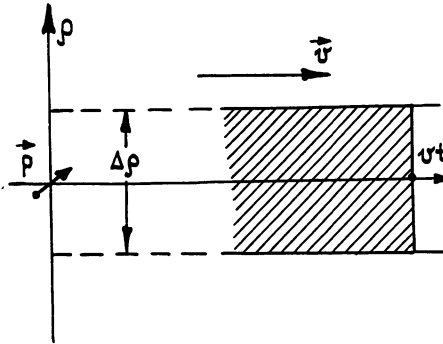


Рис. 1.

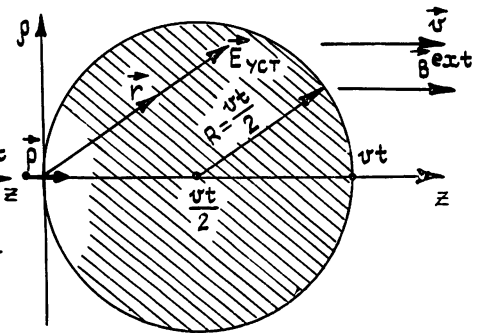


Рис. 2.

В системе отсчета, где плазма неподвижна, полученное установившееся решение (22) удовлетворяет условиям

$$\omega' = \omega_p, \quad \varepsilon' = 1 - \omega_p^2 / (\omega')^2 = 0, \quad (24)$$

$$k'_z = \omega_p / v, \quad k'_\rho = i(\omega_p / v), \quad (k')^2 = (k'_z)^2 + (k'_\rho)^2 = 0$$

(штрихами помечены величины, отнесенные к сопровождающей плазму системе отсчета). Иными словами, след, оставляемый постоянным электрическим диполем, движущимся в неподвижной плазме, представляет собой неоднородную плазменную волну.

**2. Замагниченная плазма.** В этом случае тензор диэлектрической проницаемости плазмы имеет вид, характерный для одноосного кристалла (см., например, [8]):

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{(\omega - vk_z)^2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

В результате аналогичных с предыдущим вычислений поле источника (3) в данном случае тоже можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{пер}} + \mathbf{E}_{\text{уст}}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{E}_{\text{пер}}$  вызвано включением источника, появляется в точках наблюдения в момент времени  $t = rc^{-1}$  и в дальнейшем затухает. Оно было получено и исследовано в работах [7, 8]. Здесь приведем лишь его характерный вид

$$E_{\text{пер}} \sim \exp \left[ i\omega_p \rho \frac{\sqrt{t^2 - r^2 c^{-2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z - vt)^2 \gamma^{-2}}} \right] \quad (27)$$

и закон изменения плавно меняющейся частоты этого решения

$$\omega_{\text{МГН}} = \omega_p \rho \frac{(t - vzc^{-2})(r^2 - zvt)}{\gamma^2 [\rho^2 + (z - vt)^2 \gamma^{-2}]^{3/2} \sqrt{t^2 - r^2 c^{-2}}}. \quad (28)$$

Анализ показывает, что в момент времени, когда  $\omega_{\text{МГН}} = 0$  (а это, как видно из (28), выполняется при условии  $r^2 = zvt$ , т. е. на окружности с радиусом  $(1/2)vt$  и координатами центра  $\rho = 0$ ,  $z = (1/2)vt$ ), в точке наблюдения появляется волна  $\mathbf{E}_{\text{уст}}$  (см. рис. 2). Очевидно, что область существования решения  $\mathbf{E}_{\text{уст}}$ , т. е. область, лежащая внутри расширяющейся окружности, при переходе к установившемуся режиму займет все полупространство  $z > 0$ . Для продольной ориентации диполя ( $\boldsymbol{\rho} \parallel$  оси  $z$ ), когда выражения имеют более простой вид, установившееся поле  $\mathbf{E}_{\text{уст}}$  представляется следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{r}{r^2} p \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{v^2} \cos \theta \cos \left( r \frac{\gamma \omega_p}{v} \right), \quad (29)$$

где  $\theta$  — угол между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и осью  $z$ . Полученное статическое поле (29), вектор  $\mathbf{E}$  которого направлен по  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{B} = 0$ , носит волновой характер и спадает с расстоянием от источника как  $\sim r^{-1}$ . Это решение (29) также принадлежит ветви волн пространственного заряда (1). Из приведенных результатов (22) и (29) видно, что внешнее магнитное поле существенным образом влияет на структуру следа, оставляемого пролетающим диполем в плазме. При этом при включении источника плотность потока энергии в точке наблюдения меняется с течением времени так же, как и в плазме без магнитного поля.

Физический смысл полученных периодических в пространстве и по-

стоянных во времени полей (22) и (29) становится более понятным, если рассмотреть известную (см., например, [2]) одномерную задачу о потоке электронов, пронизывающих плоский заряженный конденсатор. При этом за конденсатором образуются периодические в пространстве сгустки электронов («бунчировка»), которые и будут создавать волновую статическую структуру поля.

В заключение автор выражает благодарность Н. С. Степанову и В. Г. Гавриленко за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский В. М., Столяров С. Н. Эйнштейновский сборник 1978—1979 гг. — М.: Наука, 1983. С. 173.
2. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975.
3. Гавриленко В. Г., Зайцев С. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 3. С. 293.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
5. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. Т. 1.
6. Mc. Kenzie J. F. // J. Appl. Phys. 1967. V. 38 № 13. P. 5249.
7. Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. Вып. 6. С. 1227.
8. Гавриленко В. Г., Зайцев С. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 7. С. 892.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
22 мая 1987 г.

#### THE FIELD OF A CONSTANT ELECTRIC DIPOLE IN A MOVING PLASMA

*S. I. Zaitsev*

The field of the switching constant electric dipole is determined in an isotropic plasma moving with the constant velocity  $v$  in two cases: 1) the plasma has no the external magnetic field; 2) the plasma is placed in the external magnetic field.

---