

симальны при $2\delta=0,075\lambda$, однако они не превышают 3% от амплитуды тока при $l=0$. Для получения большей точности необходимо выполнить условие $\Delta u_2 < 2\delta$. Для результатов, приведенных на рис. 2—4, оно выполнялось при $2\delta=0,15\lambda$; при $2\delta=0,075\lambda$ ошибки не должны превышать 3%. Проверялось также выполнение граничного условия $E_z^{\text{свм}}=0$ на контуре пластин. Отклонение $E_z^{\text{свм}}$ от нуля не превышало 3% $E_z^{\text{пад}}$.

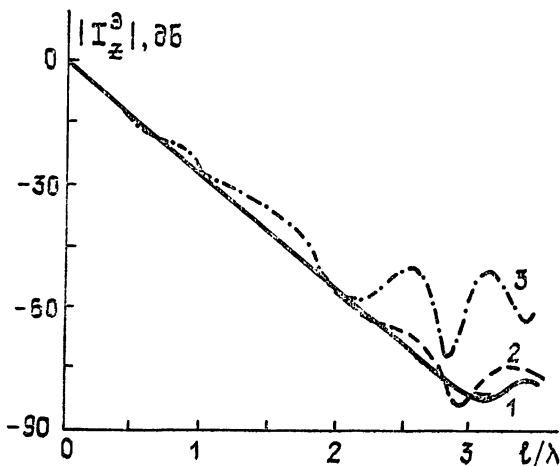


рис. 5.

Применение описанного подхода к анализу линз, состоящих из большого числа пластин, в настоящее время затруднено из-за ограниченных возможностей вычислительной техники. С ее прогрессом эти ограничения могут быть сняты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зелкин Е. Г., Петрова Р. А. Линзовые антенны. — М.: Сов. радио, 1974. — 280 с.
2. Жук М. С., Молочков Ю. Б. Проектирование линзовых, сканирующих, широкодиапазонных антенн и фидерных устройств. — М.: Энергия, 1973. — 440 с.
3. Инспекторов Э. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 10. С. 1099.
4. Инспекторов Э. М. Численный анализ электромагнитного возбуждения проводящих тел. — Минск: Университетское, 1987. — 120 с.

Гомельский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 октября 1987 г.

УДК 517.9

ЭФФЕКТ ДРЕЙФА ВОЛНЫ ПЕРЕПАДА В НЕОДНОРОДНОЙ ВОЗБУДИМОЙ СРЕДЕ

Л. А. Островский, А. Я. Альбер

К настоящему времени достаточно подробно изучены основные типы стационарных автоволн (волна перепада, ведущий центр, ревербератор) в простых моделях однородной возбудимой среды с диффузией. В последние годы все большее внимание уделяется автоволновым процессам в неоднородных средах [1—5]. В частности, рассматривались автоволны (АВ) в плавно неоднородной среде при условии, что решение ведет себя квазистационарным образом, т. е. волна имеет в каждой точке те же параметры и ту же скорость, что и в однородной среде с параметрами, отвечающими данной точке [5]. Однако последовательная теория эволюции АВ в таких средах до сих пор не построена. При этом особенно интересны, на наш взгляд, случаи отклонения от квазистационарности, когда динамика АВ принципиально определяется неоднородностью. Например, как показано ниже, волновой перепад, неподвижный в однородной среде, в неоднородной способен дрейфовать с конечной скоростью, определяемой градиентами параметров среды.

Асимптотический метод, развитый ниже, позволяет описать поведение одномерных локализованных автоволн в среде с плавно меняющейся пространственной неоднородностью. Мы используем его для изучения неподвижного (в нулевом приближении) волнового перепада. Вместе с тем, метод является достаточно общим, что позволяет предполагать возможность его применения к другим видам автоволн.

