

расхождение связано с недостаточной медленностью изменения $D(x)$: на характерной длине перепада D изменяется примерно на 15% (уменьшение градиента D повышает точность аналитического решения, но удлиняет время машинного счета). Аналогичная проверка проводилась и для случая $\alpha(x)$.

В заключение отметим, что развитый здесь метод сходен с асимптотическим методом для солитонов, показавшим свою эффективность для весьма широкого класса задач, в том числе неоднородных [7]. Область применения подобных методов для автоволновых процессов тоже, по-видимому, достаточно обширна. Так, представляется вероятной возможность дрейфа ревербератора как целого в плавно неоднородной среде. Вообще, пространственную неоднородность среды можно, по-видимому, рассматривать как один из важных факторов нестационарного распространения автоволновых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schimansky-Geier L, Mikhailov, Ebeling W. // Ann Phys 1983. V 40. С. 277.
2. Фейгельман М. В. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 1951.
3. Gurevich A. V., Leikin S. L., Mints R. G. // Phys. Lett. 1984. V 105A. № 1, 2
4. Engel A. // Phys Lett. 1985. V 113A. № 3. P. 139
5. Гуревич А. В., Минц Р. Г. // УФН. 1984. Т. 142. № 1. С. 61.
6. Соболев Л. С. Уравнения математической физики — М. 1953
7. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. // Physica 3D. 1981. № 1—2. P. 428.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
1 сентября 1987 г.

УДК 538.571.72

К ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОГО ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА

Б. М. Болотовский, В. П. Быков

В 1942 г. Франк рассмотрел эффект Доплера в преломляющей среде [1]. В работе [1] был разобран случай, когда осциллятор (например, электрический диполь, величина которого гармонически зависит от времени) движется в среде с показателем преломления $n > 1$, причем скорость движения v превышает фазовую скорость света c/n . В этом случае, как показал И. Франк, если наблюдатель принимает излученные осциллятором волны, v которых направление распространения составляет с направлением движения осциллятора угол $\theta < \theta_0$, где θ_0 — угол излучения Вавилова—Черенкова ($\cos \theta_0 = cn/v$, v — скорость осциллятора), то частота ω принимаемой волны определяется формулой

$$\omega = \Omega \left(\frac{nv}{c} \cos \theta - 1 \right)^{-1} \quad \left(\theta < \arccos \frac{c}{nv} = \theta_0 \right). \quad (1)$$

В этой формуле Ω — частота колебаний осциллятора. Очевидно, при указанных условиях знаменатель в выражении (1) для частоты волны ω положителен.

Если принимаются волны, направление распространения которых составляет угол $\theta > \theta_0$ с направлением движения осциллятора, то их частота определяется соотношением

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right)^{-1} \quad (\theta > \theta_0). \quad (2)$$

Зависимость (2) характерна для обычного эффекта Доплера, имеющего место в том случае, когда скорость источника не превышает скорость сигнала. Зависимость же (1) имеет место только при сверхсветовой скорости источника и при малых углах наблюдения ($\theta < \theta_0$). Такую зависимость, определяемую формулой (1), Франк назвал аномальным эффектом Доплера.

В работе [1], а также и в последующих работах [2, 3] рассматривалась главным образом спектральная зависимость поля движущегося осциллятора, т. е. отношения, связывающие частоту, волновой вектор и амплитуду излучаемых волн.

В настоящей работе на примере простой и точно решаемой модели рассматриваются пространственно-временные особенности сверхсветового эффекта Доплера.

Рассмотрим среду с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Обе эти величины будем считать вещественными и не зависящими от частоты. Показатель преломления среды n связан с ϵ и μ известным соотношением $n^2 = \epsilon\mu$. Будем предполагать, что $n > 1$. Пусть в этой среде движется равномерно и

прямолинейно точечный дипольный момент. Скорость движения диполя обозначим через v . Эта скорость превосходит фазовую скорость света, т. е.

$$v > c/n.$$

В дальнейшем дисперсией среды пренебрегаем, т. е. считаем, что показатель преломления имеет одно и то же значение для всех частот. Предполагаем также, что дипольный момент пропорционален множителю $e^{i\Omega t}$, т. е. гармонически колеблется с частотой Ω . Тогда выражение для движущегося дипольного момента можно записать в виде

$$P(r, t) = p_0 e^{i\Omega t} \delta(r - vt) = p_0 e^{i\Omega t} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt). \quad (3)$$