Рассмотрим одномерное уравнение типа «реакция—диффузия»:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad (1)$$

где нелинейную функцию представим в виде

$$f(u) = \alpha^2 u - u^3.$$

Известно, что при постоянных параметрах $D > 0$ и $\alpha > 0$ уравнение (1) допускает решение в виде неподвижного волнового перепада

$$u^{(0)}(x) = -\alpha \operatorname{th}(\alpha x / \sqrt{2D}). \quad (2)$$

Пусть теперь D и α достаточно плавно меняются в пространстве, так что на характерном масштабе $L \sim \sqrt{D}/\alpha$ решения (2) изменения D и α много меньше самих этих величин, т. е. $L \partial D / \partial x \ll D$ и $L \partial \alpha / \partial x \ll \alpha$. Считая D и α величинами порядка единицы, можно ввести параметр $\varepsilon \ll 1$ как показатель малости градиентов D и α . Обозначая $\xi = \varepsilon x$ и $\tau = \varepsilon^2 t$, будем считать, что $D = D(\xi)$ и $\alpha = \alpha(\xi)$.

Перейдем в систему отсчета, связанную с координатой центра перепада $C(\tau)$, т. е. сделаем замену переменных

$$\tilde{x} = x - \varepsilon^{-1} C(\tau), \quad \tilde{t} = t, \quad (3)$$

причем $C(0) = 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$u_{\tilde{t}} - \varepsilon u_{\tilde{x}} C_{\tilde{\tau}} = D(C(\tilde{\tau}) + \xi) u_{\tilde{x}\tilde{x}} + \alpha^2(C(\tilde{\tau}) + \xi) u - u^3 + \varepsilon D_{\xi}(C(\tilde{\tau}) + \xi) u_{\tilde{x}}. \quad (4)$$

где $\tilde{\xi} = \varepsilon \tilde{x}$, $\tilde{\tau} = \varepsilon^2 \tilde{t}$.

В дальнейших формулах знак \sim для новых координат будем опускать. Решение уравнения (1) с переменными D и α будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$u(x, \tau) = -\alpha(\xi + C(\tau)) \Big|_{\xi=0} \operatorname{th} \kappa + \varepsilon u^{(1)}(x, \tau) + \dots, \quad (5)$$

где обозначено

$$\kappa = \frac{\alpha(C(\tau) + \xi)}{\sqrt{2D(C(\tau) + \xi)}} \Big|_{\xi=0} x. \quad (6)$$

Введем линейный оператор

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [-\alpha^2 + 3(u^{(0)})^2] \quad (7)$$

и рассмотрим его на множестве функций $u(x, \tau)$, не зависящих от быстрого времени t и дважды непрерывно дифференцируемых на интервале $x \in (-\infty, \infty)$. Для таких функций оператор \hat{L} в нулевом порядке по ε запишется следующим образом:

$$\hat{L} = -\frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [-\alpha^2 + 3(u^{(0)})^2]. \quad (8)$$

Тогда в первом порядке по ε получаем из (4) уравнение для $u^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \hat{L} u^{(1)} = & (-D_{\xi}(C) + G_{\tau}) u^{(0)}_{xx} + D(C) [u^{(0)}_{xx} x_{\xi} + u^{(0)}_{xx} x_{\xi} + 2(u^{(0)})_{\xi} x_{\xi}] = \\ = & -\frac{\alpha^2(C)}{ch^3 \kappa} \frac{C_{\tau} + D_{\xi}(C)}{\sqrt{2D(C)}} + D(C) \left[\frac{2 \operatorname{th} \kappa}{ch^2 \kappa} \frac{\alpha(C)}{\sqrt{2D(C)}} \left(\frac{\alpha(C)}{\sqrt{2D(C)}} \right)'_{\xi} x - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha(C)}{ch^2 \kappa} \left(\frac{\alpha(C)}{\sqrt{2D(C)}} \right)'_{\xi} - \frac{2\alpha'_{\xi}(C)}{ch^2 \kappa} \frac{\alpha(C)}{\sqrt{2D(C)}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(записи $D'_{\xi}(C)$ и $\alpha'_{\xi}(C)$ обозначают производные по медленной пространственной переменной в точке $\xi x = C(\tau)$). Добавим сюда условие $\int_{-\infty}^{\infty} (u^{(1)})^2 dx < \infty$; фактически