Поле движущегося диполя будем описывать вектором Герца, удовлетворяющим уравнению

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Pi(r, t) = 4\pi P(r, t). \quad (4)$$

Электрическое поле $E(r, t)$ и магнитное поле $H(r, t)$ выражаются через Π следующим образом:

$$E(r, t) = \frac{1}{\epsilon} \text{grad div } \Pi - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}, \quad H = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\Pi(r, t) = \int dt' \int dr' c \left(t - t' - n \frac{r - r'}{c}\right) \frac{P(r', t')}{|r - r'|} \delta(t - t'). \quad (6)$$

Подставляя в эту формулу выражение (3) для $P(r, t)$ и воспользовавшись правилами интегрирования дельта-функций, получаем соотношение, которое полностью описывает пространственно-временные особенности излучения диполя при сверхсветовом движении:

$$\Pi(r, t) = \frac{p_0}{\sqrt{(vt - z)^2 - (n^2 v^2 / c^2 - 1)(x^2 + y^2)}} [\exp(i\Omega t_1) + \exp(i\Omega t_2)], \quad (7)$$

при этом предполагается, что линия движения осциллятора совпадает с осью z . Поле отлично от нуля при $z < vt$ и только в той области, где подкоренное выражение положительно. Величины t_1 и t_2 определяются формулами

$$t_{1,2} = \left[t - \frac{nz}{c} \pm \frac{vn}{c} \sqrt{\left(t - \frac{z}{v}\right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{n^2 v^2}{c^2} - 1\right)(x^2 + y^2)} \right] \times \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}\right)^{-1}, \quad (8)$$

причем нетрудно убедиться в том, что t_1 есть убывающая функция времени t , а t_2 — возрастающая функция времени. Как увидим далее, первое слагаемое в (7), пропорциональное $\exp(i\Omega t_1)$, описывает аномальный эффект Доплера, второе, пропорциональное $\exp(i\Omega t_2)$, — нормальный эффект Доплера. Введем формально частоты

$$\omega_{1,2} = \Omega \frac{dt_{1,2}}{dt} = \frac{\Omega}{1 - n^2 v^2 / c^2} \left\{ 1 \mp \frac{nv}{c} \left(t - \frac{z}{v}\right) \left[\left(t - \frac{z}{v}\right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{n^2 v^2}{c^2} - 1\right)(x^2 + y^2) \right]^{-1/2} \right\}. \quad (9)$$

частота имеет физический смысл, только если она слабо зависит от времени, так же как и амплитуда волны (7). Оба эти требования выполняются при $t \rightarrow \infty$. При этом связь между t и $t_{1,2}$ становится особенно простой. При $t \rightarrow \infty$ из (8) имеем

$$t_{1,2} = t(1 \mp nv/c)^{-1}, \quad (10)$$

т. е.

$$t_1 = -t(nv/c - 1)^{-1}, \quad t_2 = t(nv/c + 1)^{-1}. \quad (11)$$

Это означает, что фаза слагаемого $\exp(i\Omega t_1)$ в квадратных скобках (7) убывает со временем, а фаза слагаемого $\exp(i\Omega t_2)$ возрастает со временем. Если сигнал излучен источником в момент времени t_1 , то источник в момент излучения находится в точке $z_1 = vt_1$. Нетрудно видеть, что при движении осциллятора в положительном направлении оси z точка z_1 движется в отрицательном направлении оси z . Таким образом, наблюдатель, следя за источником излучения, находящимся в точке $z_1 = vt_1$, видит, что этот источник перемещается в отрицательном направлении оси z , т. е. против направления движения осциллятора. Соответственно слагаемое $\exp(i\Omega t_1)$ в квадратных скобках в (7) принимает вид

$$\exp(i\Omega t_1) = \exp[-it(\Omega/(nv/c - 1)^{-1})]. \quad (12)$$

Таким образом, это слагаемое описывает волну частоты

$$\omega = \Omega(nv/c - 1)^{-1}, \quad (13)$$

т. е. описывает излучение, связанное с аномальным эффектом Доплера. Отметим еще, что знак минус в показателе экспоненты в (12) связан с обращением хода времени, т. е. с тем уже отмеченным выше обстоятельством, что t_1 есть убывающая функция t . Образно говоря, при аномальном эффекте Доплера чем позже волны излучены диполем, тем раньше они приходят к наблюдателю. Слагаемое с $\exp(i\Omega t_2)$ описывает нормальный эффект Доплера.