это означает, что оператор \hat{L} определен на множестве функций $u^{(1)}$, достаточно быстро стремящихся к нулю на бесконечности (т.е. поправка к решению нулевого приближения исчезает при $x \rightarrow \pm\infty$). На множестве $\{u^{(1)}\}$ оператор \hat{L} вполне непрерывен и, значит, к нему применима теорема Фредгольма [6], из которой следует, что задача (9) разрешима, если правая часть (9) ортогональна всем решениям эрмитово-сопряженной задачи.

Так как оператор \hat{L} — самосопряженный, т.е. сопряженное $\{u^{(1)}\}$ семейство совпадает с ним самим, то решением эрмитово-сопряженной задачи является $du^{(0)}/dx$, или

$$u^* = \mu/ch^2 x, \quad (10)$$

где μ — действительное число.

Тогда условие ортогональности записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, \tau) ch^{-2} x dx = 0, \quad (11)$$

где через $\rho(x, \tau)$ обозначена правая часть (9). Опуская элементарные промежуточные выкладки, приведем единственное условие, которому должна удовлетворять скорость дрейфа C_τ , чтобы выполнялось (11):

$$C_\tau = -\frac{3}{4} D'(C) - \frac{5}{2} D(C) \frac{\alpha'(C)}{\alpha(C)}. \quad (12)$$

При этом поправка $u^{(1)}$ к решению (2) находится из соотношения

$$u^{(1)}(x, \tau) = u_x^{(0)} \int (u_x^{(0)})^{-2} \left(\int \rho(x', \tau) u_x^{(0)} dx' \right) dx,$$

откуда легко получается

$$u^{(1)}(x, \tau) = -\frac{\alpha(C)[2\alpha'(C)D(C) - \alpha(C)D'(C)]x^2}{2\sqrt{2D(C)}ch^2 x}. \quad (13)$$

Координата $C(\tau)$ фронта перепада в неподвижной системе отсчета определяется согласно (12) неявным соотношением

$$\tau = -\int \frac{dC}{(3/4)D'(C) + (5/2)D(C)[\alpha'(C)/\alpha(C)]}. \quad (14)$$

Итак, неоднородность среды приводит к движению перепада со скоростью, определяемой уравнением (12).

Из вида (12) ясно, что в неоднородной среде, описываемой уравнением (1), могут возникать области, в которые стягиваются «неподвижные» перепады. Эти области соответствуют устойчивым нулям правой части уравнения (12).

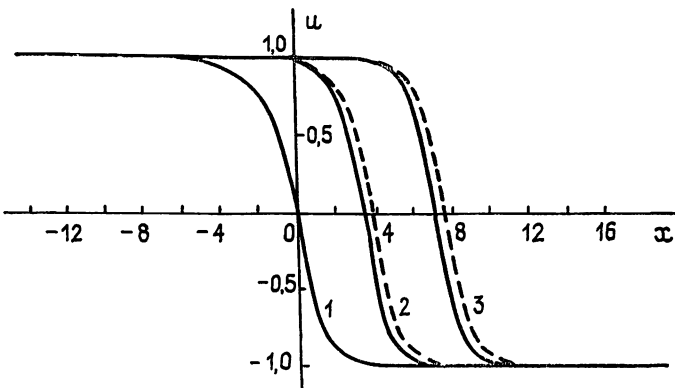


Рис. 1. Результаты численного решения уравнения (1) при $\alpha=1$, $D=1+0,04x$ (сплошные линии) и соответствующего аналитического решения (штриховые линии).
1) $t=0$; 2) $t=127,5$; 3) $t=255$.

Для проверки правильности развитой теории уравнение (1) решалось численно на ЭВМ ЕС-1055 вариационно-разностным методом для различных линейных зависимостей параметров D и α от координаты. Результаты одного из расчетов приведены на рис. 1. Для сравнения пунктиром изображено решение, полученное аналитически. Налицо хорошее согласие аналитических и численных результатов. Их небольшое

расхождение связано с недостаточной медленностью изменения $D(x)$: на характерной длине перепада D изменяется примерно на 15% (уменьшение градиента D повышает точность аналитического решения, но удлиняет время машинного счета). Аналогичная проверка проводилась и для случая $\alpha(x)$.

В заключение отметим, что развитый здесь метод сходен с асимптотическим методом для солитонов, показавшим свою эффективность для весьма широкого класса задач, в том числе неоднородных [7]. Область применения подобных методов для автоволновых процессов тоже, по-видимому, достаточно обширна. Так, представляется вероятной возможность дрейфа ревербератора как целого в плавно неоднородной среде. Вообще, пространственную неоднородность среды можно, по-видимому, рассматривать как один из важных факторов нестационарного распространения автоволновых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schimansky-Geier L, Mikhailov, Ebeling W. // Ann Phys 1983. V 40. С. 277.
2. Фейгельман М. В. // ЖЭТФ. 1983 Т. 85. С. 1951.
3. Gurevich A. V., Leikin S. L., Mints R. G. // Phys. Lett. 1984. V 105A. № 1, 2
4. Engel A. // Phys Lett. 1985 V 113A № 3 P. 139
5. Гуревич А. В., Минц Р. Г. // УФН. 1984. Т. 142. № 1. С. 61.
6. Соболев Л. С. Уравнения математической физики — М. 1953
7. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. // Physica 3D. 1981. № 1—2. P. 428.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
1 сентября 1987 г.

УДК 538.571.72

К ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОГО ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА

Б. М. Болотовский, В. П. Быков

В 1942 г. Франк рассмотрел эффект Доплера в преломляющей среде [1]. В работе [1] был разобран случай, когда осциллятор (например, электрический диполь, величина которого гармонически зависит от времени) движется в среде с показателем преломления $n > 1$, причем скорость движения v превышает фазовую скорость света c/n . В этом случае, как показал И. Франк, если наблюдатель принимает излученные осциллятором волны, v которых направление распространения составляет с направлением движения осциллятора угол $\theta < \theta_0$, где θ_0 — угол излучения Вавилова—Черенкова ($\cos \theta_0 = cn/v$, v — скорость осциллятора), то частота ω принимаемой волны определяется формулой

$$\omega = \Omega \left(\frac{nv}{c} \cos \theta - 1 \right)^{-1} \quad \left(\theta < \arccos \frac{c}{nv} = \theta_0 \right). \quad (1)$$

В этой формуле Ω — частота колебаний осциллятора. Очевидно, при указанных условиях знаменатель в выражении (1) для частоты волны ω положителен.

Если принимаются волны, направление распространения которых составляет угол $\theta > \theta_0$ с направлением движения осциллятора, то их частота определяется соотношением

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{nv}{c} \cos \theta \right)^{-1} \quad (\theta > \theta_0). \quad (2)$$

Зависимость (2) характерна для обычного эффекта Доплера, имеющего место в том случае, когда скорость источника не превышает скорость сигнала. Зависимость же (1) имеет место только при сверхсветовой скорости источника и при малых углах наблюдения ($\theta < \theta_0$). Такую зависимость, определяемую формулой (1), Франк назвал аномальным эффектом Доплера.

В работе [1], а также и в последующих работах [2, 3] рассматривалась главным образом спектральная зависимость поля движущегося осциллятора, т. е. отношения, связывающие частоту, волновой вектор и амплитуду излучаемых волн.

В настоящей работе на примере простой и точно решаемой модели рассматриваются пространственно-временные особенности сверхсветового эффекта Доплера.

Рассмотрим среду с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Обе эти величины будем считать вещественными и не зависящими от частоты. Показатель преломления среды n связан с ϵ и μ известным соотношением $n^2 = \epsilon\mu$. Будем предполагать, что $n > 1$. Пусть в этой среде движется равномерно и