Еще лучше обращение хода времени можно почувствовать на следующем, несколько модифицированном по сравнению с предыдущим примере. Пусть дипольный момент изменяется не по закону (3), а по немного более сложному закону

$$P(r, t) = p_0 f(t) e^{i\Omega t} \delta(r - vt), \quad (14)$$

т. е. у-дипольного момента кроме гармонической зависимости от времени имеется также некоторая огибающая $f(t)$. Решение уравнения (4) в этом случае имеет вид

$$P(r, t) = \frac{p_0}{\sqrt{(vt - z)^2 (n^2 v^2 / c^2 - 1) (x^2 + y^2)}} [f(t_1) \exp(i\Omega t_1) + f(t_2) \exp(i\Omega t_2)]. \quad (15)$$

Из этого решения видно, что если, например, функция $f(t)$ нарастает, то нормальный доплеровский сигнал (второе слагаемое в этом выражении) также нарастает, как как t_2 есть возрастающая функция t , аномальный же доплеровский сигнал (первое слагаемое в (15)) убывает, так как t_1 есть убывающая функция t . Отмеченная особенность ясно видна в частном случае, когда $f(t)$ есть некоторый периодически повторяющийся асимметричный сигнал (рис. 1а); в этом случае аномальный доплеровский сигнал очевидным образом инвертирован во времени (рис. 1б), тогда как особенности нормального доплеровского сигнала идут в той же последовательности, что и в $f(t)$ (рис. 1в).

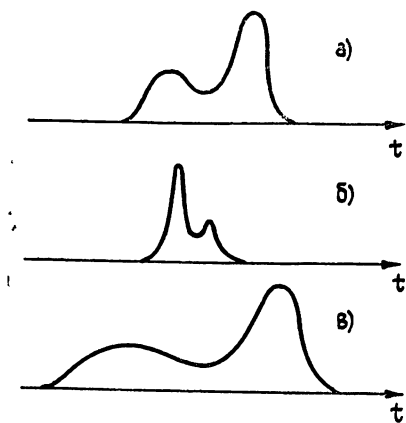


Рис. 1.

Важным вопросом является возможность раздельного наблюдения нормального и аномального эффектов Доплера. Могут ли эти два сигнала быть отделены друг от друга? Ответ на этот вопрос положительный: можно так подобрать закон движения осциллятора, что наблюдатель будет регистрировать только аномальную ветвь эффекта Доплера. Пусть осциллятор движется в положительном направлении оси z со сверхсветовой скоростью v . Наблюдатель находится в плоскости $z=0$ на расстоянии $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ от траектории осциллятора (т. е. от оси z). Отметим на траектории осциллятора точку $z_0 = -\rho \operatorname{ctg} \theta_0$ и предположим, что движение осциллятора происходит только на полубесконечном участке $-\infty < z < z_0$. Тогда наблюдатель сможет принять только аномальную ветвь эффекта Доплера, так как участок траектории $z_0 < z < \infty$ не дает вклада в формирование этой ветви. Если исходить из записи дипольного момента в виде (14), то следует требовать, чтобы было $f(t) = 0$ при $z_0/v < t < \infty$. Тогда наблюдатель сможет принять только аномальную ветвь эффекта Доплера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк И. М. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. С. 3.
2. Гинзбург В. Л., Франк И. М. // ДАН СССР. 1947. Т. 56. № 6. С. 583.
3. Гинзбург В. Л., Эйдемман В. Я. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. Вып. 6. С. 1823.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
16 февраля 1988 г.

Примечание при корректуре. После отсылки нашей статьи в редакцию нам стало известно, что отмеченное нами явление обращения времени при сверхсветовом оптическом эффекте Доплера ранее отмечалось в акустике: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред.* — М.: Гостехиздат, 1953. 2-е изд. С. 319; Коломенский А. А. // *Акуст. журн.* 1979. Т. 25. № 4. С. 547. Это совершенно естественно, поскольку сверхзвуковые источники можно реализовать гораздо легче, чем сверхсветовые.